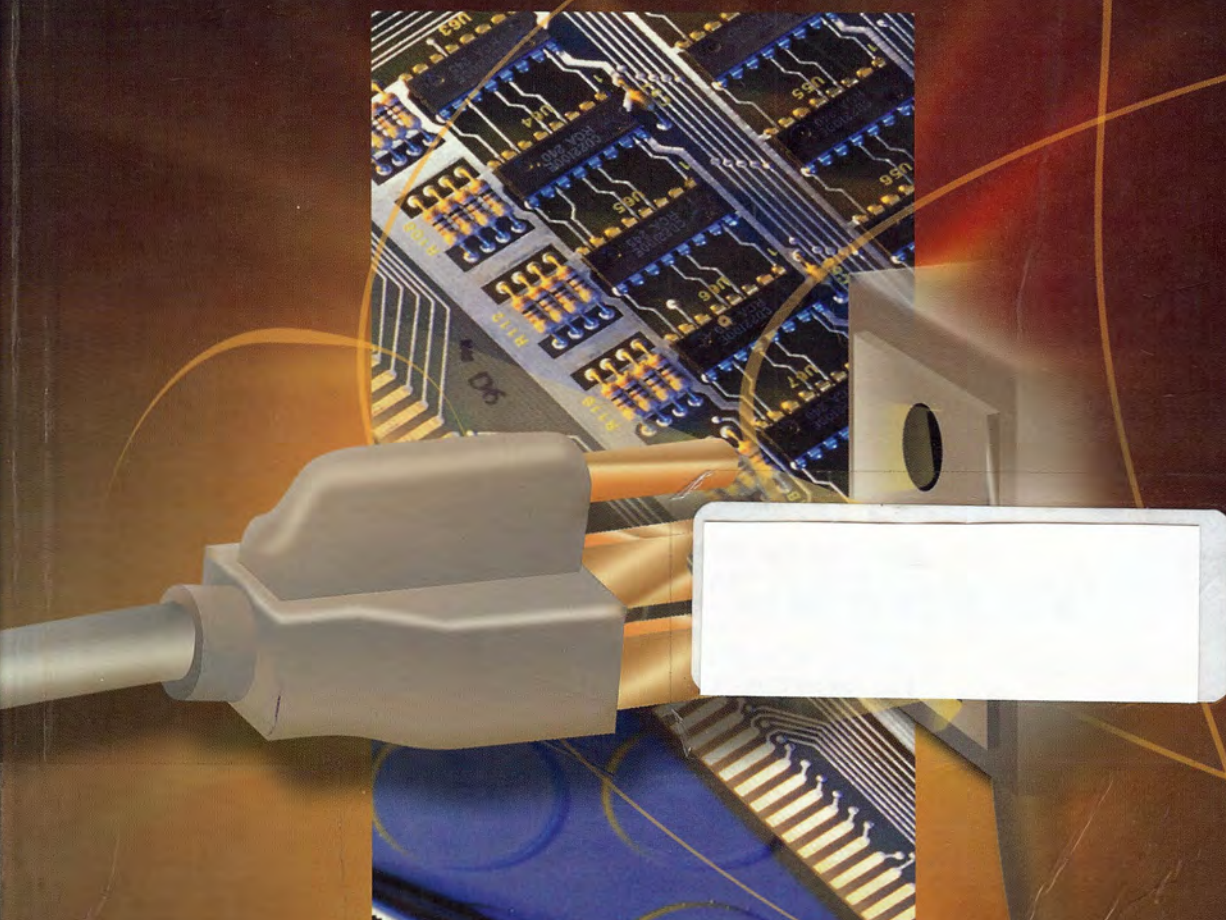
PRINCIPIOS DE ELECTRICIDAD Y ELECTRONICA I

Antonio Hermosa Donate



Alfaomega
BOIXAREU EDITORES
marcombo

Principios de electricidad y electrónica I

Principios de electricidad y electrónica I

Antonio Hermosa Donate

Alfaomega BOIXAREU EDITORES marcombo

ISBN 84-267-1153-7, edición original publicada por
Marcombo, S.A., Barcelona, España

Pitágoras 1139, Col. Del Valle 03100, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial
Registro No. 2317

Internet: **http://www.alfaomega.com.mx**
Email: **ventas@alfaomega.com.mx**

ISBN 970-15-0489-5

Edición autorizada para venta en México, Colombia, Ecuador, Perú, Bolivia, Venezuela, Chile, Centroamérica, Estados Unidos y el Caribe.

Impreso en México - Printed in Mexico

A lo que mejor me ha salido en mi vida,
a pesar de que me parece haber dedicado
poca atención, en parte por mi obsesiva vocación
por las ciencias, el arte de enseñar, ...

Vane *y* ***Maty,*** *una obra casi perfecta.*

Índice general

Introducción

La materia que se expone en esta obra constituye los principios fundamentales de la electricidad y proporciona una introducción a la electrónica. En general, puede ser de utilidad para todo aquel interesado en iniciarse en las bases de la electricidad, tanto con fines eléctricos como electrónicos.

En este primer tomo de la serie se explican los principios de la electricidad y que también lo son de la electrónica, tales como: corriente, tensión, resistencia, leyes de Ohm, Kirchhoff, Thévenin, etc.

La materia se expone con un nivel técnico básico-medio, procurando que sea lo máximo didáctica posible y con un enfoque práctico.

A continuación se detalla un breve resumen del contenido por capítulos:

1º) Se explican los principios fundamentales de la electricidad; cargas eléctricas, conceptos de corriente y tensión eléctrica, ley de Colulomb, fuerza electromotriz (f.e.m.), conceptos sobre corriente continua y alterna, etc.

2º) Se introducen los conceptos y composición del circuito eléctrico, efecto térmico, magnético y químico de la corriente eléctrica, medidas de las magnitudes: intensidad y voltaje, etc.

3º) Se dedica todo el capítulo al tema de la resistencia eléctrica; concepto de resistividad, cálculos prácticos de resistividad en conductores, densidad de corriente, fusibles, variación de la resistencia con la temperatura, conductancia, la resistencia como componente eléctrico-electrónico, montajes serie-paralelo, etcétera.

4º) Se introduce la ley de Ohm, que es la base del análisis y cálculo de los circuitos eléctricos y electrónicos. Se explica el concepto de caída de tensión y se hacen diversos ejercicios de aplicación de la ley de Ohm.

5º) Se explican y aplican, mediante diversos ejercicios, los métodos de análisis y cálculo de circuitos más importantes en electricidad y electrónica: Kirchhoff, Maxwell, Thévenin y Millman. Se expone el desarrollo de diversos ejercicios de ejemplo.

6º) Se basa en el tema de la potencia eléctrica. Se explican y se hacen diversos ejercicios prácticos sobre potencia, efectos caloríficos de la corriente (ley de Joule), consumo de energía, etc.

En un primer apéndice se exponen las bases matemáticas que resultan, casi siempre, necesarias en el análisis de circuitos en electricidad y electrónica.

En el segundo apéndice se detallan una relación de conceptos y fórmulas muy importantes que conviene tener siempre presentes.

Al final de cada capítulo se proponen una serie de ejercicios, cuyos resultados se exponen después de una forma desarrollada al final del libro en último capítulo.

Por sus características, esta obra resulta especialmente interesante para los estudios de formación técnica profesional, así como para la introducción a la electricidad-electrónica para profesionales de otras especialidades y, en general para todo aquel interesado en las bases de la electricidad, tanto con fines eléctricos como electrónicos.

EL AUTOR

Capítulo 1

Principios fundamentales de la electricidad

1.1 INTRODUCCIÓN

Se puede decir que la *electrónica* es una extensión de la electricidad, aparecida como consecuencia de los avances en la evolución de la ciencia eléctrica. En electrónica se trabaja también con todos los principios eléctricos, ya que cualquier sistema electrónico, por simple o complicado que sea, se alimenta con energía eléctrica (pilas, red eléctrica, etc.) y, por tanto, ya existe un proceso eléctrico. Asimismo, todos los componentes electrónicos operan basándose en la circulación de las partículas del átomo denominadas *electrones* (*corriente* eléctrica); o sea, bajo los principios de la electricidad. Y por ello en la técnica electrónica se emplean también las magnitudes fundamentales de la electricidad, así como sus unidades: amperios, voltios, ohmios, vatios, etc.

1.2 PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA ELECTRICIDAD

La electricidad es un tipo de energía, y como tal, capaz de realizar trabajo. Ejemplo de sus aplicaciones prácticas son los motores, calefactores, lámparas, etc. Igual que ocurre con la fuerza magnética, no es visible, pero su existencia queda claramente manifiesta por los efectos que produce.

La fuerza de origen magnético (generada por cuerpos magnetizados) actúa sobre ciertos tipos de materiales (los denominados ferromagnéticos), los cuales pueden ser influidos por dicha fuerza. Del mismo modo, también existe fuerza de origen eléctrico, generada por cuerpos con carga eléctrica, invisible, pero también capaz de producir una fuerza sobre otros cuerpos. Un experimento característico de esto es el movimiento de atracción (o repulsión) entre dos esferas cargadas eléctricamente.

Es fácil encontrarnos en algún momento con estas manifestaciones físicas de la electricidad: al peinarnos (a veces el pelo se pone de punta, siguiendo al peine), al salir del coche y cerrar la puerta puede darnos una especie de calambre, al caminar sobre moqueta pueden aparecer chispas por los pies, etc.; todo esto se debe a la acción de la electricidad, originada, en estos casos, por la fricción entre dos cuerpos diferentes que pasan de ser neutros a tener una cierta carga de electricidad.

1.2.1 Moléculas, átomos y electrones

Los principios eléctricos se encuentran en todos los tipos de materia, ya que ésta se compone de moléculas que a su vez están formadas por átomos, y en éstos se encuentra la partícula fundamental de la electricidad: el ***electrón***, que es la *mínima expresión de carga eléctrica* (negativa), y lo que da lugar a la corriente eléctrica y a todas sus manifestaciones.

Todos los sistemas eléctricos y electrónicos, desde el más elemental, como puede ser una bombilla, hasta el microprocesador más avanzado, se fundamentan en la circulación controlada de electrones.

La molécula es la mínima parte que se puede obtener de una cierta materia sin que desaparezcan sus propiedades químicas, o sea, sigue conservando las mismas características del tipo de materia. Por ejemplo, si pudiéramos partir un grano de sal por la mitad, y cada trocito lo volviéramos a partir por la mitad, y así sucesivamente, se llegaría a obtener una minúscula parte de materia que ya no sería sal; obtendríamos átomos de cloro y sodio, que es la composición química de la sal común (cloruro de sodio) (fig. 1.1).

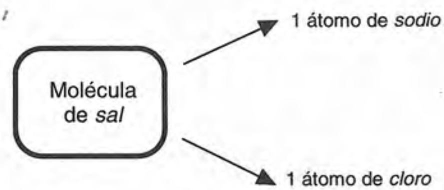


Figura 1.1. *Molécula de sal (cloruro de sodio).*

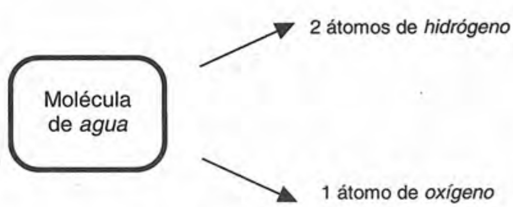


Figura 1.2. *La molécula de agua se compone de dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno.*

Y en el caso del agua, la mínima cantidad que aún sigue siendo agua –molécula de agua– se compone de dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno (figura 1.2); la partición de la molécula daría lugar a átomos.

Existen materiales que se componen exclusivamente por átomos de un mismo tipo; son los denominados *cuerpos simples,* y constituyen los elementos químicos: oro, hierro, carbono, oxígeno, etc.

Los materiales cuya composición se basa en diferentes tipos de átomos, se denominan *cuerpos compuestos;* un ejemplo sencillo y fundamental es el agua, que está formada de dos tipos distintos de átomos (hidrógeno y oxígeno) (figura 1.2).

Toda la materia se compone de átomos, desde un pequeña porción de hierro hasta el cuerpo humano, o sea, que las personas también poseemos electrones; y bajo este principio, se puede decir que somos también susceptibles a las manifestaciones eléctricas. De hecho, muchos aparatos médicos se basan en la detección de ciertas manifestaciones eléctricas que se encuentran en el cuerpo. Por ejemplo, en el cerebro existen unas señales eléctricas características (ondas alfa, beta, etc.) que, detectadas y analizadas por medio del electroencefalógrafo, permiten detectar ciertas enfermedades como, por ejemplo, la epilepsia (figura 1.3).

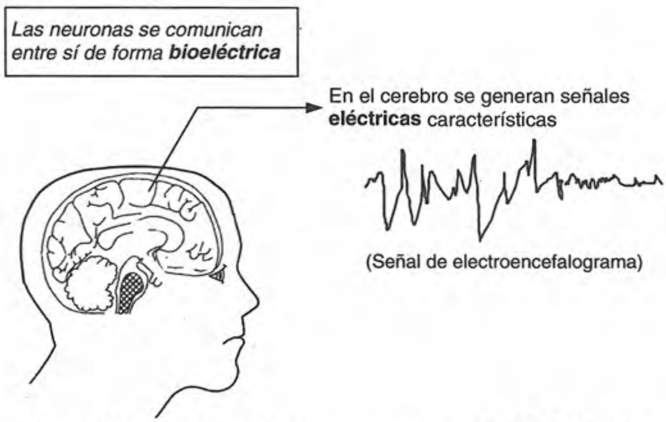


***Figura 1.3.** En el cerebro se encuentra actividad eléctrica.*

En el cerebro las neuronas se comunican entre sí de una manera bioeléctrica, o sea, de forma química y eléctrica a la vez. El núcleo de la célula envía unos impulsos eléctricos que, a través de unas fibras nerviosas, llega a los neurotrasmisores (sustancia bioquímica); algunos neurotransmisores excitan sus células objetivo para que se produzca un impulso eléctrico, y otros lo que hacen es evitar que se produzca el impulso eléctrico.

Asimismo, por medio del electrocardiógrafo se pueden detectar y analizar ciertos impulsos eléctricos que se dan en el corazón, para detectar posibles anormalidades.

1.3 ESTRUCTURA DEL ÁTOMO

Los átomos se componen, fundamentalmente, de dos partes: *núcleo* y *corteza*. En el núcleo se encuentra la carga eléctrica denominada **positiva** (+), compuesta por unas partículas llamadas **protones,** junto con otras que se conocen por **neutrones.** La carga positiva es debida a los protones; se puede decir que un protón es la mínima expresión de una carga eléctrica positiva. Los neutrones son partículas que, como su nombre indica, son neutras; no poseen carga eléctrica, pero su masa es del mismo orden que la del protón.

La corteza se compone de cargas eléctricas denominadas **negativas** (–), compuesta por **electrones;** son las partículas más importantes desde el punto de vista eléctrico-electrónico.

En la figura 1.4 se muestra una representación típica de la estructura de un átomo. Como se observa, los electrones giran alrededor del núcleo en diferentes capas (órbitas), a semejanza del sistema planetario del universo.

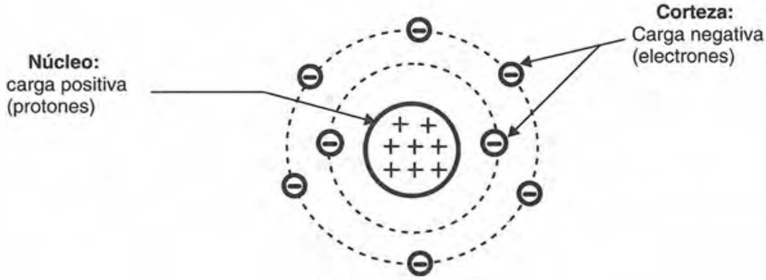


Figura 1.4. *Estructura de un átomo (hidrógeno); básicamente, se compone del núcleo (carga positiva) y de la corteza (carga negativa).*

De hecho, esta estructura del átomo se ha descrito en un modo simplista, puesto que se han detectado otras partículas (por ejemplo, los *quarks*), pero sigue siendo válida desde el punto de vista eléctrico. Así, resumiendo:

Protón: partícula elemental; *mínima expresión de carga eléctrica positiva (+)*
Electrón: partícula elemental; *mínima expresión de carga eléctrica negativa (–)*

La cantidad de carga eléctrica de ambas partículas es la misma, y en todos los átomos en estado normal existe un número de protones igual al de electrones. Por ello, los átomos en su estado normal son eléctricamente neutros, pues tienen la misma cantidad de carga positiva que negativa.

Las denominaciones de positivo (+) y negativo (–) se emplean para indicar los dos tipos de estados eléctricos (o polaridades) diferentes que existen, de forma semejante a como ocurre con los polos sur y norte de los imanes. Cada uno de estos estados eléctricos posee cierta energía, y se sabe que entre dos cuerpos con carga eléctrica pueden manifestarse ciertas fuerzas.

Un principio fundamental en electricidad es el siguiente:

Entre cargas eléctricas del mismo signo se produce una fuerza de repulsión
Entre cargas eléctricas de diferente signo se produce una fuerza de atracción

Esto queda ilustrado en la figura 1.5.

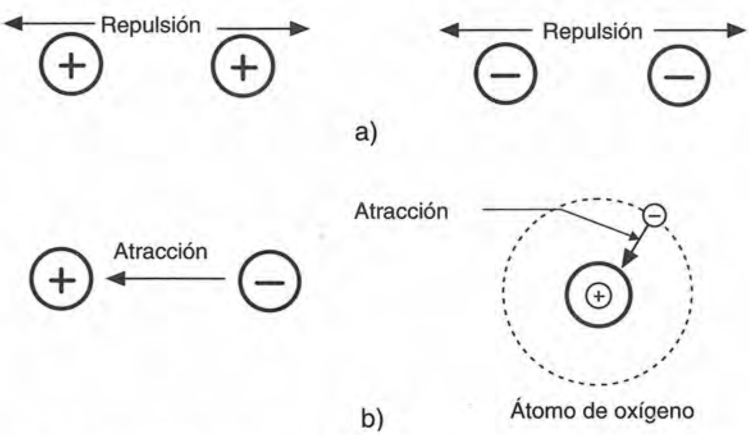


***Figura 1.5.** Principio fundamental de atracción y repulsión de cargas eléctricas.*

Puesto que los protones y los electrones son cargas eléctricas de diferente signo, aunque sea en su mínima expresión, dichas fuerzas ya se ejercen entre tales partículas. Por ello, en los electrones se ejerce una fuerza de atracción hacia el núcleo; pero no llegan a él, y siguen su trayectoria orbital, debido a otra fuerza que origina el movimiento a gran velocidad.

Así, los átomos, y la materia en general en su estado normal, son de carácter eléctricamente neutro, pues tienen tantas cargas eléctricas negativas (electrones) como positivas (protones).

Cuanto más separados del núcleo se encuentran los electrones, menos fuerza de atracción reciben éstos hacia el núcleo. Son precisamente los electrones de la última capa los causantes de todos los fenómenos eléctricos; al ser los electrones con menos atracción hacia el núcleo, son los que, mediante algún tipo de energía externa, pueden dejar el átomo, dando lugar al concepto de: *cargas eléctricas móviles* o ***electrones libres,*** y son los causantes de que se produzca la *corriente eléctrica* (fig. 1.6).

A ciertas temperaturas, en los electrones periféricos ya puede existir un cierto movimiento incontrolado, errático, de átomo en átomo; son los electrones libres.

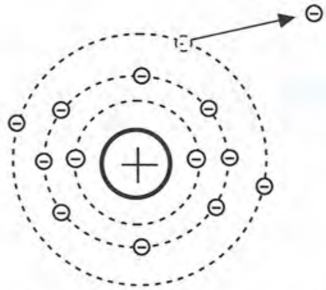


Figura 1.6. Electrón que, por alguna circunstancia, deja de formar parte del átomo.

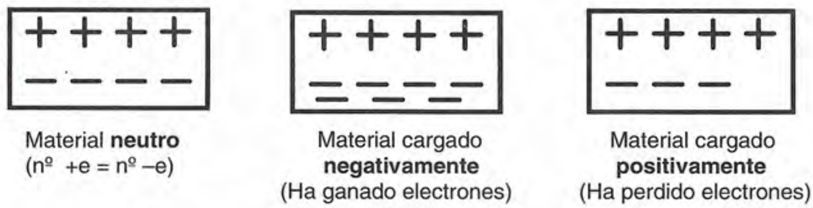


Figura 1.7. Representación de un cuerpo neutro y otros cargados eléctricamente.

La corriente eléctrica y la existencia de cuerpos con carga eléctrica se debe a que, por algún tipo de fuerza externa, los átomos pierden electrones libres, apareciendo así cuerpos con carga positiva y carga negativa (fig. 1.7).

Cuerpo cargado positivamente: sus átomos han perdido electrones, han dejado de ser neutros; tienen menos electrones que protones.
Cuerpo cargado negativamente: sus átomos han recibido electrones, han dejado de ser neutros; tienen más electrones que protones.

Son los electrones periféricos los que caracterizan a los materiales como buenos o malos conductores, según la facilidad con que éstos se mueven. Y esta mayor o menor facilidad de movimiento depende de las características de los átomos que forman la sustancia en cuestión. Aparece así el concepto de materiales buenos y malos conductores de la electricidad.

Adelantamos que, cuando se produce un movimiento ordenado de electrones por medio de la aplicación de una energía externa, aparece el concepto de *corriente eléctrica*.

1.3.1 Configuración electrónica: el número atómico

Sabemos que en cada átomo en estado normal existe un número de protones (cargas positivas) igual al de electrones (cargas negativas), por lo cual su estado eléctrico es neutro. En el núcleo se encuentra concentrada la carga positiva, pero la negativa está distribuida alrededor del núcleo, en diferentes órbitas.

El número atómico de cada átomo indica su cantidad total de electrones (y, por tanto, también el de protones), lo cual determina su clasificación en lo que se conoce por tabla periódica de los elementos.

El número atómico es necesario para saber la configuración electrónica del átomo, lo cual nos puede dar una información práctica sobre la mayor o menor facilidad de conducción eléctrica del material. Cuantos menos electrones existan en la última capa, y más alejados se encuentren del núcleo, mejor conductor de electricidad es el material; así, los mejores materiales conductores de electricidad son aquellos en los cuales sus átomos tienen un solo electrón en la última capa, como es el caso de la plata y el cobre.

La cantidad máxima de electrones que puede contener en cada capa se determina por medio de la expresión:

$$E = 2\,n^2$$

donde,
E = número de electrones de la capa,
n = número de la capa.

Además, debe cumplirse la condición de que en la última capa, como máximo, han de existir 8 electrones y en la penúltima 18. Las primeras cuatro capas (órbitas), se denominan K, L, M y N, siendo K la más próxima al núcleo.

Ejemplos:

Configuración electrónica del átomo de cobre. Su número atómico es 29.
1ª capa (K): $2\,n^2 = 2 \times 1^2 = 2 \times 1 = 2$ electrones
2ª capa (L): $2\,n^2 = 2 \times 2^2 = 2 \times 4 = 8$ electrones
3ª capa (M): $2\,n^2 = 2 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$ electrones

Como que en estas tres capas ya suman 28 electrones, se deduce que en la 4ª capa (N), y última, sólo habrá un electrón; pues en total deben haber 29, que es su número atómico. En la figura 1.8*a* se representa dicha configuración electrónica.

Así, los átomos del cobre disponen como carga móvil, un solo electrón, y situado en una 4ª capa; la poca fuerza de atracción ejercida por el núcleo sobre dicho electrón periférico, hace que fácilmente éste pueda salir del átomo y, en consecuencia, dar lugar a una corriente eléctrica.

El cobre es el tipo de material normalmente utilizado para fabricar los conductores eléctricos (hilos, cables), debido a su buena conductividad eléctrica y relativo bajo precio.

Configuración electrónica del átomo de aluminio. Número atómico: 13.
1ª capa (K): $2\,n^2 = 2 \times 1^2 = 2 \times 1 = 2$ electrones
2ª capa (L): $2\,n^2 = 2 \times 2^2 = 2 \times 4 = 8$ electrones

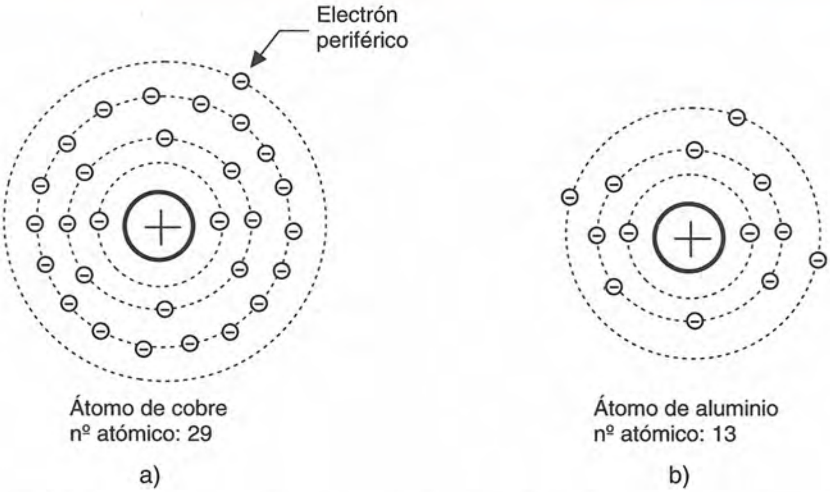


Figura 1.8. *Estructura atómica de los átomos de cobre* (a) *y de aluminio* (b).

Como estas dos primeras capas ya suman 10 electrones, en la siguiente capa, y última, sólo podrán haber 3 electrones, ya que en total tiene 13 (figura 1.8*b*).

Aunque la conductividad eléctrica del aluminio es inferior a la del cobre, también es otro buen conductor que es utilizado en la práctica, en parte, por su bajo peso.

1.4 CARGAS ELÉCTRICAS. LEY DE COULOMB

1.4.1 Carga eléctrica

Como se sabe, la mínima expresión de carga eléctrica la constituye el electrón y el protón. Al ser de una magnitud tan pequeña, se establece como unidad de carga eléctrica el **culombio (C),** que equivale a la carga de aproximadamente seis trillones de electrones.

Unidad de carga eléctrica: ***Culombio***
1 Culombio $\approx 6{,}28 \cdot 10^{18}$ electrones

Por tanto, la cantidad de carga eléctrica del electrón (y del protón) es:

$$\textbf{\textit{Carga del electrón}}\ (-e) = \mathbf{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ C}$$
$$\textbf{\textit{Carga del protón}}\ (+e) = \mathbf{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ C}$$

Aunque las cargas eléctricas del protón y electrón son las mismas, no ocurre lo mismo con sus masas. La masa del protón es mucho mayor que la del electrón:

***Masa del electrón:* $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg**
***Masa del protón:* $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg**

Así, la masa del protón es unas 1830 veces mayor que la del electrón. Por otra parte, como se sabe, en el núcleo también se encuentran las partículas denominadas *neutrones*, eléctricamente neutras, pero su masa es similar a la del protón. Así, pues, se deduce que en el núcleo del átomo es donde se concentra casi toda su masa.

Aparecen cargas eléctricas –materiales cargados eléctricamente– cuando por algún tipo de circunstancia los átomos pierden algún electrón. Cuando esto ocurre, los electrones que dejan de formar parte de un átomo se mueven hacia otro átomo. Se dice entonces que los átomos que pierden electrones adquieren carga eléctrica positiva, y dejan de ser neutros, al tener más cantidad de protones que de electrones; esto les da la propiedad de poder atraer otros electrones de su entorno (fig. 1.9). En su estado normal, átomo neutro, los electrones libres no son atraídos porque la fuerza de atracción del núcleo es compensada por la fuerza de repulsión por parte de la corteza (electrones).

Si los átomos reciben electrones, también dejan de ser neutros, ya que adquieren carga negativa, puesto que pasan a tener más electrones que protones.

Los átomos que dejan de ser neutros se denominan *iones*. Así, se denomina *ion positivo* al átomo con carga positiva (ha perdido electrones), y *ion negativo* al átomo con carga negativa (ha ganado electrones).

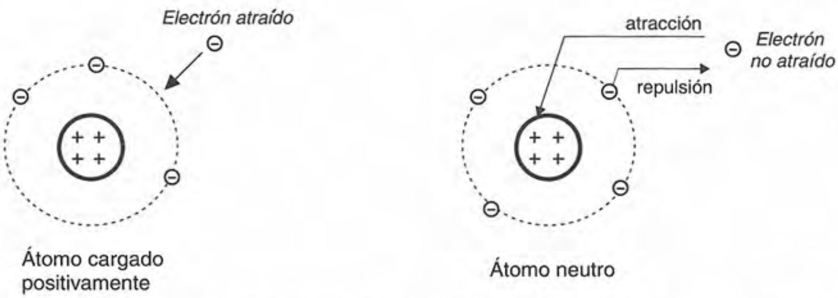


Figura 1.9. *Los átomos que han perdido algún electrón dejan de ser neutros y adquieren carga eléctrica positiva, con lo cual pueden atraer electrones libres.*

Campo eléctrico

Las cargas eléctricas dan lugar también a lo que se conoce por ***campo eléctrico,*** lo cual se puede manifestar experimentalmente. Se trata de una fuerza similar a la magnética, invisible, de acción a distancia, y que puede ser de atracción o repulsión. Se puede decir que existe una fuerza de campo eléctrico en un cierto punto del espacio, si en dicho punto se ejerce fuerza sobre cualquier otro tipo de carga. Así, la situación de un cuerpo cargado eléctricamente puede ejercer cierta fuerza sobre otras cargas situadas a su alrededor, y en cierta región del espacio se dice que existe un *campo eléctrico*.

La *intensidad del campo eléctrico, E,* en un punto del espacio se define como: la fuerza que se ejerce sobre la unidad de carga eléctrica positiva, *q,* situada en dicho punto. Matemáticamente:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

siendo,
F = fuerza, en newtons.
q = carga, culombios.

La unidad de intensidad de campo eléctrico se da, por tanto, en newton/culombio.

Al ser la fuerza, *F,* una magnitud vectorial, la intensidad de campo eléctrico, *E,* también es vectorial.

1.4.2 Ley de Coulomb

La ley de Coulomb viene a decir que *la fuerza,* F, *ejercida entre dos cargas eléctricas,* q_1 *y* q_2, *es directamente proporcional a su producto e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia de separación*. Matemáticamente se expresa por:

$$F = K \frac{q_1 \; q_2}{d^2}$$

siendo:
K: constante de proporcionalidad.
q_1 y q_2: cargas eléctricas, culombios (C).
d: distancia de separación, metros (m).

Como se comprende, es similar a la fuerza de gravitación universal de Newton. A mayor distancia de separación, menos influencia existe entre las cargas y menor es la fuerza (de atracción o repulsión). Asimismo, a mayor cantidad de cargas, mayor será la fuerza que se ejercerá (fig. 1.10).

Ejemplo:

Cálculo de la fuerza de atracción entre un protón y un electrón, situados a una distancia de $6 \cdot 10^{-11}$ *metros.*

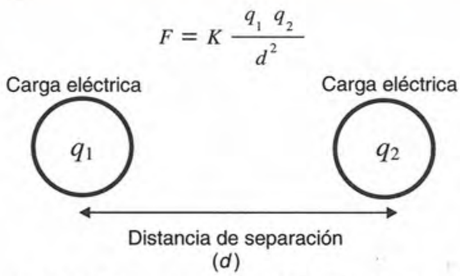


Figura 1.10. *Representación de la ley de Coulomb.*

Sabemos que las cargas de estas partículas elementales son:

$+e = -e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C. Y la constante K, en el vacío, es de $9 \cdot 10^9$. Por tanto, la fuerza de atracción será:

$$F = K \frac{q_1 \; q_2}{d^2} = 9 \cdot 10^9 \times \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{(6 \cdot 10^{-11})^2} \approx 6{,}4 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

Bajo este principio, también se puede definir la unidad de carga eléctrica, **Culombio (C),** como *la carga eléctrica que situada frente a otra igual, en el vacío y a 1 metro de distancia, da lugar a una fuerza de repulsión de $9 \cdot 10^9$ N (newton).*

1.5 CORRIENTE ELÉCTRICA

La corriente eléctrica aparece como consecuencia del movimiento de electrones, y se puede definir de la siguiente manera:

Corriente eléctrica: es *el paso ordenado de electrones a través de un conductor*

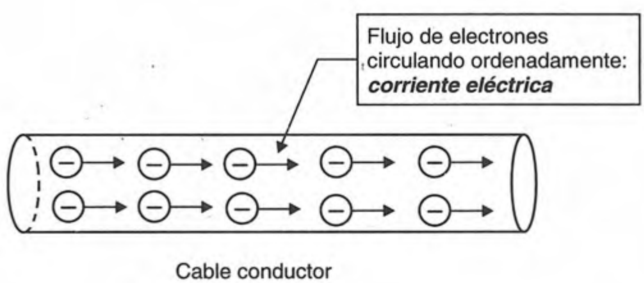


Figura 1.11. *Representación del concepto de corriente eléctrica.*

Basándonos en un símil hidráulico, la corriente equivale al agua, que circula por una tubería; y el conductor de electricidad, un cable de cobre, equivale, por tanto, a la tubería por la cual circula el agua. En la figura 1.11 se representa el paso de la corriente eléctrica a través de un conductor.

1.5.1 Conductores y aislantes

Como ya debe saberse, el causante de que pueda existir una corriente eléctrica a través de un conductor se debe a la posibilidad de que los electrones periféricos de sus átomos puedan dejar el átomo debido a alguna influencia externa. Y la facilidad para que esto ocurra depende de lo alejado del núcleo que estén los electrones periféricos, ya que la fuerza de atracción que ejerce el núcleo (carga positiva) sobre ellos disminuye con la distancia.

1.5.1.1 Buenos conductores

Se puede resumir que los materiales son mejores conductores de la electricidad cuanto menos electrones periféricos tengan sus átomos y más alejados se encuentren del núcleo; en general, los que tienen muchos electrones libres. La facilidad de movimiento de dichas partículas, ya con un cierto movimiento desordenado en estado normal, puede controlarse y lograr que adquieran una circulación ordenada en un determinada dirección (*corriente eléctrica*) aplicando una fuerza externa de carácter eléctrico.

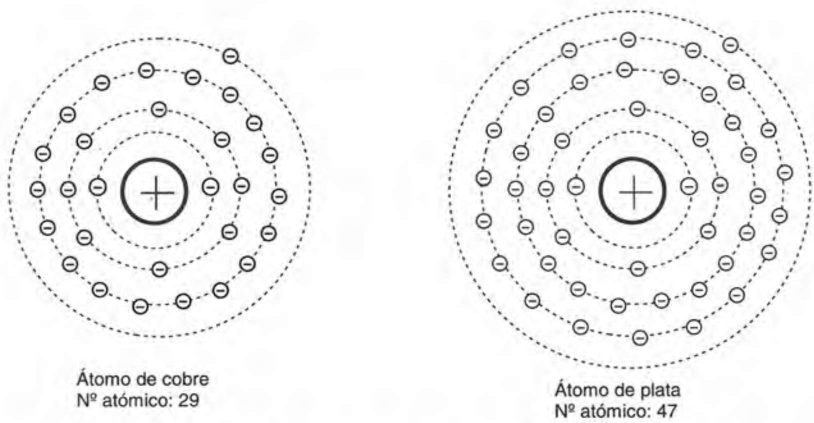


Figura 1.12. *Estructuras de los átomos de cobre y plata; dan lugar a los materiales mejores conductores de la electricidad.*

En general, todos los metales son más o menos conductores de electricidad, siendo los mejores la plata seguida del cobre, cuya estructura atómica se representa en la figura 1.12.

1.5.1.2 Aislantes

Se entiende por materiales aislantes de la electricidad, aquellos que, debido a su estructura atómica, no dan lugar a una circulación ordenada de electrones y no permiten el paso prácticamente de corriente; de ahí el término *aislantes*. Son aislantes, por ejemplo, la porcelana, el aire (seco), el papel, la goma, etc. Los aislantes se utilizan precisamente para *aislar,* o *cortar*, el paso de la corriente; por ejemplo, se usan como medio de aislamiento eléctrico en cables, herramientas, cajas de equipos, etc.

También se dice que estos materiales presentan una muy alta oposición al paso de la corriente (adelantamos así el concepto de *resistividad*). Es conveniente saber que todo aislante, en según qué condiciones, puede llegar a hacerse más o menos conductor y dejar pasar una cierta corriente. Esto ocurre, por ejemplo, cuando el aire o la madera se humedecen, o bien por una elevada fuerza de campo eléctrico (que rompe la estructura atómica). Por eso, puede pasar que un cierto material sea buen aislante para ciertas aplicaciones y para otras no lo sea. Precisamente, cuando se da lo que se conoce por *arco eléctrico* (rayos, chispas desde un cable de la bujía de un coche hacia la chapa, etc.), es porque el aire, que es un aislante, se hace conductor debido a la fuerte fuerza eléctrica.

Hay que tener en cuenta que aunque exista movimiento de electrones no siempre significa que haya corriente eléctrica, pues, a ciertas temperaturas, los electrones periféricos pueden tener ya un cierto movimiento entre átomos; pero esto no se considera corriente eléctrica porque no es un movimiento ordenado, sino desordenado o errático.

1.6 FUERZA ELECTROMOTRIZ (f.e.m.)

Para que exista una corriente eléctrica se precisa que algo obligue a los electrones a circular ordenadamente; una fuerza de origen eléctrico, denominada *fuerza electromotriz (f.e.m.),* cuya unidad es el *voltio*. Aunque esto será explicado más adelante de forma más detallada, adelantamos que esta fuerza externa que da lugar a la aparición de la corriente eléctrica, es la que proporcionan los generadores de electricidad: pila, alternador, célula solar, etc.

En los generadores de electricidad, como consecuencia de algún tipo de proceso, se produce en su interior lo que se llama una f.e.m., lo cual se puede definir de la siguiente manera:

Fuerza electromotriz (f.e.m.): *es la fuerza que obliga a moverse a los electrones (dentro del generador), y que tiene por efecto producir una tensión eléctrica.*

Y la **tensión eléctrica,** que se expresa en voltios, *es: la fuerza que hace que los electrones se muevan ordenadamente en una cierta dirección a través de las líneas conductoras (circuito), o sea, lo que hace que aparezca una corriente eléctrica*. Este principio se ilustra en la figura 1.13.

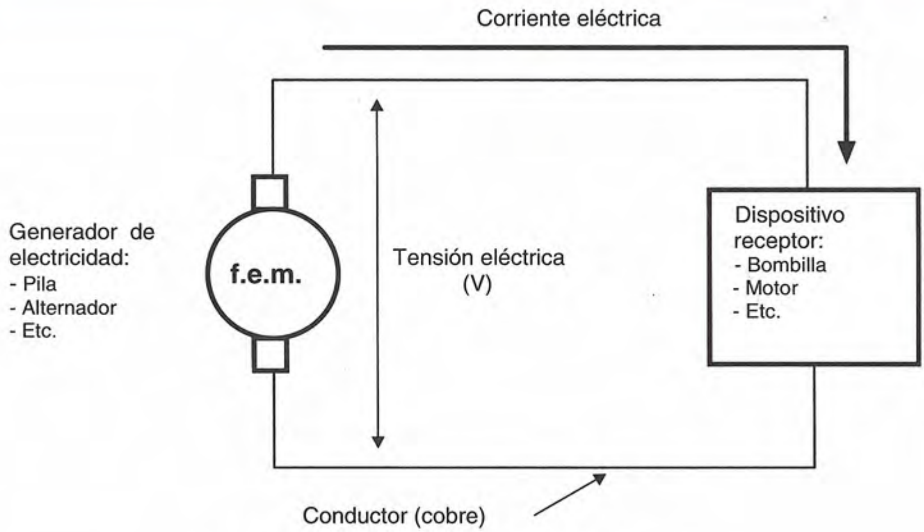


Figura 1.13. *Circuito eléctrico elemental.*

1.7 INTENSIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA

La intensidad de corriente es un concepto que relaciona la cantidad de carga eléctrica y el tiempo, y se puede definir de la siguiente manera:

Intensidad eléctrica: Es la cantidad de carga eléctrica que circula por un conductor en la unidad de tiempo.

O sea, es una medida de la cantidad de corriente. Matemáticamente se expresa por:

$$I = \frac{\text{cantidad de carga (C)}}{\text{tiempo (s)}} = \frac{q}{t}$$

Su unidad es el **amperio** (A) y se dice que circula una intensidad de un amperio cuando pasa un culombio por segundo:

$$\text{Intensidad} = \frac{q}{t} = \frac{1\ \text{C}}{1\ \text{s}} = 1\ \text{amperio}\ \ (\text{A})$$

Siguiendo con el símil hidráulico, la intensidad eléctrica es similar al caudal (cantidad de agua que pasa por la tubería en la unidad de tiempo).

Unidades derivadas del amperio, utilizadas en electrónica, son las que aparecen a continuación:

Miliamperio: mA $\Rightarrow$ **1 mA = 0,001 A =** 10^{-3} **A**

Microamperio: µA $\Rightarrow$ **1 µA = 0,000 001 A =** 10^{-6} **A**

Nanoamperio: nA $\Rightarrow$ **1 nA = 0,000 000 001 A =** 10^{-9} **A**

Picoamperio: pA $\Rightarrow$ **1 pA = 0,000 000 000 001 A =** 10^{-12} **A**

Las unidades con que normalmente se trabaja en electrónica son el amperio (A), el mA y el µA. Con nA y pA normalmente no se trabaja, pero es necesario conocerlas porque en la tecnología microelectrónica (circuitos integrados) se trata con magnitudes de corrientes muy pequeñas, hasta de picoamperios. Es el caso, por ejemplo, de la corriente de entrada en los circuitos integrados digitales de tecnología CMOS.

En cambio, en electricidad y electrónica industrial, se puede trabajar hasta con miles de amperios, lo cual se expresa por medio de la letra k, que en el mundo técnico equivale a mil:

$$\mathbf{k = 1000 \Rightarrow 1kA = 1000\ A}$$

Ejercicios:

1. La intensidad que circula por un conductor por el cual pasan 2 culombios por segundo es:

$$I = \frac{q}{t} = \frac{2\ \mathrm{C}}{1\ \mathrm{s}} = 2\ \mathrm{A}$$

2. La intensidad que circula por un conductor por el cual pasan 4 culombios cada 0,5 segundos es:

$$I = \frac{q}{t} = \frac{4\ \mathrm{C}}{0{,}5\ \mathrm{s}} = 8\ \mathrm{A}$$

3. Cantidad de carga, culombios, que pasa por un conductor cada segundo por el cual la intensidad que circula es de 450 mA:

Pasando la intensidad de 450 mA a amperios, tenemos:

$$\mathbf{1\ mA = 0{,}001\ A \Rightarrow 450\ mA = 450 \times 0{,}001 = 0{,}45\ A}$$

La cantidad de carga, q, es:

$$I = \frac{q}{t} \Rightarrow q = I \cdot t = 0{,}45\ \mathrm{A} \times 1\ \mathrm{s} = 0{,}45\ \mathrm{C}$$

1.8 TENSIÓN ELÉCTRICA

Desde un punto de vista práctico, se puede definir de la siguiente manera:

Tensión eléctrica: *es la fuerza que da lugar a que los electrones se muevan ordenadamente a través de un conductor, produciéndose así una corriente eléctrica.*

Siguiendo con el símil hidráulico, se puede decir que la tensión eléctrica es equivalente a la fuerza de presión que genera una bomba para hacer que el agua circule por las tuberías.

Esta fuerza eléctrica, *tensión,* es lo que produce todo generador de electricidad (pila, alternador, célula solar, etc.).

En los generadores de electricidad aparece el término *fuerza electromotriz (f.e.m.),* que es el proceso energético que se origina en el interior del generador, y que da lugar a que se produzca la tensión en los terminales de salida. Así, f.e.m. es equivalente a la energía que se origina en el interior de una bomba hidráulica, y que da lugar a la presión. En el caso, por ejemplo, de una pila, la f.e.m. es el proceso químico interno que da lugar a la energía que pone en movimiento a los electrones, y su efecto produce la tensión de salida.

La unidad de tensión eléctrica es el **voltio;** por tanto, el **voltaje** es la *medida de la **tensión eléctrica.*** Así, se dice que la tensión de la batería del coche es de 12 V, la tensión de la red eléctrica doméstica es de 220 V, una pila de 1,5 V, etcétera.

Visto de una forma más técnica, aparecen otros términos relacionados que se denominan *potencial eléctrico* y *diferencia de potencial.*

Se define por *potencial eléctrico* en un punto, al trabajo necesario para trasladar la unidad de carga eléctrica positiva desde el infinito hasta dicho punto; es un trabajo por unidad de carga, que se mide en *voltios* (V). La unidad voltio resulta ser, pues, el trabajo de 1 julio (J) sobre la carga de 1 culombio (C); se tiene el potencial de un voltio si se realiza el trabajo de 1 julio para trasladar la carga de 1 culombio: 1 V = 1 J/1 C.

Se define por *diferencia de potencial* entre dos puntos, al *trabajo necesario para que la unidad de carga se traslade de un punto a otro,* y también se mide en voltios. Así, se tiene 1 voltio si se realiza el trabajo de 1 julio para que la carga de 1 culombio se mueva de un punto a otro:

$$1\text{ V} = \frac{1\text{ julio}}{1\text{ culombio}}$$

El término *diferencia de potencial* es muy utilizado en la práctica, y bajo un principio de comprensión sencillo, como ya se verá.

En resumen, los términos **tensión, potencial** y **diferencia de potencial** se expresan mediante la unidad **voltio,** y a menudo simplemente como **voltaje.** Por ejemplo, respecto a una pila de 9 V se puede decir: que la pila proporciona una tensión de 9 V, que entre sus terminales [positivo (+) y negativo (–)] aparece la diferencia de potencial de 9 V o, simplemente, que genera un voltaje de 9 V.

1.9 ELEMENTOS BÁSICOS DE UN CIRCUITO ELÉCTRICO

Todos los circuitos eléctricos disponen de una serie de componentes básicos, de manera que se obtenga el paso de una corriente eléctrica a través del dispositivo de salida que se necesite. Para que exista una circulación de corriente eléctrica se necesita que el circuito esté cerrado. O sea, desde un punto del generador, la corriente debe entrar por la línea de conducción, cables, salir por otro punto, y después de pasar por el dispositivo receptor (bombilla, motor, etc.), debe retornar al otro punto del generador; cualquier tipo de interrupción o corte, en algún punto de la línea, hace que se interrumpa la circulación de corriente y que, por tanto, el dispositivo receptor deje de recibir energía eléctrica.

1.9.1 Sentido de la corriente eléctrica

El circuito eléctrico más elemental es el que se muestra en la figura 1.14; se basa en un generador, las líneas conductoras y el receptor de la energía eléctrica. Al cerrarse el circuito, se unen los terminales del generador a través de algún elemento conductor, y ello da lugar a que circule una corriente eléctrica a través de la línea conductora.

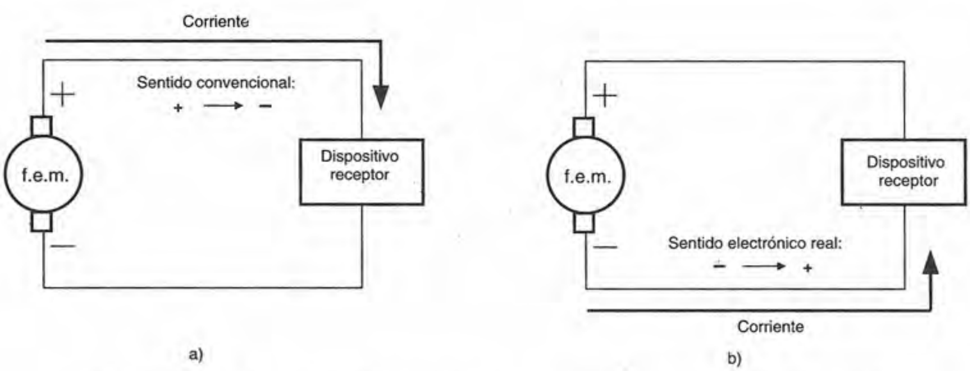


Figura 1.14. Sentido de la corriente eléctrica: a) *convencional.* b) *real.*

1.9.1.1 Sentido electrónico real

Físicamente, se sabe que el sentido de la corriente eléctrica va de negativo (–) a positivo (+); o sea, el flujo de electrones parte del polo negativo del generador y se dirige, a través de las líneas de conducción, hacia el polo positivo del generador (por dentro del generador, el flujo electrónico circula desde el polo positivo al negativo). Este sentido, de negativo a positivo, es el *sentido electrónico real* (fig. 1.14*b*).

1.9.1.2 Sentido convencional

Existe también lo que se conoce por *sentido convencional de la corriente,* que va al revés del sentido real; o sea, de *positivo (+) a negativo (–),* según se representa en la figura 1.14*a.* Esto es así porque en los principios del descubrimiento de la electricidad se creía que éste era el sentido real de la corriente, y así se consideró durante mucho tiempo. Pero posteriores descubrimientos demostraron que realmente el sentido era al revés; los electrones (cargas negativas) son realmente lo que se mueve y su tendencia es ir hacia cargas de distinto signo (positivas).

En la práctica, por lo general, el sentido de la corriente que se considera es el convencional (de + a –). En esta obra, éste será el sentido de la corriente utilizado.

1.9.2 Corriente continua (c.c.) y corriente alterna (c.a.)

Otra cuestión relacionada con el sentido, es el concepto de *corriente continua* (c.c.). Existe corriente continua cuando el flujo de electrones circula siempre en el mismo sentido, y en este caso aparece el concepto de polaridad [polo positivo (+) y polo negativo (–)]. Es el tipo de corriente que se obtiene por medio de las pilas, batería, célula solar, etc. En la figura 1.15 se representa la simbología de un generador de c.c. en general, de una pila y la representación gráfica de c.c.

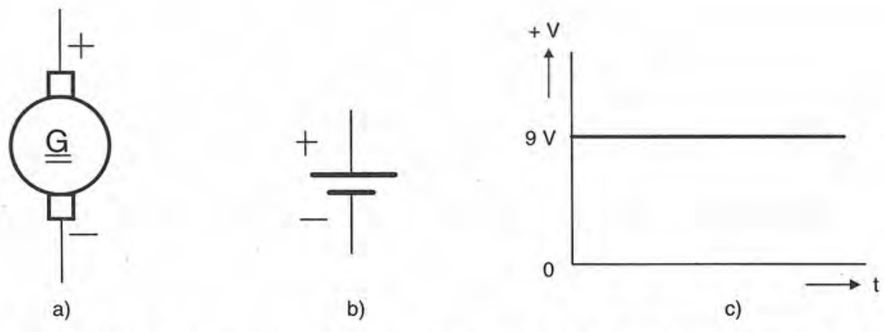


Figura 1.15. a) *Representación de un generador de c.c.* b) *Símbolo de una pila (generador de c.c.).* c) *Gráfico que representa una c.c.*

La *corriente alterna* es aquella cuyo sentido de circulación se va invirtiendo constantemente en función del tiempo. Es como, por ejemplo, si fuéramos invirtiendo rápidamente la polaridad de la pila en una linterna; la bombilla recibiría corriente alterna (a veces un terminal de la bombilla se conectaría al polo + y otras veces al polo –) y también se encendería.

Es precisamente corriente alterna la que obtenemos de la red eléctrica a la que se conectan todos los aparatos de las viviendas e industrias y que es generada en las centrales eléctricas por máquinas denominadas *alternadores*. En la figura 1.16 se representa el símbolo de un generador de c.a., alternador, y la forma como varía la tensión que genera.

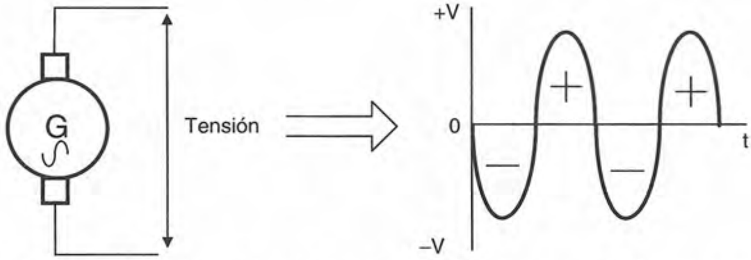


Figura 1.16. *Símbolo de un alternador (generador de c.a.), y la forma de variar la tensión que genera (onda senoidal).*

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1.1. Describir la estructura del átomo. ¿Cuál es la partícula elemental con carga eléctrica que da origen a la corriente eléctrica?

Ejercicio 1.2. Definir el concepto de *corriente eléctrica.* ¿Cómo se llama la fuerza necesaria para que se produzca?

Ejercicio 1.3. Cómo se denomina la *unidad de carga eléctrica.* ¿Cuál es su valor?

Ejercicio 1.4. Si un cuerpo, debido a frotamiento, pierde electrones, de qué tipo es la carga que adquiere ¿positiva o negativa? ¿A qué se denomina *iones*?

Ejercicio 1.5. Calcular la fuerza ejercida entre dos electrones, situados en el vacío, cuya distancia de separación es de $9{,}5 \cdot 10^{-11}$ m. Cómo es la fuerza, ¿de atracción o repulsión?

Ejercicio 1.6. Explicar la diferencia entre los materiales *buenos conductores* y los denominados *aislantes*.

Ejercicio 1.7. De qué material se fabrican normalmente los conductores eléctricos (cables, hilos); ¿por qué?

Ejercicio 1.8. Respecto a la *intensidad eléctrica:*

a) Definir el concepto.

b) ¿Cuál es su analogía hidráulica?
c) ¿Cuál es su unidad?

Ejercicio 1.9. Respecto a la *tensión eléctrica:*

a) Definir el concepto.
b) ¿Cuál es su analogía hidráulica?
c) ¿Cuál es su unidad?
d) ¿Cómo se obtiene?

Ejercicio 1.10. Indicar el sentido de circulación *electrónico* de la electricidad y el denominado *convencional.*

Ejercicio 1.11. ¿Cuál es la diferencia fundamental entre la *corriente continua* y la *alterna*?

Ejercicio 1.12. Calcular la cantidad de culombios que circulan por segundo en un conductor si el valor de intensidad es de 350 mA.

Capítulo 2

El circuito eléctrico. Efectos y medidas de la corriente

2.1 INTRODUCCIÓN

Definimos por *circuito eléctrico* al conjunto de componentes cuya conexión forma un camino por el cual puede circular la corriente eléctrica. Para que exista una circulación, el circuito tiene que estar cerrado, es decir, la corriente debe poder entrar por un punto y salir por otro. Y como es obvio, para que exista dicha circulación electrónica debe existir una fuerza impulsora, que es la que produce el generador (fig. 2.1). Esto constituye un circuito cerrado, y a esta estructura de circuito también se le denomina *malla*.

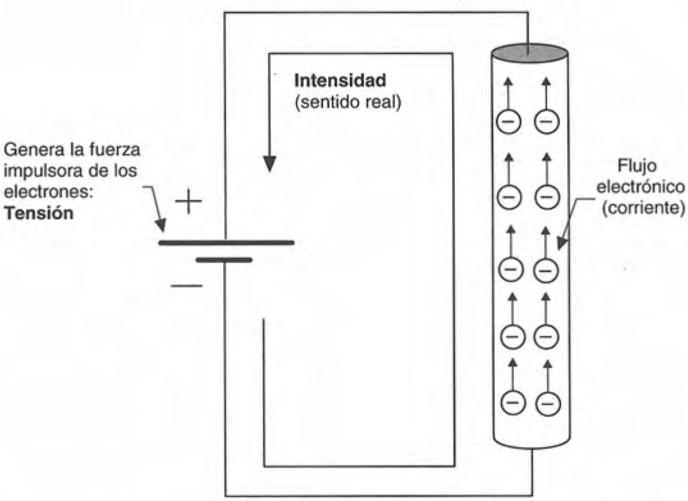


Figura 2.1. *El generador proporciona la fuerza impulsora (tensión) para que se produzca el flujo electrónico (corriente).*

Un ejemplo de circuito práctico se muestra en la figura 2.2. Se trata del accionamiento de un pequeño motor de c.c.

El aprovechamiento de la energía eléctrica consiste en hacer pasar la corriente por el elemento receptor de que se trate, un motor en nuestro ejemplo (fig. 2.2), el cual transforma dicha energía eléctrica en energía mecánica (y como tal, puede realizar un cierto trabajo mecánico).

Obsérvese el concepto de *circuito cerrado;* la corriente sale por un polo del generador, y después de atravesar el motor (en cual se aprovecha la energía eléctrica), retorna al otro polo del generador.

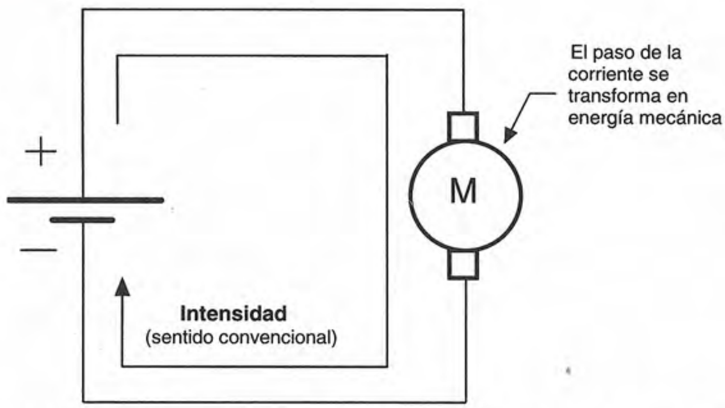


Figura 2.2. *Para que exista circulación de corriente el circuito debe estar cerrado.*

2.2 ELEMENTOS FUNDAMENTALES DE UN CIRCUITO

Todo circuito práctico se compone, al menos, de los siguientes elementos:

Generador.
Líneas conductoras.
Dispositivo de control.
Receptor de la energía eléctrica.

Esta estructura mínima de circuito se representa en la figura 2.3.

2.2.1 Generador de electricidad

Es el que produce la fuerza impulsora de los electrones, la fuente de energía eléctrica que proporciona tensión eléctrica (voltios) que da lugar a la circulación de una intensidad eléctrica (amperios) a través del circuito.

Por lo general, los generadores de electricidad están basados en el efecto de una reacción química (pilas, acumuladores, batería) o en un efecto magnético (alternador, dinamo).

El objetivo de todos los generadores es proporcionar una tensión eléctrica, para así obtener una corriente eléctrica; y el efecto de estas dos magnitudes (voltios, amperios) da lugar al concepto de **potencia eléctrica.**

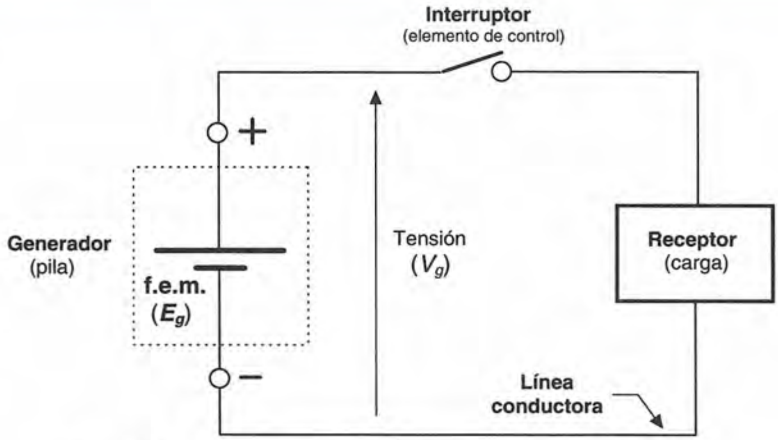


***Figura 2.3**. Elementos fundamentales de un circuito eléctrico.*

El generador proporciona, pues, una tensión eléctrica como consecuencia de un proceso que se da en su interior, que en las pilas y baterías es por medio de una reacción química. El efecto de dicho proceso químico interno da lugar al concepto de *fuerza electromotriz* (f.e.m.), que representamos por E_g y cuya unidad es el voltio; en un punto del generador se produce una acumulación de cargas negativas (polo negativo) y en el otro, una deficiencia de electrones (polo positivo). Como consecuencia de ello, entre los polos del generador –terminales– aparece lo que se conoce por *tensión eléctrica,* que, al igual que la f.e.m., se mide en *voltios;* si el rendimiento del generador fuera del 100%, la tensión de salida (diferencia de potencial entre sus bornes), V_g, sería igual a su f.e.m (E_g), pero debido a ciertas pérdidas V_g es algo menor a E_g. No obstante, sin carga ($I_g = 0$) –lo que se llama en vacío–, la tensión de salida sí es igual a la f.e.m. ($E_g = V_g$).

Esta fuerza eléctrica, tensión, voltaje, es lo que dará lugar al movimiento ordenado de electrones a través del circuito. El generador de electricidad es, pues, el equivalente a la bomba que proporciona la presión que hace circular el agua a través de las tuberías.

2.2.2 Líneas conductoras

Son, como su nombre indica, el medio de transporte de la corriente eléctrica, el equivalente a las tuberías en un sistema hidráulico. Suelen ser hilos o cables, generalmente de cobre, con un grosor (diámetro) adecuado a la intensidad de la corriente eléctrica que deba circular. A mayor intensidad, mayor grosor de las líneas conductoras, con el fin de reducir pérdidas de energía.

Hilo: Son líneas con un solo conductor; son conductores de tipo rígido.

Cable: Son líneas constituidas por un conjunto de hilos (más o menos finos o gruesos); son conductores con cierta flexibilidad mecánica.

Según se explicó en el capítulo anterior, se entiende por *electrones libres*, aquellos que por alguna circunstancia abandonan su átomo. Y son los electrones periféricos los que pueden dar lugar a este concepto ya que son atraídos con menor fuerza por su núcleo, al estar más alejados. Una de las circunstancias que puede hacer posible la aparición de electrones libres es cuando un electrón periférico, en algún punto de su trayectoria, se encuentra aproximadamente equidistante de su núcleo y del núcleo de otro átomo vecino; en estas circunstancias, el electrón recibe dos fuerzas de sentido diferente que se anulan y entonces puede quedar libre. Esta idea se ilustra en la figura 2.4.

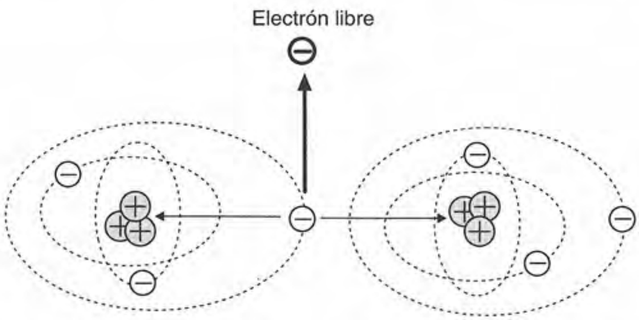


Figura 2.4. *Electrón libre, propiciado por la anulación de fuerzas puntuales.*

Así, en los materiales buenos conductores de la electricidad, que son los metales en general, existe un movimiento aleatorio de electrones libres en el interior del conductor.

En los materiales buenos conductores, como el cobre y la plata, se puede decir que existen tantos electrones libres como átomos. Pero este movimiento aleatorio de electrones, como se sabe, no constituye corriente eléctrica; solamente aparece ésta si se cierra el circuito (fig. 2.1), puesto que entonces se aplica la tensión eléctrica del generador que produce la fuerza de movimiento de los electrones libres de la línea conductora, desplazándose éstos hacia el polo positivo del generador. Así, por las líneas conductoras y por el receptor, circula un flujo electrónico que se dirige hacia el polo positivo del generador. Y por el interior del generador (como consecuencia de la f.e.m.) el flujo electrónico circula del polo positivo hacia el polo negativo, siendo la cantidad de electrones libres que entran por un polo del generador la misma que la que sale por el otro polo.

Aunque la velocidad de trasmisión de la electricidad es muy alta (unos 300.000 km/s), los electrones libres del material se mueven lentamente (según el tipo de material, su grosor, etc.) debido a las dificultades que se encuentran en su transporte entre los átomos. La razón de la alta velocidad de trasmisión de los efectos eléctricos es porque, al aplicar la tensión del generador, todos los electrones libres de la línea conductora se ponen en movimiento a la vez. Y este movimiento consiste en el desplazamiento de los electrones libres de átomo en átomo; es como si un electrón empujara al otro (fig. 2.5).

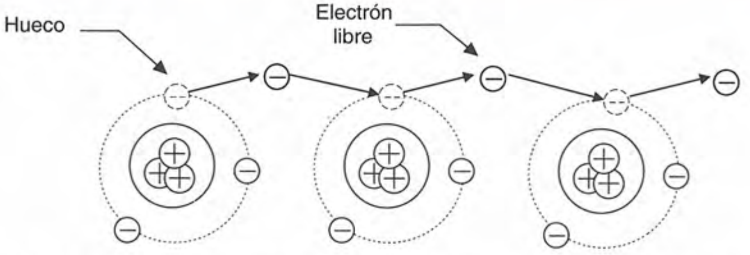


Figura 2.5. Los electrones libres se desplazan de átomo en átomo.

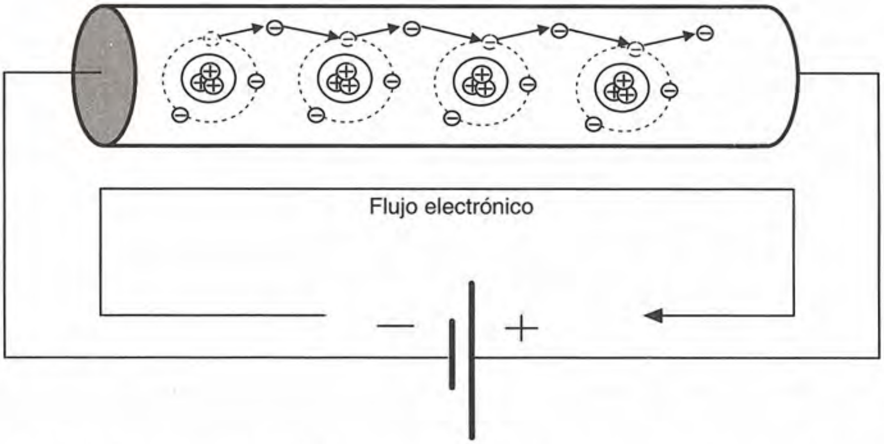


Figura 2.6. Representación de la corriente eléctrica en el interior de un conductor; es un desplazamiento ordenado de electrones, originado por la fuerza de atracción del polo positivo del generador.

Esta forma de propagación de los electrones es similar a la del sonido: la trasmisión del sonido se hace por medio de la vibración de las moléculas del aire; cada molécula trasmite su vibración a la siguiente.

Al saltar un electrón de un átomo, y como consecuencia de la desaparición de su carga negativa, aparece lo se llama un *hueco* (fig. 2.5), que constituye una *carga positiva,* y se puede decir que este *hueco* atrae a otro electrón de sus cercanías. Así, cuando hay una corriente eléctrica, se produce un movimiento ordenado de los electrones libres de átomo en átomo; los huecos que van dejando unos electrones son llenados por otros electrones que, a su vez, también han dejado huecos. Y para que esto suceda es necesario disponer de una fuerza que origine la atracción de los electrones, que es la *tensión eléctrica*, o voltaje, que proporciona el generador (una pila, por ejemplo). Al aplicar la tensión eléctrica del generador en los extremos de un material conductor (fig. 2.6) (un hilo de cobre, una bombilla, etc.), el polo positivo empieza a atraer electrones libres del conductor, los cuales van dejando huecos que van llenándose con otros electrones de otros átomos, y aparece así la circulación direccional de un flujo de electrones: *corriente eléctrica*.

2.2.3 Dispositivo de control

El dispositivo de control de un circuito, en su mínima expresión, consiste en un *interruptor* (fig. 2.3), que permite interrumpir el paso de la corriente, y disponer así de una forma de control de la energía eléctrica que recibe el receptor. Cuando el interruptor se encuentra abierto, el circuito está cortado y no puede circular corriente; se dice entonces que el circuito está abierto (fig. 2.7). La in-

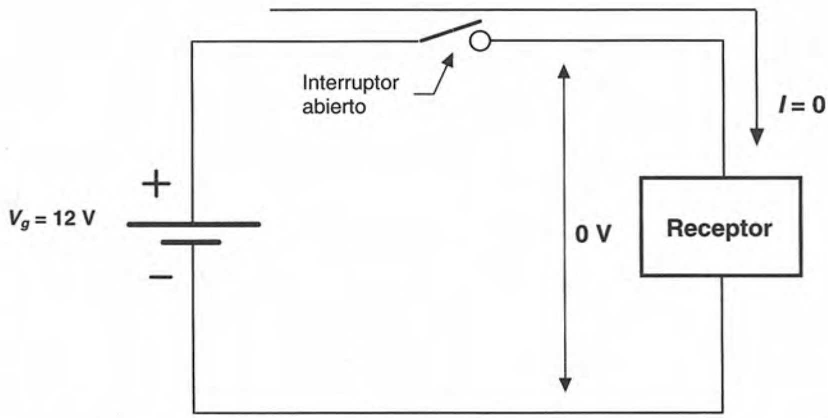


Figura 2.7. *El interruptor abierto impide la circulación de corriente; es un circuito abierto (I = 0).*

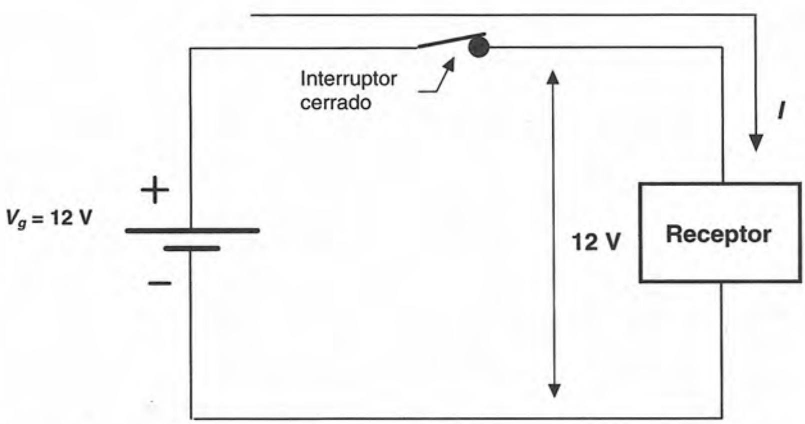


Figura 2.8. *La corriente se establece en el circuito al cerrar el interruptor; es un circuito cerrado (el receptor, o carga, recibe corriente).*

tensidad de la corriente eléctrica es cero ($I = 0$) y el receptor no recibe voltaje ($V= 0$). La corriente sólo circulará si se cierra el interruptor; se dice entonces que el circuito está cerrado, y el valor de la intensidad dependerá de las características del generador y del dispositivo receptor (fig. 2.8).

Así pues, el interruptor realiza la misma función que una válvula en un sistema hidráulico (deja pasar o impide el paso del líquido).

En la figura 2.9 se representan los símbolos de algunos elementos de interrupción normalmente utilizados.

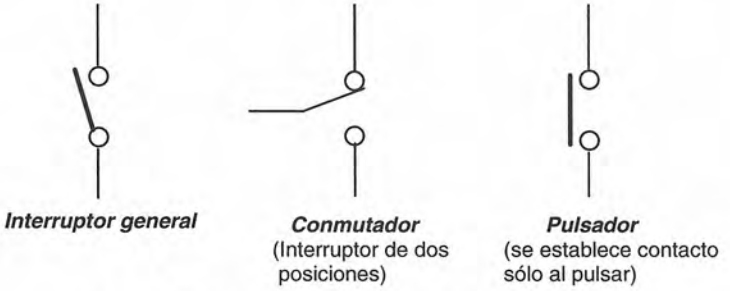


Figura 2.9. *Ejemplo de elementos interruptores típicos.*

2.2.4 Receptor

El receptor es el dispositivo, o aparato eléctrico, que recibe la energía eléctrica para realizar algún tipo de trabajo o función. El elemento receptor se suele denominar ***carga*** (fig. 2.3), pudiendo ser una bombilla, un motor, una radio, un ordenador, etc.

En la figura 2.10 se representan los símbolos de algunos ejemplos de cargas.

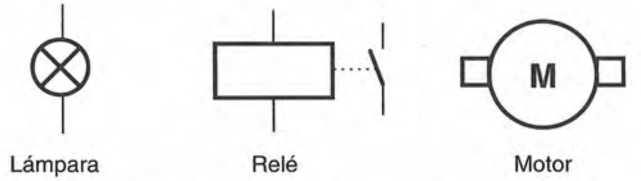


Figura 2.10. *Ejemplos típicos de elementos receptores (cargas).*

2.3 EFECTOS Y APLICACIONES DE LA CORRIENTE ELÉCTRICA

Las aplicaciones que tiene la energía eléctrica son múltiples y variadas (luz, fuerza mecánica, electromedicina, comunicaciones, etc.). En cualquier caso, todo se basa en hacer pasar un flujo electrónico ordenado (corriente eléctrica) a través de una determinada carga (receptor).

Un aspecto muy importante, que cabe destacar, es que la energía eléctrica se puede transportar de una forma muy rápida (300.000 km/s) y, además, de forma sencilla (cables).

Básicamente, el paso de una corriente eléctrica a través de todo conductor produce dos efectos muy significativos, de elevado interés práctico.

2.3.1 Efecto térmico

Como consecuencia del trabajo realizado en el transporte de las cargas eléctricas, ***la circulación de corriente a través de los conductores produce calor*** (fig. 2.11). Este fenómeno (llamado *efecto Joule* y que se estudiará más adelante en detalle) tiene sus aplicaciones y defectos.

El efecto térmico de la corriente eléctrica se aprovecha en, por ejemplo: estufas eléctricas, planchas, soldadores, etc.

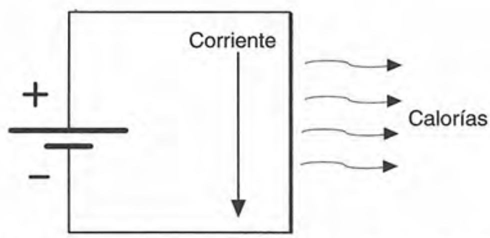


Figura 2.11. *La corriente eléctrica produce un efecto térmico (calienta los conductores).*

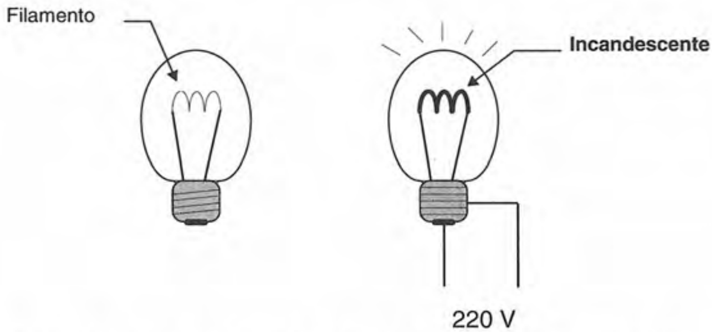


Figura 2.12. *El efecto luminoso de la bombilla se basa en el efecto térmico de la corriente eléctrica (el filamento se pone incandescente).*

Como defecto, tenemos el posible calentamiento de las líneas conductoras, y en, general, el calentamiento de todos los aparatos eléctricos cuya aplicación no sea la de producir calor (ordenadores, amplificadores, etc.). De forma extrema, debido a este fenómeno, se pueden hasta producir incendios si se llegan a quemar las instalaciones eléctricas.

Como consecuencia del elevado calentamiento de un conductor, se puede llegar a la incandescencia y así desprender luz. Es el caso de las bombillas, en que el *filamento* se pone incandescente y emite luz (fig. 2.12). Por medio de la corriente eléctrica también se puede producir un efecto luminoso no generado por la incandescencia de un filamento; es el caso de las lámparas de *neón, tubos fluorescentes*, etc.

2.3.2 Efecto magnético

La circulación de la corriente eléctrica a través de un conductor también genera fuerza de tipo magnético a su alrededor (fig. 2.13).

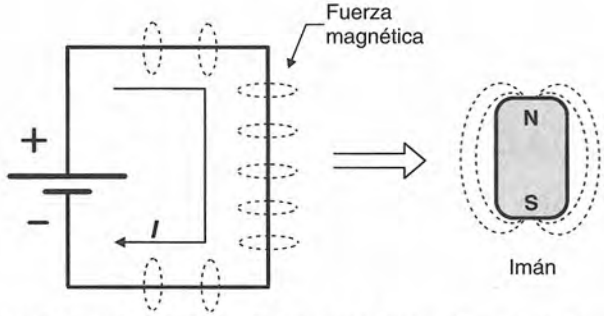


Figura 2.13. *La circulación de la corriente produce un campo magnético.*

Basándose en este efecto, aparecen los transformadores, motores, relés, electroimanes, etc. Precisamente, mediante este principio, se puede detectar y medir la intensidad eléctrica a través de los conductores sin necesidad de actuar sobre ellos; es una medida a distancia, por medio de un instrumento denominado *pinza amperimétrica,* con el cual se detecta y visualiza la magnitud de fuerza magnética y, en consecuencia, también la magnitud de la intensidad eléctrica que circula.

2.3.3 Efecto químico

Se denomina *electrólisis* a la *descomposición química que se produce en una solución conductora líquida, cuando se le hace pasar corriente eléctrica.* Al líquido se le denomina *electrólito* y a los elementos sumergidos a los cuales se les aplica la corriente *electrodos* (fig. 2.14). Al electrodo conectado al polo positivo (+) se le llama *ánodo* y al conectado al polo negativo (–) *cátodo.*

La circulación de la corriente por el electrólito da lugar a una reacción que produce la disociación de partículas, que se cargan eléctricamente (iones), y así se produce un transporte de electricidad por el líquido. En la electrólisis, como defecto, también se produce calor.

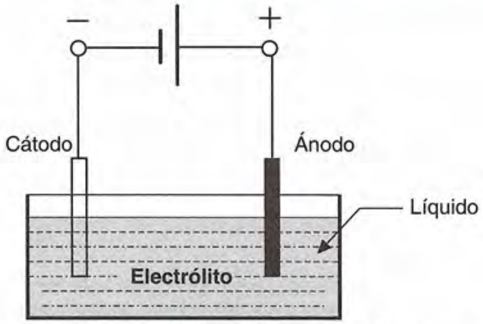


Figura 2.14. La circulación de la corriente a través de ciertas sustancias líquidas produce un efecto químico que se llama electrólisis.

La electrólisis tiene aplicación, por ejemplo, en la galvanización (baños metálicos), recarga de baterías, obtención de productos químicos, etc.

2.4 MEDIDA DE LA CORRIENTE Y LA TENSIÓN

2.4.1 Amperímetro

La intensidad de la corriente eléctrica se mide por medio de un instrumento denominado ***amperímetro*** (fig. 2.15*a*).

En su modelo clásico, la indicación se basa en una aguja cuyo desplazamiento depende de la magnitud de corriente (amperaje) que se le aplique. La aguja se mueve sobre una escala, que puede estar graduada en amperios (A), miliamperios (mA) o microamperios (μA) (fig. 2.15*b*). Asimismo cabe decir que este medidor puede formar parte de otro instrumento más complejo denominado *multímetro*.

Figura 2.15. a) *Símbolo general de un amperímetro.* b) *Típicamente, es un instrumento de aguja (galvanómetro), que puede estar graduado en amperios (A) o miliamperios (mA).*

Un amperímetro clásico, de aguja, funciona bajo el principio de generación de fuerza magnética a que da lugar la circulación de la corriente a través de un conductor (fig. 2.13).

Adelantando algunos conceptos, que serán ampliados en sus correspondientes apartados, diremos que dicho instrumento opera bajo el principio de un motor eléctrico (la energía eléctrica se convierte en energía mecánica).

La aguja, que es el elemento móvil indicador de la magnitud de intensidad, se mueve como reacción entre la fuerza del campo magnético que origina el paso de la corriente a través de una bobina y el campo magnético fijo producido por los polos de un imán. Este mecanismo se denomina *galvanómetro de bobina móvil*, y no sólo es utilizado como amperímetro, sino que tiene utilidad, en general, para obtener la indicación de cualquier otra magnitud (mediante la cual se pueda obtener una cierta corriente). Así, aparecen instrumentos de medida de voltaje (voltímetro), resistencia (óhmetro), potencia (vatímetro), temperatura (se hace una conversión de temperatura a corriente), etc.

La bobina, a través de la cual se hace circular la corriente a medir, es una cierta longitud de hilo de cobre arrollada, de manera que se concentra todo el campo magnético en un pequeño espacio.

El principio bajo el cual la aguja indicadora se mueve se basa en los efectos magnéticos de atracción y repulsión; ***polos iguales se repelen*** (fuerza de repulsión) y ***polos diferentes se atraen*** (fuerza de atracción). Al hacer circular corriente por la bobina del galvanómetro, en ésta se genera una fuerza magnética que interactúa con la fuerza magnética del imán. Y al tener la aguja la posibilidad de movimiento, según la magnitud de corriente que circule, se desplazará más o menos, indicando así una medida. Según el sentido de la corriente aplicada, el movimiento de la aguja puede ser hacia la derecha o hacia la izquierda. Normalmente, la indicación es hacia la derecha, por lo cual existe un tope que impide el desplazamiento de la aguja hacia la izquierda. Un muelle hace que la aguja adopte una posición fija, de reposo, indicación del cero, cuando no se le aplica corriente.

El amperímetro se debe conectar siempre en serie con la carga

Veamos a continuación la forma de utilización del amperímetro. En principio hay que saber algo muy importante de cara a la práctica: ***una incorrecta utilización del amperímetro puede hacer que éste se deteriore y, además, dar lugar a otros fallos eléctricos;*** se pueden incluso quemar contactos, cables, etcétera.

En la figura 2.16 se muestra un ejemplo de la utilización del amperímetro para la medición de la intensidad que circula por una bombilla conectada a una batería de 12 V.

Obsérvese la conexión en ***montaje serie;*** **es preciso interrumpir el circuito en algún punto, e intercalar el amperímetro entre los dos puntos.** De esta manera, la corriente que circula a través de la bombilla, y que será la misma que saldrá por el generador, también pasará a través del amperímetro; dando lugar a una indicación en función de la magnitud de intensidad que circule.

Otra cuestión a tener en cuenta, puesto que tratamos con corriente continua (c.c.), es que los terminales del amperímetro tienen polaridad; el terminal positivo (+) se debe conectar al punto positivo del circuito. Si se conecta al revés, se produce una indicación en sentido contrario (la aguja se desvía hacia atrás).

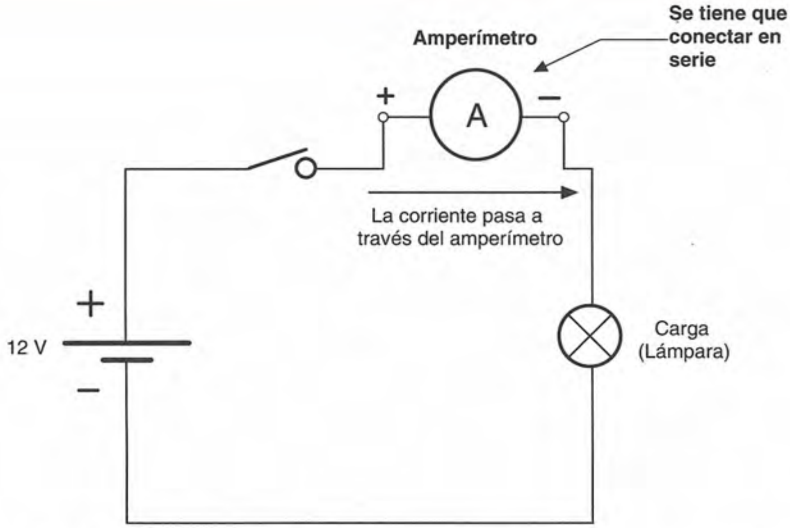


Figura 2.16. *El amperímetro se debe conectar siempre en montaje serie.*

Como es obvio, al hacer la medida, no interesa que se perturbe la magnitud de corriente que circula, por lo cual el amperímetro debe ofrecer la mínima oposición al paso de la corriente (su resistencia eléctrica interesa que sea lo más baja posible).

Actualmente, también existen amperímetros que presentan la indicación de la magnitud mediante números; son *instrumentos digitales,* con los cuales se obtiene una mayor resolución y precisión en general (fig. 2.17).

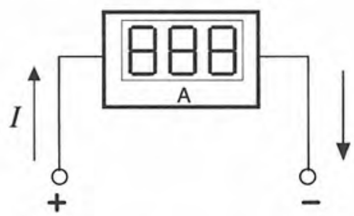


Figura 2.17. *En la actualidad, existen también amperímetros digitales (la magnitud se representa numéricamente).*

En general, a los instrumentos de indicación por medio de galvanómetro también se les denominan *analógicos.*

2.4.2 Voltímetro

Denominamos *voltímetro* al instrumento por medio del cual se puede medir la magnitud de la tensión eléctrica o *voltaje* (fig. 2.18).

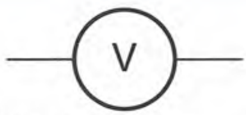


Figura 2.18*. Símbolo general de un voltímetro.*

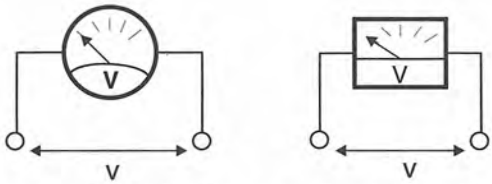


Figura 2.19*. Los voltímetros típicos también son galvanómetros (indicación por medio de aguja).*

En su versión analógica se trata de la misma estructura que el amperímetro: un galvanómetro (fig. 2.19). En este caso, se trata de que para una cierta tensión máxima la corriente a través de la bobina del galvanómetro dé lugar también a la indicación máxima. O sea, la tensión aplicada al voltímetro hace que circule una cierta corriente por su bobina que tiene por efecto el desplazamiento de la aguja.

Un voltímetro, pues, se basa en un amperímetro adaptado. Además de que la escala tiene otra graduación, es necesario que el voltímetro consuma el mínimo de corriente para obtener la indicación deseada. Así, pues, un voltímetro presenta una alta oposición al paso de la corriente (elevada resistencia eléctrica). Para lograr esto se puede actuar sobre las características de la bobina, en cuanto al número de espiras y resistencia del hilo, y también se puede poner una resistencia en serie con la bobina. Téngase en cuenta que de lo que se trata es de medir tensión, no corriente. Aunque, como es obvio, el principio de la medición se basa en detectar una mínima circulación de corriente, que será mayor cuanto mayor sea la magnitud de tensión (voltaje).

A diferencia del amperímetro, con el voltímetro no se pueden producir deterioros ni averías si se conecta mal; lo único que pasa es que las medidas obtenidas no son entonces correctas.

El voltímetro se debe conectar en ***paralelo,*** o sea, *entre los terminales del elemento del cual interese conocer su voltaje.*

En la figura 2.20 se muestra su forma correcta de conexión en un circuito simple; se mide la tensión en la carga (lámpara).

El voltímetro se debe conectar en paralelo con el elemento cuya tensión se quiera medir

Al igual que ocurre con el amperímetro, si la polaridad de conexión no es la adecuada, se produce una indicación en sentido contrario, o sea, hacia la izquierda, pero frenada por un tope. El borne positivo del voltímetro se debe conectar al punto de potencial positivo del circuito.

Estas cuestiones sobre polaridades son necesarias porque estamos tratando con corriente continua (c.c.), y en ésta existe polaridad (+ y –). Cuando se trabaja con corriente alterna, ya no se tienen en cuenta las cuestiones sobre polaridades, por lo cual los instrumentos (adaptados para c.a.) marcan siempre adecuadamente, independientemente de cómo se conecten los terminales.

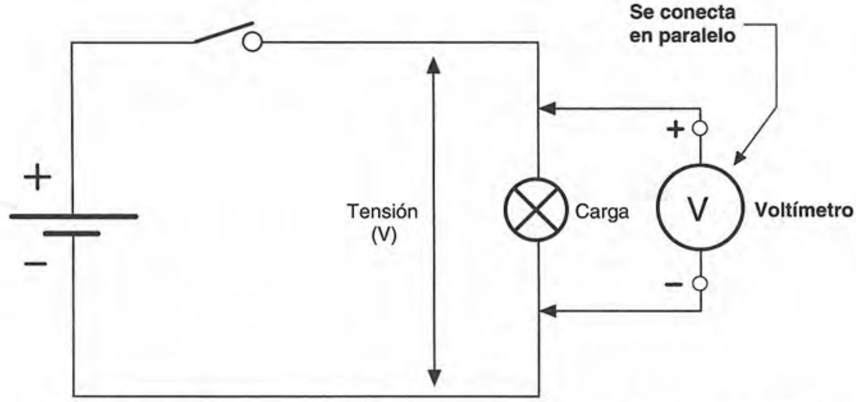


Figura 2.20. *El voltímetro se debe conectar siempre en montaje paralelo.*

Al igual que el amperímetro, la escala del voltímetro puede estar graduada en voltios (V), milivoltios (mV) o hasta microvoltios (µV). Asimismo, también se dispone de voltímetros digitales (fig. 2.21), cuya representación es numérica, con los cuales se obtiene una mayor resolución y precisión que con los de aguja (analógicos).

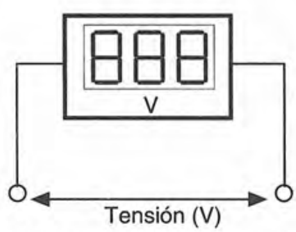


Figura 2.21. *Los voltímetros también pueden ser de representación numérica (digitales).*

Tanto el amperímetro como el voltímetro también se encuentran formando parte de un instrumento versátil denominado *multímetro* o *polímetro* (o simplemente *tester*). En sus modelos sencillos, de aguja (analógicos), básicamente, permiten la medida de amperaje, voltaje y resistencia, y resultan muy eficaces para la detección de averías tanto en elementos eléctricos como en componentes electrónicos (diodos, transistores, tiristores, etc.). En su versión más moderna, los digitales, además de una mayor resolución y precisión en las medidas, permiten otras funciones como la medida de capacidades (condensadores), medida de la ganancia de transistores (β), e incluso la medida de frecuencia (frecuencímetro). El multímetro, es un instrumento imprescindible para todo aquel que se tenga que relacionar con la electricidad o electrónica.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 2.1. Definir el concepto de *circuito eléctrico.*

Ejercicio 2.2. Explicar dos aplicaciones prácticas provechosas del efecto térmico a que da lugar la circulación de la corriente eléctrica.

Ejercicio 2.3. Indicar algunos casos donde el efecto térmico de la corriente resulta no deseado.

Ejercicio 2.4. Explicar cómo se produce el efecto luminoso en las bombillas clásicas de filamento.

Ejercicio 2.5. ¿En qué efecto de la corriente se basa el funcionamiento de los transformadores y motores?

Ejercicio 2.6. ¿Qué es un *galvanómetro*? ¿Bajo qué principio funciona?

Ejercicio 2.7. ¿Qué dos aplicaciones fundamentales tiene el galvanómetro?

Ejercicio 2.8. ¿De qué manera se debe conectar un amperímetro en los circuitos, en serie o en paralelo? ¿Cómo interesa que sea su resistividad, alta o baja?

Ejercicio 2.9. ¿De qué manera se debe conectar el voltímetro en los circuitos, en serie o en paralelo? ¿Cómo interesa que sea su resistividad, alta o baja?

Ejercicio 2.10. ¿Qué ocurre si en una medición en c.c. con un amperímetro o voltímetro se intercambian las puntas de medida?

Capítulo 3

Resistencia eléctrica

3.1 INTRODUCCIÓN

Se puede definir por *resistencia eléctrica* a la mayor o menor oposición que presentan los cuerpos al paso de la corriente eléctrica.

Todo material, por buen conductor que sea, presenta algo de resistencia al paso de la corriente. En los cuerpos no conductores de la corriente, o aislantes, la oposición es tan elevada que no permiten prácticamente ningún paso de corriente.

La corriente eléctrica es un movimiento de partículas –portadores de carga (electrones)– que en su trayectoria se encuentran cierta dificultad, o *resistencia*, para dicho movimiento debido a rozamientos y choques con otras partículas. Por eso, este factor de resistencia depende del tipo de material; los materiales son mejores conductores cuanto mayor sea su cantidad de electrones libres. De hecho, cada material tiene un coeficiente de resistividad característico, que se representa por ρ.

El grado de resistividad de un cuerpo también depende de sus dimensiones físicas (longitud y grosor). Experimentalmente se comprueba fácilmente que con un mismo valor de tensión se miden diferentes valores de intensidad según el tipo de material utilizado (aunque las medidas del conductor sean las mismas), lo cual evidencia el efecto de la resistividad eléctrica. Y también se puede comprobar que, para un mismo material (por ejemplo, cobre), la intensidad que se mide varía según las medidas del conductor.

3.2 RESISTIVIDAD DE LOS CONDUCTORES

La resistencia eléctrica de todo conductor viene dada por la expresión:

$$R = \rho \ \frac{l}{S}$$

siendo:

ρ: coeficiente de resistividad del material
l: longitud del conductor
S: sección del conductor

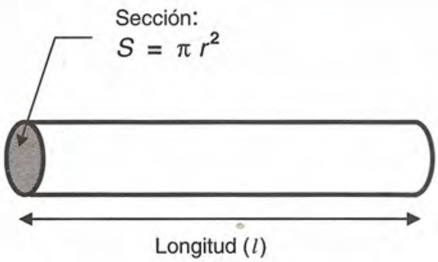


Figura 3.1. *La resistencia de un conductor depende de sus medidas físicas, sección* (S) *y longitud* (l).

Estas magnitudes físicas del conductor se ilustran en la figura 3.1. La sección del conductor viene determinada por su radio o diámetro (es el área de la punta circular del conductor):

$$S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 = \pi \frac{D^2}{4}$$

La unidad de resistencia eléctrica (R) es el ***ohmio,*** que se simboliza con la letra griega Ω.

En principio, 1 ohmio (1 Ω) se puede definir como la resistencia que ofrece un conductor que deja pasar la intensidad de 1 amperio al aplicarle la tensión de 1 voltio (fig. 3.2).

Cada sustancia tiene un coeficiente característico de resistividad ρ, que se expresa en Ω m/mm^2.

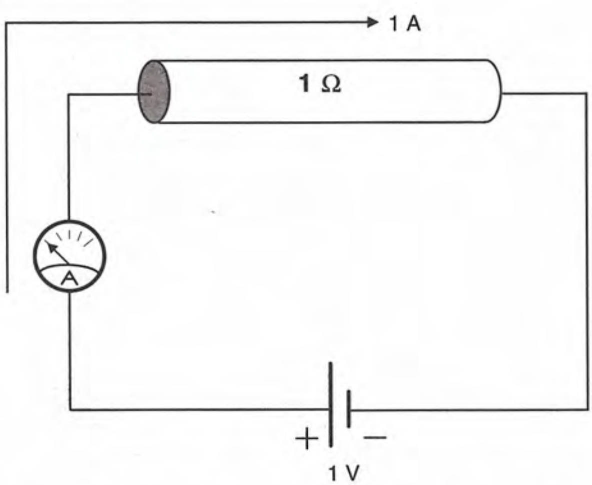


Figura 3.2. *Un conductor tiene una resistencia de 1 Ω si al aplicarle una tensión de 1 V circula una intensidad de 1 A.*

Ejemplo del valor de ρ de algunos materiales:

Plata: 0,0163
Cobre: 0,0175
Aluminio: 0,0283
Hierro: 0,13

Estos valores son para una temperatura de 20ºC, ya que, como más adelante se explicará, el coeficiente de resistividad ρ varía algo con la temperatura.

Así, como se deduce de la anterior expresión del valor de resistencia (*R*) de un conductor, la resistencia eléctrica es directamente proporcional a su longitud e inversamente proporcional a su sección:

A *mayor l* (longitud) ⇒ *mayor* resistencia (*R*)
A *mayor S* (sección) ⇒ *menor* resistencia (*R*)

Por lo tanto, cuanto más corto y más grueso sea un conductor menor resistencia tendrá, y mejor conducirá la corriente. Y a mayor longitud y menor grosor, se obtendrá peor conducción puesto que aumentará su resistencia eléctrica.

Adelantamos el concepto de que *cuando circula corriente por un conductor se produce una pérdida de energía eléctrica, que se convierte en calor (ley de Joule), que es mayor cuanto mayor es la resistencia del conductor y la intensidad que circula.*

Por esta razón en unas aplicaciones es necesario utilizar conductores de más sección que en otras. Por ejemplo, para la alimentación del motor eléctrico de arranque de un coche se utilizan unos cables conductores de bastante sección (los más gruesos de la instalación), con el fin de obtener la mínima resistencia, debido a la alta intensidad de corriente que debe circular. Si se ponen unos conductores demasiado delgados, la resistencia es mayor y, como consecuencia del elevado amperaje, la pérdida de energía eléctrica convertida en calor podría hacer hasta que se quemara la instalación, pudiendo dar lugar a un incendio.

3.3 DENSIDAD DE CORRIENTE

El concepto de *densidad de corriente, J,* se define como *la magnitud de intensidad que circula por unidad de sección de un conductor*. O sea, el concepto de *densidad* da cuenta de la cantidad de electrones que circula por la unidad de sección. Es la relación entre la intensidad y la sección:

$$\text{densidad de corriente} = \frac{\text{intensidad}}{\text{sección}}$$

Su unidad viene dada en amperios por milímetro cuadrado (A/mm^2):

$$J = \frac{I}{S} \Rightarrow \frac{1\,\text{A}}{1\,\text{mm}^2} = 1\,\text{A/mm}^2$$

A efectos prácticos, cuanto mayor es la densidad de corriente más se calienta el conductor. Es por esto que, para una misma magnitud de corriente, en un conductor delgado se produce más calentamiento que en otro más grueso, debido a que en el conductor delgado la densidad de corriente es mayor; de hecho, en los dos conductores, al ser la misma la magnitud de corriente, la cantidad de electrones que circularán será la misma, pero en el delgado la dificultad de movimiento es mayor (choques, rozamientos, etc.), y ello da lugar a una mayor *resistencia* a la circulación.

En el caso de una bombilla, por ejemplo, aunque el valor de intensidad es el mismo en cualquier punto del circuito, sólo en el filamento se produce un elevado calentamiento, que lo pone incandescente; es donde se localiza la mayor densidad de corriente, debido a su baja sección. Veamos un caso numérico.

Ejemplo:

Un circuito con unos conductores de S = *1 mm² alimentan a una bombilla cuya sección del filamento es de 0,004 mm², y la intensidad que circula es de 0,5 A.*

La densidad de corriente en los conductores del circuito será:

$$\frac{I}{S} = \frac{0{,}5\ \text{A}}{1\ \text{mm}^2} = 0{,}5\ \text{A/mm}^2$$

Y la densidad de corriente en el filamento:

$$\frac{I}{S} = \frac{0{,}5\ \text{A}}{0{,}004\ \text{mm}^2} = 125\ \text{A/mm}^2$$

Esta alta densidad de corriente da lugar al elevado calentamiento, que tiene por resultado la incandescencia y, en consecuencia, la emisión luminosa.

Cuanto mayor es la densidad de corriente, más se calientan los conductores

3.3.1 Fusibles

Otro caso donde se localiza una alta densidad de corriente es en los **fusibles.** Son elementos conductores que constituyen la parte más débil del circuito (o instalación), con el fin de que si se produce algún tipo de sobrecarga (exceso de corriente), se destruya el fusible y de esta manera se interrumpa el paso de corriente a través del circuito. Los fusibles son, pues, dispositivos de protección frente a sobrecargas (o cortocircuitos) (fig. 3.3).

Para lograr este efecto destructivo controlado del fusible, el tipo de material conductor y sección del fusible se adecuan a los casos prácticos. Aparecen así fusibles de 1 A, 5 A, 15 A, de acción rápida o retardada, etc. La destrucción del fusible se produce por fusión del material (de ahí su denominación) debido a la elevada temperatura que adquiere al circular la elevada intensidad de corriente provocada por la sobrecarga.

Supongamos un circuito con unos conductores de sección 0,5 mm^2, por el cual circula una corriente de 1 A en régimen normal. La sección del hilo conductor del fusible es de 0,1 mm^2. En régimen normal, la densidad de corriente en las líneas conductoras y el fusible será:

Línea conductora:

$$\frac{I}{S} = \frac{1\ \text{A}}{0{,}5\ \text{mm}^2} = 2\ \text{A/mm}^2$$

Fusible:

$$\frac{I}{S} = \frac{1\ \text{A}}{0{,}1\ \text{mm}^2} = 10\ \text{A/mm}^2$$

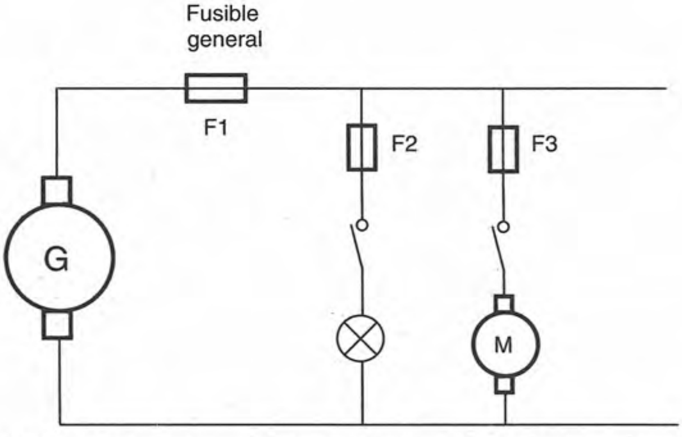


Figura 3.3. *Los fusibles son elementos de protección eléctrica. F1 es un fusible de protección general, y F2 y F3 lo son únicamente de la lámpara y del motor respectivamente.*

En el caso de una sobrecarga (o un cortocircuito), por ejemplo, si la corriente aumenta a 10 A, la densidad en el fusible será de:

$$\frac{I}{S} = \frac{10\ \text{A}}{0{,}1\ \text{mm}^2} = 100\ \text{A/mm}^2$$

lo cual deberá producir un calentamiento tal que dé lugar a la fusión del hilo del fusible, interrumpiéndose entonces el paso de corriente por el circuito y protegiéndose así toda la instalación (líneas conductoras y demás componentes).

De no existir el fusible, la densidad de corriente en las líneas conductoras sería de 10 A/0,5 mm^2 = 20 A/mm^2, lo cual podría dar lugar a un calentamiento anómalo y, además, poner en peligro otros elementos como interruptores, conexiones, bases de enchufe, etc.

En general, la densidad de corriente en todos los elementos eléctricos (cables, motores, transformadores, etc.) no debe superar unos determinados valores por cuestiones de seguridad eléctrica.

Las líneas conductoras no deben calentarse por encima de una cierta temperatura, normalizada según la aplicación; por ello, se fijan unos determinados valores máximos de amperaje en función de la sección de los conductores.

La densidad de corriente máxima permitida en las líneas conductoras depende del tipo de material y de la facilidad de evacuación del calor.

En las líneas conductoras situadas en el interior de aparatos (motores, alternadores, transformadores, etc.), se permiten densidades de corriente más bajas que si las líneas se encuentran exteriormente, porque las posibilidades de refrigeración son menores.

3.4 EJEMPLOS DE CÁLCULO SOBRE LA RESISTENCIA DE CONDUCTORES

Ejemplo 1:

Cálculo de la resistencia de 100 m de hilo de cobre de 4 mm de diámetro.

Como el coeficiente de resistividad (ρ) del cobre es 0,0175 Ω m/mm^2, y a 4 mm de diámetro le corresponde una sección de:

$$S = \pi \frac{D^2}{4} = 3{,}1416 \times \frac{4^2}{4} \approx 12{,}57 \text{ mm}^2$$

Obtenemos así:

$$R = \rho \frac{L}{S} = 0{,}0175 \times \frac{100}{12{,}5} \approx 0{,}14\ \Omega$$

Ejemplo 2:

Cuál deberá ser el diámetro de un hilo de cobre de 20 m de largo, para que la resistencia sea de 0,5 Ω.

Según estos datos, se obtiene que la sección deberá ser:

$$R = \rho \frac{l}{S} \Rightarrow S = \frac{l\,\rho}{R} = \frac{20 \times 0{,}0175}{0{,}5} = 0{,}7 \text{ mm}^2$$

A lo cual le corresponde un diámetro de:

$$S = \pi \frac{D^2}{4} \Rightarrow D = \sqrt{\frac{4\,S}{\pi}} = 0{,}94 \text{ mm}$$

Ejemplo 3:

¿Cuál deberá ser la longitud de un hilo conductor de hierro de 2 mm de diámetro para que su resistencia sea de 4 Ω? (coeficiente de resistividad del hierro: ρ *= 0,13).*

En principio, calculamos el valor de la sección:

$$S = \pi \, \frac{D^2}{4} \approx 3{,}14 \times \frac{2^2}{4} \approx 3{,}14 \text{ mm}^2$$

La longitud deberá, ser:

$$R = \rho \, \frac{l}{S} \Rightarrow l = \frac{R\,S}{\rho} = \frac{4 \times 3{,}14}{0{,}13} \approx 96{,}6 \text{ m}$$

3.5 CONDUCTANCIA

Se define la conductancia como *la mayor o menor facilidad que tienen los conductores para dejar pasar la corriente eléctrica.*

Es la inversa de la resistencia, por lo cual se expresa:

$$\text{conductancia} = \frac{1}{R}$$

Se simboliza por G, y su unidad es el *siemens* (S):

$$G = \frac{1}{R} \Rightarrow 1 \text{ S} = \frac{1}{1\,\Omega}$$

Así, *1 siemens es la conductancia de una resistencia de 1 ohmio.*

Cuanto mayor es la conductancia, menor es, por tanto, la resistencia; la resistencia es la inversa de la conductancia:

$$R = \frac{1}{G}$$

Ejemplos:

1) Conductancia de un hilo de cobre cuya resistencia es de 4 Ω:

$$R = 4\,\Omega \Rightarrow G = \frac{1}{R} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \text{ S}$$

2) Conductancia de un cable de hierro cuya resistencia es de 12 Ω:

$$R = 12\,\Omega \Rightarrow G = \frac{1}{R} = \frac{1}{12} = 0{,}083 \text{ S}$$

Como se deduce, a mayor número de siemens, mayor es la conductancia (menor oposición se encuentra la circulación de la corriente).

3.6 VARIACIÓN DE LA RESISTENCIA CON LA TEMPERATURA

En general, en los conductores (cobre, aluminio, hierro, etc.), *la resistencia aumenta al aumentar la temperatura*. Por ello, el valor resistivo de las líneas conductoras va aumentando conforme se van calentando debido a la circulación de la corriente.

Es por ello que los aparatos eléctricos como planchas, estufas eléctricas, bombillas, etc., consumen más corriente en el momento de su conexión que cuando llevan un cierto tiempo funcionando; en frío, la resistencia es menor y, en consecuencia, puede circular mayor intensidad.

En los conductores, la resistencia (R) aumenta al aumentar la temperatura (T): $\uparrow T \Rightarrow \uparrow R$

No obstante, en ciertos materiales la resistencia se mantiene constante o disminuye al aumentar la temperatura. En el *constantán* (aleación de cobre y níquel) la resistencia se mantiene constante, no varía con la temperatura. En cambio, en el carbón la resistencia disminuye al aumentar la temperatura.

Un caso muy importante en electrónica es el de los materiales **semiconductores** (normalmente *silicio*); *en los semiconductores la resistencia disminuye al aumentar la temperatura.*

Adelantamos que los materiales semiconductores, como su nombre indica, tienen unas características intermedias entre los conductores y los aislantes (presentan bastante oposición al paso de la corriente, tienen baja conductancia). En los átomos de este tipo de materia aparecen 4 electrones en la última capa, que es un intermedio entre el máximo (8) y el mínimo (1). Y en cuanto a la temperatura:

En los materiales semiconductores, la resistencia (R) disminuye al aumentar la temperatura: $\uparrow T \Rightarrow \downarrow R$

El silicio es el material base para la fabricación de todos los componentes electrónicos, desde los más sencillos (diodo) hasta los más complejos (microprocesadores).

Es por ello que en electrónica se tienen muy en cuenta las cuestiones sobre refrigeración de los componentes, ya que tienden a conducir más corriente al calentarse, lo cual da lugar, a su vez, a un aumento de la temperatura; este proceso puede llevar a un aumento progresivo de la corriente y la temperatura que puede estropear los componentes.

3.6.1 Coeficiente de temperatura

Cada material tiene un coeficiente de temperatura característico (α) que da cuenta de la magnitud de la variación de la resistencia en función de la variación de temperatura. El coeficiente de resistividad se puede expresar en función de la temperatura por la fórmula:

$$\rho_c = \rho_f + \rho_f \; \alpha \; \Delta T \; \Rightarrow \; \rho_c = \rho_f \, (1 + \alpha \; \Delta T)$$

siendo:
ρ_c = coeficiente de resistividad en caliente
ρ_f = coeficiente de resistividad en frío
ΔT = variación de temperatura $(T_2 - T_1)$
α = coeficiente de temperatura del material

y como el valor de resistencia *(R)* de un conductor depende de su coeficiente de resistividad (ρ):

$$R = \rho \; \frac{L}{S}$$

al variar ρ también varía *R*.

En general, pues, la resistencia de un conductor en función de la temperatura se puede expresar por:

$$\boxed{R_c = R_f \; (1 + \alpha \; \Delta T)}$$

Coeficientes de temperatura (α) de algunos materiales:

Hierro: 0,0050
Níquel: 0,0048
Aluminio: 0,00446
Cobre: 0,00393
Plata: 0,0038
Oro: 0,0034
Constantán: ≈ 0
Carbón: –0,0040

Ejemplos prácticos:

1. *Si el valor de resistencia de una línea conductora de cobre es de 10 Ω a la temperatura de 25°C, ¿cuál sería su resistencia a la temperatura de 60°C?*

Como el coeficiente de temperatura del cobre es de 0,00393, y la variación de temperatura es 35°C ($\Delta T = 35$):

$$\boxed{R_c = R_f \; (1 + \alpha \; \Delta T) = 10 \; (1 + 0{,}00393 \times 35) = 11{,}38 \; \Omega}$$

2. *El valor de resistencia del bobinado, de cobre, de un motor es de 47Ω a la temperatura de 20°C. Si la temperatura aumenta a 80°C, ¿cuál será el valor de resistencia del bobinado?*

Datos que tenemos:

$R_f = 47 \; \Omega$

$\alpha = 0{,}00393$
$\Delta T = 80–20 = 60°C$

Aplicando la fórmula:

$$\boxed{R_c = R_f\,(1+\alpha\,\Delta T) = 47\ (1+0{,}00393\times 60) = 58{,}08\ \Omega}$$

3.7 LA RESISTENCIA COMO COMPONENTE ELÉCTRICO-ELECTRÓNICO

El efecto de oposición al paso de la corriente, o resistencia eléctrica, aunque en algunos casos constituye un defecto, también tiene sus utilidades.

Por ejemplo, el efecto resistivo que aparece en las líneas conductoras da lugar a pérdidas de energía eléctrica, y por ello constituye un defecto; es un efecto no deseado. Por otra parte, el calor generado en las estufas eléctricas, soldadores eléctricos, etc., se obtiene, y de una forma controlada, gracias a las calorías generadas por el paso de la corriente a través de materiales conductores que tienen cierta resistencia; en estas aplicaciones, se aprovecha el desprendimiento de energía calorífica (que, en el caso de las líneas conductoras, constituye una pérdida de energía).

Por otra parte, existe un tipo de componente, imprescindible en todos los aparatos electrónicos, que se denomina simplemente **resistencia** o **resistor.** Es un componente muy barato y que es utilizado en cualquier aplicación electrónica (amplificadores, calculadoras, TV, ordenadores, etc.). Su simbología típica se muestra en la figura 3.4.

Estos componentes, se fabrican con el objetivo de obtener un cierto valor de resistencia, como, por ejemplo, 1 Ω, 47 Ω, 150 Ω, 2700 Ω, 470.000 Ω, etc.

Gracias a estos componentes, se consigue un control de la corriente en los circuitos eléctricos-electrónicos, así como ciertos valores de tensión.

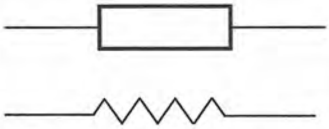


Figura 3.4. *Simbología típica de una resistencia. Normalmente se utiliza la de forma rectangular.*

La unidad fundamental es el ohmio (Ω), pero también se emplea el múltiplo **kΩ** (K), que significa 1000. Así, aparece también el valor 1K = 1000 Ω.

Ejemplos de expresiones*:*

2K = 2000 Ω

1,5 K = 1K5 = 1500 Ω
4K7 = 4,7 K = 4700 Ω
10K = 10.000 Ω
120K = 120.000 Ω

Asimismo, también se utiliza el múltiplo MΩ, que significa 1.000.000 Ω. Aparecen así expresiones:

1 MΩ = 1.000.000 Ω
1,2 MΩ = 1M2 = 1.200.000 Ω
4M7 = 4,7M = 4.700.000 Ω

Ejemplos prácticos de expresión de valores de resistencias:

4,7 Ω, 10 Ω, 47 Ω, 390 Ω, 1K8, 8K2, 22K, 150K, 1M, 4M7, etc.

3.7.1 Tipos de resistencias

Existen diversos tipos de resistencias, según cómo estén fabricadas, su potencia, precisión, etc.

Bobinadas

Un tipo de resistencia es la *bobinada*. Su valor resistivo se obtiene basándose en una cierta longitud y sección de hilo de determinado material. Para que sus dimensiones sean mínimas, dicho hilo se monta en forma arrollada, de ahí el término de *resistencias bobinadas*. Son resistencias para aplicaciones de una cierta potencia.

La potencia de una resistencia es independiente de su valor óhmico (Ω), y sólo tiene que ver en cuanto a la potencia eléctrica que puede soportar. Y como la potencia eléctrica se traduce en calor, el que una resistencia sea de más o menos potencia da cuenta únicamente de la temperatura que puede soportar, como consecuencia del paso de la corriente. La mayor o menor potencia de la resistencia repercute sobre sus dimensiones; a mayor potencia, mayores dimensiones. La potencia nominal depende principalmente de las dimensiones físicas de la resistencia, ya que esto tiene que ver con la facilidad para evacuar el calor.

Como la potencia se expresa en vatios (W) –lo cual será explicado en el correspondiente capítulo– existen resistencias de 10 Ω/0,5 W, 1 kΩ/0,5 W, 2 Ω/5 W, 100 kΩ/0,5 W, 22 Ω/10 W, etc.

Resistencias de carbón

Las resistencias normalmente utilizadas en electrónica son las denominadas de ***carbón,*** debido a que su valor resistivo se obtiene por medio de polvo de carbón mezclado con un aglomerante. Son resistencias de pequeñas dimensiones y baja potencia, y de bajo precio. Se construyen normalmente con tolerancias de ±5% y ±10% (tolerancia es el margen de variación de su valor nominal).

Son las normalmente utilizadas en electrónica, excepto en las aplicaciones que se requiera cierta precisión, en que se usan otras de más calidad.

Resistencia de película

Son resistencias de mayor precisión que las de carbón, y se suelen utilizar en circuitos electrónicos como instrumentación, electromedicina, etc., y, en general, en aquellas aplicaciones en las que se requiera una cierta precisión. Hay que tener en cuenta que, como en todos los componentes, las resistencias también tienen un factor de tolerancia y son susceptibles de variar en función de la temperatura, tensión, etc.

En las resistencias de película, su valor óhmico se obtiene actuando sobre las dimensiones y tipo de materia de una película de material resistivo aplicada sobre la superficie de una varilla cilíndrica. En estas resistencias se obtienen tolerancias de un 1% (y menos), y con un bajo coeficiente de temperatura (variación del valor con la temperatura). Son, al igual, que las de carbón, de baja potencia.

Se distinguen tres tipos de resistencias de película, según el material utilizado: las de *película de carbón*, las de *película de óxidos metálicos* y las de *película metálica*.

3.7.2 Escala de valores de resistencia

Los fabricantes producen las resistencias con unos valores prefijados, lo cual quiere decir que no se comercializan resistencias de cualquier valor resistivo. Según la tolerancia, se pueden obtener con algunas variaciones en la escala de valores. Las tolerancias de las resistencias normalmente utilizadas son del ±5% y del ±10%.

Escala de valores según la tolerancia

5%	10%	5%	10%
10	10	33	33
11		36	
12	12	39	39
13		43	
15	15	47	47
16		51	
18	18	56	56
20		62	
22	22	68	68
24		75	
27	27	82	82
30		91	

Los valores comerciales que se encuentran son los indicados en la tabla de la página anterior, y también multiplicados (o divididos) por 10. Por ejemplo, el valor normalizado de 47, puede dar lugar a los valores: 4,7 Ω, 47 Ω, 470 Ω, 4,7 kΩ, 47 kΩ, 470 kΩ, 4,7 MΩ.

Así, valores normalizados que se pueden encontrar en las resistencias normalmente utilizadas en electrónica, las de carbón, por ejemplo, pueden ser: 10 Ω, 120 Ω, 180 Ω, 220 Ω, 330 Ω, 1 kΩ, 1,5 kΩ, 390 kΩ, 1 MΩ,...

3.7.3 Codificación del valor. Código de colores

El valor óhmico de las resistencias normalmente utilizadas en electrónica se representa por medio de un código de colores. Excepto las resistencias de potencia, que son las bobinadas, usualmente todas se expresan así. Consiste en pintar unas bandas de colores alrededor del cuerpo de la resistencia. Cada color representa un número; de esta manera se representa el valor nominal de la resistencia y su tolerancia (margen de variación). El valor asignado a los colores que determinan el valor de la resistencia es el indicado en la siguiente tabla:

Código de colores estándar

Color	*Valor*
Negro	0
Marrón	1
Rojo	2
Naranja	3
Amarillo	4
Verde	5
Azul	6
Violeta	7
Gris	8
Blanco	9

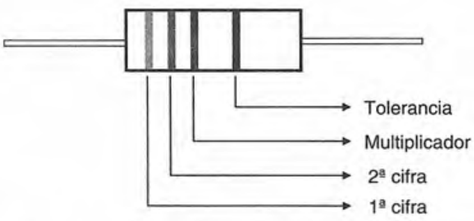


Figura 3.5. *Estructuración del código de colores en las resistencias.*

En la figura 3.5 se ilustra este sistema de codificación. El primer dígito del valor (el más significativo) corresponde al de la banda de color más cercana a uno de los terminales. El siguiente color indica el valor del segundo dígito. Y el tercer color indica el valor que hay que poner como exponente a 10, por cuya cantidad hay que multiplicar el número resultante de las primeras dos cifras; se puede ver como la cantidad de ceros que hay que añadir a las dos primeras cifras. El cuarto color indica la tolerancia de la resistencia, que puede ser:

Colores asignados al valor de la tolerancia:	
Plata	10%
Oro	±5%
Rojo	±2%
Marrón	±1%

Cuando no existe banda de color específico para la tolerancia (color del cuerpo de la resistencia), la tolerancia es del 20% (son resistencias normalmente no empleadas). Las tolerancias de las resistencias más utilizadas en electrónica, que son las de carbón, son del **5%** y **10%,** por lo cual las bandas que usualmente aparecen son de color **plata** y **oro.**

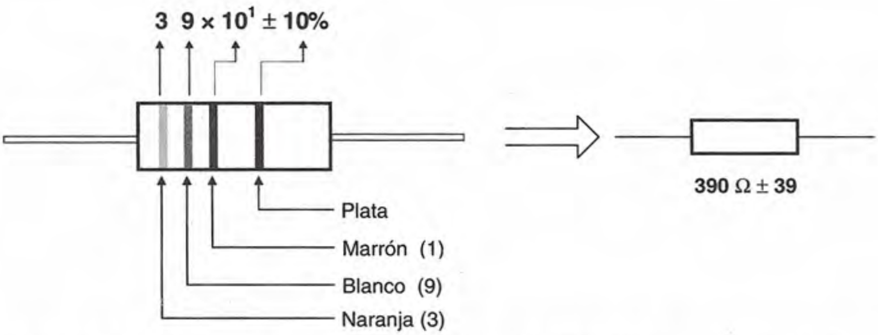


Figura 3.6. *Ejemplo práctico de la codificación del valor de una resistencia.*

Ejemplos:

Supongamos una resistencia con los colores que se indican a continuación (fig. 3.6):

1ª Banda: Naranja ⇒	Primera cifra = 3
2ª Banda: Blanco ⇒	Segunda cifra = 9
3ª Banda: Marrón ⇒	Multiplicación por $10^1 = 10$
4ª Banda: Plata ⇒	Tolerancia = ±10%

Esto da lugar al valor nominal de 390 Ω, con una tolerancia de ±10%, lo cual significa que el valor nominal puede variar en 39 Ω por encima o por debajo. Así pues, el valor de la resistencia se podría encontrar entre el margen:

Valor máximo: 390 + 10% de 390 = 429 Ω
Valor mínimo: 390 – 10% de 390 = 351 Ω

Si el valor de la tercera banda (multiplicador) es el negro (0), no se añade ningún cero, ya que equivale a multiplicar por $10^0 = 1$. Para los demás colores de la tabla, el color del multiplicador, se puede ver como la cantidad de ceros que hay que añadir a las dos primeras cifras. No obstante, hay que tener en cuenta que el color de esta banda (multiplicador) también puede ser **oro** o **plata,** y en este caso se produce una división del valor de las primeras dos cifras:

Colores del multiplicador que producen una división:

Oro: Se multiplica por $10^{-1} = 0{,}1$ (es como dividir por 10).
Plata: Se multiplica por $10^{-2} = 0{,}01$ (es como dividir por 100).

Ejemplo:

1ª Banda: Amarillo	⇒	Primera cifra = 4
2ª Banda: Violeta	⇒	Segunda cifra = 7
3ª Banda: Oro	⇒	Multiplicación por $10^{-1} = 0{,}1$
4ª Banda: Plata	⇒	Tolerancia = ±10%

Esto da lugar al valor de 4,7 Ω (fig. 3.7). Al ser la tercera banda (multiplicador) de color ***oro,*** las primeras dos cifras (47) se multiplican por $10^{-1} = 0{,}1$; que equivale a dividir por 10.

Aunque este es el sistema normalmente empleado, también existe la codificación por medio de cinco bandas de colores; en la que las tres primeras corresponden a las tres primeras cifras, la cuarta es el multiplicador y la quinta la tolerancia.

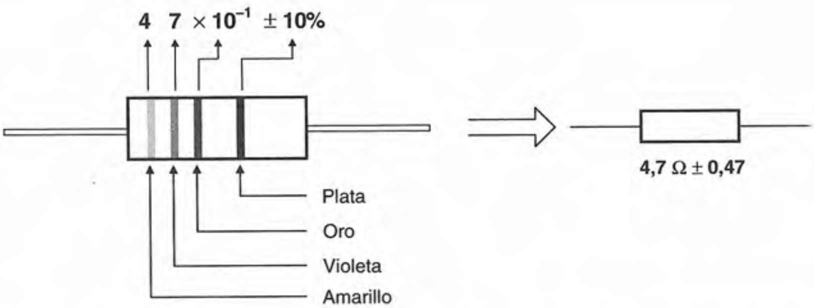


Figura 3.7. *Ejemplo práctico de la codificación del valor de una resistencia; en este caso, el valor del multiplicador es $10^{-1} = 0{,}1$ (oro) lo que implica una división por 10.*

3.7.4 Potenciómetros

Los potenciómetros son resistencias cuyo valor se puede variar por medio de un eje. Son los elementos utilizados para el ajuste de volumen en aparatos de sonido, el brillo en un televisor, los decibelios de realce o atenuación en ecualizadores, etc. En general, son utilizados cuando interesa poder hacer la graduación de ciertas magnitudes en los aparatos electrónicos.

En la figura 3.8 se muestra su simbología. Se trata de una resistencia con tres terminales; dos de ellos corresponden a los terminales de la resistencia, y el otro es móvil. El terminal móvil, cuando es actuado, puede hacer contacto con cualquier punto de la resistencia nominal. Así, entre el terminal móvil y cualquiera de los otros dos terminales se puede realizar el ajuste de un valor de resistencia entre 0 Ω y el valor máximo. En la figura 3.9 se ilustran unos ejemplos.

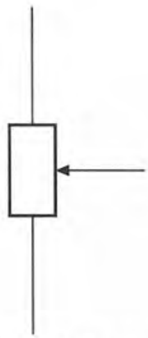


Figura 3.8. *Símbolo de un potenciómetro.*

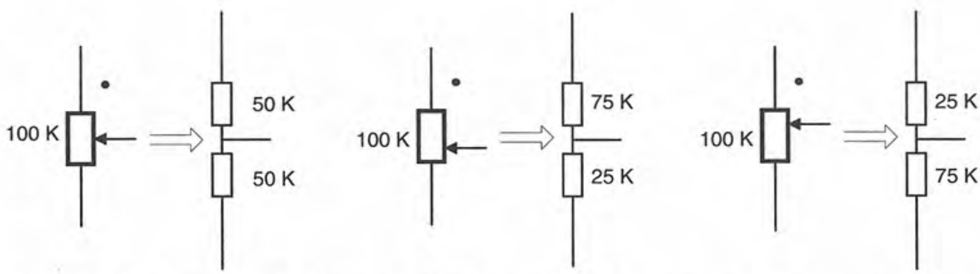


Figura 3.9. *Ejemplo de diferentes valores resistivos que aparecen entre el cursor y los extremos, según la posición del cursor en un potenciómetro.*

Los potenciómetros pueden ser de variación lineal o logarítmica. En los de tipo lineal, la magnitud de variación de resistencia es proporcional a la variación de giro del cursor. En los de tipo logarítmico, la resistencia varía según una escala logarítmica en función de la posición del cursor; por ejemplo, son utilizados en los equipos de sonido para variar el volumen, para conseguir una variación del nivel sonoro equiparable a la respuesta del sistema auditivo (ya que la respuesta del oído es de forma logarítmica).

Utilizando sólo dos de los terminales del potenciómetro, se obtiene lo que se llama una *resistencia variable* (fig. 3.10); se puede ajustar un valor entre 0 Ω y un máximo (el nominal del potenciómetro).

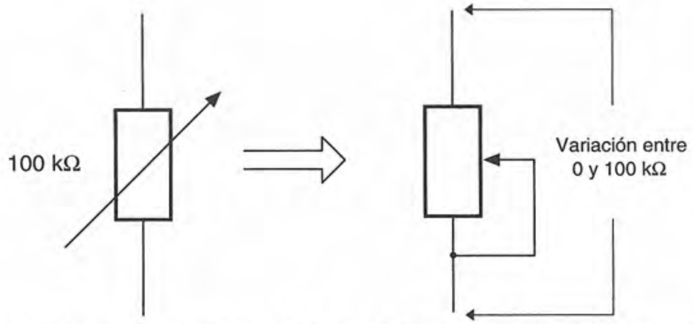


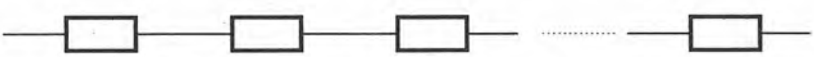
Figura 3.10. *Una resistencia variable se obtiene por medio de un potenciómetro.*

Existen unos tipos de potenciómetros, de pequeñas dimensiones, que se utilizan para realizar ajustes en los aparatos electrónicos, pero de forma interna (no accesibles al usuario); el control se realiza mediante un pequeño destornillador.

3.8 MONTAJE DE RESISTENCIAS EN SERIE Y PARALELO

3.8.1 Circuito serie

En general, la conexión de componentes en serie consiste en conectar un componente tras otro, formando una cadena, según se muestra en la figura 3.11.



$$\boxed{R_T = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_n}$$

Figura 3.11. *Circuito de resistencias en montaje serie.*

Conectar resistencias en serie equivale a aumentar la longitud de un conductor; se aumenta la resistencia. Por ello, en el montaje serie, se consigue un valor de resistencia que es la suma de los valores de todas las resistencias conectadas, lo cual se puede expresar:

$$R_T = R_1 + R_2 + R_3 + ... + R_n$$

Ejemplo:

La conexión de una resistencia de 12 Ω, una de 82 Ω y otra de 4,7 Ω da lugar al efecto resistivo de (fig. 3.12):

$$R_T = 12 + 82 + 4{,}7 = 98{,}7\ \Omega$$

Esta forma de conexión permite, por lo tanto, obtener un valor de resistencia mayor al del valor más alto de las resistencias utilizadas, pudiéndose conseguir entonces casi cualquier valor de resistencia.

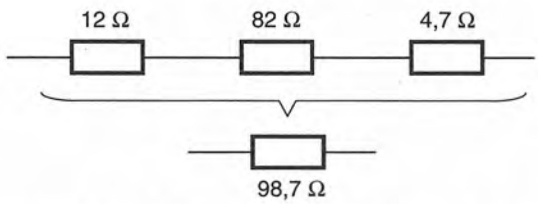


***Figura 3.12.** El efecto resistivo de las tres resistencias en serie es equivalente al de una resistencia de 98,7 Ω.*

Otra característica de los montajes serie, en general, es que el valor de la corriente que circula es el mismo en cualquier punto del circuito; así, la intensidad es la misma en todas las resistencias (fig. 3.13). Y si en vez de tratarse de resistencias fueran bombillas (u otro tipo de carga resistiva), el efecto es el mismo.

Características del circuito serie:

La resistencia total es la suma de los valores de todos los componentes
El valor de intensidad que circula es el mismo en todos los componentes

3.8.2 Circuito paralelo

En esta forma de montaje, los terminales de cada resistencia se conectan con los terminales de las demás resistencias utilizadas; o sea, de forma paralela (fig. 3.14). *La conexión de resistencias en paralelo equivale a un aumento de la sección de un conductor; se disminuye el valor resistivo,* con lo cual se mejora la circulación de la corriente.

El valor de resistencia que se obtiene siempre es más bajo que el de la resistencia de más bajo valor del montaje.

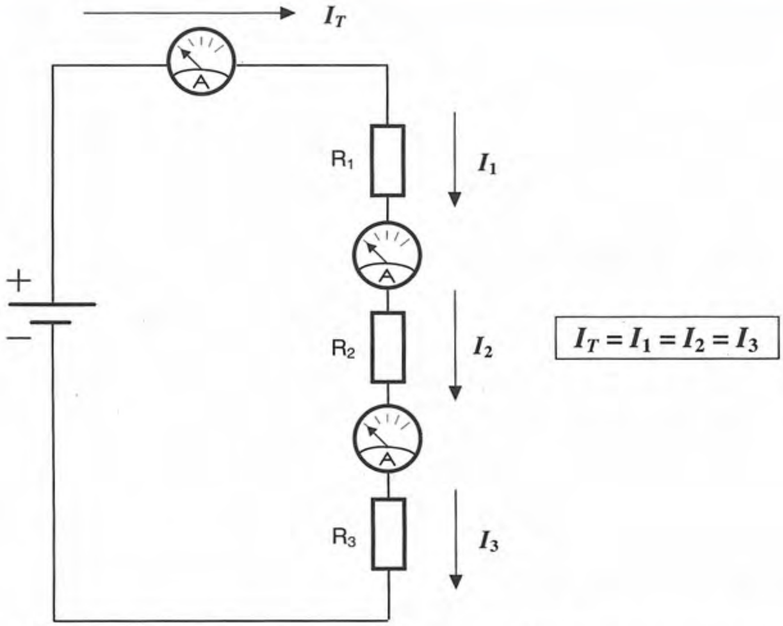
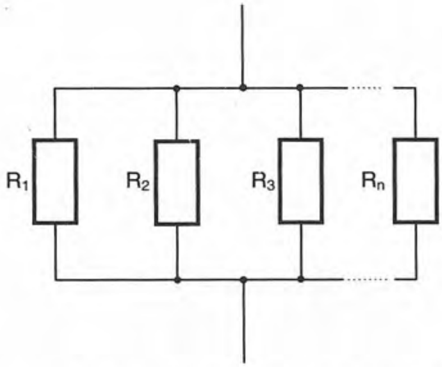


Figura 3.13. *En los circuitos serie, en general, por todos los componentes circula el mismo valor de corriente.*



$$R_T = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\ldots+\frac{1}{R_n}}$$

Figura 3.14. *Circuito de resistencias en montaje paralelo.*

Partiendo del concepto de *conductancia, G,* (inverso de la resistencia), cada una de las resistencias, como se puede deducir, proporcionará un paso de corriente; y cada una de ellas contribuirá, por tanto, a facilitar la circulación (es como aumentar la sección de un conductor). Así, cuanto más resistencias se conecten en paralelo, mayor intensidad de corriente total podrá circular.

Acudiendo nuevamente a la analogía hidráulica, es como si a la salida de una fuente de agua se le empalmaran varias tuberías; cuantas más tuberías se le empalmen, mayor cantidad de agua se podrá obtener; es como aumentar el grosor de una tubería.

El valor de resistencia total de un circuito paralelo se obtiene, según la fórmula que a continuación se deduce.

La conductancia total (G_T) del circuito paralelo es la suma de todas las conductancias:

$$G_T = G_1 + G_2 + G_3 + ... + G_n$$

Y como una conductancia es la inversa de la resistencia:

$$G = \frac{1}{R}$$

Se deduce la expresión:

$$G_T = G_1 + G_2 + G_3 + \ldots + G_n \Rightarrow \frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots + \frac{1}{R_n}$$

$$\boxed{R_T = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots + \frac{1}{R_n}}}$$

Ejemplos:

1) En el caso del circuito paralelo de tres resistencias que se muestra en la figura 3.15, el valor total de resistencia es:

$$R_T = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{1}{\frac{1}{91} + \frac{1}{47} + \frac{1}{22}} \approx 12{,}87\ \Omega$$

Obsérvese que el valor equivalente total es más bajo que la resistencia de menor valor.

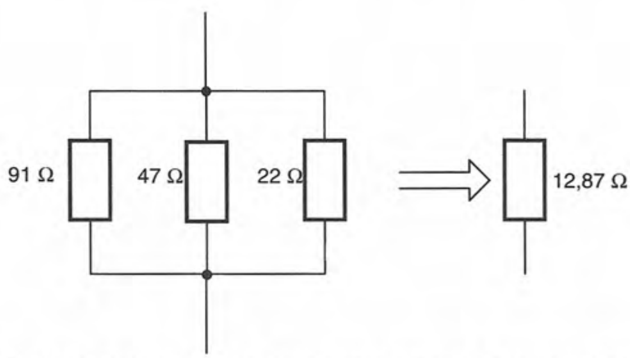


Figura 3.15*. El efecto resistivo de las tres resistencias en paralelo es equivalente al de una resistencia de 12,87 Ω.*

En el caso particular de que el circuito en paralelo esté formado sólo por dos resistencias, la expresión de R_T se simplifica a:

$$R_T = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{R_2+R_1}{R_1 \cdot R_2}} \Rightarrow \boxed{R_T = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1+R_2}}$$

Por cuestiones de simplificación, el paralelo de dos resistencias a veces expresa por $R_1 \,||\, R_2$.

2) El valor total equivalente del circuito paralelo de dos resistencias que se muestra en la figura 3.16 es:

$$R_T = R_1 \,||\, R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1+R_2} = \frac{120 \times 91}{120+91} \approx 51{,}75\,\Omega$$

Y si aplicamos la fórmula general obtenemos el mismo valor:

$$R_T = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{1}{120}+\frac{1}{91}} = 51{,}75\ \Omega$$

Otro caso particular se da cuando todas las resistencias del circuito paralelo son del mismo valor. En este caso, el valor de R_T viene dado por

$$\boxed{R_T = \frac{R}{n}}$$

siendo: R el valor de las resistencias y n el número de resistencias.

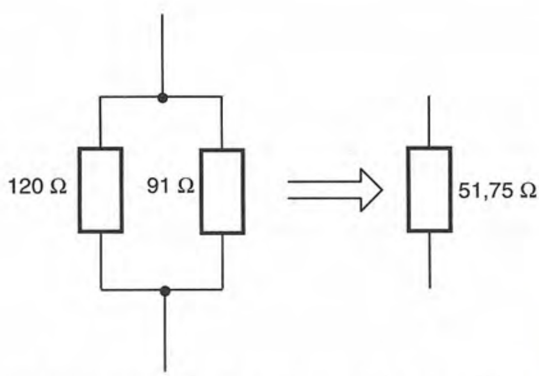


Figura 3.16. *El efecto resistivo de las dos resistencias en paralelo es equivalente al de una resistencia de 51,75 Ω.*

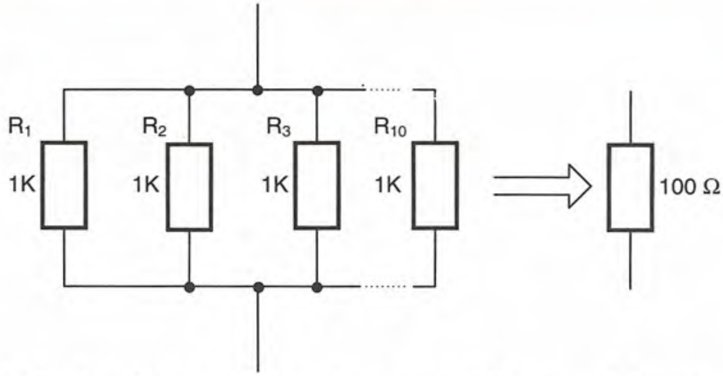


Figura 3.17. *El efecto resistivo de 10 resistencias de 1 kΩ en paralelo es equivalente al de una resistencia de 100 Ω.*

3) Supongamos un circuito con 10 resistencias de 1 kΩ en paralelo (fig. 3.17), el valor resultante es:

$$R_T = \frac{R}{n} = \frac{1000}{10} = 100\ \Omega$$

3.9 MEDIDA DE LA RESISTENCIA (ÓHMETRO)

De la misma manera que existen instrumentos para la medida de la tensión (voltímetro) y de la intensidad (amperímetro), existe un instrumento para la medida de la resistencia (Ω): el ***óhmetro*** (fig. 3.18*a*).

Figura 3.18. a) *Símbolo general de un óhmetro.* b) *Tipo clásico, se basa en un galvanómetro (medición analógica).*

Por medio de dicho instrumento se puede tener una lectura del valor resistivo de resistencias y también permite detectar cortocircuitos ($R \approx 0\ \Omega$) o circuitos abiertos [$R \approx$ *infinito* (∞)].

El óhmetro, en su versión clásica, se basa también en un galvanómetro, o sea, la indicación es por aguja (fig. 3.18*b*). Consiste en un medidor de corriente (amperímetro) debidamente adaptado.

El principio de funcionamiento se basa en que la magnitud de la corriente que circula por un circuito depende de la resistencia del mismo; a mayor resistencia, menor intensidad. La indicación del instrumento será por tanto inversamente proporcional al valor de la resistencia; cuanto más bajo sea el valor de la resistencia, mayor será la desviación de la aguja; en el fondo de escala (máxima desviación) se encuentra, por tanto, el valor 0 Ω.

Así, pues, mediante la estructura de circuito que se muestra en la figura 3.19 se puede obtener una lectura del valor resistivo de una resistencia. Se basa en una pila que proporcionará una corriente que hará que la aguja del galvanómetro se mueva; a mayor corriente, mayor indicación. Y como la corriente que recibirá el galvanómetro pasará a través de la resistencia a medir (R_X), la magnitud de la indicación dependerá del valor resistivo de la resistencia. Es cuestión, por tanto, de adaptar adecuadamente la escala del galvanómetro en ohmios (Ω).

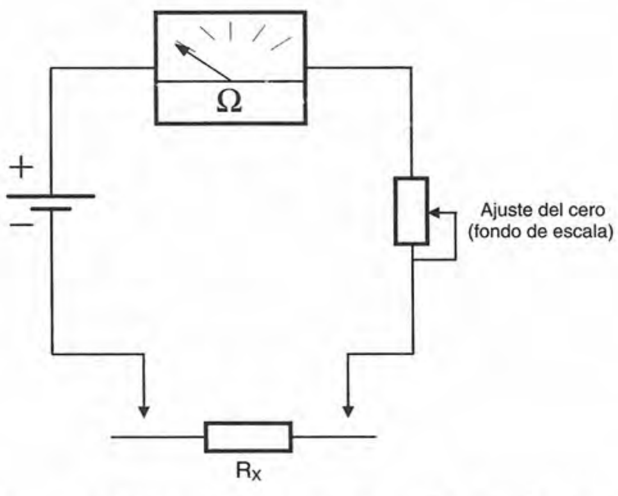


Figura 3.19. *Estructura básica del circuito que permite la medición del valor de resistencias por medio de un óhmetro.*

Es obvio que la magnitud de la indicación dependerá de la tensión de la pila, de la sensibilidad del galvanómetro, del valor de la resistencia de ajuste y, claro está, también del valor resistivo de la resistencia a medir (R_X).

El potenciómetro (resistencia ajustable), se ajusta para que la aguja se vaya al fondo de escala (cero) cuando se unan las puntas de medida –esto se llama cortocircuitar las puntas y equivale a una resistencia de 0 Ω–; la desviación de la aguja es entonces máxima (fondo de escala) y esto debe corresponder a la indicación de 0 Ω en la escala. Y como es obvio, con las puntas al aire –lo cual equivale a una resistencia prácticamente infinita (∞)–, la aguja no se moverá y esto debe corresponder a la indicación de ∞. La estructuración de la graduación de la escala del óhmetro se realiza, por tanto, como se representa en la figura 3.20.

Al conectar entre las puntas de medida una determinada resistencia, la aguja se desviará proporcionalmente a su valor óhmico, indicando un cierto valor en la escala.

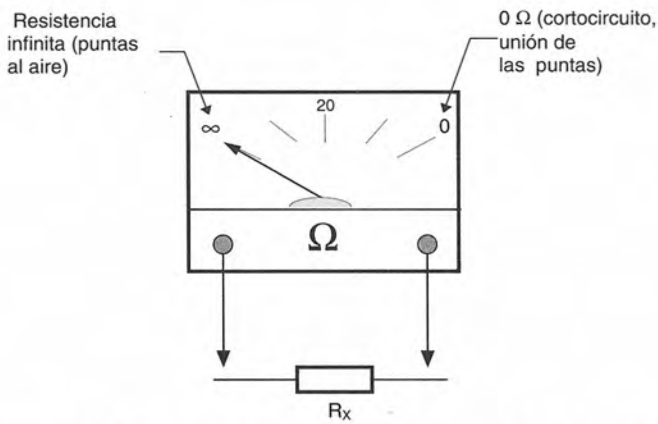


Figura 3.20. *Graduación básica de la escala de un óhmetro.*

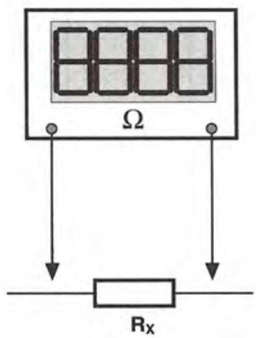


Figura 3.21. *El óhmetro también puede ser de tipo digital (representación numérica del valor de las resistencias).*

Los óhmetros, por lo general, disponen de varias escalas multiplicadoras, que selecciona el usuario por medio de un mando. Esto quiere decir que, según la escala seleccionada, el valor indicado por la aguja debe ser multiplicado por algún factor. Los factores multiplicadores que se suelen disponer son: ×1, ×100, ×1000 y ×10.000. La graduación numérica de la escala del galvanómetro corresponde al factor multiplicador ×1 (fig. 3.20). Así, si el factor multiplicador seleccionado es ×1, el valor óhmico de la resistencia es simplemente el que marque la aguja. Pero si se selecciona el factor de ×1000, el valor numérico que marque la aguja debe ser multiplicado por 1000. Por lo tanto, si la aguja indica el valor 20 (centro de galvanómetro) (fig. 3.20), esto puede corresponder a 20 Ω, 200 Ω, 2000 Ω, etc., según la escala multiplicadora seleccionada.

Según la mayor o menor sensibilidad del galvanómetro, puede ser necesario conectar, además del potenciómetro de ajuste de cero, una resistencia de valor adecuado en serie con el galvanómetro, para limitar la corriente máxima (al unir las puntas).

Al igual que para el voltaje y el amperaje, también se disponen de medidores del valor de resistencia con visualización digital, o sea, de forma numérica (fig. 3.21). Con la técnica digital, la resolución y precisión es enormemente más alta que con la técnica clásica de galvanómetro (instrumento analógico).

Polímetro

El instrumento medidor normalmente utilizado en electricidad y en electrónica se denomina *polímetro* (vulgarmente *tester*) y sirve, fundamentalmente, para la medición de las magnitudes tensión (V), intensidad (A) y resistencia (Ω).

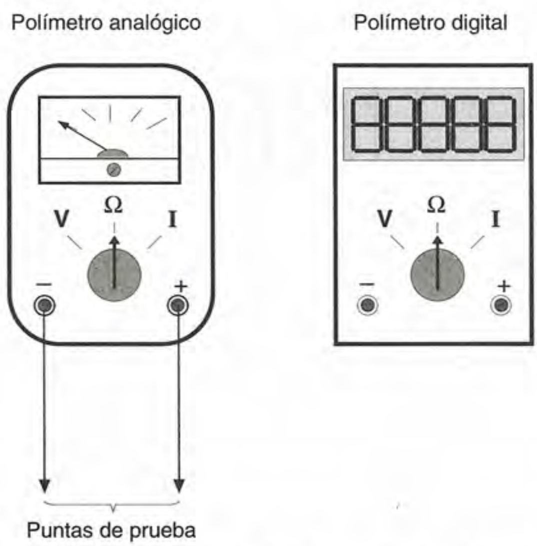


***Figura 3.22.** Aspecto general básico de un polímetro, en su forma analógica y digital.*

Este instrumento existe tanto en su forma analógica (indicación por aguja), como en su forma digital (fig. 3.22). Según las aplicaciones, puede resultar más eficaz uno que otro por lo que es conveniente disponer de los dos tipos.

Ya se ha dicho que mediante el óhmetro se pueden detectar *cortocircuitos* [unión entre conductores ($R \approx 0$)], así como la rotura de conductores (resistencia infinita); esto se conoce por *pruebas de continuidad.*

Y también, mediante el óhmetro, sabiéndolo utilizar, es posible la comprobación de los más importantes componentes en electrónica: diodos, transistores, tiristores, etc. No obstante, los polímetros actuales, de un cierto nivel, ya suelen disponer de funciones especiales para pruebas de continuidad y de comprobación de diodos y transistores.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 3.1. Dar una explicación sobre el concepto de resistencia. ¿Cuál es su unidad?

Ejercicio 3.2. Calcular el valor resistivo que tienen 8 m de hilo de cobre de 2 mm de diámetro ($\rho = 0{,}0175$).

Ejercicio 3.3. ¿Qué ocurre en las líneas conductoras (normalmente cobre) cuando se calientan, aumenta o disminuye su resistencia? ¿Y en el caso de los materiales semiconductores (silicio)?

Ejercicio 3.4. Dar una explicación del concepto de conductancia. ¿Cuál es su unidad?

Ejercicio 3.5. ¿Por qué en los aparatos eléctricos como estufas, planchas, bombillas, etc., su consumo de corriente es mayor en el momento de su conexión que cuando llevan un cierto tiempo funcionando?

Ejercicio 3.6. Si el valor resistivo de un hilo de cobre es de 2 Ω a la temperatura ambiente de 25°C, ¿cuál será su valor resistivo si la temperatura aumenta a 50°C? (Coeficiente de temperatura del cobre: $\alpha = 0{,}00393$).

Ejercicio 3.7. ¿Qué valores indican las expresiones 4K7, 1,2K y 1M5? Indicar el código de colores para expresar un valor de 3,9 Ω con una tolerancia del 10%.

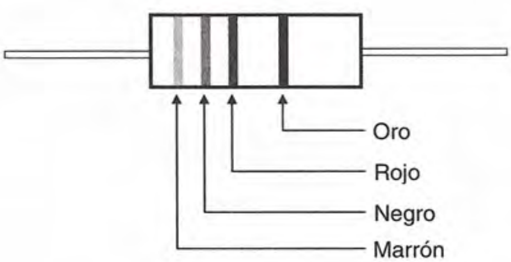


Figura 3.23

Ejercicio 3.8. ¿Cuál es el valor mínimo y máximo que se deduce de la codificación de colores de la resistencia de la figura 3.23?

Ejercicio 3.9. Calcular el valor total de resistencia correspondiente a los montajes de la figura 3.24.

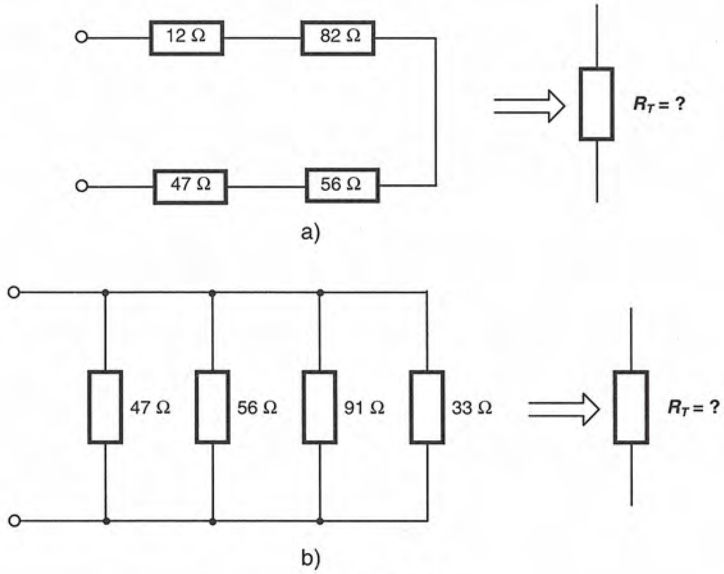


Figura 3.24

Ejercicio 3.10. ¿Cuál es el valor total equivalente de diez resistencias de 200 Ω conectadas en paralelo?

Capítulo 4

Introducción al cálculo de circuitos. Ley de Ohm

4.1 INTRODUCCIÓN

La *ley de Ohm* (en honor al físico alemán George Simon Ohm, 1789-1854) se puede decir que constituye el fundamento del cálculo de los circuitos eléctricos-electrónicos. Por medio de esta ley se calculan los valores de voltaje, intensidad y resistencia; conociendo dos de estos tres valores fundamentales, se halla el tercero. Y sus utilidades se extienden desde el circuito más elemental hasta los más complejos (técnicas operacionales, microelectrónica, etc.).

4.2 LEY DE OHM

Básicamente, la ley de Ohm dice:

La intensidad de corriente que circula por un conductor de resistencia R *es directamente proporcional al valor de la tensión (V) e inversamente proporcional al valor de su resistencia.*

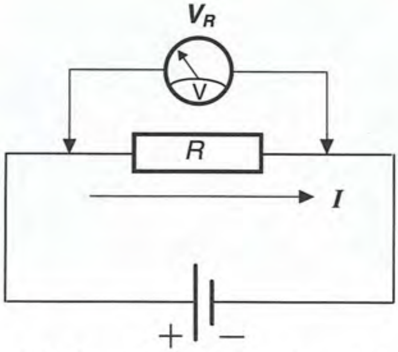
Esto se expresa por medio de la fórmula siguiente:

$$\boxed{I = \frac{V}{R}}$$

Así, pues, el calculo del valor de la intensidad (I) que circula en cualquier circuito se halla simplemente dividiendo el valor de la tensión (V) entre el valor de la resistencia (Ω). Un ejemplo se ilustra en la figura 4.1.

Por tanto, la aplicación de la tensión de un voltio (1 V) en la resistencia de un ohmio (1 Ω) hace que circule la intensidad de un amperio (1 A):

$$I = \frac{V}{R} \Rightarrow 1\,\text{A} = \frac{1\,\text{V}}{1\,\Omega}$$



$$\boxed{I = \frac{V_R}{R}}$$

Figura 4.1. *Circuito eléctrico y fórmula fundamental de la ley de Ohm.*

Y de esta fórmula fundamental, se deducen otras dos:

$$\boxed{R = \frac{V}{I}} \qquad \boxed{V = I \times R}$$

Estas relaciones se ilustran prácticamente en la figura 4.2.

Basándonos en la ley de Ohm se pueden deducir, por tanto, ciertas definiciones:

*Un amperio (1 A) es la intensidad de corriente que circula a través de una resistencia de 1 Ω cuando se le aplica la tensión de 1 V (fig. 4.2*a*).*

*Un ohmio (1 Ω) es el valor de resistencia que tiene un conductor si cuando circula la intensidad de 1 A entre sus extremos aparece una tensión de 1 V (fig. 4.2*b*).*

*Un voltio (1 V) es la diferencia de potencial (tensión) que aparece entre los terminales de una resistencia de 1 Ω cuando por ella circula la intensidad de 1 A (fig. 4.2*c*).*

Así, pues, se deduce que para un cierto valor fijo de resistencia (*R*):

Si aumenta el voltaje ($V\uparrow$) ⇒ Aumenta la intensidad ($I\uparrow$)

Si disminuye el voltaje ($V\downarrow$) ⇒ Disminuye la intensidad ($I\downarrow$)

} Variación directamente proporcional

Y si lo que se mantiene fijo es el valor de voltaje:

Si aumenta la resistencia ($R\uparrow$) ⇒ Disminuye la intensidad ($I\downarrow$)

Si disminuye la resistencia ($R\downarrow$) ⇒ Aumenta la intensidad ($I\uparrow$)

} Variación inversamente proporcional

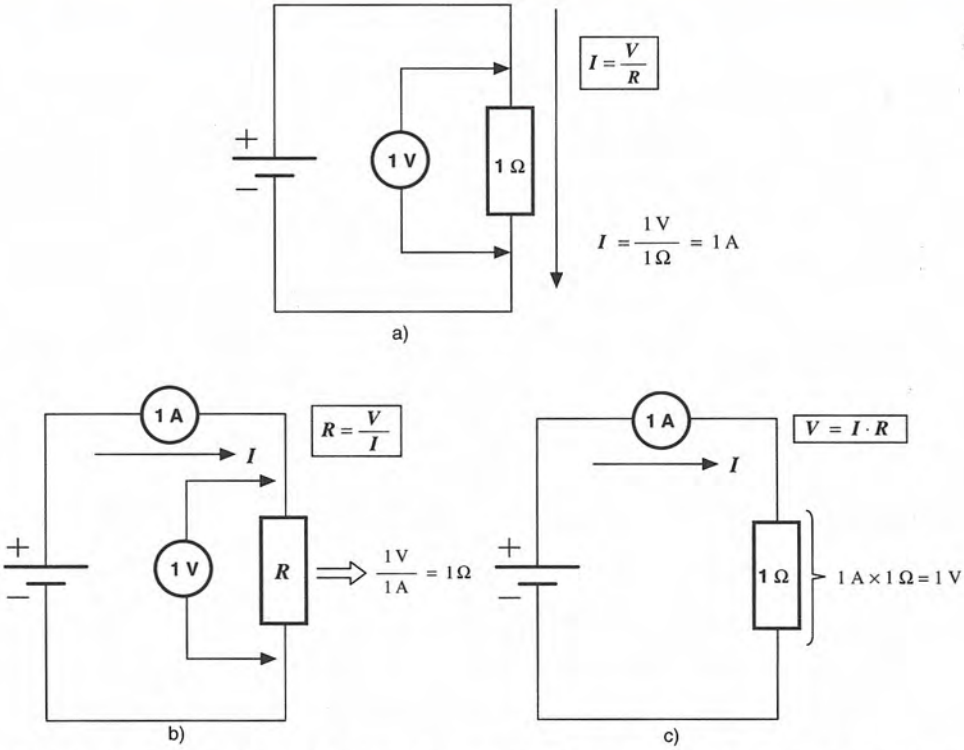


Figura 4.2. *Relaciones que se obtienen entre el voltaje, intensidad y resistencia basadas en la ley de Ohm.*

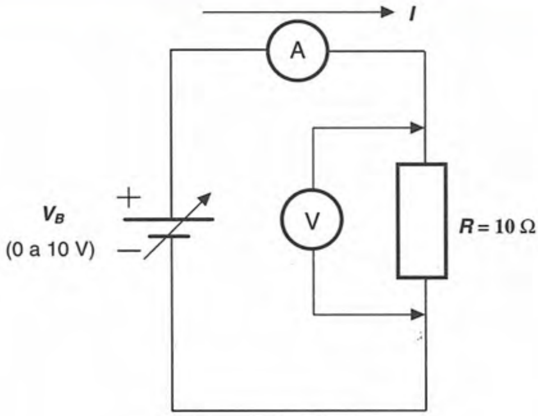
4.2.1 Experimentación de la ley de Ohm

Una forma simple de experimentar la ley de Ohm es por medio del circuito simple que se muestra en la figura 4.3*a*. Consiste en ir aumentando la tensión en una resistencia, por medio de una fuente de tensión variable, e ir tomando medida de la intensidad que circula. La representación de los resultados en forma gráfica da lugar a una recta, o sea, una función lineal; la intensidad varía linealmente con el valor de la tensión, según la expresión (fig. 4.3*b*):

$$I = \frac{V}{R}$$

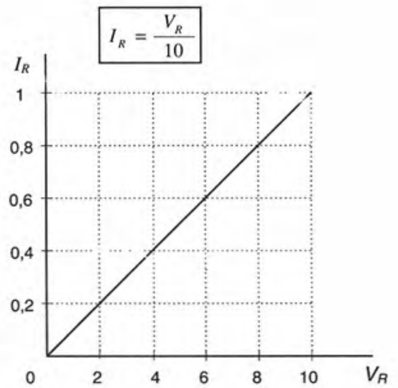
Ejemplo de valores que se obtienen:

Para $V_B = 1\ \text{V} \Rightarrow \quad I = \dfrac{V_B}{R} = \dfrac{1\ \text{V}}{10\ \Omega} = 0{,}1\ \text{A}$



a)

V	I
0	0
1	0,1
2	0,2
3	0,3
⋮	⋮
10 V	1 A



b)

Figura 4.3. a) *Ejemplo de circuito para experimentar la ley de Ohm.* b) *Gráfica que se obtiene.*

$$\text{Para } V_B = 2\text{ V} \Rightarrow \quad I = \frac{V_B}{R} = \frac{2\text{ V}}{10\ \Omega} = 0{,}2\text{ A}$$

$$\text{Para } V_B = 3\text{ V} \Rightarrow \quad I = \frac{V_B}{R} = \frac{3\text{ V}}{10\ \Omega} = 0{,}3\text{ A}$$

Y se sigue de esta manera hasta obtener la intensidad máxima, que será para $V_B = 10$ V:

$$I = \frac{V_B}{R} = \frac{10\text{ V}}{10\ \Omega} = 1\text{ A}$$

Estos valores representados gráficamente (fig. 4.3*b*) dan lugar a una recta con una cierta pendiente (una función lineal); la intensidad (I_R) aumenta proporcionalmente al valor de la tensión que se le aplica (V_R).

Otra forma de experimentar esta ley es mediante el circuito que se muestra en la figura 4.4. En este caso se trata de experimentar cómo la intensidad de corriente varía de manera inversamente proporcional al valor de la resistencia; es decir, al aumentar el valor de resistencia (R) disminuye el valor de intensidad (I), y al disminuir la resistencia aumenta la intensidad:

$$R\uparrow \Rightarrow I\downarrow$$

$$R\downarrow \Rightarrow I\uparrow$$

Para hacer esta experiencia se parte de una tensión constante. Y es cuestión de tomar medidas del valor total de resistencia (R_1 + R_P) y del valor de la corriente que circula y comprobar que se cumple:

$$I = \frac{V_B}{R_1 + R_P}$$

Ejemplo:

Puesto que R_1 = 100 Ω, si el valor de la resistencia del potenciómetro se ajusta a 500 Ω, el valor de la intensidad será:

$$I = \frac{V_B}{R_1 + R_P} = \frac{12}{100 + 500} = \frac{12}{600} = 0{,}02 \text{ A} = 20 \text{ mA}$$

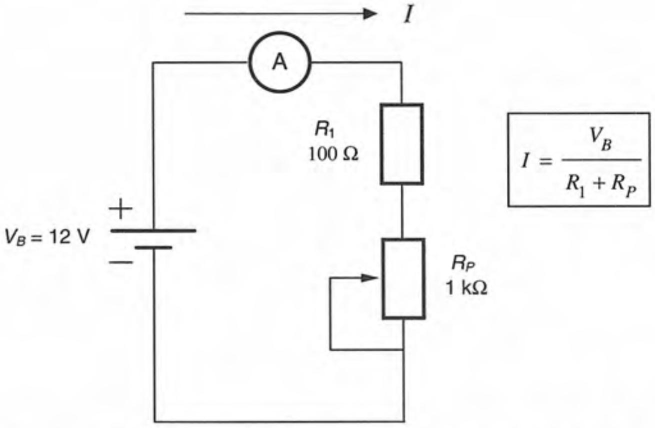


Figura 4.4. *Ejemplo de circuito para experimentar cómo el valor de la corriente (I) varía de manera inversamente proporcional a la resistencia.*

Así, pues, variando el potenciómetro entre el valor mínimo ($R_{P(mín.)}$= 0 Ω) y máximo de resistencia ($R_{P(máx.)}$ =1 kΩ), se obtendrá:

$$I_{máx.} = \frac{V_B}{R_1 + R_{P(mín.)}} = \frac{12}{100+0} = \frac{12}{100} = 0{,}12\,\text{A} = 120\,\text{mA}$$

$$I_{mín.} = \frac{V_B}{R_1 + R_{P(máx.)}} = \frac{12}{100+1000} = \frac{12}{1100} \approx 0{,}011\,\text{A} = 11\,\text{mA}$$

Es evidente que la intensidad de corriente es menor al aumentar el valor de la resistencia.

4.2.2 Ejercicios de cálculo basados en la ley de Ohm

✎ **1)** *Supongamos que la resistencia del filamento de una bombilla (encendida) es de 490 Ω y está conectada a 220 V. ¿Cuál será el valor de intensidad que circulará?*

Es cuestión de aplicar:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{220}{490} = 0{,}45\,\text{A}$$

✎ **2)** *¿Cuál será la tensión entre los terminales de una resistencia de 150 Ω si se mide una intensidad de 0,2 A?*

La circulación de 0,2 A a través de la resistencia dará lugar a una tensión (diferencia de potencial entre los terminales) de:

$$V = I \cdot R = 0{,}2\,\text{A} \times 150\,\Omega = 30\,\text{V}$$

✎ **3)** *¿Cuál será el valor de la resistencia de una estufa eléctrica conectada a 220 V si se mide una intensidad de 6,8 A?*

Es cuestión de aplicar:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{220}{6{,}8} \approx 32{,}35\,\Omega$$

4.3 CONCEPTOS Y EJERCICIOS SOBRE CAÍDA DE TENSIÓN Y d.d.p.

4.3.1 Caída de tensión

Se entiende por *caída de tensión en una resistencia* el voltaje que aparece entre sus terminales como consecuencia de la circulación de una corriente (fig. 4.5). A esta tensión entre terminales también se le denomina *diferencia de potencial* (d.d.p.). Y aplicando el sentido convencional de la corriente (positivo a negativo), la caída de tensión tiene la polaridad que se indica (fig. 4.5); el terminal por el cual entra la corriente aparece como polo positivo (+), y el otro terminal como negativo (–).

$$\boxed{V_R = I \times R}$$

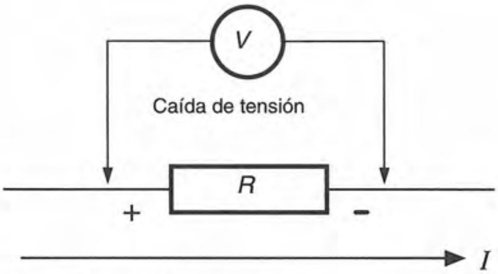


Figura 4.5. *Caída de tensión en una resistencia.*

Supongamos, por ejemplo, una bombilla conectada a una batería de 12 V y con una resistencia en serie. La *caída de tensión* en esa resistencia equivaldrá a una pérdida, puesto que ya no se dispone de esa tensión en la bombilla, el dispositivo receptor o carga. Así, cuanto mayor sea la caída de tensión en una resistencia, menor será la tensión que se dispondrá en la carga.

4.3.1.1 Ejercicios de ejemplo

✎ **1)** *Supongamos una bombilla cuyo filamento (en caliente) tiene 24 Ω, que se conecta a una batería de 12 V a través de una resistencia de 4 Ω (fig. 4.6*a*). ¿Qué tensión recibirá la bombilla?*

La tensión que recibirá la bombilla será igual a los 12 V de la batería menos la caída de tensión que se produzca en la resistencia:

$$V_L = V_B - V_{R1}$$

Siendo el valor de la caída de tensión en R_1, por la ley de Ohm:

$$V_{R1} = I \cdot R_1$$

Y la intensidad que circulará por el circuito, y que entregará la batería, será:

$$I = \frac{V_B}{R_1 + R_L} = \frac{12\,\text{V}}{4 + 24} \approx 0{,}43\ \text{A}$$

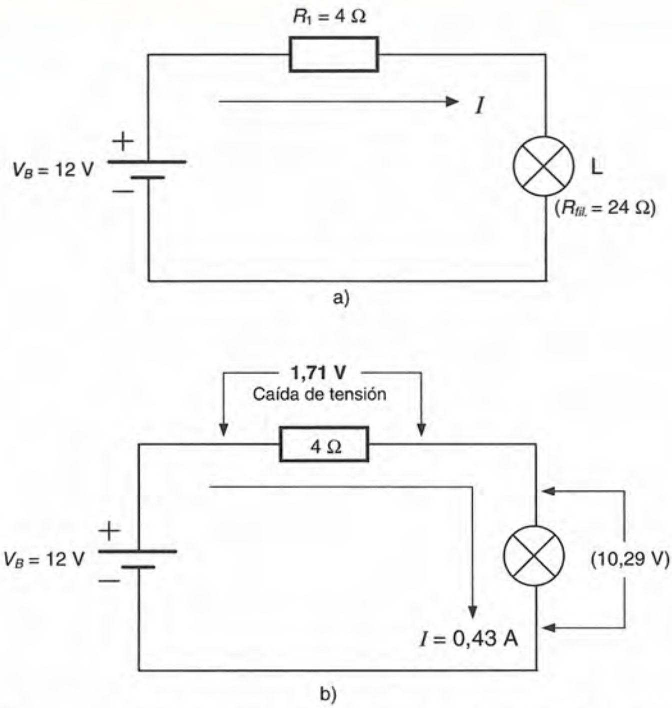


Figura 4.6. a*) Lamparita alimentada a través de una resistencia.* b*) Debido a la caída de tensión de 1,71 V en la resistencia, la lamparita sólo recibe 10,29 V.*

Así, en la resistencia, R_1, se producirá una caída de tensión de:

$$V_{R1} = I \cdot R_1 = 0{,}43 \times 4 \approx 1{,}71\,\mathrm{V}$$

Por tanto, como consecuencia de esta caída de tensión la bombilla recibirá una tensión de (fig. 4.6*b*):

$$V_L = V_B - V_{R1} = 12 - 1{,}71 \approx 10{,}29\,\mathrm{V}$$

O sea, los 12 V de la batería se han repartido entre la resistencia y la bombilla:

$$V_B = V_L + V_{R1} = 10{,}29 + 1{,}71 = 12\,\mathrm{V}$$

Este principio de *caída de tensión* no sólo aparece en las resistencias como componentes, sino que aparece también en las líneas de alimentación de cualquier instalación, ya que todo conductor tiene más o menos resistencia, como se expone en el siguiente ejemplo.

✎ **2)** Supongamos que mediante unos cables alimentamos el motor eléctrico de arranque de un coche desde la batería de otro coche (caso que se da cuando se agota la batería del primero. Si la longitud total de los cables da lugar a un efecto resistivo de 0,02 Ω y la corriente de arranque es de 100 A, en los cables de la instalación se producirá una caída de tensión de:

$$V_{caída} = I \cdot R_{cables} = 100 \times 0{,}02 = 2\ \text{V}$$

con lo cual, al motor, ya no le llegarán los 12 V de la batería, sino 10 V (fig. 4.7):

$$V_{motor} = V_B - V_{cables} = 12 - 2 = 10\,\text{V}$$

Los 12 V de la batería se reparten entre la caída de tensión de los cables y el motor:

$$V_B = V_{cables} + V_{motor}$$

La caída de tensión que se produce en los cables es una pérdida de energía, que no recibe el motor, y puede hacer que el arranque sea dificultoso.

En general, en toda instalación eléctrica se produce siempre una mayor o menor caída de tensión en los cables, que debe procurarse que sea mínima.

Se deduce de estas cuestiones un principio fundamental:

La tensión de un generador se reparte siempre entre todos los componentes del circuito; o sea, la suma de tensiones de todos los componentes de un circuito (serie) es igual a la aplicada (generador).

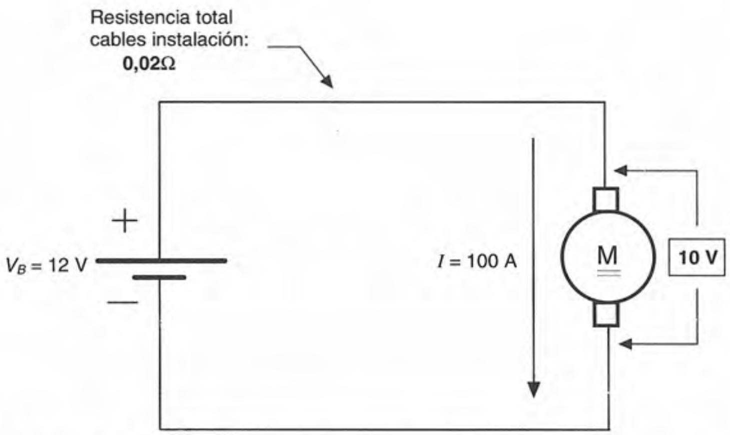


Figura 4.7. *Debido a la caída de tensión de 2 V que se produce en los cables de la instalación, el motor sólo recibe 10 V.*

En los dos ejemplos anteriores, se comprueba que la suma de la tensión en la carga (receptor) y las de caídas de tensión es igual a la tensión del generador.

Este hecho forma parte de lo que se conoce por *leyes de Kirchhoff* (que serán tratadas en el capítulo siguiente).

4.3.2 Diferencia de potencial (d.d.p.)

Desde un punto de vista práctico, se entiende por *diferencia de potencial* la tensión que se encuentra entre dos puntos de un circuito; se mide, por tanto, en voltios:

$$d.d.p. = V_1 - V_2$$

Las tensiones, o voltajes, siempre se tienen que medir con respecto a un punto de referencia. Cuando dicho punto de referencia se denomina ***masa***, indica que la tensión se mide con respecto a un potencial eléctrico de 0 V. Por tanto, ***masa*** significa **potencial eléctrico cero**, y es un nivel de referencia.

Así, por ejemplo, decir 20 V sin indicar con respecto a qué punto de potencial se mide no es correcto; es como hablar de una altura de 20 metros sin decir respecto a qué; se tiene que indicar el punto base, de referencia. Por esto, a veces se habla de alturas con respecto al nivel del mar.

Pues con los niveles de tensión ocurre lo mismo: se mide siempre entre dos puntos; cuando se habla de un nivel de voltaje se tiene que hacer siempre en referencia o respecto a otro punto.

Ejemplos:

- *En una pila de 9 V existe una tensión (9 V), que es la* ***diferencia de potencial*** *entre los dos terminales*. También se puede decir que *en uno de los terminales existe una tensión de 9 V con respecto al otro terminal.*

- *Al circular corriente por una resistencia se produce una* ***caída de tensión;*** *aparece una* ***diferencia de potencial*** *entre sus terminales.*

- *Entre los terminales de dos pilas de 9 V conectadas como se muestra en la figura 4.8 aparece una* ***diferencia de potencial de 0 V,*** y no se encenderá la lamparita ($I = 0$); pero en cada uno de los terminales de la lamparita existe una diferencia de potencial de 9 V con respecto al otro punto de la pila (*nivel de referencia, masa*). En cambio, entre los dos polos positivos (+) de las pilas la diferencia de potencial es cero, ya que los dos tienen el mismo valor de potencial (no existe diferencia):

$$d.d.p. = V_1 - V_2 = 9 - 9 = 0 \text{ V}$$

Precisamente por ello cuando, por ejemplo, en un *walkman* (se alimenta con dos pilas de 1,5 V) nos equivocamos y ponemos una de las pilas al revés no funciona el aparato, ya que recibe una tensión de 0 V.

Una analogía puede ser: Entre dos recipientes llenos de agua a la misma altura (por ejemplo, 1 metro) no se produce trasvase de agua al ponerlos en comunicación a través de una tubería; puesto que los dos tienen el mismo nivel, la diferencia de altura es cero.

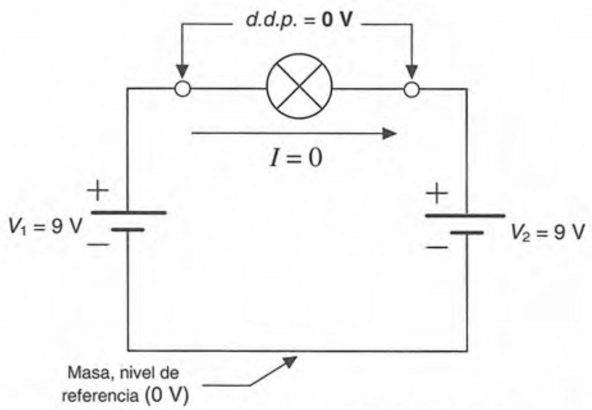


Figura 4.8. *Ejemplo de una diferencia de potencial* (d.d.p.) *de 0 V. Aunque la tensión de cada pila es de 9 V, la lamparita recibe 0 V porque los dos terminales tienen el mismo potencial respecto al nivel de referencia (masa).*

En cambio, conectando una pila de 4,5 V y otra de 9 V con el mismo montaje (fig. 4.9), sí que se obtiene diferencia de potencial y la lamparita se encenderá. Dicha diferencia de potencial, en este caso, será:

$$d.d.p. = V_1 - V_2 = 9 - 4{,}5 = 4{,}5 \text{ V}$$

Si la resistencia del filamento ($R_{fil.}$) es de 20 Ω, dará lugar a una corriente de 4,5 V/20 Ω = 0,225 A.

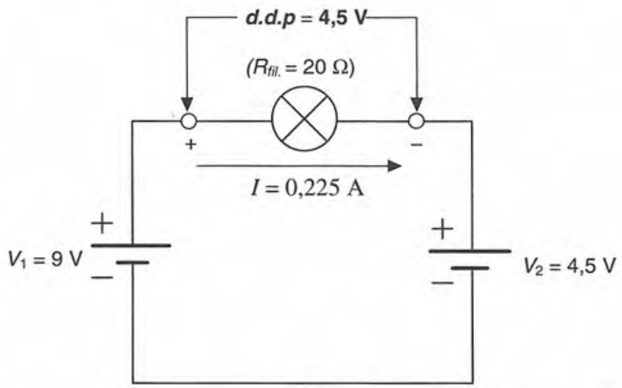


Figura 4.9. *El mismo montaje anterior (fig. 4.8), pero en este caso la lamparita recibe una tensión de 4,5 V al estar a diferente potencial cada terminal.*

También se obtiene diferencia de potencial si las dos pilas de 9 V se conectan como se indica en la figura 4.10; en este caso la diferencia de potencial será de 18 V:

$$d.d.p. = V_1 - V_2 = 9 - (-9) = 9 + 9 = 18 \text{ V}$$

De esta manera es como quedan conectadas las pilas en, por ejemplo, un *walkman* (si se ponen bien); al ser las dos pilas de 1,5 V el aparato recibe 3 V. Es un montaje de pilas en serie (se suman los voltajes).

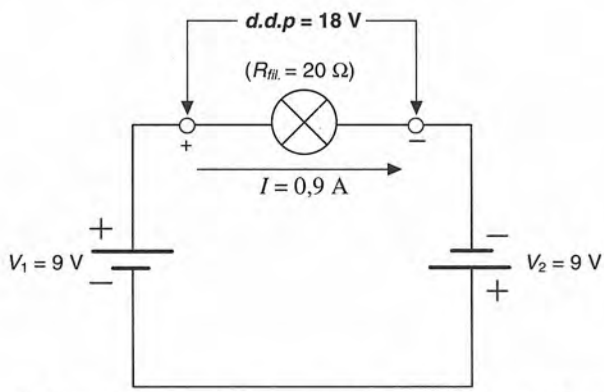


Figura 4.10. *En la forma en que están conectadas las pilas, entre los terminales de la lamparita aparece una tensión de 18 V.*

4.4 APLICACIONES DE LA LEY DE OHM. CÁLCULO BÁSICO DE CIRCUITOS

Mediante la ley de Ohm y los conceptos sobre los principios fundamentales de la electricidad, se pueden analizar y calcular los circuitos eléctricos-electrónicos en su aspecto básico.

4.4.1 El circuito serie

En principio, recordamos que en *todo* ***montaje serie:***

Por todos los componentes circula el mismo valor de corriente.
La suma de todas las caídas de tensión es igual a la tensión del generador.
La resistencia total es igual a la suma de todas las resistencias.

4.4.1.1 Ejercicios de ejemplo

✎ **1)** Dado el circuito serie de la figura 4.11, primero calcularemos el valor de la intensidad de corriente que entregará el generador, y que será el que circulará por las tres resistencias. Seguidamente comprobaremos cómo la tensión del generador se reparte entre las tres resistencias, y la suma de las caídas de tensión de las tres resistencias es igual a la tensión del generador.

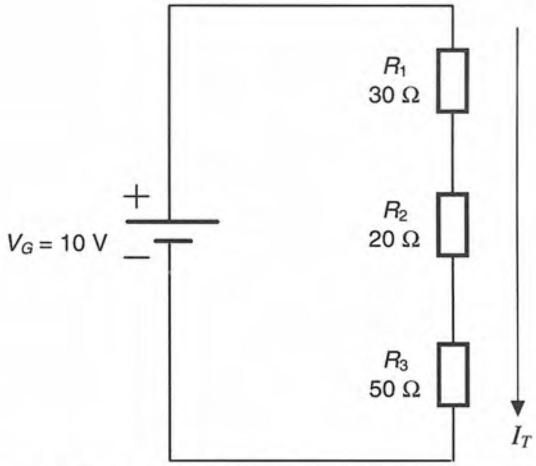


Figura 4.11. *Circuito de tres resistencias en montaje serie.*

Un principio fundamental que hay que tener siempre en cuenta es: *La energía eléctrica que entrega un generador a un circuito se reparte siempre entre todos sus componentes; o sea, la suma de las energías eléctricas de todos los componentes no puede ser ni mayor ni menor que la que entrega la fuente de energía (generador).* Precisamente uno de los principios fundamentales de la física, dice: *La energía ni se crea ni se destruye, sólo se transforma (aunque en toda transformación siempre se produce cierta pérdida).*

Cálculo de la intensidad:

Al ser la resistencia total del circuito:

$$R_T = R_1 + R_2 + R_3 = 30 + 20 + 50 = 100\ \Omega$$

el valor de la corriente que entregará el generador, será:

$$I_T = \frac{V_G}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{V_G}{R_T} = \frac{10\,\text{V}}{100\,\Omega} = 0{,}1\,\text{A}$$

Y este será el valor de corriente que circulará por el circuito, por cada una de las resistencias. El valor de la caída de tensión en cada una de las resistencias será, pues:

$$V_{R1} = I_T \ R_1 = 0{,}1 \times 30 = 3 \text{ V}$$

$$V_{R2} = I_T \ R_2 = 0{,}1 \times 20 = 2 \text{ V}$$

$$V_{R3} = I_T \ R_3 = 0{,}1 \times 50 = 5 \text{ V}$$

La suma de las caídas de tensión debe ser igual a la tensión que proporciona el generador; lo cual se verifica rápidamente, pues:

$$\boldsymbol{V_G = V_{R1} + V_{R2} + V_{R3} \ \Rightarrow \ 3 + 2 + 5 \ = \ 10}$$

Otra forma de expresar esto es:

$$V_G = I_T \ R_1 + I_T \ R_2 + I_T \ R_3 \ = \ I_T \,(R_1 + R_2 + R_3) = \ 0{,}1 \times (30{+}20{+}50) = 10 \text{ V}$$

En la figura 4.12 se muestra el circuito con los resultados obtenidos.

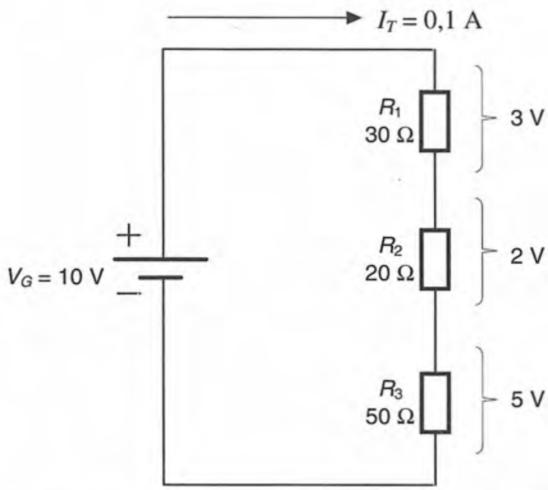


Figura 4.12. *Caídas de tensión que se producen en las resistencias, por las cuales circula el mismo valor de corriente (0,1 A).*

✎ **2)** *En un circuito compuesto por 10 bombillas iguales conectadas en serie a 220 V se mide una intensidad de 250 mA* (fig. 4.13). *Hallar la tensión que reciben las bombillas y la resistencia del filamento.*

Al tratarse de bombillas iguales, todas recibirán la misma tensión y su suma debe dar 220 V. Por tanto:

$$V_{Bombilla} = \frac{220 \text{ V}}{10} = 22 \text{ V}$$

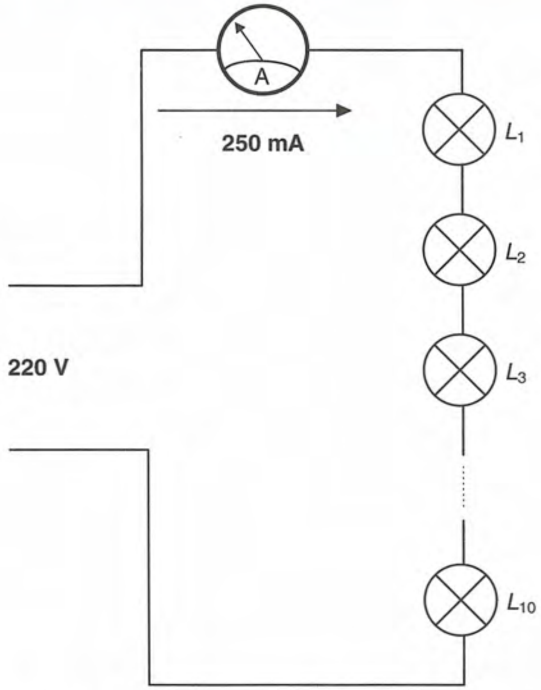


Figura 4.13. *Circuito de 10 bombillas en montaje serie, por el cual circula una corriente de 250 mA.*

Puesto que 250 mA $\Rightarrow$ 250 $\times$ 0,001 = 0,25 A, la resistencia del filamento será, pues:

$$R_{Fil.} = \frac{V_{Bomb.}}{I} = \frac{22\,\text{V}}{0{,}25\,\text{A}} = 88\,\Omega$$

Otro procedimiento para el cálculo es que conociendo la corriente del circuito se puede calcular la resistencia total:

$$R_T = \frac{V_T}{I} = \frac{220\,\text{V}}{0{,}25\,\text{A}} = 880\,\Omega$$

Al ser bombillas iguales, la resistencia de los filamentos es la misma, deduciéndose de la siguiente forma:

$$R_{Fil.} = \frac{R_T}{10} = 88\,\Omega$$

También se calcula que la tensión en cada bombilla es:

$$V_{Bomb.} = I \times R_{Bomb.} = 0{,}25 \times 88 = 22 \text{ V}$$

4.4.2 El circuito paralelo

En primer lugar recordamos que en los **circuitos de tipo paralelo:**

Todos los componentes tienen la misma tensión (que corresponde a la tensión del generador).

La corriente que circulará por cada uno de los componentes depende de su valor resistivo (y del valor de la tensión del generador).

La resistencia total es siempre más baja que la del componente de más bajo valor (para obtener su valor se tiene que aplicar una fórmula).

4.4.2.1 Ejercicios de ejemplo

✎ **1)** Partimos de los mismos componentes que los del ejemplo anterior, pero haciendo un circuito paralelo (fig. 4.14). Calcularemos la corriente que circulará por cada una de las resistencias y seguidamente comprobaremos que la suma de dichas corrientes es igual a la corriente que entrega el generador.

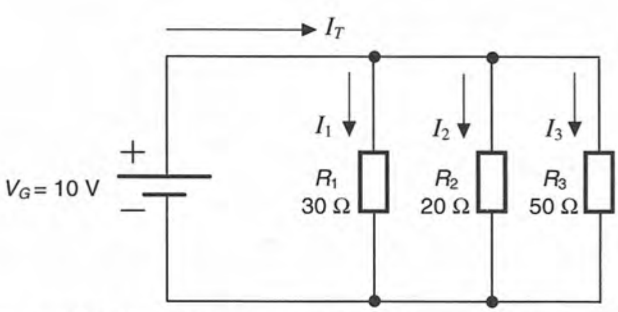


***Figura 4.14**. Circuito de tres resistencias en montaje paralelo.*

Corrientes parciales:

$$I_1 = \frac{V_G}{R_1} = \frac{10}{30} \approx 0{,}33 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{V_G}{R_2} = \frac{10}{20} = 0{,}5 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{V_G}{R_3} = \frac{10}{50} = 0{,}2 \text{ A}$$

Así, el generador entregará una corriente total de:

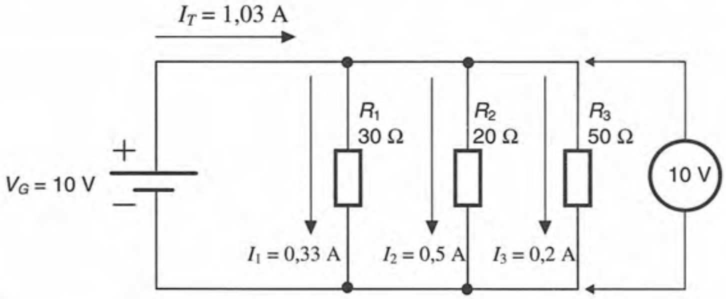


Figura 4.15. *Valores de las corrientes que circulan por cada resistencia, las cuales tienen la misma tensión (10 V).*

$$\boldsymbol{I_T} = I_1 + I_2 + I_3 = 0{,}33 + 0{,}5 + 0{,}2 = 1{,}03 \text{ A}$$

Y si partimos de que la resistencia total del circuito paralelo viene dada por:

$$R_T = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}} = \frac{1}{\frac{1}{30}+\frac{1}{20}+\frac{1}{50}} \approx 9{,}68 \ \Omega$$

la corriente total también puede hallarse por la ley de Ohm:

$$I_T = \frac{V_G}{R_T} = \frac{10}{9{,}68} = 1{,}03 \text{ A}$$

lo cual coincide con la suma de las corrientes parciales.

En la figura 4.15 se muestra el circuito con los resultados obtenidos.

✎ **2)** *Calcular la corriente total que consumen 4 bombillas iguales en paralelo conectadas a 220 V cuya resistencia de filamento es de 807 Ω (fig. 4.16).*

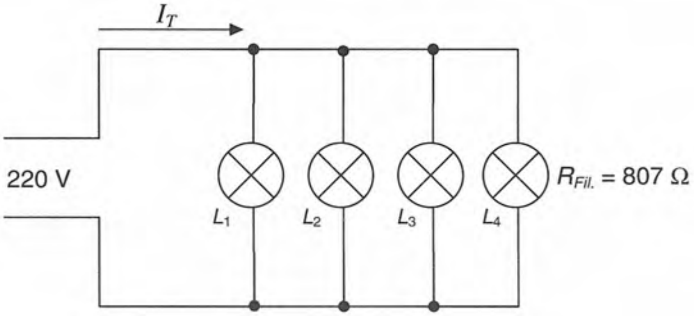


Figura 4.16. *Circuito de cuatro bombillas iguales en montaje paralelo, conectadas a 220 V.*

Puesto que se conoce la resistencia de los filamentos, cada bombilla consumirá una corriente de:

$$I_{Bomb.} = \frac{V}{R_{Fil.}} = \frac{220}{807} \approx 0{,}27\,\text{A}$$

Y se deduce que la corriente total será, pues:

$$I_T = 4 \times I_{Bomb.} = 4 \times 0{,}27 \approx 1{,}09\ \text{A}$$

Otro procedimiento es que al tratarse de cuatro resistencias de igual valor en paralelo, la resistencia total se obtiene por:

$$R_T = \frac{R_{Fil.}}{4} = 201{,}75\ \Omega$$

de lo cual se deduce la intensidad total:

$$I_T = \frac{V}{R_T} = \frac{220}{201{,}75} \approx 1{,}09\ \text{A}$$

que coincide, evidentemente, con el resultado anterior. De esta manera –en paralelo– es como están conectadas las bombillas en las lámparas, así como todos los aparatos eléctricos de una casa (todos quedan conectados en paralelo a la red eléctrica).

4.4.3 Circuitos serie-paralelo (mixtos)

Son circuitos en los cuales aparecen los dos tipos de montajes fundamentales: serie y paralelo. Este tipo de circuitos se denominan *circuitos mixtos*, y aparecen a menudo en la técnica electrónica. Su análisis se basa en descomponerlos en sus circuitos básicos serie y paralelo.

Ejemplo de circuitos mixtos

En la figura 4.17 se muestra la estructura del circuito mixto más simple: una resistencia en serie con otras dos en paralelo. El valor resultante total de resistencia a que da lugar el circuito, fácilmente se deduce que es:

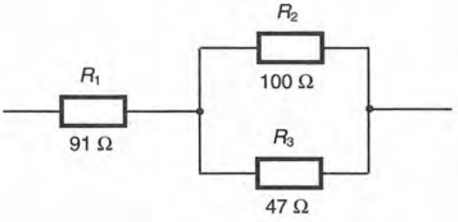


Figura 4.17. *Circuito mixto elemental.*

$$R_T = R_1 + R_2 \,||\, R_3 \Rightarrow \quad R_T = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 91 + \frac{100 \times 47}{100 + 47} = 123\,\Omega$$

Su desarrollo por partes se ilustra en la figura 4.18.

$$R_A = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{100 \times 47}{100 + 47} = 32\,\Omega \Rightarrow R_T = R_1 + R_A = 91 + 32 = 123$$

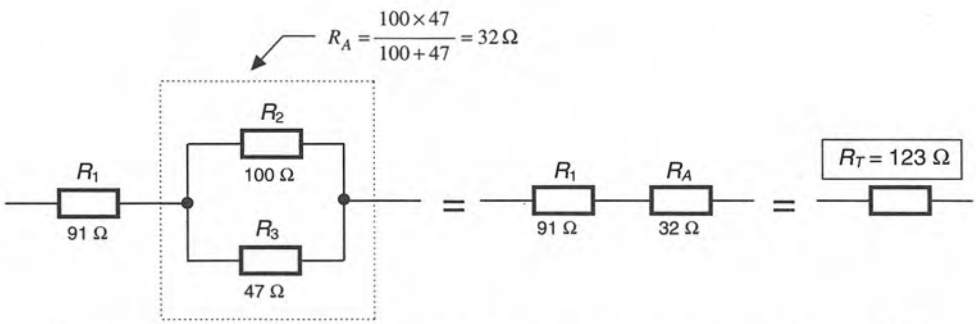


Figura 4.18*. Desarrollo por partes para llegar al valor de resistencia total (*R_T*).*

Otro ejemplo de circuito mixto, más complicado, desarrollado por partes para hallar el valor de R_T, se muestra en la figura 4.19. Cuando se tiene algo de práctica, por simple observación se puede deducir la fórmula del valor de resistencia total que, en este caso, aparece:

$$R_T = R_1 + \frac{R_2\,(R_3 + R_4 + R_5)}{R_2 + (R_3 + R_4 + R_5)} + R_6$$

4.4.3.1 Ejercicios de ejemplo

✎ **1)** *Dado el circuito que se muestra en la figura 4.20, calcular la tensión y la intensidad en cada resistencia.*

En primer lugar se calcula la resistencia total, que es:

$$R_T = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} + R_4 = 47 + \frac{91 \cdot 47}{91 + 47} + 22 \approx 100\,\Omega$$

De aquí se halla la corriente total, que se obtiene por:

$$I_T = \frac{V_B}{R_T} = \frac{20\,\text{V}}{100\,\Omega} = 0{,}2\,\text{A}$$

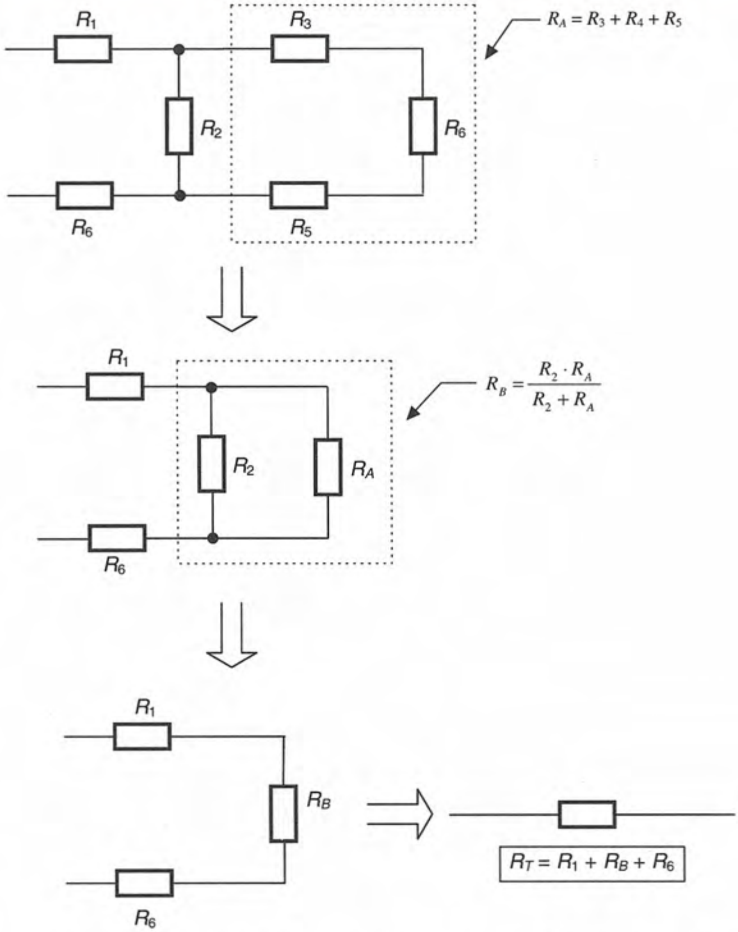


Figura 4.19. *Desarrollo por partes para llegar al valor de resistencia total (R_T).*

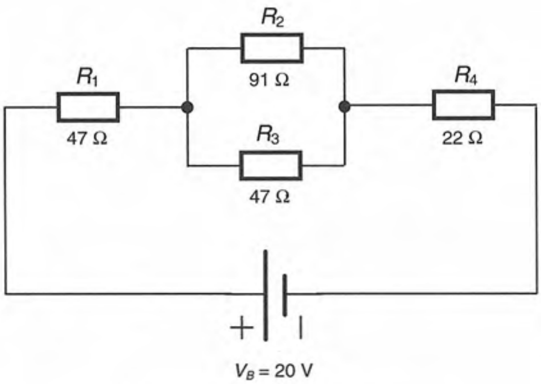


Figura 4.20. *Circuito mixto.*

Este es el valor de corriente que entregará el generador (V_B) y que, como se deduce, circulará también por R_1, por el valor resultante de R_2 y R_3 en paralelo ($I_{R2||R3}$) y por R_4. Así, pues:

$$I_T = I_{R1} = I_{R4} = I_{R2||R3} = 0{,}2 \text{ A}$$

Y conociendo el valor de dichas corrientes se obtiene el valor de la caída de tensión en cada resistencia:

$$V_{R1} = I_T \cdot R_1 = 0{,}2 \times 47 = 9{,}4 \text{ V}$$

$$V_{R4} = I_T \cdot R_4 = 0{,}2 \times 22 = 4{,}4 \text{ V}$$

Como R_2 y R_3 están conectadas en paralelo, su tensión es la misma, siendo su valor:

$$V_{R2||R3} = I_T \cdot R_2 || R_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{R2} = V_{R3} = I_T \cdot \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 0{,}2 \times \frac{91 \times 47}{91 + 47} = 6{,}2 \text{ V}$$

Otra forma de deducir el valor de $V_{R2||R3}$ implica que se cumpla:

$$V_B = V_{R1} + V_{R2||R3} + V_{R4}$$

Se deduce, pues, que:

$$V_{R2||R3} = V_B - V_{R1} - V_{R4} = 20 - 9{,}4 - 4{,}4 = 6{,}2 \text{ V}$$

Y los valores de las corrientes que circulan por R_2 (I_{R2}) y por R_3 (I_{R3}) serán los siguientes:

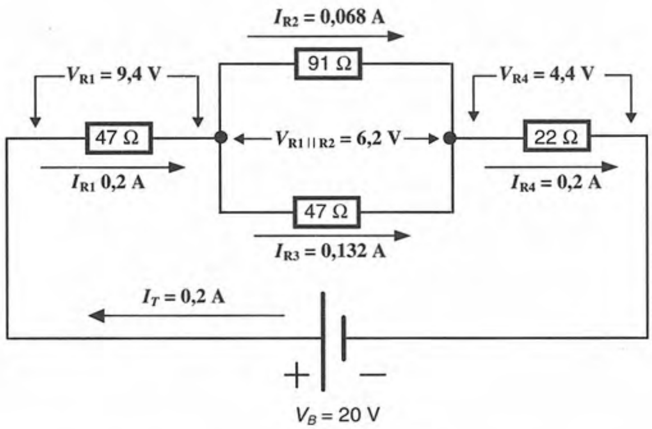


Figura 4.21. *Circuito de la figura 4.20 con los valores de tensión y corrientes.*

$$I_{R2} = \frac{V_{R2}}{R_2} = \frac{6,2}{91} \approx 0,068\,\text{A}$$

$$I_{R3} = \frac{V_{R2}}{R_3} = \frac{6,2}{47} \approx 0,132\,\text{A}$$

En la figura 4.21 se muestra el circuito con los valores calculados de tensión y corrientes.

✎ **2)** *Dado el circuito mixto representado en la figura 4.22, calcular las caídas de tensión y corrientes en cada resistencia.*

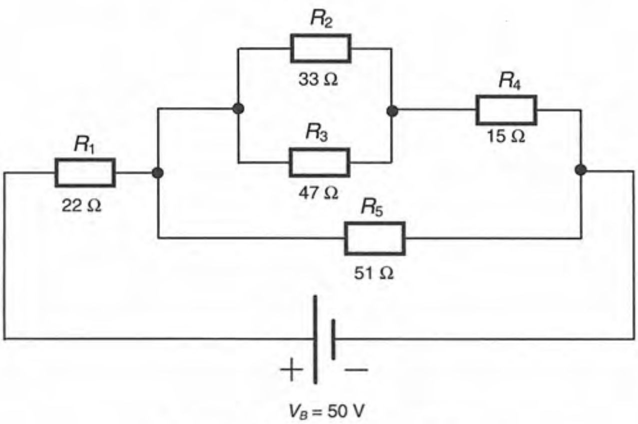


Figura 4.22. *Circuito mixto.*

En primer lugar, calcularemos el valor de resistencia total, y lo haremos descomponiendo el circuito en etapas simples.

Denominando R_A al circuito paralelo de R_2 y R_3, se obtiene:

$$R_A = R_2 \,||\, R_3 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{33 \times 47}{33 + 47} = 19,39\Omega$$

lo cual da lugar a la primera simplificación del circuito (fig. 4.23*a*). Y si llamamos R_B a la suma $R_A + R_4$, tenemos:

$$R_B = R_A + R_4 = 19,39 + 15 = 34,39\ \Omega$$

con lo cual se simplifica más el circuito (fig. 4.23*b*). Y llamando R_C al paralelo de R_5 y R_B, se obtiene (fig. 4.23*c*):

$$R_C = R_B \,||\, R_5 = \frac{R_B \cdot R_5}{R_B + R_5} = \frac{34,39 \times 51}{34,39 + 51} = 20,54\Omega$$

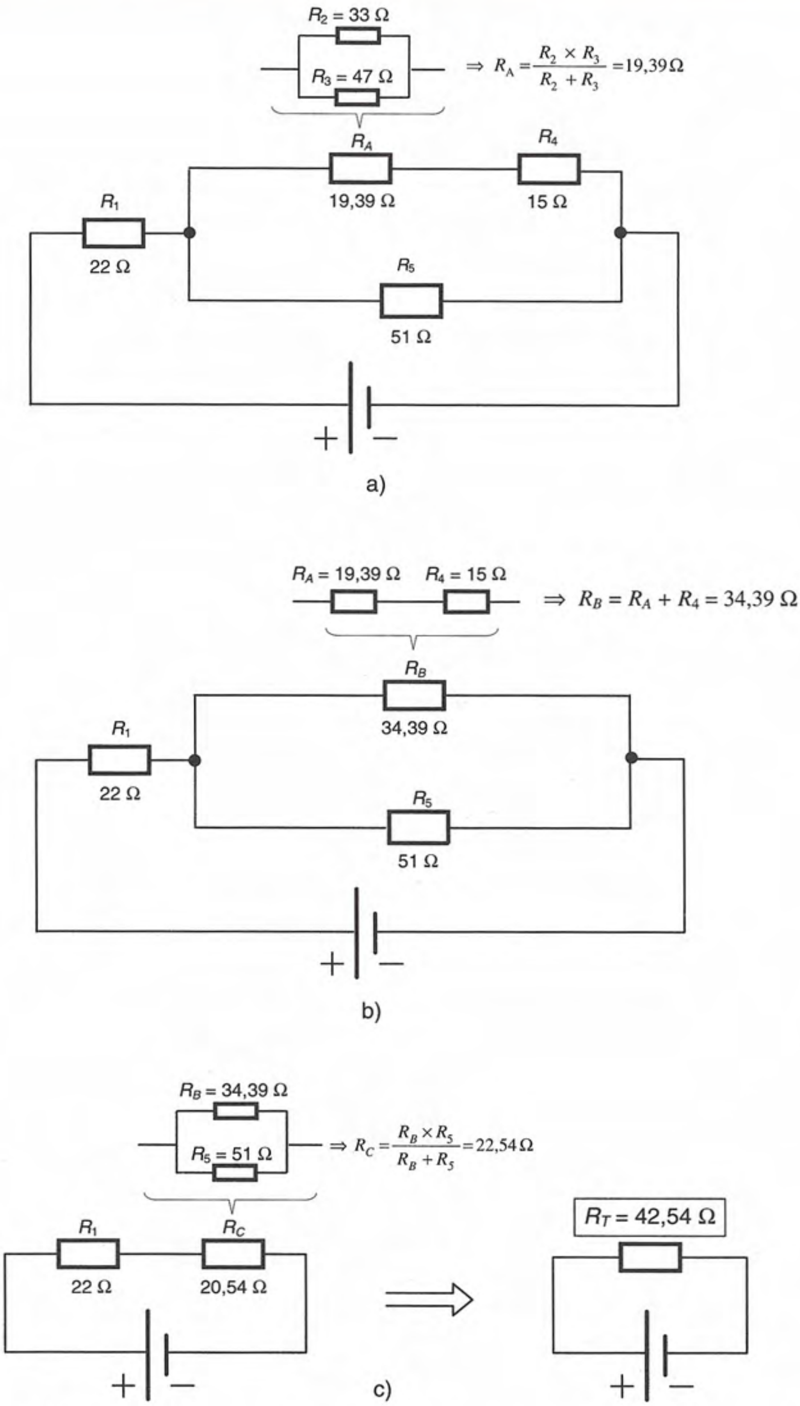


***Figura 4.23.** Desarrollo por partes del circuito mixto anterior (fig. 4.22) para obtener el valor de resistencia total* (R_T).

Se obtiene así la máxima simplificación del circuito, que da un valor total de:

$$R_T = R_1 + R_C = 22 + 20{,}54 = 42{,}54\ \Omega$$

Por simple observación del circuito (fig. 4.22) también se puede llegar a deducir la fórmula general que nos da el valor de R_T, que sale:

$$R_T = R_1 + \frac{\left(\dfrac{R_2\ R_3}{R_2 + R_3} + R_4\right) R_5}{\left(\dfrac{R_2\ R_3}{R_2 + R_3} + R_4\right) + R_5}$$

Una vez hallado el valor de R_T, se obtiene fácilmente el valor de la corriente total, I_T, que será la que entregará el generador:

$$I_T = \frac{V_B}{R_T} = \frac{50\ \text{V}}{42{,}54\ \Omega} = 1{,}175\ \text{A}$$

Como se deduce del circuito, el valor de I_T también circulará por R_1. O sea, que: $I_{R1} = I_T = 1{,}175$ A. Entonces la caída de tensión en R_1 será:

$$V_{R1} = I_{R1}\ R_1 = 1{,}175 \times 22 = 25{,}86\ \text{V}$$

Como se tiene que cumplir que $V_B = V_{R1} + V_{R5}$:

$$V_{R5} = V_B - V_{R1} = 50 - 25{,}86 = 24{,}14\ \text{V}$$

Y de aquí se deduce que el valor de la corriente por R_5 será:

$$I_{R5} = \frac{V_{R5}}{R_5} = \frac{24{,}14\text{V}}{51\Omega} = 0{,}473\,\text{A}$$

Como también se tiene que cumplir que:

$$V_{R2||R3} + V_{R4} = V_{R5} \Rightarrow I_{R2||R3}\ \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} + I_{R4}\ R_4 = V_{R5}$$

e $I_{R2||R3} = I_{R4}$, se puede poner:

$$I_{R4}\left(\frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} + R_4\right) = V_{R5}$$

con lo cual se halla el valor de la corriente por R_4 (I_{R4}), que es la misma que la que circulará por el paralelo de R_2 y R_3 ($I_{R2||R3}$):

$$I_{R4} = \frac{V_{R5}}{\frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} + R_4} = \frac{24{,}14}{\frac{33 \cdot 47}{33+47} + 15} = 0{,}702 \text{ A}$$

Así, pues, la tensión en R_4 será:

$$V_{R4} = I_{R4}\, R_4 = 0{,}702 \times 15 = 10{,}53 \text{ V}$$

Como la suma de la tensión en R_4 y en el paralelo de R_2 y R_3 es igual a la tensión en R_5, la tensión en R_2 y R_3 será:

$$V_{R2 \| R3} + V_{R4} = V_{R5} \Rightarrow V_{R2} = V_{R3} = V_{R5} - V_{R4} = 24{,}14 - 10{,}53 = 13{,}61 \text{ V}$$

De este valor se hallan fácilmente las corrientes por R_2 y R_3, que son:

$$I_{R2} = \frac{V_{R2}}{R_2} = \frac{13{,}61}{33} = 0{,}412 \text{ A}$$

$$I_{R3} = \frac{V_{R3}}{R_3} = \frac{13{,}61}{47} = 0{,}29 \text{ A}$$

Quedan así hallados todos los valores de caídas de tensión y corrientes del circuito y que quedan reflejados en la figura 4.24.

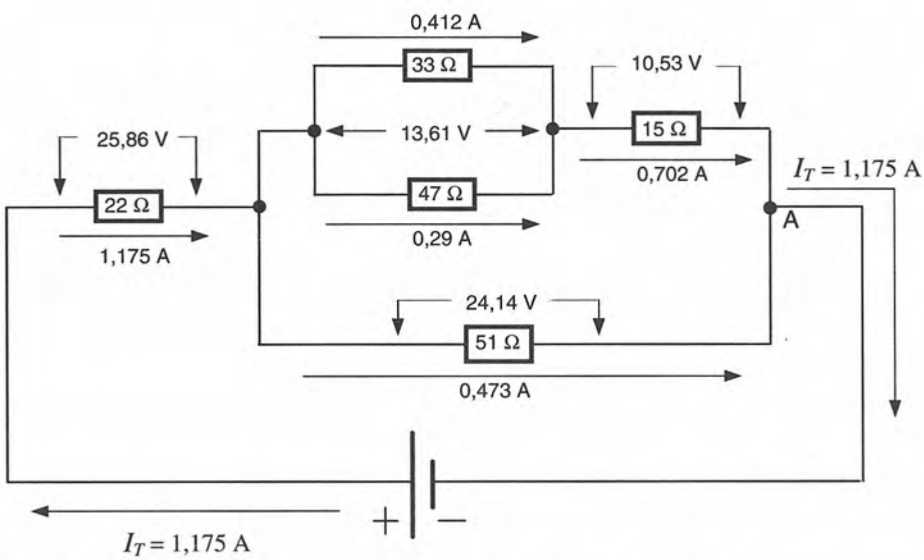


Figura 4.24. *Circuito de la figura 4.22 con los resultados de los valores de tensión y corriente calculados.*

Una comprobación de que los valores calculados son correctos puede hacerse de la siguiente manera:

Se tiene que cumplir que la suma de la caída de tensión en R_1 y en R_5 debe ser igual a la tensión del generador (V_B), lo cual se verifica:

$$V_B = V_{R1} + V_{R5} = 25{,}86 + 24{,}14 = 50 \text{ V}$$

Asimismo, también debe cumplirse que: $V_{R5} = V_{R2||R3} + V_{R4}$, lo cual también se verifica:

$$V_{R5} = V_{R2||R3} + V_{R4} = 13{,}61 + 10{,}53 = 24{,}14 \text{ V}$$

También se comprueba que:

$$V_B = V_{R1} + V_{R2||R3} + V_{R4} = 25{,}86 + 13{,}61 + 10{,}53 = 50 \text{ V}$$

Y también se puede hacer una verificación por medio de las corrientes, pues se tiene que cumplir que la suma de las corrientes por R_5 y por R_4 sea igual a la corriente total, ya que confluyen en el punto A, lo cual se verifica:

$$I_{R5} + I_{R4} = I_T \;\Rightarrow 0{,}473 + 0{,}702 \approx 1{,}175 \text{ A}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 4.1. Tomando como base la ley de Ohm, dar una definición de la unidad de intensidad eléctrica (amperio).

Ejercicio 4.2.

a) ¿Qué intensidad circulará por una resistencia de 10 Ω conectada a una batería de 12 V?

b) ¿Calcular la tensión que habrá entre los terminales de una resistencia de 5 Ω si la intensidad que circula es de 2 A?

c) ¿Cuál será el valor de una resistencia por la cual circula una corriente de 100 mA y está conectada a una batería de 6 V?

Ejercicio 4.3. Definir el concepto de caída de tensión en una resistencia.

Ejercicio 4.4. Dar una explicación práctica sobre el concepto de diferencia de potencial (d.d.p.).

Ejercicio 4.5. Calcular el valor de la tensión y corriente en las resistencias de los circuitos de la figura 4.25.

Ejercicio 4.6. Calcular el valor de la resistencia que se debe poner en serie con una lamparita de 6 V para que se encienda normalmente mediante una batería de 12 V. Se sabe que el consumo de la lamparita es de 300 mA.

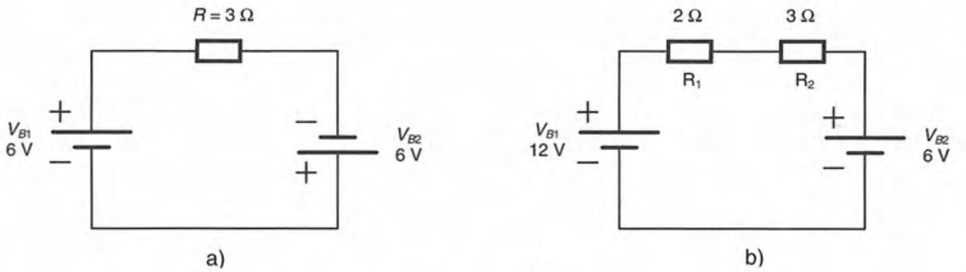


Figura 4.25

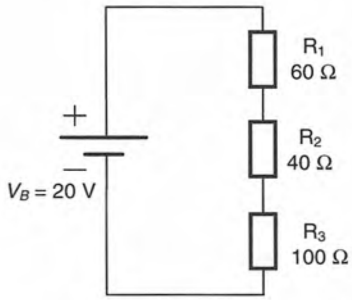


Figura 4.26

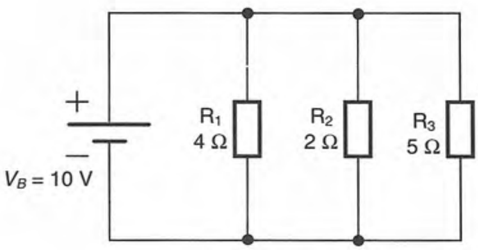


Figura 4.27

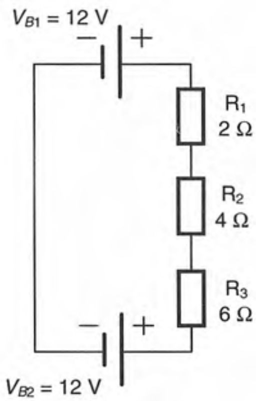


Figura 4.28

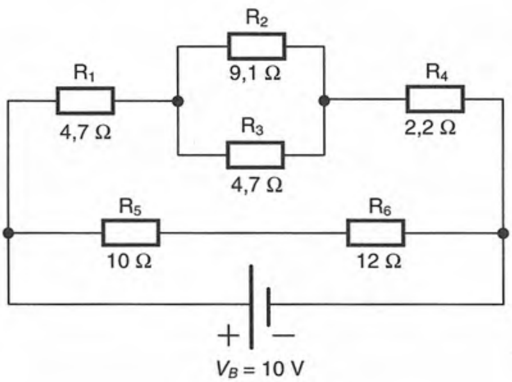


Figura 4.29

Ejercicio 4.7. Calcular el valor de la tensión y corriente en cada una de las resistencias del circuito serie de la figura 4.26.

Ejercicio 4.8. Calcular la corriente total que entregará la fuente de tensión, V_B, en el circuito representado en la figura 4.27.

Ejercicio 4.9. Calcular el valor de la tensión en la resistencia R_2 del circuito representado en la figura 4.28.

Ejercicio 4.10. Calcular la tensión y corriente por cada una de las resistencias del circuito mixto de la figura 4.29.

Capítulo 5

Métodos de análisis y cálculo de circuitos

5.1 INTRODUCCIÓN

Como se ha expuesto en el capítulo 4, los circuitos serie, paralelo y mixtos se han podido calcular aplicando sólo los principios sobre la asociación de resistencias en serie-paralelo y, en especial, la ley de Ohm. Pero esto ha sido posible dado la estructura de dichos circuitos. Por ejemplo, en el circuito de la figura 5.1, aunque en apariencia resulta sencillo, su cálculo ya no resulta tan simple y se requieren otras técnicas para su análisis, además de la ley de Ohm.

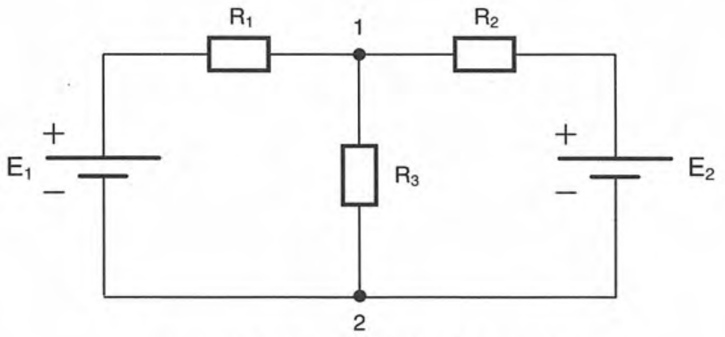


Figura 5.1. *Los puntos 1 y 2 son nudos.*

Existen varios métodos sobre análisis y cálculo de circuitos: Kirchhoff, Maxwell, Thévenin, Norton, Millman, etc., entre los cuales destacamos, por considerar fundamentales, los de *Kirchhoff* y *Thévenin*. Por medio de estos métodos se pueden calcular circuitos más o menos complejos, cuyo análisis no resulta posible aplicando únicamente los principios de la ley de Ohm.

Antes de entrar en dichos temas, deben tenerse claros los conceptos siguientes que aparecen a menudo en todos los circuitos eléctricos-electrónicos:

Nudo: Se entiende por *nudo* en un circuito a un *punto de unión donde concurren varias corrientes*; normalmente, es la unión de más de dos conductores.

Por ejemplo, en el circuito de la figura 5.1, son *nudos* los puntos 1 y 2, ya que en cada uno de ellos concurren tres corrientes (y es la unión de tres conductores).

Rama: Se entiende por *rama* al *conjunto de componentes que se encuentran entre dos nudos consecutivos*. Siguiendo con el mismo circuito de ejemplo (fig. 5.2), los componentes que se encuentran entre los puntos ***a*** y ***b*** (R_1 y el generador E_1) constituyen una rama, los componentes entre los puntos ***a*** y ***c*** (E_2 y R_2) son otra rama y la resistencia R_3 (puntos ***a*** y ***d***) forma otra rama. Así, cada rama constituye una ramificación de la corriente (en el circuito aparecen tres ramas y tres corrientes diferentes).

Malla: Es el conjunto de ramas que forman un circuito cerrado. En el circuito anterior (fig. 5.2) aparecen dos mallas. Malla 1: Se forma por dos ramas; la rama ***ab*** (E_1 y R_1) y por la rama ***ad*** (R_3), y la malla se indica por los puntos con las letras ***abda*** (un circuito cerrado). Malla 2: Se indica por los puntos ***adca***, formada por otras dos ramas (componentes E_2, R_3 y R_2).

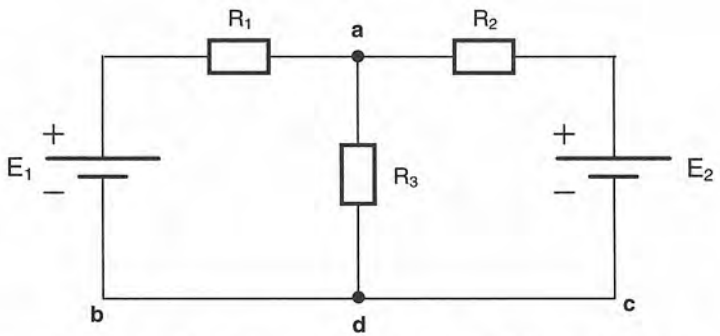


Figura 5.2. *Circuito donde aparecen dos mallas (*adba y acda*) y tres ramas.*

5.2 LEYES DE KIRCHHOFF

Las leyes del físico alemán Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) se basan en dos principios:

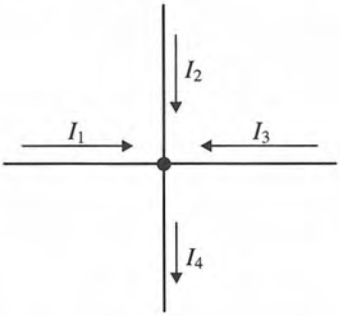
5.2.1 Ley de los nudos

La suma de las corrientes que entran en un nudo es igual a la suma de las corrientes que salen: $\Sigma I_{entran} = \Sigma I_{salen}$.

Esto también se puede expresar diciendo que ***la suma algebraica de las corrientes que concurren en un nudo es igual a cero:*** $\Sigma I = 0$.

El término *algebraico* significa que se tienen que tener en cuenta los signos (+, –) en las magnitudes; por lo general, se establece el signo + para las corrientes que entran y el signo – para las que salen.

Por ejemplo, en el nudo que se representa a continuación:



Si se toman con signo positivo (+) las corrientes que entran al nudo y con signo negativo (–) las corrientes que salen del nudo, basándose en las expresiones anteriores se puede poner:

$$\Sigma I = 0 \Rightarrow I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0$$

$$\Sigma I_{entran} = \Sigma I_{salen} \Rightarrow I_1 + I_2 + I_3 = I_4$$

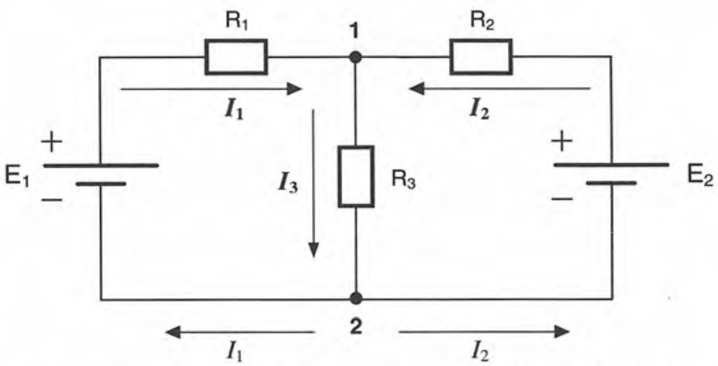


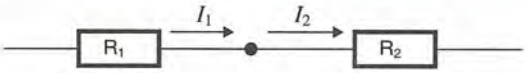
Figura 5.3. *Concurrencia de corrientes en los nudos 1 y 2.*

Y en el circuito de ejemplo anterior (fig. 5.3), se tiene:

$$\text{Nudo 1: } I_1 + I_2 - I_3 = 0 \quad \Rightarrow I_1 + I_2 = I_3$$

$$\text{Nudo 2: } I_3 - I_2 - I_1 = 0 \quad \Rightarrow I_3 = I_2 + I_1$$

De hecho, si se aplica este criterio a la simple unión de dos conductores también se cumple la ley. Por ejemplo, en el punto de conexión de dos resistencias es evidente que el valor de corriente que sale de una de ellas entra íntegramente en la otra resistencia:



$$I_1 - I_2 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{I_1 = I_2}$$

5.2.2 Ley de las mallas

En toda malla, la suma algebraica de las tensiones de todos los generadores (f.e.m.) y de todas las caídas de tensión (I·R) en las resistencias es cero:

$$\boldsymbol{\Sigma\, \text{f.e.m.} + \Sigma\, I{\cdot}R = 0}$$

El término algebraico indica que se deben tener en cuenta signos (+, −), o polaridades, en las magnitudes de las tensiones de los generadores (f.e.m.) y de las caídas de tensión ($I\ R$). Y, como la suma de todo debe dar cero, se deduce que uno de los sumandos debe aparecer con signo contrario con respecto al otro.

Debido a lo anterior, la ley de las mallas también se puede expresar de otra manera más práctica:

En una malla, la suma de las tensiones de todos los generadores (teniendo en cuenta las polaridades) es igual a la suma de todas las caídas de tensión en las resistencias:

$$\boldsymbol{\Sigma\, \text{f.e.m.} = \Sigma\, I{\cdot}R}$$

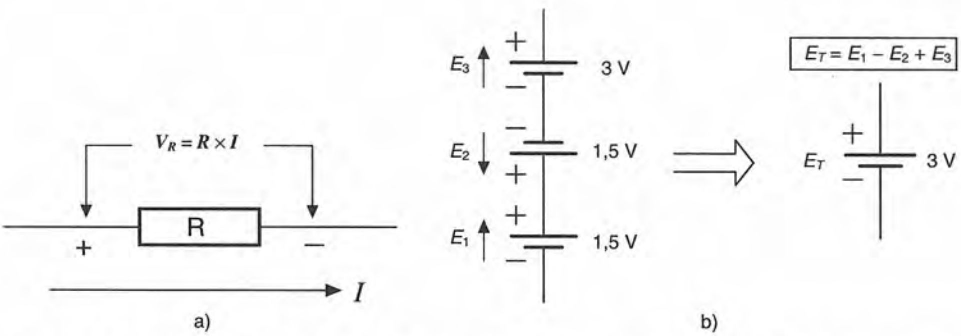


Figura 5.4. a) *Polaridad de la caída de tensión en una resistencia.* b) *En el montaje serie de elementos con tensión, se puede producir una suma o resta de tensiones.*

Para obtener las ecuaciones de malla es obvio que se deben tener en cuenta signos (polaridades) en los generadores y caídas de tensión de las resistencias.

En las caídas de tensión de las resistencias ($I{\cdot}R$), el punto por el cual entra la corriente en la resistencia se toma como polo positivo (fig. 5.4*a*). Aunque es evidente, recordamos que en la conexión serie de elementos con voltaje se puede obtener una suma o una resta, según como se encuentren las polaridades (fig. 5.4*b*).

Por ejemplo, veamos el circuito de la figura 5.5 en el que aparecen las polaridades y términos algebraicos de los componentes. Teniendo en cuenta estas polaridades, la suma de todas las tensiones de la malla, como debe ser, da cero:

$$\boldsymbol{\Sigma\, \text{f.e.m.} + \Sigma\, I{\cdot}R = 0 \;\Rightarrow\; E_1 + E_2 - R_1\, I - E_3 - R_2\, I = 12 + 3 - 10 - 3 - 2 = 0}$$

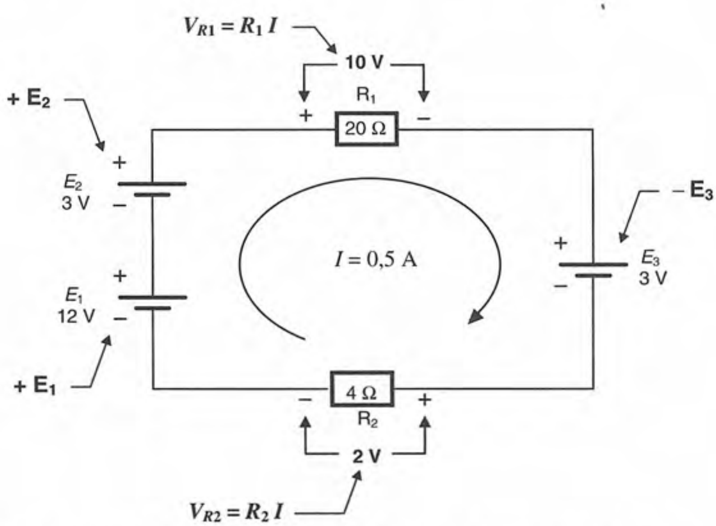


Figura 5.5. *Circuito con valores prácticos y expresiones algebraicas.*

O bien, se deduce que la suma de las tensiones de todos los generadores (E) es igual a la suma de todas las caídas de tensión ($R\, I$):

$$\boldsymbol{\Sigma\, \text{f.e.m.} = \Sigma\, I{\cdot}R \;\Rightarrow\; E_1 + E_2 - E_3 = 12 + 3 - 3 = 12\ \text{V} \;\Rightarrow\; R_1\, I + R_2\, I =}$$

$$\boldsymbol{= 10 + 2 = 12\ \text{V}}$$

5.2.3 Ejemplos de circuitos

• **1)** En el circuito de la figura 5.6, puesto que la suma algebraica de todas las tensiones de los generadores (f.e.m.) es igual a la suma de todas las caídas de tensión en el circuito, aparece:

$$E = I\, R_1 + I\, R_2 + I\, R_3 \;\Rightarrow\; E = V_{R1} + V_{R2} + V_{R3} \;\Rightarrow 10 = 3 + 2 + 5$$

cuyo resultado es evidente, por lógica.

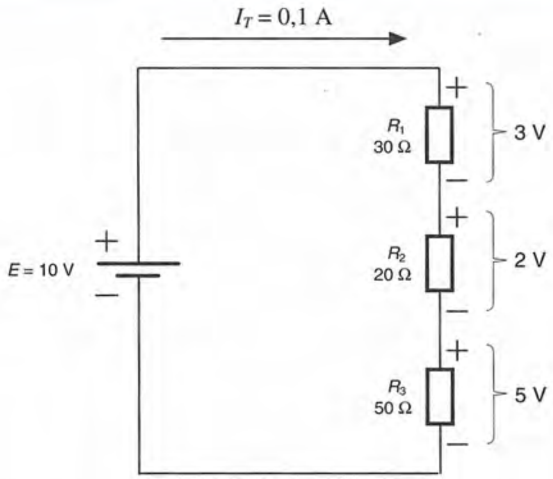


Figura 5.6. *Circuito práctico en el cual se comprueba la ley de las mallas de Kirchhoff:* la suma de todas las caídas de tensión es igual a la tensión del generador (E).

Basándonos en que la suma algebraica de todas las f.e.m. y caídas de tensión es igual a cero, se llega al mismo resultado:

$$E - V_{\mathrm{R1}} - V_{\mathrm{R2}} - V_{\mathrm{R3}} = 0 \Rightarrow 10 - 3 - 2 - 5 = 0$$

Por simple observación de las polaridades de todos los elementos del circuito [generador (E) y V_{R}], se deduce que la suma algebraica de todas las tensiones del circuito (f.e.m. y caídas de tensión) da cero, o bien, la suma de todas las caídas de tensión de las resistencias (V_R) es igual a la tensión del generador de f.e.m. (E).

• **2)** Otro ejemplo de circuito en el cual quedan claramente manifiestos los criterios expuestos se muestra en la figura 5.7. Basándonos en que la suma algebraica de todas las tensiones de los generadores (f.e.m.) es igual a la suma de todas las caídas de tensión en el circuito, aparece:

$$E_1 + E_2 = I\,R_1 + I\,R_2 = V_{\mathrm{R1}} + V_{\mathrm{R2}}$$

Puesto que la suma algebraica de todas las f.e.m. y caídas de tensión es igual a cero, se obtiene el mismo resultado:

$$E_1 - V_{\mathrm{R1}} + E_2 - V_{\mathrm{R2}} = 0 \;\Rightarrow\; E_1 + E_2 = V_{\mathrm{R1}} + V_{\mathrm{R2}}$$

Cuando aparecen varios generadores en una malla, puede facilitar la comprensión el poner unas flechas de sentido en los generadores. Después es cuestión de realizar la suma de los generadores, teniendo en cuenta el sentido de cada uno; flechas en el mismo sentido se suman y flechas en diferente sentido se restan.

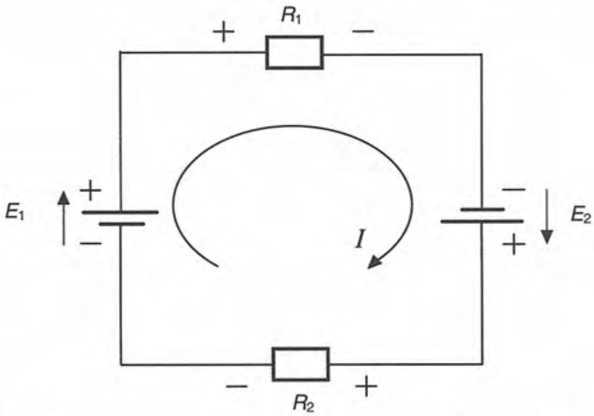


Figura 5.7. *Sentido de corriente y polaridades de las caídas de tensión.*

• **3)** Un ejemplo práctico con el cual se pone claramente de manifiesto la ley de los nudos, es mediante el circuito paralelo que se muestra en la figura 5.8. Como es fácil de comprender, en el nudo 1 se cumple que:

$$I_T - I_1 - I_2 - I_3 = 0 \Rightarrow I_T = I_1 + I_2 + I_3 \Rightarrow 1{,}03 = 0{,}33 + 0{,}5 + 0{,}2$$

Y en el nudo 2:

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_T = 0 \Rightarrow I_1 + I_2 + I_3 = I_T \Rightarrow 0{,}33 + 0{,}5 + 0{,}2 = 1{,}03$$

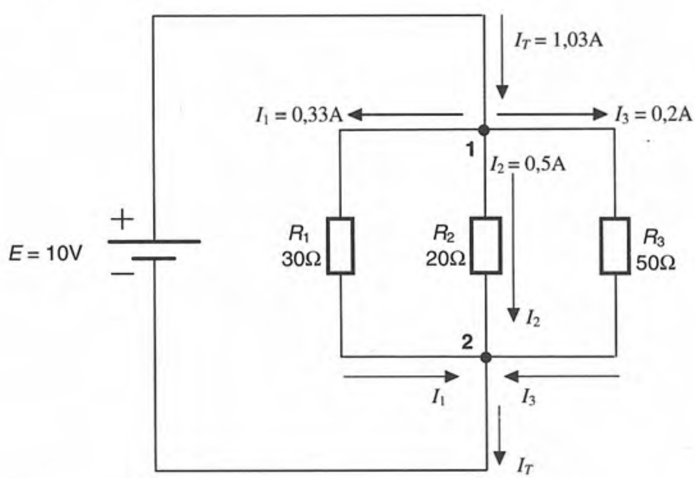


Figura 5.8. *Circuito práctico en el cual se comprueba la ley de los nudos de Kirchhoff:* la suma de las corrientes que entran es igual a la suma de las corrientes que salen.

5.2.4 Ejercicios desarrollados

En este apartado se explica el desarrollo de ejercicios, con el objetivo de ampliar y profundizar más de una forma práctica, aprovechando las características de cada circuito para explicar las cuestiones oportunas.

Método para obtener las ecuaciones de malla

Aunque con lo explicado anteriormente ya se pueden representar algebraicamente los circuitos, se pueden aplicar los siguientes pasos para obtener las ecuaciones de malla, basados en la expresión **Σ f.e.m. = Σ *I·R*:**

1. Se asigna un sentido de recorrido de la malla, que puede ser referenciado a un generador, lo cual se puede indicar con una flechita.

2. Se obtiene la expresión suma de todos los generadores (Σ **f.e.m.**). Los generadores que se encuentren en el mismo sentido que el de referencia, se toman con signo positivo ($+E$); si se encuentran en oposición, se toman con signo negativo ($-E$). En resumen, se trata de obtener la tensión suma resultante de todos los generadores de la malla.

3. Se obtiene la expresión suma de las caídas de tensión en las resistencias (Σ ***I·R***). En las resistencias cuyo sentido de corriente coincida con el de referencia, la caída de tensión se toma con signo positivo ($+I{\cdot}R$); si la corriente que las recorre es en sentido contrario (oposición al de referencia), se toma con signo negativo ($-I{\cdot}R$).

4. Se iguala la expresión suma de los generadores con la expresión suma de las caídas de tensión; esto es la ecuación de la malla: **Σ f.e.m. = Σ *I·R*.**

También se puede obtener haciendo la suma de todas las tensiones de la malla, teniendo en cuenta las polaridades de los generadores y caídas de tensión (fig. 5.4), e igualando a cero; o sea, basada en la expresión **Σ f.e.m. + Σ *I·R*** = 0. Se recorre la malla, poniendo las tensiones que se vayan encontrando; aparecerán términos con signo negativo (tensiones que se restan, al estar en oposición) y otros positivos (tensiones que se suman).

Una vez obtenidas las ecuaciones del circuito, es cuestión de resolverlas para obtener los datos que interesen. Si algún resultado aparece con signo negativo, es porque el sentido verdadero es al revés al considerado en el planteamiento.

✎ ***5.2.4.1*** *Dado el circuito de la figura 5.9, calcular el valor de la corriente que circula (I) y la caída de tensión en cada resistencia.*

En el circuito se ha asignado un sentido de circulación de la corriente, I (referenciado por E_1), cuyo valor será el mismo en todos los componentes puesto que es un circuito serie. Y en este mismo sentido se recorrerá el circuito para obtener la ecuación de la malla. A los generadores que se encuentren en oposición con el de referencia se les pone el signo negativo ($-E$); si están en el mismo sentido, se toman con signo positivo ($+E$). Esto da lugar a una tensión total, resultado de la suma algebraica de los generadores.

Como todas las resistencias son recorridas por la misma corriente, cuyo sentido coincide con el del generador de referencia (E_1), todas las caídas de tensión ($I\,R$) son positivas.

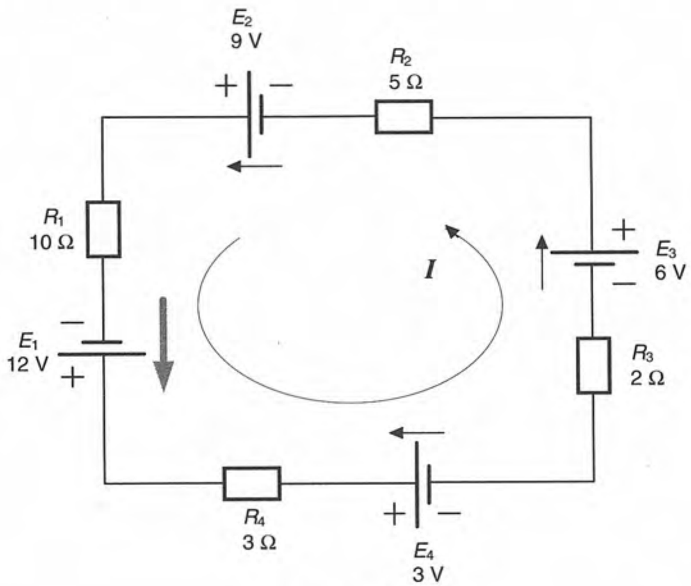


Figura 5.9.

Todo esto expresado en forma de ecuación, es:

$$E_1 - E_4 + E_3 + E_2 = R_4\,I + R_3\,I + R_2\,I + R_1\,I = (R_4 + R_3 + R_2 + R_1)\,I$$

Numéricamente, queda:

$$\underbrace{12 - 3 + 6 + 9}_{E_T} = \underbrace{(3 + 2 + 5 + 10)}_{R_T}\,I$$

Y aplicando ahora la ley de Ohm:

$$E_T = R_T \cdot I \Rightarrow \quad 24 = 20 \times I \;\Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{E_T}{R_T} = \frac{24}{20} = 1{,}2\,\mathrm{A}}$$

Las caídas de tensión en las resistencias, son:

$$V_{\mathrm{R1}} = R_1 \cdot I = 10 \times 1{,}2 \; = \; 12\ \mathrm{V}$$
$$V_{\mathrm{R2}} = R_2 \cdot I = 5 \times 1{,}2 \; = \; 6\ \mathrm{V}$$

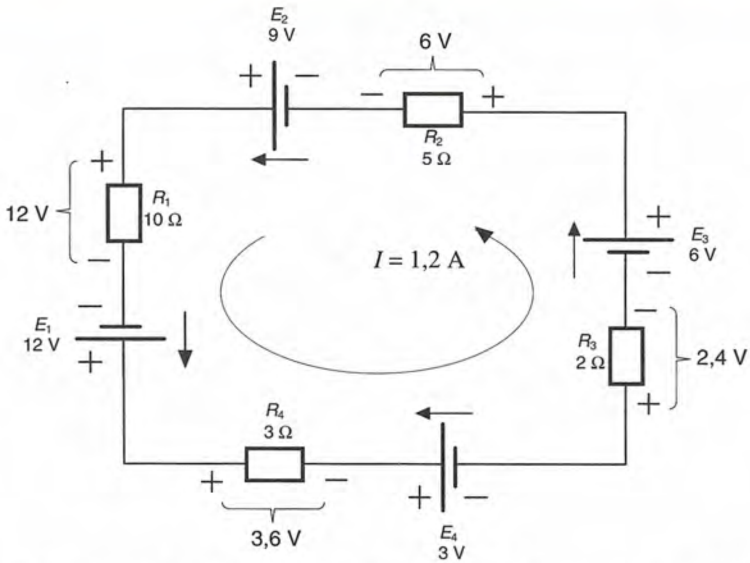


Figura 5.10. *Circuito con todos los valores calculados. Se comprueba que* Σ E = Σ(R I).

$$V_{R3} = R_3 \cdot I = 2 \times 1{,}2 \;=\; 2{,}4 \text{ V}$$
$$V_{R4} = R_4 \cdot I = 3 \times 1{,}2 \;=\; 3{,}6 \text{ V}$$

En la figura 5.10 se muestra el circuito con todos los valores calculados, y las polaridades que aparecen. Numéricamente se comprueba que cumple con las leyes de Kirchhoff:

$$\Sigma\, E \text{ (f.e.m.)} = E_1 - E_4 + E_3 + E_2 = 12 - 3 + 6 + 9 = 24 \text{ V}$$

$$\Sigma\, (I{\cdot}R) = V_{R1} + V_{R4} + V_{R3} + V_{R2} = 12 + 3{,}6 + 2{,}4 + 6 = 24 \text{ V}$$

$$\boxed{\Sigma\, \boldsymbol{E} \textbf{ (f.e.m)} = \Sigma\, (\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{R})}$$

✎ **5.2.4.2** *Dado el circuito de la figura 5.11, calcular el valor de las corrientes que circulan por cada una de las resistencias y las caídas de tensión.*

En este caso se trata de un circuito más complicado que el anterior; aparecen dos nudos, tres ramas y dos mallas. Esto dará lugar a tres ecuaciones; o sea, que debe resolverse un sistema de tres ecuaciones.

En primer lugar se establece un sentido de corrientes de nudo para obtener la primera ecuación, que se obtiene (fig. 5.12):

$$\boxed{I_2 = I_1 + I_3}$$

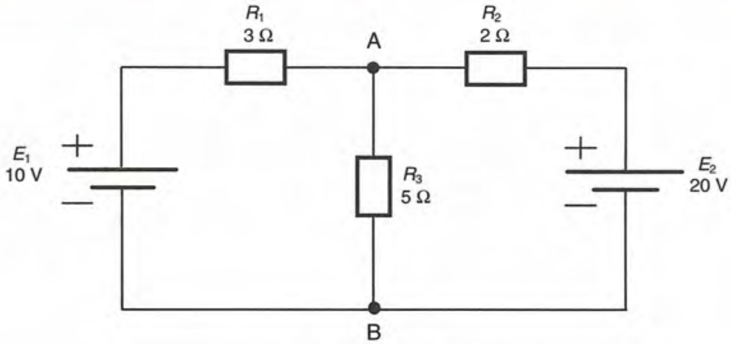


Figura 5.11.

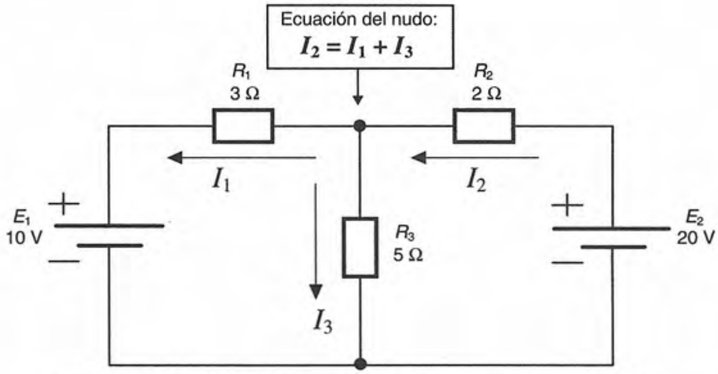


Figura 5.12. *Establecimiento de las corrientes de nudo.*

Debe saberse que la designación de los sentidos de las corrientes es arbitraria; es decir, puede ser cualquiera pues el valor absoluto de los resultados no cambia. Pero si en los resultados algún valor aparece con signo negativo (–) es porque el sentido de dicha corriente debe cambiarse, ya que circula en sentido inverso al designado.

Ecuaciones de malla:

Para construir las ecuaciones de malla se establece un sentido de recorrido, referenciado por E_1. Así, en la malla compuesta por E_1, R_1 y R_3, aparece (fig. 5.13*a*):

$$E_1 + R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0 \Rightarrow E_1 = R_3 I_3 - R_1 I_1$$

Se obtiene así la segunda ecuación del sistema:

$$\boxed{10 = 5 I_3 - 3 I_1}$$

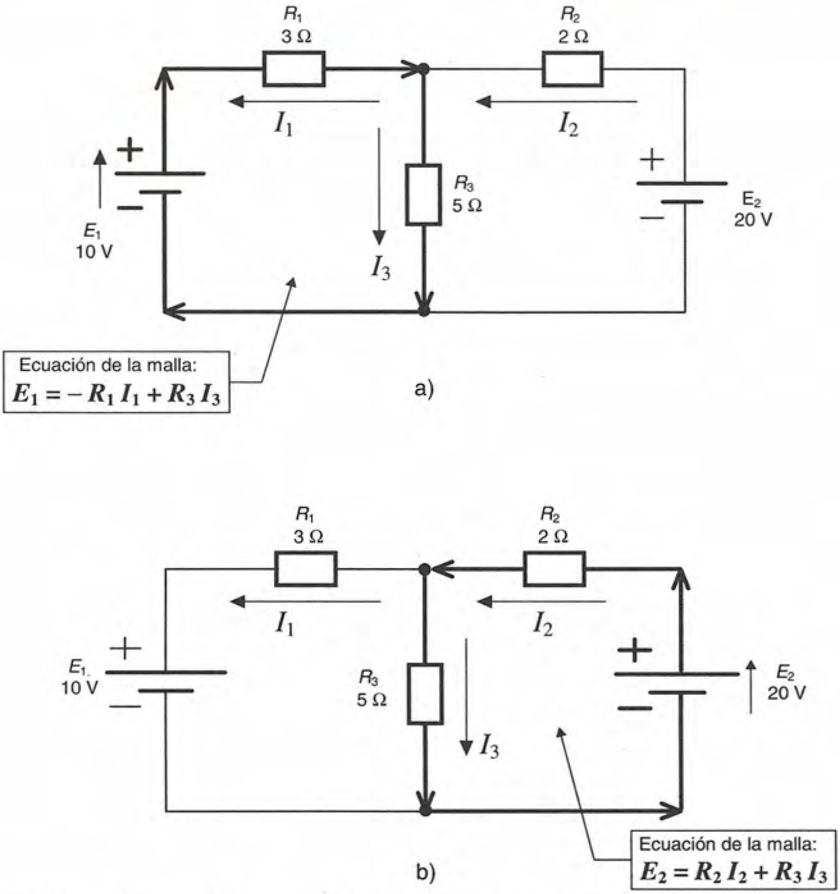


Figura 5.13. a) *Recorrido de una de las mallas del circuito y la ecuación que se obtiene.* b) *Recorrido de la otra malla y su correspondiente ecuación.*

Y en la malla compuesta por E_2, R_2 y R_3 aparece (fig. 5.13*b*):

$$E_2 - R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0 \Rightarrow E_2 = R_2 I_2 + R_3 I_3$$

Se obtiene así la tercera ecuación:

$$\boxed{20 = 2 I_2 + 5 I_3}$$

Se trata ahora de resolver el sistema de tres ecuaciones siguiente:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} I_1 - \quad I_2 + \quad I_3 &=& 0 \\ -3 I_1 + 0 I_2 + 5 I_3 &=& 10 \\ 0 I_1 + 2 I_2 + 5 I_3 &=& 20 \end{array}}$$

Una forma general y métodica de resolver los sistemas de ecuaciones es aplicando determinantes (en el apéndice 1 se expone un resumen sobre este tema). En este caso, se obtiene:

Determinante del sistema:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (-6) - (15+10) = -31$$

Determinantes para las incógnitas:

$$\Delta I_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 10 & 0 & 5 \\ 20 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (-100+20) - (-50) = -30$$

$$\Delta I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 10 & 5 \\ 0 & 20 & 5 \end{vmatrix} = (50-60) - (100) = -110$$

$$\Delta I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 20 \end{vmatrix} = -(60+20) = -80$$

El valor de I_1, I_2 y I_3 vienen dados por:

$$I_1 = \frac{\Delta I_1}{\Delta} = \frac{-30}{-31} = 0{,}968\ \text{A}$$

$$I_2 = \frac{\Delta I_2}{\Delta} = \frac{-110}{-31} = 3{,}548\ \text{A}$$

$$I_3 = \frac{\Delta I_3}{\Delta} = \frac{-80}{-31} = 2{,}581\ \text{A}$$

Este último valor, I_3, conocidos los valores de I_1 y I_2, también se puede hallar simplemente aplicando la primera ecuación (de los nudos):

$$I_2 = I_1 + I_3 \quad \Rightarrow \quad I_3 = I_2 - I_1 = 3{,}548 - 0{,}968 = 2{,}58$$

Otra forma que se puede aplicar para hallar los valores de las incógnitas es: De la primera ecuación obtenida, la de los nudos, $I_2 = I_1 + I_3$, se deduce que $I_3 = I_2 - I_1$; sustituyendo esta expresión por I_3 en las otras dos ecuaciones, tenemos:

$$10 = 5\,I_3 - 3\,I_1 \;\Rightarrow\; 10 = 5\,(I_2 - I_1) - 3I_1 = 5\,I_2 - 5\,I_1 - 3\,I_1 = 5\,I_2 - 8\,I_1$$

$$20 = 2\,I_2 + 5\,I_3 \;\Rightarrow\; 20 = 2\,I_2 + 5\,(I_2 - I_1) = 2\,I_2 + 5\,I_2 - 5\,I_1 = 7\,I_2 - 5\,I_1$$

Obtenemos así un sistema de sólo dos ecuaciones:

$$\boxed{\begin{array}{l} -8\,I_1 + 5\,I_2 = 10 \\ -5\,I_1 + 7\,I_2 = 20 \end{array}}$$

Los valores de I_1 e I_2 también pueden hallarse aplicando determinantes, pero de segundo orden:

$$I_1 = \frac{\Delta I_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 20 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -8 & 5 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-30}{-31} \approx 0{,}97\ \text{A}$$

$$I_2 = \frac{\Delta I_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -8 & 10 \\ -5 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -8 & 5 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-110}{-31} \approx 3{,}55\ \text{A}$$

Y el valor de I_3:

$$I_2 = I_1 + I_3 \;\Rightarrow\; I_3 = I_2 - I_1 = 3{,}548 - 0{,}968 = 2{,}58$$

Las tensiones en cada una de las resistencias, aplicado la ley de Ohm, son las siguientes:

$$V_{R1} = R_1 \cdot I_1 = 3 \times\ 0{,}97 = 2{,}91\ \text{V}$$

$$V_{R2} = R_2 \cdot I_2 = 2 \times 3{,}55 = \ 7{,}1\ \text{V}$$

$$V_{R3} = R_3 \cdot I_3 = 5 \times 2{,}58 = 12{,}9\ \text{V}$$

En la figura 5.14 se muestra el circuito con los valores calculados.

✎ **5.2.4.3** *Dado el circuito de la figura 5.15, calcular el valor de la corriente y caída de tensión en cada una de las resistencias.*

Se trata de un circuito en el cual también aparecen dos mallas, pero más complejo que el anterior. En primer lugar se establecen los sentidos de corriente en el circuito, cuya asignación se muestra en la figura 5.16. En el nudo A se obtiene:

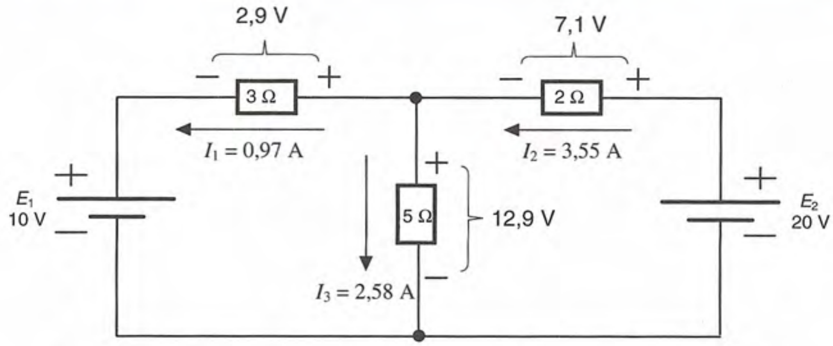


***Figura 5.14.** Circuito con los resultados de los valores calculados.*

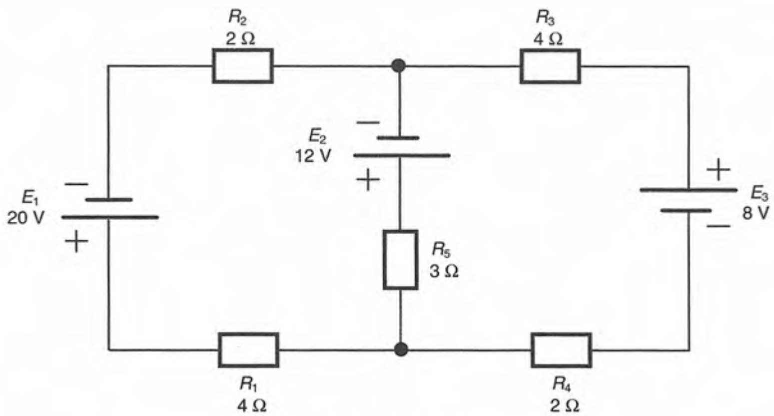


Figura 5.15.

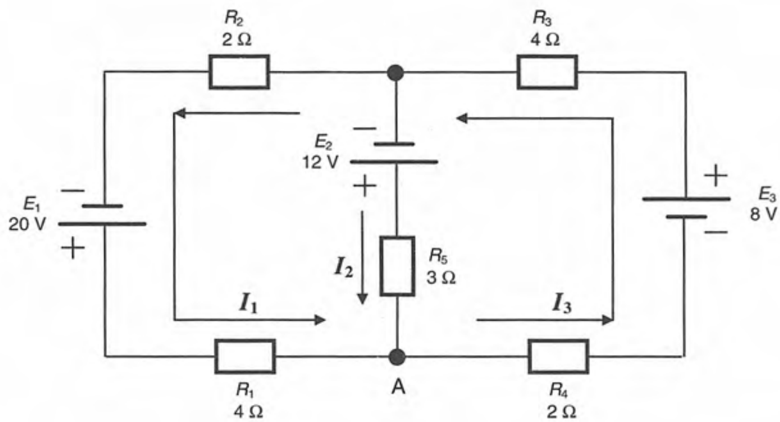


***Figura 5.16.** Establecimiento de los sentidos de las corrientes (nudo A).*

$$I_1 + I_2 = I_3$$

Es la primera ecuación del sistema. La I_1 circulará también por R_2, puesto que se encuentra en serie con R_1. Asimismo, por la misma razón, I_3 circulará también por R_3. O sea, se puede poner:

$$I_1 = I_{R1} = I_{R2}$$
$$I_2 = I_{R5}$$
$$I_3 = I_{R4} = I_{R3}$$

Ecuaciones de las mallas:

El método a aplicar es: Se toma uno de los generadores, E (f.e.m.), como marcador del sentido de referencia del recorrido de la malla, que será el primer término de la ecuación (+E). Y a los generadores de f.e.m. (E) en los cuales en el sentido de recorrido de la malla se encuentre el polo +, se les pone el signo negativo en la ecuación (–E), puesto que se encuentran en oposición con el generador de referencia y deben producir una resta. Y en el caso contrario, o sea, si en el sentido de recorrido se encuentra el polo negativo, se pone el signo positivo (+E); se produce una suma.

A las caídas de tensión se les pone el signo positivo si el sentido de la corriente (I) es igual al de recorrido de la malla, y el signo negativo ($-R \cdot I$) en caso contrario.

Malla compuesta por E_1, R_1, R_5, E_2 *y* R_2:

Para indicar el sentido de recorrido de la malla se ha tomado como referencia al generador de f.e.m. E_1, lo cual da lugar al recorrido indicado en el esquema (fig. 5.17).

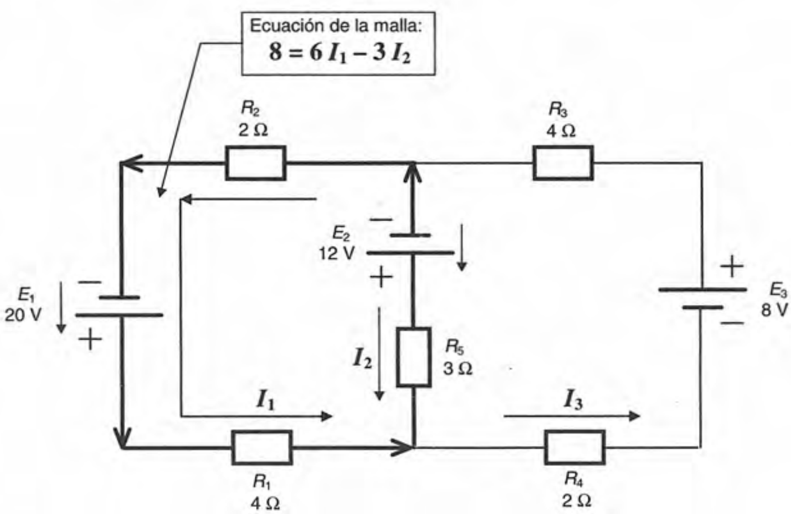


Figura 5.17. *Recorrido de la malla y ecuación que se obtiene.*

Se deduce así la segunda ecuación:

$$E_1 - E_2 = R_1 I_1 - R_5 I_2 + R_2 I_1 \Rightarrow 20 - 12 = 4 I_1 - 3 I_2 + 2 I_1$$

$$\boxed{\mathbf{8 = 6\,I_1 - 3\,I_2}}$$

Malla compuesta por E_3, R_3, E_2, R_5 *y* R_4:

Se toma como referencia de recorrido de la malla al generador E_3 (fig. 5.18).

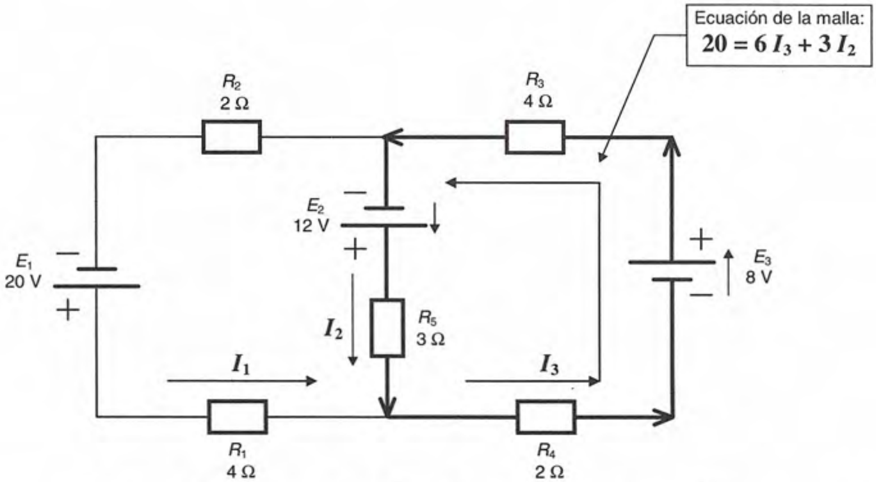


Figura 5.18. *Recorrido de la malla y ecuación que se obtiene.*

Aplicando la metodología explicada, se deduce la tercera ecuación:

$$E_3 + E_2 = R_3 I_3 + R_5 I_2 + R_4 I_3 \Rightarrow 8 + 12 = 4 I_3 + 3 I_2 + 2 I_3$$

$$\boxed{\mathbf{20 = 6\,I_3 + 3\,I_2}}$$

Llegamos así a un sistema de tres ecuaciones:

$$\boxed{\begin{aligned} I_1 + I_2 &= I_3 \\ 6 I_1 - 3 I_2 &= 8 \\ 6 I_3 + 3 I_2 &= 20 \end{aligned}}$$

Podríamos aplicar directamente determinantes de tercer orden y obtener los valores de I_1, I_2 e I_3. Pero si sustituimos la primera expresión, $\boldsymbol{I_1 + I_2 = I_3}$, por la variable I_3 en la tercera ecuación, se obtiene:

$$20 = 6\,I_3 + 3\,I_2 \;\Rightarrow\; 20 = 6\,(I_1 + I_2) + 3\,I_2 = 6\,I_1 + 6\,I_2 + 3\,I_2 = 6\,I_1 + 9\,I_2$$

Ello da lugar a un sistema de sólo dos ecuaciones, que se puede resolver por medio de determinantes de segundo orden:

$$\boxed{\begin{array}{l} 6\,I_1 - 3\,I_2 = 8 \\ 6\,I_1 + 9\,I_2 = 20 \end{array}}$$

Se obtiene así:

$$I_1 = \frac{\Delta I_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 20 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{72-(-60)}{54-(-18)} = \frac{132}{72} = 1{,}833 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\Delta I_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 6 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{120-48}{54-(-18)} = \frac{72}{72} = 1 \text{ A}$$

Y de la primera ecuación, la de los nudos, se obtiene el valor de I_3:

$$I_3 = I_1 + I_2 = 1{,}833 + 1 = 2{,}83 \text{ A}$$

Las caídas de tensión en las resistencias se calculan por medio de la ley de Ohm. Como las corrientes son:

$$I_1 = I_{R1} = I_{R2} = 1{,}833 \text{ A}$$

$$I_2 = I_{R5} = 1 \text{ A}$$

$$I_3 = I_{R4} = I_{R3} = 2{,}83 \text{ A}$$

Se obtiene:

$$V_{R1} = R_1 \cdot I_1 = 4 \times 1{,}833 = 7{,}332 \text{ V}$$

$$V_{R2} = R_2 \cdot I_1 = 2 \times 1{,}833 = 3{,}67 \text{ V}$$

$$V_{R3} = R_3 \cdot I_3 = 4 \times 2{,}83 = 11{,}32 \text{ V}$$

$$V_{R4} = R_4 \cdot I_3 = 2 \times 2{,}83 = 5{,}66 \text{ V}$$

$$V_{R5} = R_5 \cdot I_2 = 3 \times 1 = 3 \text{ V}$$

5.3 MÉTODO DE MAXWELL

El método de Maxwell, también conocido como *método de las mallas*, se deriva del método de Kirchhoff. Su planteamiento puede resultar más claro o metódico, y resulta especialmente interesante cuando los circuitos empiezan a tener una cierta complejidad. También tiene como resultado resolver un sistema de ecuaciones, aunque aparece una ecuación menos que en Kirchhoff.

Una *corriente de malla* es una corriente que se supone circula con el mismo valor por todos los componentes de la malla en cuestión. Como los componentes pueden formar parte de más de una malla, por un componente puede circular más de una corriente de malla; en este caso, el valor efectivo de la corriente se obtiene mediante la suma algebraica de las corrientes de malla que lo recorran. Por ejemplo, si por una resistencia circulan dos corrientes de malla, la corriente efectiva real que la recorrerá será la suma algebraica de las dos corrientes de malla; si circulan en el mismo sentido se suman y si circulan en sentido contrario se restan.

5.3.1 Metodología de aplicación

1. Se asigna a cada malla un sentido de corriente, que definirá asimismo el sentido de recorrido de la malla. La convención generalmente adoptada es tomar todas las corrientes de malla en sentido horario (de izquierda a derecha); pero esto no es esencial, se pueden tomar sentidos arbitrarios (por ejemplo, en referencia a un generador). Para facilitar la comprensión del planteamiento, se pueden poner unas flechas indicativas (en el sentido convencional de la corriente) en cada generador.

2. Se deducen las ecuaciones de las mallas, lo cual se hace basándose en la ley de Kirchhoff de las tensiones: $\Sigma E = \Sigma R \cdot I$. Cada ecuación de malla se puede deducir aplicando el siguiente criterio:

Los generadores cuyo sentido coincida con el de la corriente de malla se toman con signo positivo (+E); en caso contrario, se ponen con signo negativo (–E). En general, están en oposición si la corriente de malla entra por el polo positivo. Esto se puede observar muy fácilmente si se pone una flechita en cada generador (en el sentido convencional de la corriente). Se obtiene así la tensión total de todos los generadores de la malla, expresión algebraica de ΣE.

Las resistencias pueden ser recorridas por más de una corriente de malla; cada corriente determinará un producto $R \cdot I$. En general, las caídas de tensión en las resistencias cuyo sentido de corriente coincida con el sentido de definición de la malla considerada, se toman con signo positivo ($+R \cdot I$); en caso contrario, se toman con signo negativo ($-R \cdot I$). Así, en una malla todas las caídas de tensión de las resistencias recorridas por la corrientes de su malla son positivas. En las resistencias recorridas por más de una corriente de malla, corrientes en el mismo sentido se suman y corrientes en sentido contrario se restan. Por ejemplo, si una resistencia es recorrida por dos corrientes de malla en el mismo sentido, aparece: $R\,(I_1 + I_2) = R\,I_1 + R\,I_2$. Y si es recorrida por corrientes en sentido contrario: $R\,(I_1 - I_2) = R\,I_1 - R\,I_2$. Se obtiene de esta manera la expresión algebraica de ($\Sigma\, R{\cdot}I$).

Se iguala la suma algebraica de todas las tensiones de los generadores ($\Sigma\, E$) con la suma algebraica de todas las caídas de tensión ($\Sigma\, R{\cdot}I$), obteniéndose así la ecuación de la malla.

3. Se resuelve el sistema de ecuaciones obtenido (aparece una ecuación por malla), y se obtienen los valores de corriente de malla. En los componentes por los cuales circule más de una corriente de malla, el valor efectivo se obtiene haciendo la suma algebraica de las corrientes que circulen. Al igual que en la aplicación de Kirchhoff, resultados con signo negativo indican que el sentido verdadero es contrario al planteado.

Mediante los ejercicios que se desarrollan a continuación se aclaran todos estos conceptos.

5.3.2 Ejercicios desarrollados

✎ ***5.3.2.1*** *Dado el circuito de la figura 5.15, calcular el valor de la corriente por cada uno de los componentes.*

Este circuito fue resuelto ya por Kirchhoff (ejercicio 5.2.4.3), y ahora, a nivel comparativo, lo desarrollaremos por Maxwell.

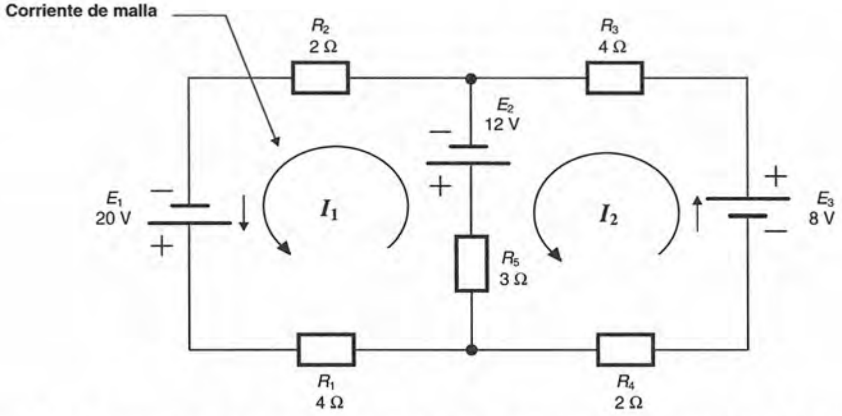


Figura 5.19. *Asignación de las corrientes de malla para aplicar el método de Maxwell.*

En primer lugar asignamos un sentido de corriente a cada una de las mallas, según se muestra en la figura 5.19. Estos sentidos de corriente definen a la vez el sentido de recorrido de la malla para obtener la ecuación. Así, la corriente de malla I_1 circula por E_1, R_1, R_5, E_2 y R_2. Y la corriente I_2, circula por E_3, R_3, E_2, R_5 y R_4.

En los componentes por los que circulen varias corrientes, el valor efectivo se obtiene haciendo la suma algebraica de las mismas; corrientes en el mismo sentido se suman, y corrientes en sentido opuesto se restan. Por tanto, como por R_5 circulan las dos corrientes de malla (I_1 y I_2) en sentidos contrarios, el valor efectivo será: $I_{R5} = I_2 - I_1$.

Así, pues, del circuito de la figura 5.19 se deduce que:

$$I_1 = I_{E1} = I_{R1} = I_{R2}$$

$$I_2 = I_{E3} = I_{R3} = I_{R4}$$

$$I_{R5} = I_{E2} = I_2 - I_1$$

En la malla de I_1 se obtiene:

$$E_1 - E_2 = R_1 I_1 + R_5 I_1 - R_5 I_2 + R_2 I_1 = (R_1 + R_5 + R_2)\, I_1 - R_5\, I_2$$

$$20 - 12 = (4 + 3 + 2)\, I_1 - 3\, I_2 \Rightarrow 8 = 9\, I_1 - 3\, I_2$$

Y en la malla de I_2:

$$E_3 + E_2 = R_3 I_2 + R_5 I_2 - R_5 I_1 + R_4 I_2 = (R_3 + R_5 + R_4)\, I_2 - R_5\, I_1$$

$$8 + 12 = (4 + 3 + 2)\, I_2 - 3\, I_1 \Rightarrow 20 = -3\, I_1 + 9\, I_2$$

Se obtiene así el sistema de ecuaciones:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{9\, I_1 - 3\, I_2} &= \mathbf{8} \\ \mathbf{-3\, I_1 + 9\, I_2} &= \mathbf{20} \end{aligned}}$$

Resolviendo, se obtienen los valores:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 20 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{72-(-60)}{81-9} = \frac{132}{72} = 1{,}833\,\mathrm{A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 8 \\ -3 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{180-(-24)}{81-9} = \frac{204}{72} = 2{,}833\,\mathrm{A}$$

El valor de la corriente que circula por R_5, puesto que por dicha resistencia circulan las dos corrientes de malla (I_2 en un sentido e I_1 en sentido contrario), se obtiene por:

$$I_{R5} = I_2 - I_1 = 2{,}883 - 1{,}883 = 1 \text{ A}$$

Todos los valores aparecen positivos, lo cual indica que las corrientes de malla circulan con los sentidos definidos en el planteamiento. Cuando un resultado aparece con signo negativo es porque el sentido de circulación real es diferente al asignado. Por ejemplo, si tomáramos la corriente de malla I_1 en sentido contrario al indicado en la figura 5.19, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$9\, I_1 + 3\, I_2 = -8$$
$$3\, I_1 + 9\, I_2 = 20$$

del cual se obtiene que $I_1 = -1{,}883$ A.

✎ **5.3.2.2** *Calcular el valor de las corrientes que circulan por cada una de las resistencias del circuito representado en la figura 5.11.*

Este es un circuito también ya resuelto por Kirchhoff (ejercicio 5.2.4.2), cuyo desarrollo nos servirá también como referencia comparativa.

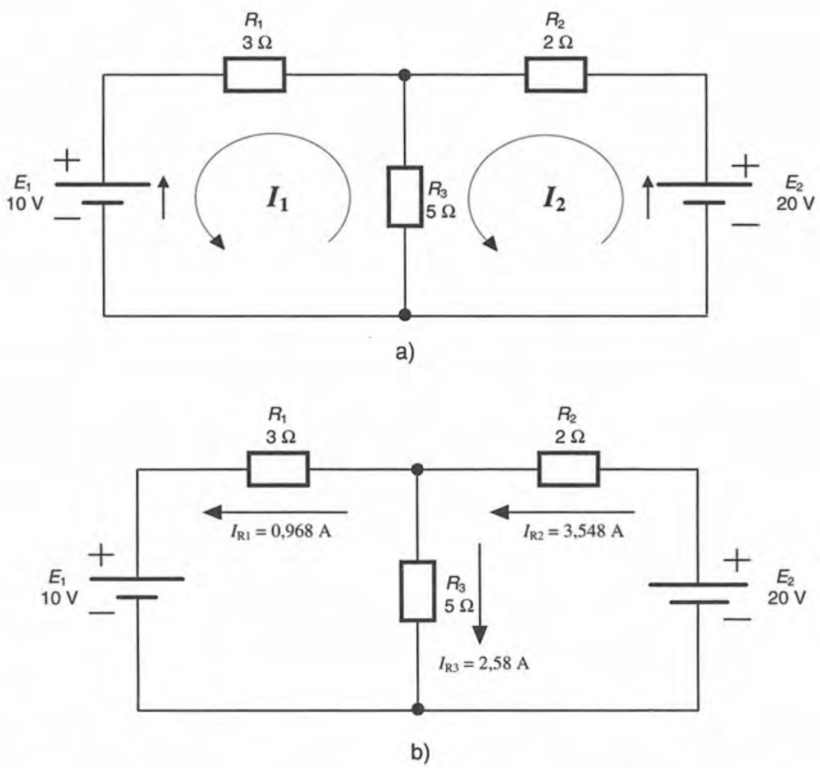


Figura 5.20. a) *Asignación de las corrientes de malla.* b) *Resultados obtenidos.*

En principio, asignamos los sentidos de corrientes en las dos mallas que aparecen, procurando, por deducción, que sean los reales (fig. 5.20). En este caso, el sentido de la corriente de malla I_1 se ha tomado en contraposición con el generador E_1.

Ecuación de la malla de I_1:

$$-E_1 = R_1 I_1 + R_3 I_1 - R_3 I_2 \Rightarrow -10 = 3\,I_1 + 5\,I_1 - 5\,I_2 \Rightarrow 8\,I_1 - 5\,I_2 = -10$$

El generador E_1 aparece con signo negativo porque está en contraposición con el sentido de I_1 (la corriente de malla, I_1, le entra por el polo positivo).

Ecuación de la malla de I_2:

$$E_2 = R_2 I_2 + R_3 I_2 - R_3 I_1 \Rightarrow 20 = 2\,I_2 + 5\,I_2 - 5\,I_1 \Rightarrow -5\,I_1 + 7\,I_2 = 20$$

Se obtiene así el sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{8\,I_1 - 5\,I_2 = -10}$$

$$\mathbf{-5\,I_1 + 7\,I_2 = 20}$$

En este caso, a nivel comparativo, lo resolveremos por el método de igualación. Despejando I_1 en las dos ecuaciones:

$$8\,I_1 - 5\,I_2 = -10 \Rightarrow 8\,I_1 = -10 + 5\,I_2 \Rightarrow I_1 = \frac{-10 + 5\,I_2}{8}$$

$$-5\,I_1 + 7\,I_2 = 20 \Rightarrow -5\,I_1 = 20 - 7\,I_2 \Rightarrow I_1 = \frac{20 - 7\,I_2}{-5}$$

Igualando estas dos expresiones:

$$\frac{-10 + 5\,I_2}{8} = \frac{20 - 7\,I_2}{-5} \Rightarrow -5\,(-10 + 5\,I_2) = 8\,(20 - 7\,I_2) =$$

$$= 50 - 25\,I_2 = 160 - 56\,I_2 \Rightarrow 50 - 160 = -56\,I_2 + 25\,I_2 \Rightarrow -110 = -31\,I_2$$

$$I_2 = \frac{-110}{-31} = 3{,}548\,\text{A}$$

El valor de I_1 se obtiene sustituyendo el valor numérico de I_2 en cualquiera de las dos expresiones en que se ha despejado I_1:

$$I_1 = \frac{20 - 7\,I_2}{-5} = \frac{20 - (7 \times 3{,}548)}{-5} = 0{,}968\ \text{A}$$

Al resultar positivos los valores de I_1 e I_2, los sentidos de corriente reales coinciden con los planteados en el esquema.

Puesto que por R_3 circulan las dos corrientes de malla en contraposición, el valor de I_{R3} se obtiene por medio de una resta:

$$I_{R3} = I_2 - I_1 = 3{,}548 - 0{,}968 = 2{,}58 \text{ A}$$

Como que el valor de I_2 es mayor que el de I_1, el sentido de circulación de la corriente por R_3 coincide con el de I_2. En la figura 5.20*b* se muestra el circuito con los datos calculados.

✎ **5.3.2.3** *Dado el circuito de la figura 5.21, calcular las corrientes que circularán por los generadores E_1, E_2 y por la resistencia R_L.*

Este circuito puede asimilarse a una dinamo (E_1) con resistencia interna de 0,5 Ω (R_1), en paralelo con una batería de 12 V (E_2) y de 1 Ω de resistencia interna (R_2), alimentando a una carga (R_L) de 10 Ω (receptor de energía, lámpara, motor, resistencia calefactora, etc.).

Según los sentidos de las corrientes de malla asignadas (fig. 5.21), se deduce que:

$$I_1 = I_{E1} = I_{R1}, \quad I_2 = I_{RL}, \quad I_{E2} = I_{R2} = I_1 - I_2$$

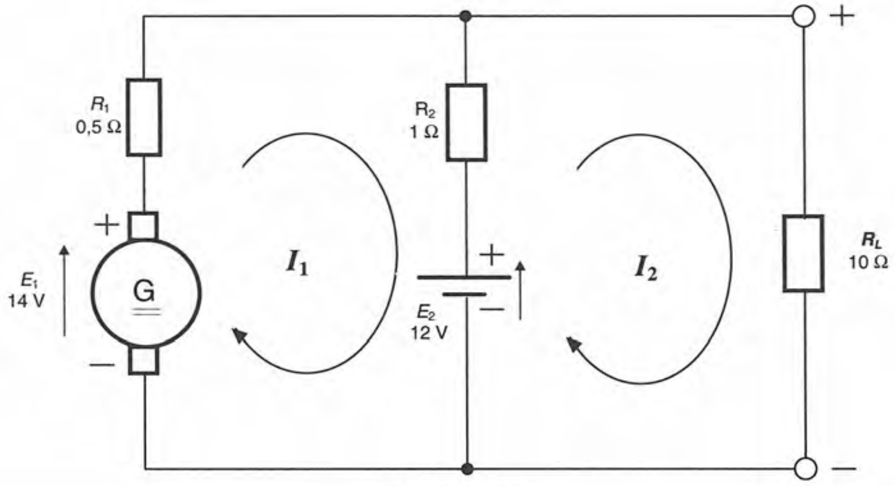


Figura 5.21.

Ecuación de la malla de I_1:

$$E_1 - E_2 = R_1 I_1 + R_2 I_1 - R_2 I_2 \Rightarrow 14 - 12 = 0{,}5\, I_1 + I_1 - I_2 \Rightarrow 2 = 1{,}5\, I_1 - I_2$$

Ecuación de la malla de I_2:

$$E_2 = R_2 I_2 - R_2 I_1 + R_L I_2 \Rightarrow 12 = I_2 - I_1 + 10\, I_2 \Rightarrow 12 = -I_1 + 11\, I_2$$

Aparece así el sistema de ecuaciones:

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbf{1{,}5\,I_1 - I_2 = 2} \\ \mathbf{-I_1 + 11\,I_2 = 12} \end{array}}$$

En este caso, resolveremos por el método de sustitución; se trata de despejar en una de las ecuaciones una de las incógnitas y sustituir su expresión en la otra ecuación:

$$1{,}5\,I_1 - I_2 = 2 \Rightarrow I_2 = 1{,}5\,I_1 - 2$$

$$12 = -I_1 + 11\,I_2 = -I_1 + 11\,(1{,}5\,I_1 - 2) = -I_1 + 16{,}5\,I_1 - 22$$

$$12 + 22 = -I_1 + 16{,}5\,I_1 \Rightarrow 34 = 15{,}5\,I_1 \Rightarrow \quad I_1 = \frac{34}{15{,}5} = 2{,}194\text{ A}$$

Y el valor de I_2:

$$I_2 = 1{,}5\,I_1 - 2 = (1{,}5 \times 2{,}194) - 2 = 1{,}29\text{ A}$$

Por tanto, como $I_{RL} = I_2$, la corriente por la resistencia R_L será: $I_{RL} = 1{,}29$ A.

Como por la rama compuesta por R_2 y E_2 circulan las dos corrientes de malla (I_1 y I_2), el valor de la corriente por dicha rama es:

$$I_{E2} = I_{R2} = I_1 - I_2 = 2{,}194 - 1{,}29 = 0{,}904\text{ A}$$

Así, pues, resumiendo, se obtienen los valores:

$$I_{E1} = 2{,}194\text{ A},\ I_{E2} = 0{,}904\text{ A},\ I_{RL} = 1{,}29\text{ A}$$

Todos los valores tienen signo positivo porque los sentidos de corriente son tal como se han asignado en el circuito (fig. 5.21). En la figura 5.22 se muestra el circuito con las corrientes calculadas y tensiones en cada componente. Por el generador E_2 circula una corriente de 0,904 A en el sentido de la malla I_1; por tanto, dicho generador recibe corriente (batería en proceso de carga). La carga, R_L, recibe una corriente de 1,29 A. Así, pues, el generador E_1 produce una corriente de 2,194 A que se reparte entre la batería (E_2) y la carga (R_L).

5.4 TEOREMA DE THÉVENIN

La técnica de análisis de circuitos que se explica en este apartado (Thévenin) es de suma importancia tanto en electricidad como en electrónica. Tiene como especial característica que se puede aplicar tanto a nivel teórico como práctico; o sea, el teorema de Thévenin se puede aplicar también experimentalmente, mediante medidas de tensión (V) y resistencia (Ω) en el circuito.

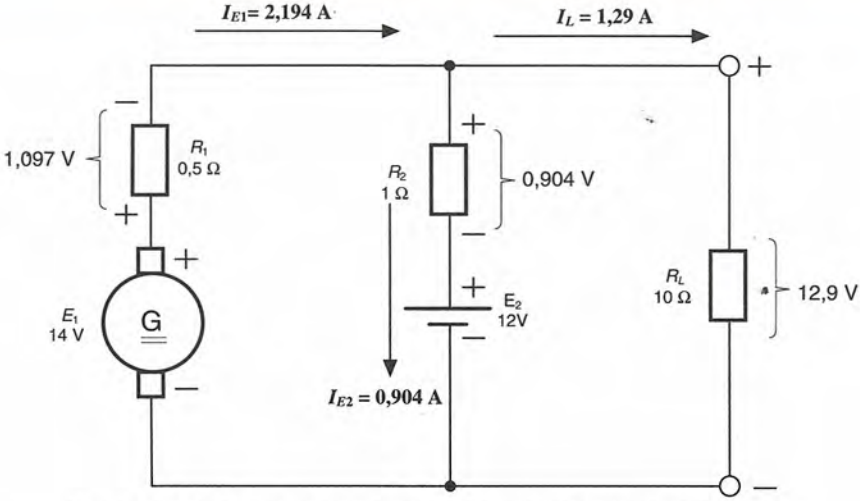


Figura 5.22. Circuito con los resultados de los valores calculados.

5.4.1 Principios fundamentales

El teorema de Thévenin se puede expresar diciendo:

El conjunto de componentes entre dos puntos de un circuito, en el cual pueden encontrarse diversos generadores y resistencias, tiene por equivalente a un circuito formado simplemente por un solo generador y una resistencia en serie (fig. 5.23).

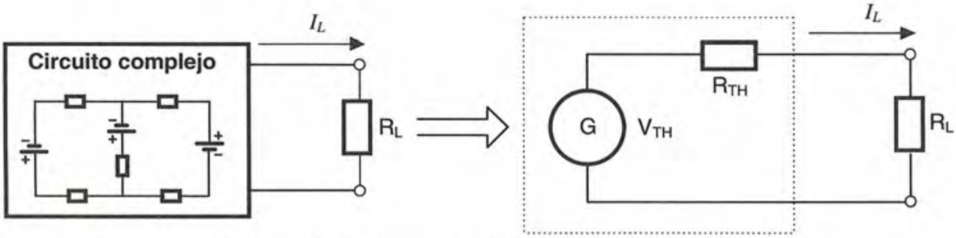


Figura 5.23. Ilustración del teorema de Thévenin.

Así, por medio de este principio fundamental es posible simplificar circuitos más o menos complejos y poder hacer su análisis de una forma sencilla.

Un ejemplo de aplicación de Thévenin se muestra en la figura 5.24. Se trata de un circuito muy utilizado en electrónica, denominado puente de Wheatstone. El cálculo de la corriente que circula por la resistencia de carga,

R_L, se halla fácilmente partiendo del equivalente Thévenin, sin más que aplicar la ley de Ohm:

$$I_{RL} = \frac{V_{TH}}{R_{TH} + R_L} = \frac{4{,}72}{555+1000} = 0{,}003\,\text{A} = 3\ \text{mA}$$

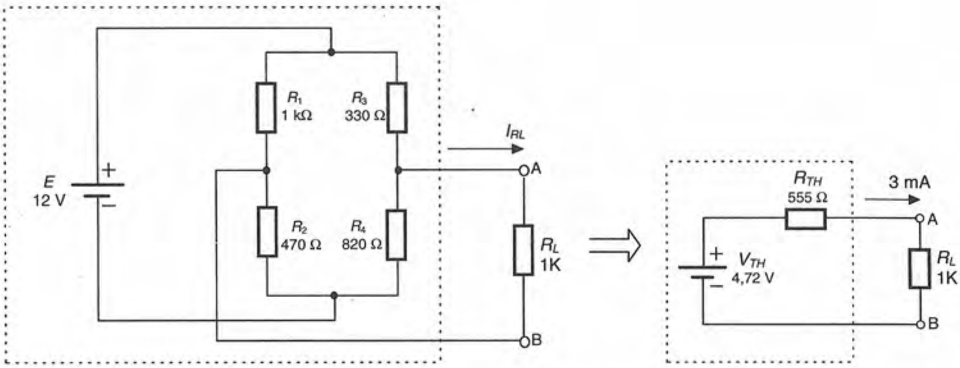


Figura 5.24. *Ejemplo de circuito práctico con su equivalente Thévenin.*

Para llegar al circuito equivalente de Thévenin, como es obvio, deben hallarse los valores de V_{TH} y R_{TH}, lo cual requiere realizar ciertas operaciones; es *thevenizar* el circuito.

Voltaje Thévenin (V_{TH}):

La tensión Thévenin, V_{TH}, es la que aparece entre los terminales de la carga (salida), con la carga (R_L) desconectada, o sea, en vacío. Este valor se puede obtener teóricamente por cálculo o, simplemente, midiendo con el voltímetro, si se trata de un circuito práctico. En el circuito de la figura 5.24 el valor de V_{TH} se obtendría calculando la tensión entre los terminales A y B de la salida (sin la carga) o bien, simplemente, midiendo con un voltímetro la tensión entre dichos terminales (lo cual daría 4,72 V).

Resistencia Thévenin (R_{TH}):

Es el valor de resistencia que aparece entre los terminales de salida (sin la carga) considerando al generador (o generadores) con tensión igual a cero (E = 0 V). El valor de R_{TH} se puede hallar teóricamente por cálculo del valor total de resistencia, o bien experimentalmente por medio de un óhmetro; se elimina el generador, E, se unen los puntos donde estaba conectado (lo cual equivale a E = 0 V) y se mide la resistencia entre los terminales de salida (en el caso del circuito de la figura 5.24, se obtendrían 555 Ω).

La técnica de análisis de circuitos por Thévenin, además de que puede resultar más sencilla que por Kirchhoff, tiene otra ventajosa utilidad: se puede obtener el valor de la corriente que circula por la carga, para cualquier valor de R_L, simplemente cambiando el valor de R_L en la expresión:

$$I_{RL} = \frac{V_{TH}}{R_{TH} + R_L}$$

De hacer el cálculo aplicando Kirchhoff o Maxwell, deberían rehacerse los cálculos para cada valor de R_L. Así, Thévenin resulta especialmente interesante cuando se tienen que hacer cálculos con diferentes valores de R_L.

A continuación se realiza el desarrollo de varios ejercicios aplicando Thévenin, aprovechando los mismos para explicar las cuestiones necesarias.

5.4.2 Ejercicios desarrollados

✎ **5.4.2.1** *Dado el circuito representado en la figura 5.25, calcular la corriente que circulará por la resistencia de carga R_L (I_L), y la tensión de salida (V_L) para $R_L = 820\ \Omega$ y $R_L = 1K2$.*

Se trata de un circuito que se conoce como divisor de tensión, muy utilizado en electrónica para obtener determinadas tensiones de salida que son una fracción de la tensión de entrada.

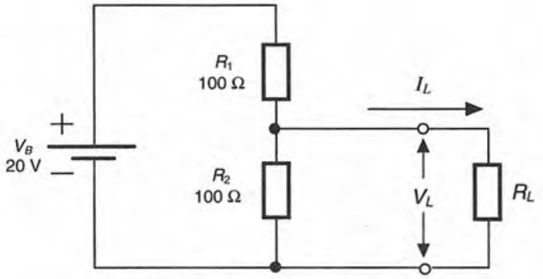


Figura 5.25. *Divisor de tensión.*

Para obtener el circuito de Thévenin equivalente, se tiene que hallar el valor de V_{TH} y de R_{TH}, lo cual se representa en la figura 5.26. Considerando la resistencia de carga (R_L) desconectada (fig. 5.26*a*), se deduce que V_{TH}= 10 V:

$$I = \frac{V_B}{R_1 + R_2} = \frac{20}{100+100} = 0{,}1\,\text{A} \Rightarrow V_{TH} = V_{R2} = I \times R_2 = 0{,}1 \times 100 = 10\,\text{V}$$

Y el valor de R_{TH}, considerando $V_B = 0$ V (fig. 5.26*b*), y al ser $R_1 = R_2$, se deduce que:

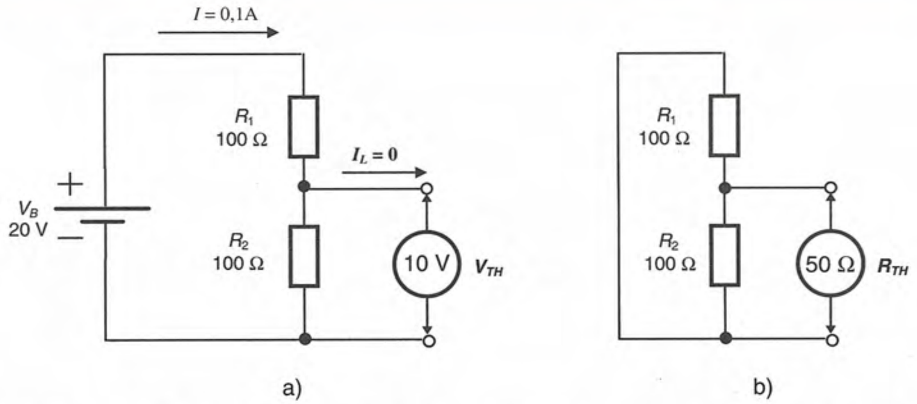


Figura 5.26. a) *Cálculo de la tensión Thévenin (*V_{TH}*).* b) *Cálculo de la resistencia Thévenin (*R_{TH}*).*

$$R_{TH} = \frac{R_1 \; R_2}{R_1 + R_2} = 50\,\Omega$$

Así, pues, el circuito equivalente de Thévenin se muestra en la figura 5.27. Las corrientes y tensiones de salida son:

Para $R_L = 820\ \Omega$:

$$R_L = 820\,\Omega \;\Rightarrow I_L = \frac{V_{TH}}{R_{TH} + R_L} = \frac{10}{50 + 820} = 0{,}0115\,\text{A}$$

$$V_L = R_L \; I_L = 820 \times 0{,}0115 = 9{,}425\,\text{V}$$

Para $R_L = 1\text{K}2$:

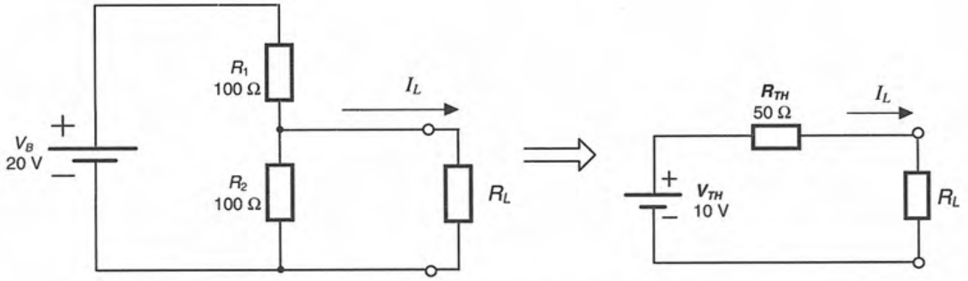


Figura 5.27*. Circuito divisor de tensión y su equivalente Thévenin.*

$$R_L = 1\text{K2} \Rightarrow I_L = \frac{V_{TH}}{R_{TH} + R_L} = \frac{10}{50 + 1200} = 0{,}008\,\text{A}$$

$$V_L = R_L\ I_L = 1200 \times 0{,}008 = 9{,}6\,\text{V}$$

✎ **5.4.2.2** *Dado el circuito representado en la figura 5.28*a, *calcular el valor de la corriente que circulará a través de la resistencia de carga R_L (I_L), para los valores 150 Ω, 100 Ω y 50 Ω.*

En este caso, y a nivel demostrativo-comparativo, se explicará su análisis por Thévenin y por el método clásico.

Desarrollo por Thévenin

Cálculo de V_{TH}:

Con la resistencia R_L desconectada ($I_L = I_{R5} = 0$), la tensión entre los puntos A y B es la tensión en R_4 (V_{R4}), y su valor se obtiene como se explica a continuación.

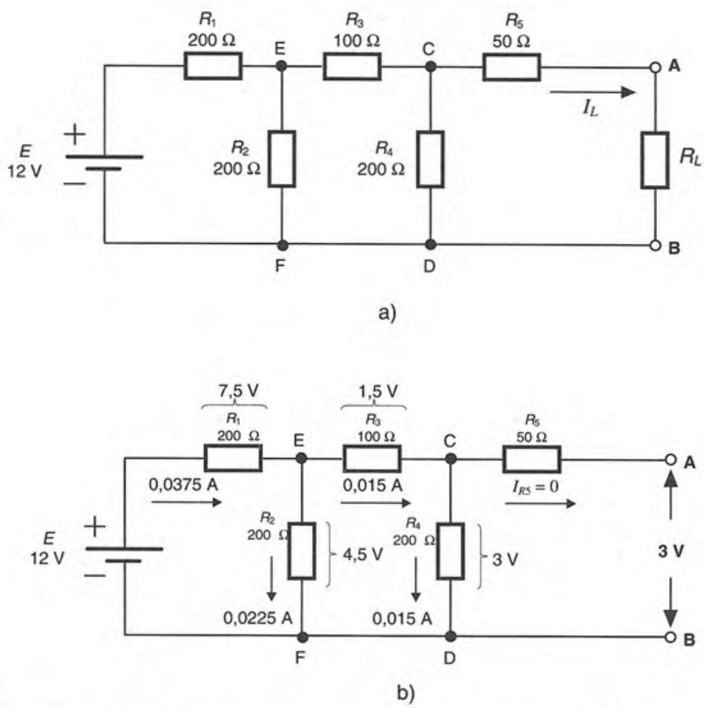


Figura 5.28. a) *Circuito.* b) *Tensiones y corrientes que se deducen (sin carga); la tensión Thévenin es de 3 V.*

Como el valor de resistencia total (R_T) que verá la fuente de tensión E (con R_L desconectada), es:

$$R_T = R_1 + \frac{(R_3+R_4)R_2}{(R_3+R_4)+R_2} = 200 + \frac{(100+200)\times 200}{(100+200)+200} = 320\Omega$$

la corriente total, I_T, será:

$$I_T = \frac{E}{R_T} = \frac{12}{320} = 0{,}0375\,\text{A}$$

con lo cual la tensión en R_2 (puntos E y F), será:

$$V_{R2} = E - V_{R1} = 12 - R_1 I_T = 12 - (200 \times 0{,}0375) = 4{,}5\ \text{V}$$

Se deduce así que la tensión en R_4 (puntos C y D), y por tanto también entre los puntos A y B (ya que R_L está desconectada), será de 3 V (fig. 5.28*b*):

$$V_{R4} = V_{R2}\,\frac{R_4}{R_3 + R_4} = 4{,}5 \times \frac{200}{100+200} = 3\,\text{V}$$

Cálculo de R_{TH}:

Considerando $E = 0$ V, por asociación de resistencias en paralelo y serie, se deduce que entre los puntos A y B (con R_L desconectada) aparece un valor de resistencia de 150 Ω.

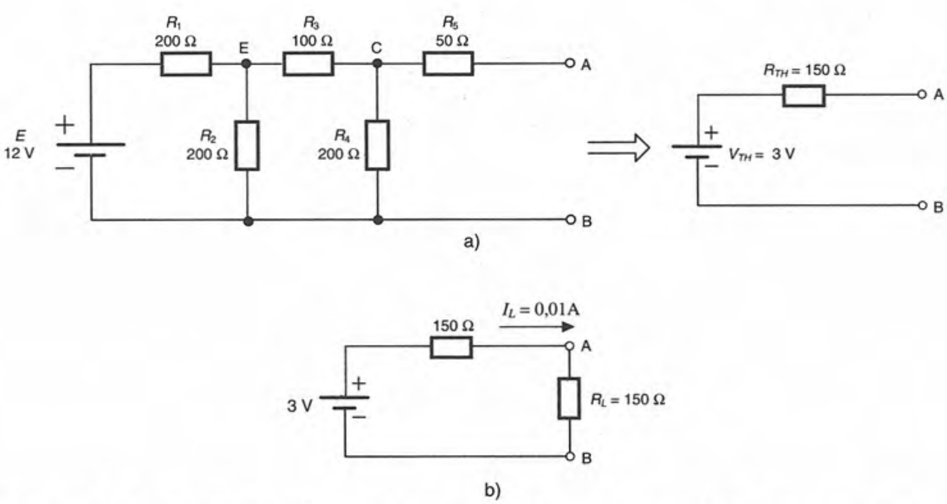


Figura 5.29. a) *Circuito con su equivalente de Thévenin obtenido.* b) *Corriente de salida para* R_L *= 150 Ω.*

Así, pues, el circuito equivalente de Thévenin correspondiente es el que se muestra en la figura 5.29*a*; una fuente de tensión de 3 V con una resistencia en serie de 150 Ω.

A partir del circuito equivalente de Thévenin se obtiene que la corriente de salida I_L, para $R_L = 150\ \Omega$, viene dada por (fig. 5.29*b*):

$$R_L = 150\,\Omega \Rightarrow I_L = \frac{V_{TH}}{R_{TH} + R_L} = \frac{3}{150 + 150} = 0{,}01\,\mathrm{A}$$

Y los valores de I_L que se obtendrían para $R_L = 100$ y $R_L = 50$, son:

$$R_L = 100\ \Omega \Rightarrow I_L = 0{,}012\ \mathrm{A},$$
$$R_L = 50\ \Omega \Rightarrow I_L = 0{,}015\ \mathrm{A}.$$

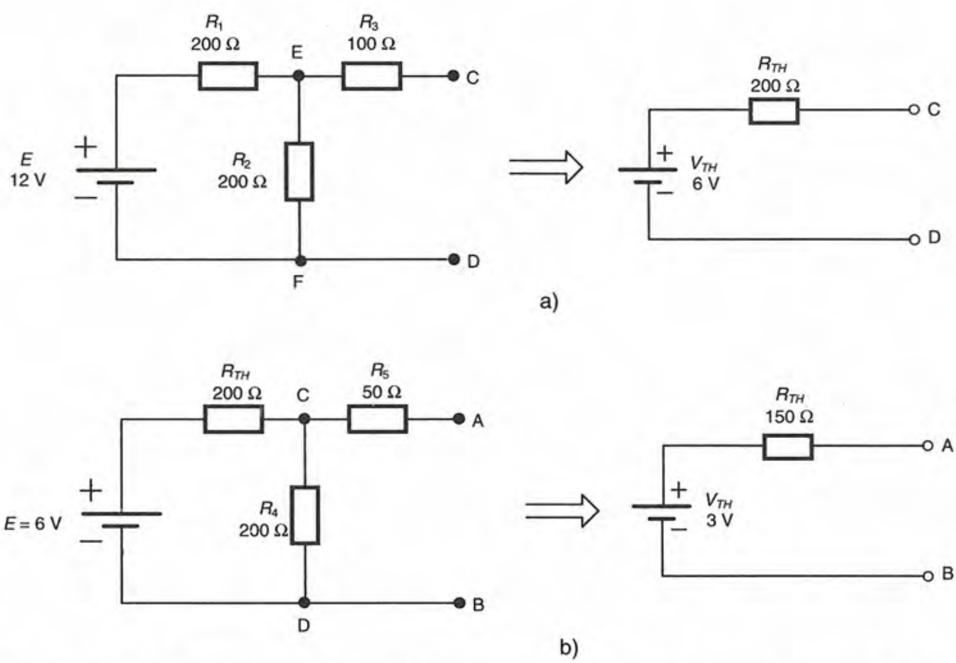


Figura 5.30. *Aplicación por partes del teorema de Thévenin al circuito anterior.* a) *Deducción del equivalente Thévenin parcial.* b) *Deducción del equivalente de Thévenin completo.*

Una observación a tener en cuenta es que el desarrollo para hallar el circuito equivalente Thévenin se puede hacer también por partes, como se representa en la figura 5.30.

Desarrollo por el método clásico

A continuación, a modo de comprobación de los resultados y comparación, se expone el desarrollo de cálculo por el método clásico; o sea, basado únicamente en la ley de Ohm y los principios de asociación de resistencias en serie-paralelo.

Desarrollo para el cálculo de la resistencia total (R_T) que verá el generador (E), para $R_L = 150\ \Omega$ (fig. 5.28*a*): Como R_5 está en serie con R_L, se obtiene el valor de 50 + 150 = 200 Ω. Este valor en paralelo con los 200 Ω de R_4 resulta en 100 Ω, que sumados a los 100 Ω de R_3 da 200 Ω. Estos 200 Ω en paralelo con los 200 Ω de R_2 da lugar a 100 Ω, que sumados con los 200 Ω de R_1 dan lugar, finalmente, a una resistencia total $R_T = 300\ \Omega$.

Desarrollo para el calculo de I_L:

Conociendo la R_T, la I_T será:

$$I_T = \frac{E}{R_T} = \frac{12}{300} = 0{,}04\ \text{A}$$

Se deduce que la tensión entre los puntos E y F (V_{R2}) será:

$$V_{EF} = V_{R2} = E - V_{R1} = E - (R_1\ I_T)$$

$$V_{EF} = 12 - (200 \times 0{,}04) = 4\ \text{V}$$

Por el mismo razonamiento, la tensión $V_{CD} = V_{R4}$, vendrá dada por:

$$V_{CD} = V_{R4} = V_{EF} - V_{R3} = V_{EF} - (R_3\ \ I_{R3})$$

El valor de I_{R3} se puede obtener por:

$$I_{R3} = \frac{V_{EF}}{\dfrac{(R_L + R_5)\ R_4}{(R_L + R_5) + R_4} + R_3} = \frac{4}{200} = 0{,}02\ \text{A}$$

Por tanto, la tensión entre los puntos C y D (V_{R4}), será:

$$V_{CD} = V_{EF} - (R_3 \cdot I_{R3}) = 4 - (100 \times 0{,}02) = 2\ \text{V}$$

Finalmente, puesto que R_L está en serie con R_5 ($I_L = I_{R5}$), se obtiene que el valor I_L es:

$$I_L = \frac{V_{CD}}{R_5 + R_L} = \frac{2}{50 + 150} = 0{,}01\ \text{A}$$

Así, para $R_L = 150\ \Omega$ la corriente de carga es $I_L = 0{,}01$ A; el mismo valor que el obtenido por Thévenin. ¡Pero para cada valor de R_L se tiene que repetir todo el proceso de cálculo!

✎ **5.4.2.3** *Dado el circuito representado en la figura 5.31, calcular la corriente que circulará por la resistencia R_L.*

Esta estructura de circuito es muy popular en electricidad y electrónica; se denomina puente de Wheatstone y se utiliza mucho en instrumentación.

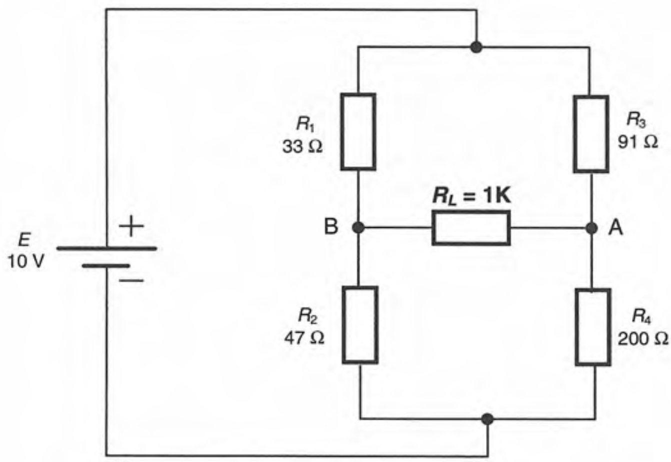


***Figura 5.31.** Puente de Wheatstone.*

Cálculo de la V_{TH}:

Considerando la resistencia de carga (R_L) desconectada, la tensión entre los puntos A y B será: $V_{R4} - V_{R2}$. Se toma el polo negativo del generador, E, como punto de referencia, 0 V (masa). Siendo:

$$V_{R4} = E\,\frac{R_4}{R_3 + R_4} = 10\,\frac{200}{91+200} = 6{,}873\,\text{V}$$

$$V_{R2} = E\,\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 10\,\frac{47}{33+47} = 5{,}875\,\text{V}$$

Así, entre los puntos A y B la tensión será de (fig. 5.32*a*):

$$V_{AB} = V_{R4} - V_{R2} = 6{,}873 - 5{,}875 \approx 1\ \text{V}$$

Cálculo de la R_{TH}:

Considerando $E = 0$ V (y con R_L desconectada), el valor de resistencia que aparece entre los terminales A y B es la suma del paralelo de R_1 y R_2 con el paralelo de R_3 y R_4 (fig. 5.32*b*):

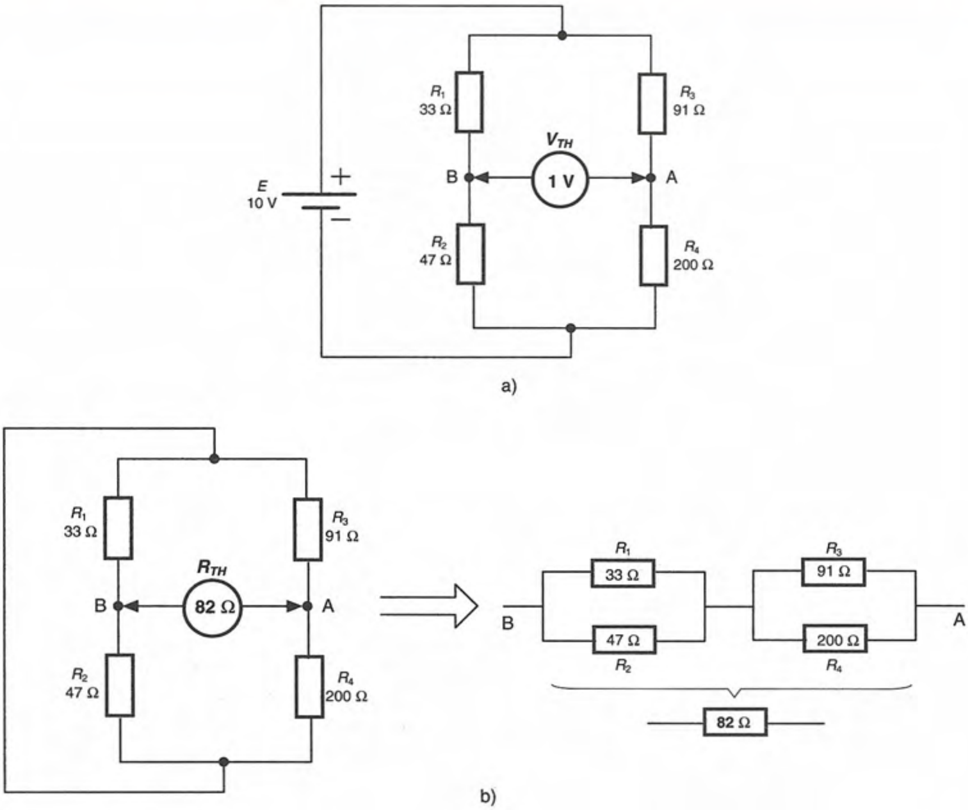


Figura 5.32. a) *Tensión de Thévenin que se obtiene.* b) *Resistencia de Thévenin que se obtiene.*

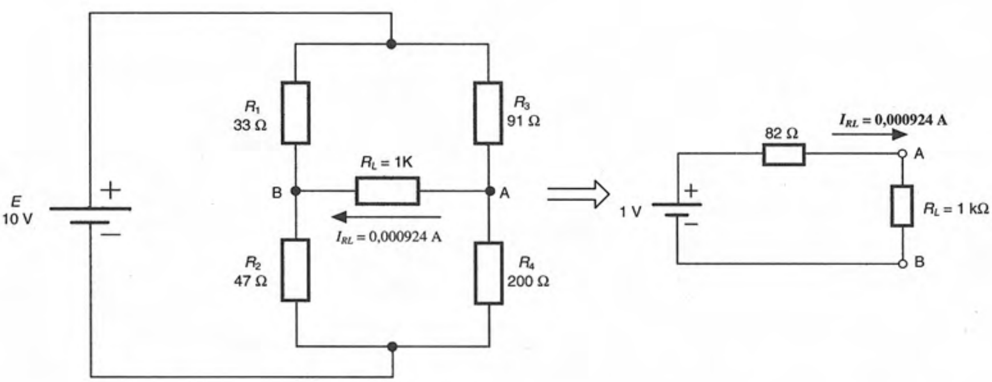


Figura 5.33. *Del equivalente de Thévenin que se obtiene, se halla que la corriente que circula por* R_L *es de 0,000924 A = 0,924 mA.*

$$R_{TH} = \frac{R_1 \ R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 \ R_4}{R_3 + R_4} \Rightarrow R_T \approx 82\Omega$$

El circuito de Thévenin equivalente que se deduce es, por tanto, el representado en la figura 5.33 del cual fácilmente se obtiene que la corriente por R_L es:

$$I_{RL} = \frac{V_{TH}}{R_{TH} + R_L} \approx \frac{1}{82+1000} \approx 0{,}000924\,\mathrm{A}$$

Debe quedar claro, pues, la potente herramienta que constituye el teorema de Thévenin en el análisis de circuitos. Además, hasta se puede aplicar de forma experimental, por medidas de tensión y resistencia con un multímetro.

5.5 MÉTODO DE MILLMAN

5.5.1 Principios fundamentales

El método de Millman es similar al de Thévenin. Se fundamenta en que, dado un circuito compuesto por varios generadores en paralelo, existe un circuito equivalente constituido por una fuente de tensión en serie con una resistencia (fig. 5.34), cuya tensión y resistencia del circuito equivalente se obtienen por las fórmulas:

$$V_M = \frac{\dfrac{E_1}{R_1} + \dfrac{E_2}{R_2} + \dfrac{E_3}{R_3} + \ldots + \dfrac{E_n}{R_n}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \ldots + \dfrac{1}{R_n}}$$

$$R_M = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \ldots + \dfrac{1}{R_n}}$$

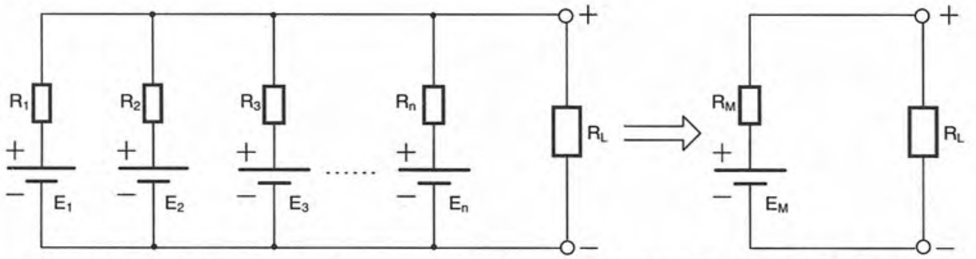


Figura 5.34. *Equivalencia de un conjunto de fuentes de tensión en paralelo, según Millman.*

Entonces, la corriente que recibirá la carga se obtiene simplemente por:

$$I_{RL} = \frac{V_M}{R_M + R_L}$$

O sea, también, como ocurre en Thévenin, el método tiene la característica de ser repetitivo; para cualquier valor de R_L, se aplica la misma fórmula.

5.5.2 Ejercicios desarrollados

✎ ***5.5.2.1*** En el circuito de la figura 5.35, los valores de V_M y R_M que se obtienen son:

$$V_M = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{12}{2} + \frac{9}{4} + \frac{6}{8}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = 10{,}286\,\text{V}$$

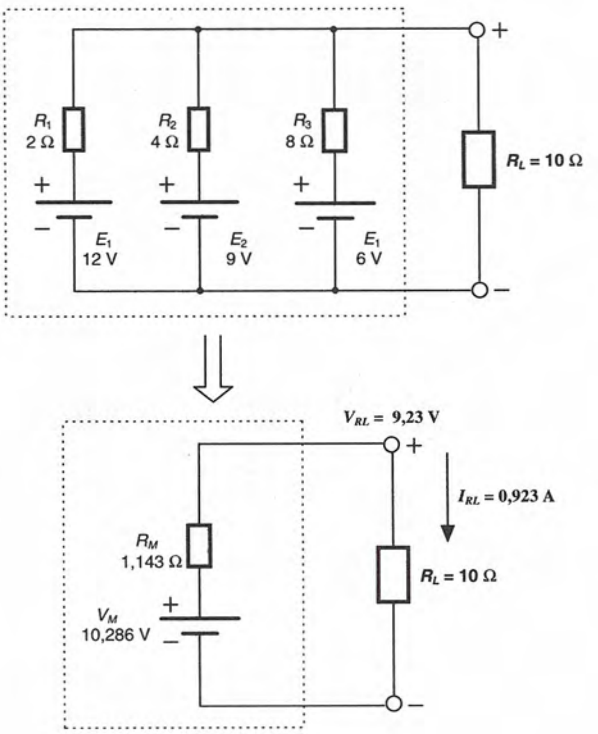


Figura 5.35. Ejemplo práctico del equivalente de Millman.

$$R_M = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = 1{,}143\ \Omega$$

Por tanto, su circuito equivalente es el representado. Y la corriente que recibirá la resistencia de carga será, pues:

$$I_{RL} = \frac{V_M}{R_M + R_L} = \frac{10{,}286}{1{,}143+10} = 0{,}923\,\text{A}$$

✎ ***5.5.2.2*** En el circuito de la figura 5.21 (ejercicio 5.3.2.3, resuelto por Maxwell), aplicando Millman, rápidamente se obtiene el valor de la corriente que circulará por la resistencia de carga (R_L):

$$V_M = \frac{\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} = \frac{\frac{14}{0{,}5}+\frac{12}{1}}{\frac{1}{0{,}5}+\frac{1}{1}} = \frac{40}{3} = 13{,}33\ \text{V}$$

$$R_M = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{1}{0{,}5}+\frac{1}{1}} = \frac{1}{3} = 0{,}33\ \Omega$$

$$I_{RL} = \frac{V_M}{R_M + R_L} = \frac{13{,}33}{0{,}33+10} = 1{,}29\,\text{A}$$

Y conociendo la corriente por la carga, se pueden hallar también otros datos del circuito.

Este método de análisis de circuitos resulta, por tanto, especialmente interesante en circuitos en que aparezcan diversas fuentes de tensión en paralelo alimentando una carga, por ejemplo, en los montajes de pilas o conjuntos de baterías en paralelo (alimentaciones de emergencia). Y se basa en la aplicación directa de las fórmulas anteriores. También resulta muy útil en el análisis de los circuitos de electrónica, para hallar el valor resultante de varias fuentes de señal que actúan simultáneamente (por ejemplo, la red resistiva sumadora de entrada en circuitos convertidores digital/analógicos).

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 5.1. Aplicando el método de Kirchhoff, calcular las corrientes y caídas de tensión del circuito representado en la figura 5.36.

Ejercicio 5.2. Aplicando el método de Maxwell, calcular la corriente que circulará por la resistencia R_5 del circuito representado en la figura 5.37.

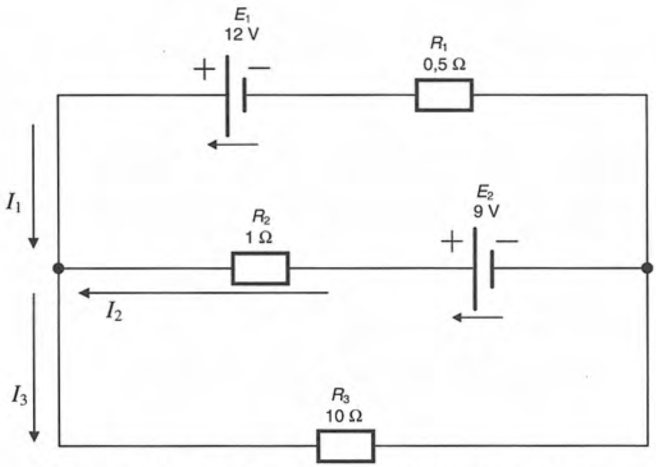


Figura 5.36. *Circuito para su análisis por Kirchhoff.*

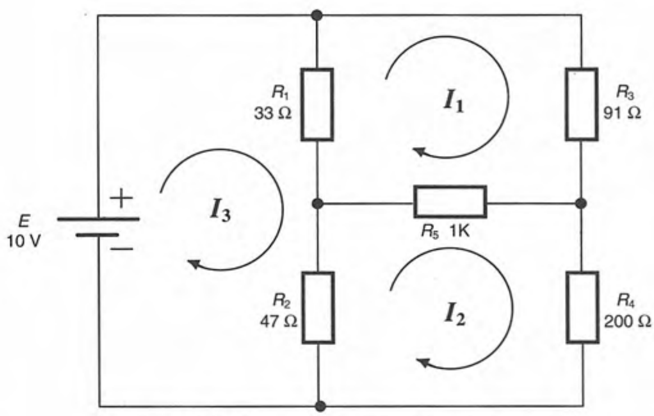


Figura 5.37. *Circuito para aplicar Maxwell.*

Ejercicio 5.3. Aplicando el método de Thévenin, calcular la corriente que circulará a través de la resistencia R_3 del circuito representado en la figura 5.11.

Ejercicio 5.4. Aplicando Thévenin, calcular la corriente que circulará por la resistencia de carga (R_L) y por los generadores del circuito de la figura 5.21.

Ejercicio 5.5. Aplicando el método de Millman, hallar el valor de la tensión y corriente en cada componente del circuito representado en la figura 5.11.

Capítulo 6

Energía y potencia eléctrica

6.1 INTRODUCCIÓN

El concepto *potencia eléctrica* indica la capacidad de realización de trabajo que tiene la electricidad; más exactamente, es la velocidad de realización del trabajo:

$$\text{potencia} = \frac{\text{trabajo}}{\text{tiempo}}$$

Como el concepto de energía indica capacidad de realización de trabajo, se puede decir que el trabajo es energía, o bien, que para realizar trabajo se necesita energía. En general, la energía es lo que hace posible cualquier actividad física.

En los aparatos eléctricos-electrónicos, la mayor o menor energía que consumen, que pueden proporcionar, etc., se expresa por el término *potencia*, cuya unidad es el *vatio* (W). Así, aparecen expresiones tales como *una bombilla de 40 W, una resistencia de 150 Ω/1 W, una estufa de 1,2 kW, la potencia de salida del amplificador es de 50 W*, etc.

Tipos de energías:

Se puede obtener energía mecánica por medio de saltos de agua que hacen mover las turbinas de los generadores en centrales hidroeléctricas; así, se puede decir que el agua embalsada posee capacidad de realizar trabajo: tiene energía.

Se puede obtener también energía, y por tanto capacidad de realizar trabajo mecánico, por medio de la combustión en los motores de explosión; se dice así que el material combustible (gasolina) posee *energía química*. Asimismo, por medio de energía calorífica se pueden accionar máquinas de vapor.

Y eléctricamente también se puede obtener energía, o trabajo eléctrico, basada en la circulación de la corriente. En principio, toda circulación de corriente da lugar a la generación de calor, que es aprovechada en soldadores, planchas, estufas, etc. Por tanto, se puede obtener energía calorífica de origen eléctrico. Y en el caso de los motores eléctricos, se obtiene energía mecánica.

Así, pues, *la electricidad es una fuente de energía y, por tanto, capaz de realizar trabajo.*

6.2 TRABAJO Y POTENCIA

A continuación se explica el desarrollo, partiendo de principios de física, para llegar a deducir la fórmula de potencia eléctrica.

Para poder desplazar un objeto se necesita una fuerza, que dará lugar a un trabajo mecánico. Matemáticamente se expresa por:

$$\boldsymbol{W = F \cdot e}$$

siendo:

W = trabajo realizado
F = fuerza aplicada
e = espacio recorrido

Por otra parte, puesto que la fuerza es el producto de una masa por su aceleración, se puede poner:

$$W = F \cdot e = (M \cdot a)\, e$$

siendo la aceleración (a) la variación de velocidad en la unidad de tiempo.

Así, se entiende por trabajo mecánico el efecto de movimiento a que puede dar lugar una fuerza, de manera que una cierta masa (M) adquiere una cierta aceleración (a) y, en consecuencia, realiza un desplazamiento (e). Por ejemplo, la elevación de un ascensor es un trabajo mecánico cuyo valor dependerá de la distancia recorrida y de la fuerza necesaria (según su peso). Y este trabajo mecánico será de origen eléctrico, puesto que se obtiene mediante un motor eléctrico.

Así, el trabajo en sí es independiente del tiempo que se tarda en hacerlo. Pero la potencia da cuenta del trabajo realizado teniendo en cuenta el tiempo que tarda en realizarse, ya que es la velocidad de realización del trabajo. Por ejemplo, está claro que cuanta más potencia tenga el motor de un automóvil más aceleración tendrá y, en consecuencia, más rápidamente podrá recorrer una cierta distancia. El mismo automóvil con motor menos potente podrá realizar el mismo trabajo pero tardará más en recorrer la misma distancia.

En física, la unidad del trabajo-energía se denomina *julio*, y se define como:

Un julio (J) es el trabajo realizado por la fuerza de un newton (N) cuando da lugar al desplazamiento de la distancia de un metro (m).

Así, se obtiene la unidad julio si:

$$W = F \cdot e \quad \Rightarrow \quad 1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{N} \times 1\ \mathrm{m}$$

6.2.1 Trabajo y potencia eléctrica

Eléctricamente, todo esto es similar. Sabemos que para que se produzca una corriente eléctrica –que es un desplazamiento de cargas– se precisa de una fuerza que se denomina tensión.

Se realiza el trabajo de un julio si se hace mover una carga eléctrica (q) *entre dos puntos cuya d.d.p. es de un voltio.*

Matemáticamente el trabajo eléctrico se puede expresar, por tanto:

$$W = V \cdot q$$

Y de la definición de intensidad eléctrica se deduce que la unidad de carga eléctrica (culombio) se puede expresar por:

$$I = \frac{q}{t} \Rightarrow q = I \cdot t$$

Así, el trabajo eléctrico se puede expresar por:

$$W = V\ q = V\,(I \cdot t)$$

Y se obtiene el trabajo de un julio para:

$$1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{V}\ \ (1\ \mathrm{A} \times 1\ \mathrm{s})$$

Por otra parte, como el concepto de potencia da cuenta de la velocidad, o sea, rapidez, a la cual se hace el trabajo:

$$P = \frac{\text{trabajo}}{\text{tiempo}} = \frac{W}{t}$$

dividiendo la expresión del trabajo (*W*) por el tiempo (*t*), obtenemos:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{V \cdot I \cdot t}{t} = V \cdot I$$

Se deduce así la expresión fundamental de la potencia eléctrica:

$$\boxed{\boldsymbol{P = V \cdot I}}$$

6.2.2 El vatio (W)

La unidad de potencia, ***P***, es el vatio, que se expresa por W. Así, un vatio (1 W) es la potencia a que da lugar la tensión de un voltio si circula la corriente de un amperio (fig. 6.1):

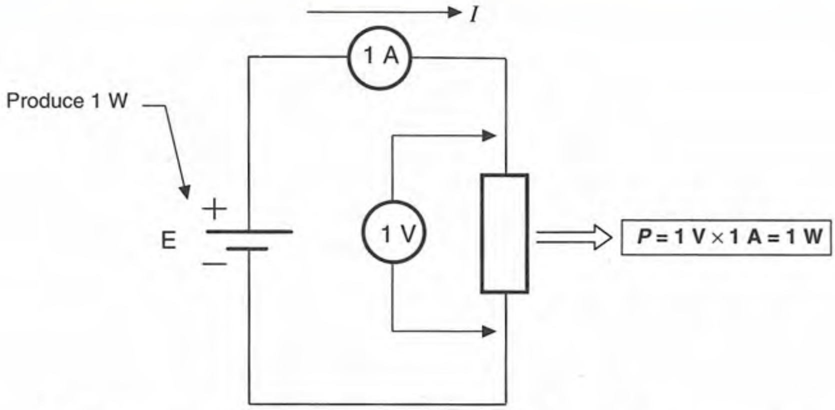


Figura 6.1. *La tensión de 1 V con la corriente de 1 A desarrollan la potencia de 1 W.*

$$P = V \cdot I \Rightarrow 1\text{ V} \times 1\text{ A} = 1\text{ vatio (W)}$$

O bien, un vatio es la potencia a que da lugar la realización del trabajo de un julio por segundo:

$$1\,\text{vatio} = \frac{1\,\text{julio}}{1\,\text{segundo}}$$

Basándonos en el concepto de potencia, el trabajo eléctrico viene dado, pues, por:

$$P = \frac{W}{t} \Rightarrow \text{trabajo eléctrico} \quad (\text{W}) = \quad (I \cdot V)\, t = P \cdot t$$

Industrialmente se utiliza también mucho, especialmente en motores, otra unidad que se denomina *caballo de vapor* (CV), o simplemente *caballo,* que equivale a 735,5 W; en la práctica, se suele tomar 1 CV = 736 W.

Esta unidad fue introducida por James Watt en 1784, inventor de la máquina de vapor. Es frecuente encontrarse la potencia de los motores expresada así; por ejemplo, un motor de 2 CV indica una potencia de 2 × 736 = 1472 W.

Unidades derivadas empleadas:

Al igual que ocurre con otras magnitudes, en la práctica se hace conveniente también utilizar unidades que son submúltiplos o múltiplos del vatio. Así, aparecen como unidades normales:

megavatio ⇒ 1 MW = 1.000.000 W
kilovatio ⇒ 1 kW = 1.000 W

milivatio ⇒ $1\ mW = 0{,}001\ W = 10^{-3}\ W$
microvatio ⇒ $1\ \mu W = 0{,}000\ 001\ W = 10^{-6}\ W$

Y por otra parte, como 1 CV = 736 W, también se tiene:

$$1\ CV = \frac{736}{1000} = 0{,}736\ kW$$

$$1\ kW = \frac{1000}{736} \approx 1{,}36\ CV$$

Así, como se deduce, para obtener potencia eléctrica se precisan dos magnitudes: voltios y amperios. Y cuanto mayores sean dichas magnitudes, como es evidente, mayor potencia se obtendrá (fig. 6.2).

$$\boxed{P = V \times I} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} V\uparrow \Rightarrow P\uparrow \\ I\uparrow \Rightarrow P\uparrow \end{matrix}$$

Aplicando el símil hidráulico, cuanto mayor sea la presión (equivale a la tensión) y el caudal (equivale a la intensidad) mayor potencia hidráulica se consigue. Esto queda patente en las centrales hidroeléctricas, donde a mayor altura de la caída de agua y mayor caudal más potencia hidráulica se obtiene para mover las turbinas de los generadores de electricidad.

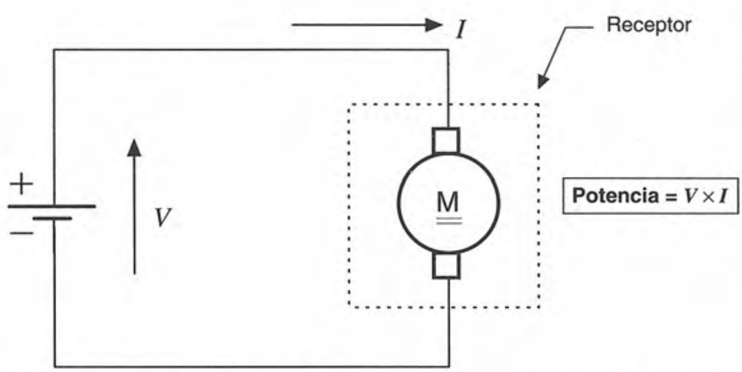


Figura 6.2. Para obtener potencia se necesitan dos magnitudes. En el símil hidráulico, la tensión (V) equivale a la altura de caída del agua y la intensidad (I) al caudal.

6.2.2.1 Ejemplos

A continuación se exponen unos ejemplos numéricos para procurar clarificar más prácticamente estos conceptos.

✎ *6.2.2.1.1.* En los automóviles, la chispa de encendido que se produce en las bujías para lograr la explosión del combustible en los cilindros se obtiene mediante una tensión elevada (del orden de 15.000 V), que se genera por medio del efecto inductivo de una bobina. Suponiendo que se obtiene una corriente de 0,001 A (1 mA), la potencia eléctrica que se produce es:

$$P = V \cdot I = 15.000{\times}0{,}001 = 15 \text{ W}$$

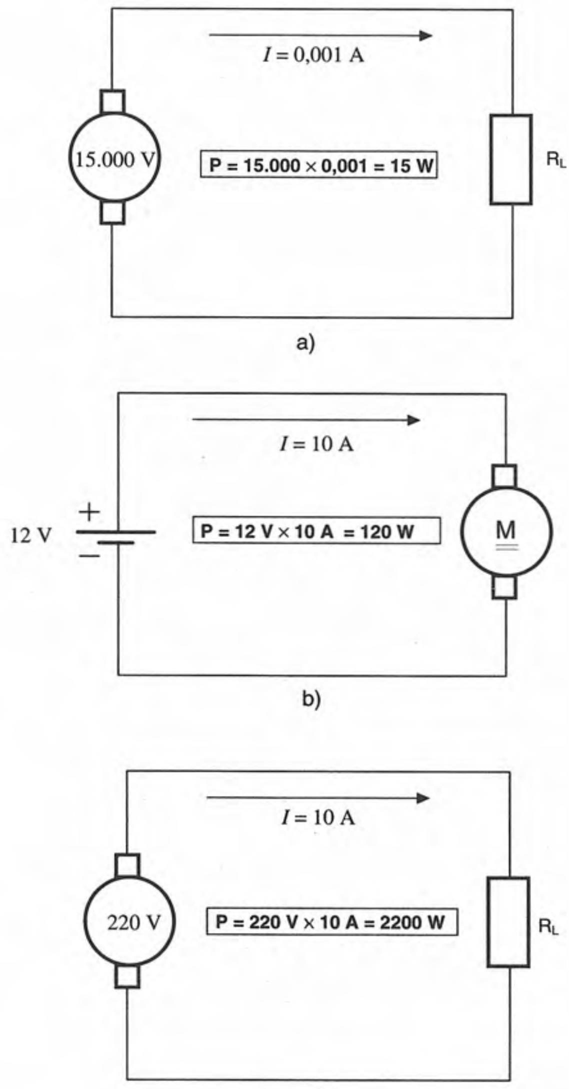


Figura 6.3. *Ejemplos numéricos del valor de potencia que se obtiene según los valores de tensión y corriente.*

Así, pues, aunque la tensión es muy elevada, la potencia que se produce no es elevada porque se dispone de baja corriente (fig. 6.3*a*). Es como si, por ejemplo, una caída de agua se produce de elevada altura, pero con poco caudal. O sea, que alta tensión no es significativo siempre de mucha potencia.

✎ *6.2.2.1.2.* Otro caso similar se da si la intensidad de corriente es elevada pero con baja tensión; tampoco se consigue elevada potencia. Es como si el caudal de agua es grande pero cae de poca altura. Supongamos que por medio de una batería de 12 V se alimenta un motor cuyo consumo es de 10 A (fig. 6.3*b*). La potencia eléctrica que se obtiene de la batería es de:

$$P = V \cdot I = 12 \times 10 = 120 \text{ W}$$

En este caso, aunque la intensidad es relativamente elevada (10.000 veces mayor que en el ejemplo anterior), tampoco se obtiene una alta potencia, debido a que la tensión es baja.

✎ *6.2.2.1.3.* En cambio, en el caso de una estufa eléctrica alimentada a 220 V con un consumo de 10 A se obtiene una potencia comparativamente mucho más alta (fig. 6.3*c*):

$$P = V \cdot I = 10 \times 220 = 2200 \text{ W}$$

Esto es debido a que en este caso las dos magnitudes son más o menos elevadas; cae un gran caudal a elevada altura.

6.3 FÓRMULAS PRÁCTICAS SOBRE POTENCIA Y LEY DE OHM

En principio, partiendo de la expresión fundamental de la potencia se deducen otras dos fórmulas:

$$P = V \cdot I \quad \Rightarrow \quad V = \frac{P}{I}$$

$$P = V \cdot I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{P}{V}$$

Aplicando la ley de Ohm, se deducen otras fórmulas de interés práctico.

Puesto que $V = I \cdot R$, sustituyendo esta expresión en $P = V \cdot I$, se obtiene otra fórmula de la potencia:

$$P = V \cdot I \;\Rightarrow\; P = (I \cdot R) \cdot I \;\Rightarrow\; \boxed{P = I^2 \; R}$$

De donde se deducen también:

$$P = I^2 \cdot R \;\Rightarrow\; R = \frac{P}{I^2}$$

$$P = I^2 \cdot R \Rightarrow I^2 = \frac{P}{R} \Rightarrow I = \sqrt{\frac{P}{R}}$$

Sustituyendo $I = V/R$ en la expresión de $P = V \cdot I$ se obtiene otra forma de expresar la potencia:

$$P = V \cdot I \Rightarrow P = V \cdot \frac{V}{R} \Rightarrow \boxed{P = \frac{V^2}{R}}$$

De donde se deduce:

$$P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow V^2 = P \cdot R \Rightarrow V = \sqrt{P \cdot R}$$

$$P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{V^2}{P}$$

Así, pues, se puede hallar el valor de cualquiera de las cuatro magnitudes fundamentales (V, I, R y P) conociendo dos de ellas.

6.3.1 Ejercicios desarrollados

✎ ***6.3.1.1.*** *En una resistencia de 100 Ω y de 0,5 W de potencia nominal, ¿cuál es el valor máximo de corriente que se puede hacer circular sin que se supere dicha potencia?*

De la expresión de la potencia $P = I^2 \cdot R$, se obtiene que:

$$I = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{0{,}5}{100}} \approx 0{,}07 \text{ A}$$

Podemos comprobar este dato de la siguiente forma:
Hallamos la caída de tensión en la resistencia para esa corriente, que es:

$$V_R = I \cdot R = 0{,}07 \times 100 = 7 \text{ V}$$

Y esto dará lugar a una potencia disipada de:

$$P = V \cdot I = 7 \times 0{,}07 \approx 0{,}5 \text{ W}$$

Y obtenemos el mismo valor aplicando:

$$P = I^2 \cdot R = (0{,}07)^2 \times 100 \approx 0{,}5 \text{ W}$$

Así, con una corriente de 0,07 A = 70 mA, se obtiene la disipación máxima; corrientes superiores darán lugar a una mayor potencia y, en consecuencia, mayor generación de calor, dando lugar a una temperatura excesiva para las dimensiones de la resistencia.

✎ ***6.3.1.2.*** *¿Cuál es el valor de la potencia consumida de una bombilla conectada a 12 V si se mide una intensidad de 2 A?*

El resultado es inmediato, pues se aplica la fórmula fundamental de la potencia:

$$P = V \cdot I = 12 \times 2 = 24 \text{ W}$$

✎ ***6.3.1.3.*** *Calcular el consumo de corriente de una lámpara compuesta por cuatro bombillas de 220 V/60 W cada una.*

Las bombillas están conectadas en paralelo, y el consumo de cada bombilla será:

$$P = V \cdot I \;\Rightarrow\; I = \frac{P}{V} = \frac{60}{220} \approx 0{,}273 \text{ A}$$

Por tanto, el consumo de la lámpara será de: $0{,}273 \times 4 = 1{,}09$ A.

Considerando la potencia total de la lámpara, $60 \text{ W} \times 4 = 240$ W, se obtiene el mismo resultado:

$$I = \frac{P}{V} = \frac{240}{220} \approx 1{,}09 \text{ A}$$

✎ ***6.3.1.4.*** *Calcular la pérdida de potencia que se produce en la instalación del motor de arranque de un coche si el valor resistivo total de los cables es de 0,02 Ω y la intensidad que circula es de 50 A.*

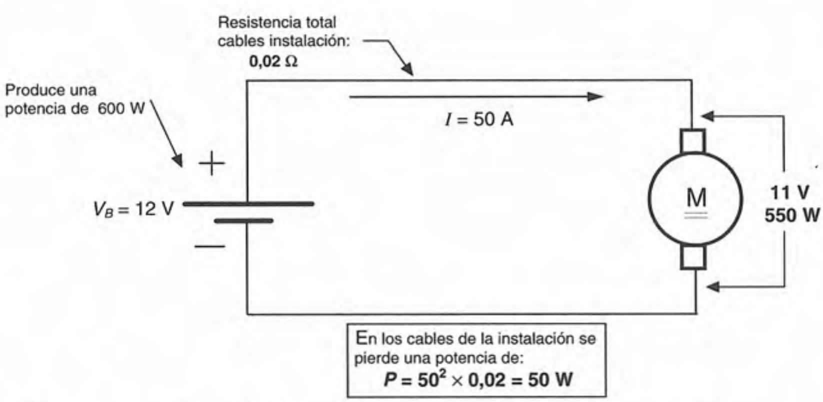


Figura 6.4. *Según el valor de la corriente y la resistencia de los conductores, se puede producir una pérdida de potencia eléctrica considerable (consumida en los cables de la instalación y transformada en calor).*

El resultado es inmediato aplicando la correspondiente fórmula:

$$P = I^2 \cdot R = (50)^2 \times 0{,}02 = 50 \text{ W}$$

Así, el efecto resistivo de los cables dará lugar a una pérdida de 50 W, potencia que no recibirá el motor y que, además, dará lugar a un calentamiento de la instalación (fig. 6.4).

✎ ***6.3.1.5.*** *Dado el circuito representado en la figura 6.5, calcular la potencia desarrollada en cada una de las resistencias.*

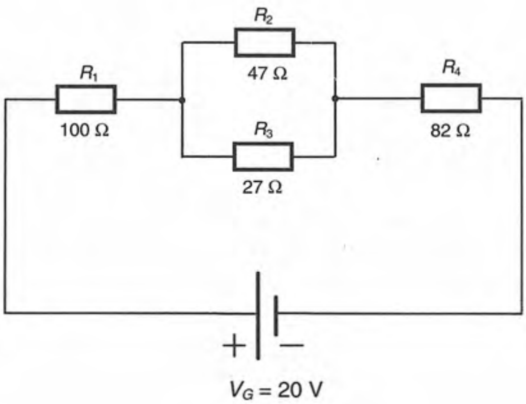


Figura 6.5

En primer lugar calcularemos el valor de resistencia total:

$$R_T = R_1 + \frac{R_2\ R_3}{R_2 + R_3} + R_4 = 100 + \frac{47 \times 27}{47 + 27} + 82 = 199{,}15\ \Omega$$

Se halla así la I_T, la I_{R1} y la I_{R4}, puesto que $I_T = I_{R1} = I_{R4}$:

$$I_T = \frac{V_G}{R_T} = \frac{20}{199{,}15} \approx 0{,}1 \text{A}$$

Por tanto, las potencias disipadas en R_1 y en R_4, son:

$$P_{R1} = I^2 \cdot R_1 = (0{,}1)^2 \times 100 = 1 \text{ W}$$

$$P_{R4} = I^2 \cdot R_4 = (0{,}1)^2 \times 82 = 0{,}82 \text{ W}$$

Y como la tensión en R_2 y R_3 es la misma, y viene dada por:

$$V_{R2} = V_{R3} = V_G - V_{R1} - V_{R4}$$

siendo:

$$V_{R1} = I_{R1} \cdot R_1 = 0{,}1 \times 100 = 10 \text{ V}$$

$$V_{R4} = I_{R4} \cdot R_4 = 0{,}1 \times 82 = 8{,}2 \text{ V}$$

Tenemos que la tensión en R_2 y R_3 es:

$$V_{R2} = V_{R3} = V_G - V_{R1} - V_{R4} \;\Rightarrow\; 20 - 10 - 8{,}2 = 1{,}8 \text{ V}$$

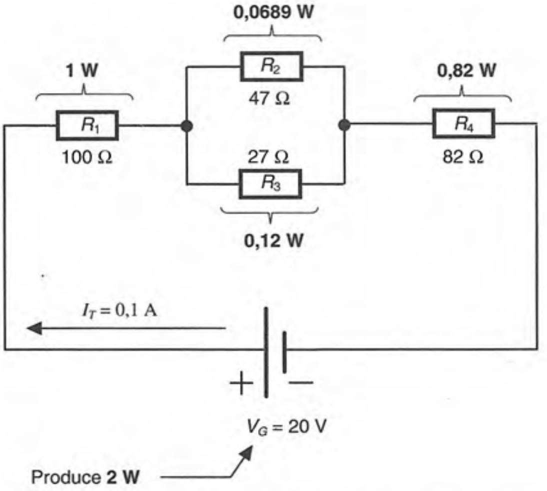


Figura 6.6. *Valores de potencia calculados, disipados (en forma de calor) en cada resistencia.*

Las potencias disipadas en R_2 y R_3, serán, pues:

$$P_{R2} = \frac{V^2}{R_2} = \frac{(1{,}8)^2}{47} = 0{,}0689 \text{ W}$$

$$P_{R3} = \frac{V^2}{R_3} = \frac{(1{,}8)^2}{27} = 0{,}12 \text{ W}$$

Y puesto que la suma de potencias parciales en todo circuito debe ser igual a la potencia suministrada por el generador, $P_G = \Sigma\ (P_R)$, se puede verificar el resultado (fig. 6.6):

$$P_G = V_G \cdot I_T = 20 \times 0{,}1 = 2 \text{ W}$$

$$P_{R1} + P_{R2} + P_{R3} + P_{R4} = 1 + 0{,}0689 + 0{,}12 + 0{,}82 = 2 \text{ W}$$

6.4 EFECTOS CALORÍFICOS DE LA ELECTRICIDAD. LEY DE JOULE

6.4.1 Energía calorífica

Como se ha sido introduciendo ya desde un principio, uno de los efectos que tiene la circulación de la corriente eléctrica es la generación de calor, lo cual puede ser provechoso (planchas, soldadores, etc.) o dar lugar a defectos (calentamiento de los conductores y de componentes electrónicos). Esto es como consecuencia del trabajo realizado por la corriente en su circulación ya que, al ser la corriente un desplazamiento de electrones, se producen roces y choques entre dichas partículas que dan lugar a un calentamiento.

Está claro que en todo trabajo mecánico se produce generación de calor; basta frotar la mano rápidamente sobre una cuerda para comprobar este efecto.

La energía calorífica da lugar a oscilaciones de los átomos y moléculas (movimiento en torno a su posición normal) de la materia, lo cual se conoce por *agitación térmica*. Y cuanto mayor es la temperatura, mayor es la agitación térmica. Cuando los materiales se dilatan con la temperatura es porque las partículas necesitan más espacio, debido al aumento de la agitación térmica. Así, cuando un material se calienta ejerciendo energía mecánica (golpeando, frotando, etc.) es porque mediante dicha energía mecánica se aumenta la agitación térmica.

6.4.2 Ley de Joule

El trabajo eléctrico, o energía eléctrica (julios), que se transformará en calor, en un conductor de resistencia R cuando es recorrido por una corriente de intensidad I viene dado por:

$$W = I \cdot (I \cdot R)\, t = I^2 \cdot R \cdot t$$

A este efecto de desprendimiento de energía calorífica por el paso de la corriente se conoce por ley (o efecto) de Joule, en honor al físico James Prescott Joule (1818-1889) que en 1841 enunció dicho efecto, que se resume en:

"*La circulación de una intensidad de corriente en un conductor de resistencia* R *produce un efecto de calentamiento, que es proporcional al valor de resistencia* (R)*, al cuadrado del valor de la intensidad* (I^2) *y al tiempo* (t)".

Teniendo en cuenta que 1 julio = 0,24 calorías, la energía calorífica desprendida de un conductor se puede expresar por:

$$\boxed{\mathrm{cal} = 0{,}24 \cdot R \cdot I^2 \cdot t}$$

Se entiende por *caloría*, la cantidad de calor que hace que 1 g de agua aumente su temperatura en 1°C (concretamente de 14,5 a 15,5°C). Y también se utiliza la kilocaloría (kcal), que son 1000 calorías.

Como se deduce, cuanto más tiempo esté circulando la corriente más cantidad de calor se generará. Es por esto que los soldadores, estufas, etc., tardan un cierto tiempo en calentarse y adquirir una cierta temperatura; conforme pasa el tiempo se van generando más calorías y va aumentando así la temperatura, hasta un cierto valor dependiente del calor generado y del absorbido.

Ejemplos:

1. Si la resistencia de un soldador es de 1500 Ω y está conectado a 220 V, la cantidad de calorías que se generarán en un minuto es:

Como el valor de la intensidad de corriente es:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{220}{1500} = 0{,}147\ \mathrm{A}$$

$$\mathrm{cal} = 0{,}24 \cdot R \cdot I^2 \cdot t = 0{,}24 \times 1500 \times (0{,}147)^2 \times 60 = 464{,}64\ \mathrm{cal}$$

Como se deduce, la generación de calorías se puede expresar también de la siguiente manera:

$$\mathrm{cal} = 0{,}24 \cdot V \cdot I \cdot t = 0{,}24\ \frac{V^2}{R}\ t$$

Y en general:

$$\mathrm{cal} = 0{,}24 \cdot P \cdot t$$

Dividiendo por 1000 se obtiene el valor en kilocalorías:

$$\mathrm{kcal} = \frac{0{,}24 \cdot P \cdot t}{1000}$$

2. Una estufa de 220 V/1500 W, conectada durante una hora (3600 segundos) generará una energía calorífica de:

$$\mathrm{cal} = 0{,}24 \cdot P \cdot t = 0{,}24 \times 1500 \times 3600 = 1.296.000\ \mathrm{cal} = 1296\ \mathrm{kcal}$$

Conociendo lo que se denomina *calor específico* de un material, se puede calcular también la elevación de temperatura que adquiere un cuerpo en función de la cantidad de calorías aportadas. Se aplica la fórmula:

$$\mathrm{cal} = c \cdot m \cdot \Delta T$$

siendo:

c = calor específico del material
m = masa del material
ΔT = incremento de temperatura
cal = calorías aportadas

Calor específico (c): Es la cantidad de calor necesaria para aumentar en 1ºC la masa de 1 g de una sustancia. Cada material tiene un calor específico característico; por ejemplo el del agua es de 1 cal y el del cobre de 0,093 cal. El agua es la sustancia con mayor calor específico, es la que requiere mayor cantidad de calorías para elevar su temperatura; es por esto que resulta especialmente conveniente para la refrigeración. Con 1000 cal (1 kcal), un litro de agua puede aumentar su temperatura en 1°C.

6.4.3 Ejercicios desarrollados

✎ ***6.4.3.1.*** *Calcular la energía calorífica (cantidad de calor) que se necesita para calentar 2 litros de agua desde 20ºC hasta 90ºC:*

Puesto que 1 litro equivale a 1 kg (1000 g) y el calor específico del agua es $c = 1$, suponiendo que no existe ninguna pérdida de calor:

$$\text{cal} = c \cdot m \cdot \Delta T = 1 \times 2000 \times (90 - 20) = 140.000 \text{ cal} = 140 \text{ kcal}$$

✎ ***6.4.3.2.*** *Calcular la potencia eléctrica que se necesita para calentar 8 litros de agua desde 15°C hasta 100°C en 1 hora.*

Se supone un rendimiento calorífico del 100%, o sea, no existe pérdida calorífica.

Calorías necesarias:

$$\text{cal} = c \cdot m \cdot \Delta T = 1 \times 8000 \times (100 - 15) = 680.000 \text{ cal} = 680 \text{ kcal}$$

Potencia necesaria:

$$\text{cal} = 0{,}24\, P \cdot t \;\Rightarrow\; P_{(W)} = \frac{\text{cal}}{0{,}24\, t} = \frac{680.000}{0{,}24 \times 3600} = 787 \text{ W}$$

✎ ***6.4.3.3.*** *Calcular el tiempo que se necesita para calentar 4 litros de agua desde 20°C hasta 90°C con un calentador de 2,2 kW.*

Suponiendo también que no existen pérdidas caloríficas, la cantidad de calorías necesarias son:

$$\text{cal} = c \cdot m \cdot \Delta T = 1 \times 4000 \times (90 - 20) = 280.000 \text{ cal} = 280 \text{ kcal}$$

Y el tiempo necesario que se deduce es:

$$\text{cal} = 0{,}24\, P \cdot t \;\Rightarrow\; t_{(s)} = \frac{\text{cal}}{0{,}24 \times P} = \frac{280.000}{0{,}24 \times 2200} \approx 530 \text{ s}$$

6.5 TRABAJO ELÉCTRICO. UNIDAD DE CONSUMO DE ENERGÍA ELÉCTRICA

Basándonos en el concepto de potencia, el trabajo eléctrico viene dado en general por:

$$\text{potencia}(P) = \frac{\text{trabajo}(W)}{\text{tiempo}(t)} \Rightarrow \text{trabajo eléctrico} \ \ (W) = P \cdot t$$

Y se obtiene la energía-trabajo de 1 julio para:

$$W = P \cdot t \ \ \Rightarrow \ \ 1 \text{ J} = 1 \text{ vatio} \times 1 \text{ segundo}$$

El trabajo que puede obtenerse depende, pues, de la magnitud de la potencia tomada y también de su tiempo de utilización. Así, por ejemplo, con una estufa de 500 W de potencia se puede obtener más trabajo durante 1 hora que si sólo se utiliza durante 1 minuto; está claro que al cabo de una hora de estar encendida, la temperatura ambiental en su entorno será mayor que al cabo de un minuto, debido a que habrá generado mas calorías. O bien, durante un mismo tiempo de utilización se consigue mayor trabajo cuanto mayor es la potencia utilizada; por esto, con una estufa de 1500 W se consigue elevar la temperatura más rápidamente que con una de 500 W.

La unidad de consumo de energía eléctrica normalmente utilizada es el **kilovatio-hora (kWh),** que es lo que miden los contadores de energía eléctrica:

$$1000 \text{ Wh} = 1 \text{ kWh}$$

Puesto que 1 julio = 1 vatio × segundo y una hora son 60 × 60 = 3600 segundos:

$$1 \text{ kWh} = 1000 \times 3600 = 3.600.000 \text{ julios}$$

Y como 1 julio = 0,24 cal:

$$1 \text{ kWh} = 864 \text{ kcal}$$

Ejemplo:

Una bombilla de 100 W encendida durante 8 horas cada día, cada dos meses (60 días) consumirá una energía de:

Es cuestión de multiplicar el número de kilovatios por el número de horas:

$$\left.\begin{array}{l} 100 \text{ W} = 0{,}1 \text{ kW} \\ 8 \text{ h} \times 60 \text{ días} = 480 \text{ horas} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{núm. kW} \times \text{núm. horas} = 0{,}1 \times 480 = 48 \text{ kWh}$$

Coste de la energía

Las empresas de suministro de energía eléctrica estipulan un precio del kilovatio-hora. Así, conociendo el consumo de energía del usuario, por medio de los contadores, evalúan el coste. Básicamente, consiste en multiplicar los kilovatios por las horas y por su precio.

Ejemplos:

1. *Calcular el coste de tener encendida una lámpara compuesta por cuatro bombillas de 60 W, 6 horas cada día durante dos meses.*

Suponemos un precio de 16 PTA para el kilovatio-hora, y los meses de 30 días.

$$\text{núm. de kW: } 60\text{ W} \times 4 = 240\text{ W} \Rightarrow 0{,}24\text{ kW}$$

$$\text{núm. de horas: } 6\text{ horas} \times 60\text{ días} = 360\text{ h}$$

$$\text{Coste} = \text{núm. kW} \times \text{núm. horas} \times \text{precio} = 0{,}24 \times 360 \times 16 = 1.382\text{ PTA}$$

2. *Tener en marcha una estufa de 1.500 W 4 horas cada día durante 90 días supone un coste de:*

$$\text{Coste} = \text{núm. kW} \times \text{núm. horas} \times \text{precio} = 1{,}5 \times (4 \times 90) \times 16 = 8.640\text{ PTA.}$$

3. *El coste anual (52 semanas) de tener en marcha un equipo informático cuya potencia es de 150 W durante 30 horas cada semana es:*

$$\text{Coste} = \text{núm. kW} \times \text{núm. horas} \times \text{precio} = 0{,}15 \times (30 \times 52) \times 16 = 3.744\text{ PTA}$$

6.6 RENDIMIENTO

En cualquier tipo de proceso o transformación de energía existen ciertas perdidas que, según los casos, puede ser conveniente tener en cuenta. Aparece así el concepto general de *rendimiento*, que es la relación entre la energía (de salida) obtenida aprovechable y la energía (de entrada) inicial aplicada. Matemáticamente, se puede expresar por:

$$\textit{rendimiento}\ (\eta) = \frac{\text{energía de salida}}{\text{energía de entrada}}$$

Puede indicarse por una fracción decimal o en porcentaje (%). Y como, en la práctica, siempre se producen más o menos pérdidas de energía, el rendimiento siempre es menor a 1 (o menor al 100%).

Por ejemplo, cuando se emplea energía eléctrica para calentar agua (calentador eléctrico), toda la energía calorífica de la electricidad no se aprovecha íntegramente para calentar la masa del agua. Por diferentes causas, existe un porcentaje que se pierde (es consumida por el calentamiento de los cables conductores, en calentar el recipiente, disipada por convección, etc.).

Ejemplos:

1. Si para aumentar la temperatura de 5 litros de agua en 50ºC se necesita una energía calorífica de:

$$\text{cal} = c\, m\, \Delta T = 1 \times 5000 \times 50 = 250.000 \text{ cal} = 250 \text{ kcal} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 250.000 \times 4{,}185 = 1.046.250 \text{ julios}$$

pero para ello el calentador eléctrico debe aportar una energía de 1.162.500 julios, es porque en el proceso existe una pérdida de energía calorífica. La energía útil que se obtiene (de salida) es, pues, 1.046.250 J, y la energía que se requiere para ello (de entrada) es 1.162.500 J; así, el rendimiento obtenido es:

$$(\eta) = \frac{\text{energía de salida}}{\text{energía de entrada}} = \frac{1.046.250}{1.162.500} = 0{,}9 = 90\%$$

Por tanto, de la energía inicial (de entrada) se desaprovecha un 10% (116.250 J).

2. Si un motor con el cual se obtiene una potencia de 10 kW consume una potencia de 11,5 kW, su rendimiento es de:

$$(\eta) = \frac{\text{potencia de salida}}{\text{potencia de entrada}} = \frac{10}{11{,}5} \approx 0{,}87 = 87\%$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 6.1. ¿Qué es un julio? Dar una definición eléctrica.

Ejercicio 6.2. Calcular la corriente máxima que puede circular por una resistencia de 10 Ω cuya potencia nominal es de 2 W.

Ejercicio 6.3. En una bombilla se ha borrado el indicativo de la potencia, pero se sabe que es de 220 V. ¿De cuántos vatios se supone que es si mediante un amperímetro se mide un consumo de 0,273 A?

Ejercicio 6.4. Calcular la potencia eléctrica que se perdería en los cables de la instalación de un coche, si al poner en marcha el motor eléctrico de arranque éste recibiera un amperaje de 50 A y una tensión de 10 V. (En la batería, debido al consumo, se mide una tensión de 11 V.)

Ejercicio 6.5. Calcular la potencia eléctrica necesaria para poder calentar 1 litro de agua de 25 a 90°C en un tiempo de 15 minutos. (Se supone que no hay pérdidas de energía.)

Ejercicio 6.6. Calcular la intensidad eléctrica que circulará por los cables de una instalación doméstica de 220 V, cuando se pongan en marcha simultáneamente: un soldador de 30 W, una lámpara de cuatro bombillas de 60 W, una estufa de 1,5 kW y un calentador de 2 kW.

Ejercicio 6.7. ¿Cuántas kcal generará una estufa de 220 V y 2 kW cada semana si se tiene en marcha 4 horas cada día? ¿Qué intensidad consumirá?

Ejercicio 6.8. Calcular el coste anual de la energía eléctrica de una lámpara de tres bombillas de 60 W cada una, si se usa 4 horas cada día. (1 kWh = 16 PTA.)

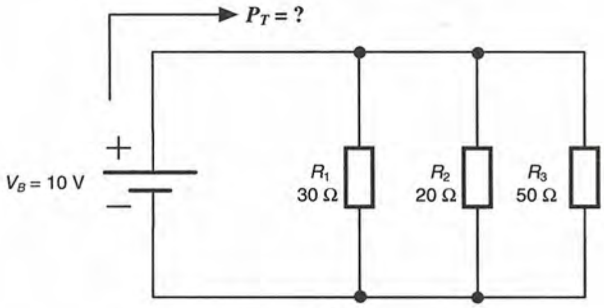


Figura 6.7.

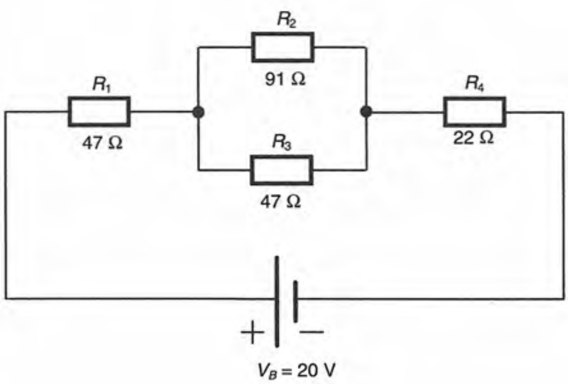


Figura 6.8.

Ejercicio 6.9. ¿Qué potencia deberá entregar la fuente de tensión, V_B, en el circuito de la figura 6.7?

Ejercicio 6.10. Calcular la potencia disipada en cada una de las resistencias del circuito de la figura 6.8.

Apéndice 1

Bases matemáticas

A1.1 INTRODUCCIÓN

En este apéndice se expone un resumen simplificado y práctico sobre un tema de las matemáticas necesario en electricidad y electrónica, en especial en el análisis de circuitos: la resolución de *sistemas de ecuaciones* y, concretamente, el método por *determinantes*.

De esta manera se pretende facilitar el estudio a los estudiantes que lo necesiten, pudiendo resultar especialmente útil a los autodidactas o estudiantes poco familiarizados con estas cuestiones.

Es evidente que las matemáticas son muy importantes en electricidad y electrónica. Y, aunque en un principio puede parecer lo contrario, en la práctica, incluso a nivel de laboratorio, normalmente todo se reduce a cuestiones bastante simples.

De hecho, por lo general, tanto en electricidad básica como en microelectrónica, cuando aparecen fórmulas en las cuales se tienen que hallar datos sobre tensiones (V), corrientes (I), o resistencia (R), éstas suelen estar basadas en la simple ley de Ohm. Es por esto que, en la práctica, puede ser suficiente con saber utilizar la calculadora a nivel básico y saber algo sobre ecuaciones. No obstante, en especial si se quieren realizar estudios más avanzados, sí que puede ser necesario tener una mayor conocimiento matemático.

Hay que tener en cuenta que las cuestiones de cálculo no son únicamente necesarias a nivel teórico, sino que también pueden resultar muy útiles en la práctica. Y una cuestión que aparece bastante, en especial cuando se aplican los métodos de análisis basados en Kirchhoff, es la resolución de sistemas de ecuaciones.

A1.2 SISTEMAS DE ECUACIONES

Cuando en un problema aparece una ecuación con, por ejemplo, dos incógnitas, para hallar los valores de dichas incógnitas se necesita plantear otra ecuación más en la cual aparezcan las mismas incógnitas; o sea, se precisan dos ecuaciones. Y si en el problema aparecen tres incógnitas, entonces se precisan plantear tres ecuaciones en las cuales aparezcan las mismas incógnitas. Así, en general, para poder resolver ecuaciones con varias incógnitas se precisa plantear tantas ecuaciones como incógnitas aparezcan. Esto se conoce por *sistemas de* *ecuaciones*, y suele aparecer frecuentemente en el análisis de circuitos (Kirchhoff, Maxwell, etc.).

En la práctica, los casos suelen limitarse a sistemas de dos o tres incógnitas. A continuación se exponen ejemplos de expresiones de sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 12\,x - 10\,y = 16 \\ -4\,x + 14\,y = 16 \end{array}\right\}\ \text{sistema de dos ecuaciones (aparecen dos incógnitas: } x,\ y\text{)}$$

$$\left.\begin{array}{r} I_1 + I_2 = I_3 \\ 6\,I_1 - 3\,I_2 = 8 \\ 6\,I_3 + 3\,I_2 = 20 \end{array}\right\}\ \text{sistema de tres ecuaciones (aparecen tres incógnitas: } I_1,\ I_2,\ I_3\text{)}$$

En cualquier caso, si el sistema es determinado, los valores de las incógnitas satisfacen al conjunto de ecuaciones.

Los sistemas de ecuaciones se pueden resolver aplicando los siguientes métodos:

– *Sustitución*
– *Igualación*
– *Reducción*
– *Determinantes*

Este último método, el de los determinantes, es de aplicación sistemática y resulta especialmente interesante cuando los sistemas son de tres (o más) ecuaciones.

A1.2.1 Método por sustitución

Este método consiste en despejar una de las incógnitas en cualquiera de las ecuaciones del sistema y sustituir su valor en otra de las ecuaciones; se elimina así una de las incógnitas.

Desarrollo demostrativo:

Dado el sistema de dos ecuaciones de expresión general siguiente:

$$a_0\,x + b_0\,y = c_0$$
$$a_1\,x + b_1\,y = c_1$$

el desarrollo para obtener los valores de las incógnitas x e y es:

De la primera ecuación se despeja el valor de x:

$$a_0\,x + b_0\,y = c_0 \;\Rightarrow\; x = \frac{c_0 - b_0 y}{a_0}$$

cuya expresión se sustituye por x en la otra expresión:

$$a_1 x + b_1 y = c_1 \Rightarrow \quad a_1\left(\frac{c_0 - b_0 y}{a_0}\right) + b_1 y = c_1$$

y haciendo las operaciones oportunas se obtiene:

$$\frac{a_1 c_0 - a_1 b_0 y}{a_0} + b_1 y = c_1 \Rightarrow a_1 c_0 - a_1 b_0 y + a_0 b_1 y = a_0 c_1$$

$$a_0 c_1 - a_1 c_0 = a_0 b_1 y - a_1 b_0 y \Rightarrow a_0 c_1 - a_1 c_0 = (a_0 b_1 - a_1 b_0)\, y$$

Se despeja así el valor de la incógnita y:

$$y = \frac{a_0 c_1 - a_1 c_0}{a_0 b_1 - a_1 b_0}$$

Y sustituyendo esta expresión en lugar de y en la ecuación:

$$a_1 x + b_1 y = c_1 \Rightarrow \quad a_1 x + b_1\left(\frac{a_0 c_1 - a_1 c_0}{a_0 b_1 - a_1 b_0}\right) = c_1$$

Haciendo las operaciones oportunas se deduce el valor de x:

$$(a_0 b_1 - a_1 b_0)\; a_1 x + b_1 (a_0 c_1 - a_1 c_0) = (a_0 b_1 - a_1 b_0)\, c_1$$

$$(a_0 b_1 - a_1 b_0)\; a_1 x + a_0 b_1 c_1 - a_1 b_1 c_0 = a_0 c_1 b_1 - a_1 b_0 c_1$$

$$(a_0 b_1 - a_1 b_0)\; a_1 x = a_0 b_1 c_1 - a_1 b_0 c_1 - a_0 b_1 c_1 + a_1 b_1 c_0$$

simplificando términos:

$$(a_0 b_1 - a_1 b_0)\; a_1 x = a_1 b_1 c_0 - a_1 b_0 c_1 = a_1 (b_1 c_0 - b_0 c_1)$$

Dividiendo por a_1, finalmente se obtiene:

$$(a_0 b_1 - a_1 b_0)\; x = b_1 c_0 - b_0 c_1 \Rightarrow \quad x = \frac{b_1 c_0 - b_0 c_1}{a_0 b_1 - a_1 b_0}$$

A1.2.1.1 Ejercicios de ejemplo

✎ *A.1.2.1.1.1.* Hallaremos los valores de x e y en un sistema de dos ecuaciones; aparecen, pues, dos incógnitas:

$$\boxed{\begin{array}{c} 2x - 6y = 2 \\ 6x - 8y = 16 \end{array}}$$

Despejando en la primera ecuación el valor de x, se obtiene:

$$2x-6y=2 \Rightarrow x=\frac{2+6y}{2}$$

Sustituyendo esta expresión en lugar de x en la otra expresión:

$$6x-8y=16 \Rightarrow 6\left(\frac{2+6y}{2}\right)-8y=16$$

Se obtiene así, al eliminar la incógnita x, una ecuación con una sola incógnita de la cual se halla fácilmente el valor de la incógnita y. Multiplicando el valor 6 por el contenido del paréntesis:

$$6\left(\frac{2+6y}{2}\right)-8y=16 \Rightarrow \frac{12+36y}{2}-8y=16$$

Eliminando el denominador (multiplicando todos los términos por 2):

$$\frac{12+36y}{2}-8y=16 \Rightarrow 12+36y-16y=32$$

Se halla así el valor de la incógnita y:

$$20y=20 \Rightarrow y=\frac{20}{20}=1$$

Y conociendo el valor de y se deduce también el de x:

$$x=\frac{2+6y}{2}=\frac{2+6\times 1}{2}=4$$

Comprobación de los resultados:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-6y=2 \\ 6x-8y=16 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2\times 4-6\times 1=2 \\ 6\times 4-8\times 1=16 \end{array}$$

✎ *A.1.2.1.1.2.* En este caso, vamos a resolver un sistema de tres ecuaciones; aparecen, pues, tres incógnitas:

$$\boxed{\begin{array}{r} 8x-6y+4z=18 \\ 4x+10y-6z=8 \\ 10x+12y-4z=36 \end{array}}$$

Despejamos x en la primera ecuación:

$$8x-6y+4z=18 \Rightarrow x=\frac{18+6y-4z}{8}$$

Y sustituyendo ahora esta expresión en lugar de x en las otras dos ecuaciones:

$$4x+10y-6z=8 \Rightarrow 4\left(\frac{18+6y-4z}{8}\right)+10y-6z=8$$

$$10x+12y-4z=36 \Rightarrow 10\left(\frac{18+6y-4z}{8}\right)+12y-4z=36$$

Se elimina así la incógnita x, con lo cual, operando y simplificando, se llega a un sistema de dos ecuaciones:

$$4\left(\frac{18+6y-4z}{8}\right)+10y-6z=8 \Rightarrow 72+24y-16z+80y-48z=64$$

$$24y+80y-16z-48z=64-72 \Rightarrow \boxed{104y-64z=-8}$$

$$10\left(\frac{18+6y-4z}{8}\right)+12y-4z=36 \Rightarrow 180+60y-40z+96y-32z=288$$

$$60y+96y-40z-32z=288-180 \Rightarrow \boxed{156y-72z=108}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}104y-64z=-8\\ 156y-72z=108\end{array}}$$

Siguiendo el mismo proceso, ahora se despeja la incógnita y:

$$104y-64z=-8 \Rightarrow y=\frac{-8+64z}{104}$$

Sustituyendo esta expresión en la otra ecuación:

$$156y-72z=108 \Rightarrow 156\left(\frac{-8+64z}{104}\right)-72z=108$$

Operando se llega a una ecuación con una sola incógnita, z:

$$156\left(\frac{-8+64z}{104}\right)-72z=108 \Rightarrow \frac{-1.248+9.984z}{104}-72z=108$$

Eliminando el denominador (multiplicando por 104):

$$-1.248 + 9.984\,z - 7.488\,z = 11.232 \Rightarrow 9.984\,z - 7.488\,z = 11.232 + 1.248$$

Se obtiene así el valor de z:

$$2.496\,z = 12.480 \Rightarrow z = \frac{12.480}{2.496} = 5$$

Y conociendo el valor de z, de los cálculos anteriores, se deducen también los valores de las otras incógnitas:

$$y = \frac{-8 + 64\,z}{104} = \frac{-8 + (64 \times 5)}{104} = 3$$

$$x = \frac{18 + 6\,y - 4\,z}{8} = \frac{18 + (6 \times 3) - (4 \times 5)}{8} = 2$$

A1.2.2 Método por igualación

Este método consiste en despejar una misma incógnita en dos ecuaciones y después igualar ambas expresiones; se elimina así una de las incógnitas.

A1.2.2.1 Ejercicios de ejemplo

✎ *A.1.2.2.1.1.* Tenemos el sistema de dos ecuaciones siguiente:

$$\boxed{\begin{array}{c} 2\,x - 6\,y = 2 \\ 6\,x - 8\,y = 16 \end{array}}$$

Despejamos la incógnita x en las dos ecuaciones:

$$2\,x - 6\,y = 2 \Rightarrow x = \frac{2 + 6\,y}{2}$$

$$6\,x - 8\,y = 16 \Rightarrow x = \frac{16 + 8\,y}{6}$$

Igualamos las dos expresiones de x:

$$\frac{2 + 6\,y}{2} = \frac{16 + 8\,y}{6}$$

Eliminado denominadores y operando tenemos:

$$12 + 36\,y = 32 + 16\,y \;\Rightarrow\; 36\,y - 16\,y = 32 - 12$$

$$20\,y = 20 \;\Rightarrow\; y = \frac{20}{20} = 1$$

$$x = \frac{2+6y}{2} = \frac{2+(6\times 1)}{2} = 4$$

✎ *A.1.2.2.1.2.* Tenemos dos resistencias en paralelo, de valores $R_1 = 10\ \Omega$ y $R_2 = 15\ \Omega$, y se sabe que la corriente total es de $I_T = 2$ A (fig. A1.1). Calcular los valores de las corrientes que circulan por cada resistencia (I_1 y I_2).

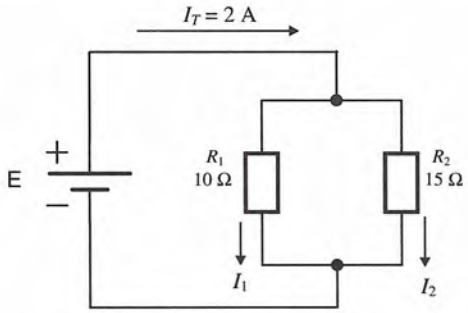


Figura A1.1

Planteamiento de las ecuaciones:

Por Kirchhoff, tenemos: $I_T = I_1 + I_2$.
Por otra parte, al estar las resistencias en paralelo:

$$V_{R1} = V_{R2} \;\Rightarrow\; R_1 I_1 = R_2 I_2 \;\Rightarrow\; R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0$$

Así, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} I_1 + I_2 = I_T \\ R_1\, I_1 - R_2\, I_2 = 0 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \boxed{\begin{array}{l} I_1 + I_2 = 2 \\ 10\, I_1 - 15\, I_2 = 0 \end{array}}$$

Despejando la incógnita I_1 en las dos ecuaciones e igualando las expresiones:

$$I_1 + I_2 = 2 \;\Rightarrow\; I_1 = 2 - I_2$$

$$10\, I_1 - 15\, I_2 = 0 \;\Rightarrow\; I_1 = \frac{15\, I_2}{10}$$

$$2 - I_2 = \frac{15\,I_2}{10} \Rightarrow 20 - 10\,I_2 = 15\,I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{20}{25} = 0{,}8 \text{ A}$$

Y conociendo el valor de I_2, se deduce el de I_1:

$$I_1 = 2 - I_2 = 2 - 0{,}8 = 1{,}2 \text{ A}$$

A1.2.3 Método por reducción

Este método, aparte del método por determinantes, es el que frecuentemente suele resultar más interesante en la práctica. Se basa en que cuando los coeficientes de una misma incógnita son iguales en dos ecuaciones, por medio de una suma (o resta) entre las ecuaciones se logra eliminar una incógnita. Por ejemplo, en el sistema:

$$\boxed{\begin{array}{c} x + y = 30 \\ x - y = 14 \end{array}}$$

el valor de los coeficientes de las incógnitas x e y es 1. Sumando las dos ecuaciones, término a término, se obtiene:

$$(x + y) + (x - y) = 30 + 14 \Rightarrow 2\,x = 44 \Rightarrow x = \frac{44}{2} = 22$$

De lo cual se deduce, asimismo, el valor de y:

$$y = 30 - x = 30 - 22 = 8$$

Valores que, como se comprueba, satisfacen a las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 30 \\ x - y = 14 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 22 + 8 = 30 \\ 22 - 8 = 14 \end{array}$$

Y si en vez de realizar la suma de las ecuaciones se hace la resta, en este caso, al tener todos los coeficientes el mismo valor, 1, se obtiene el mismo resultado:

$$(x + y) - (x - y) = 30 - 14 \Rightarrow 2\,y = 16 \Rightarrow y = \frac{16}{2} = 8$$

$$x - y = 14 \Rightarrow x = 14 + y = 14 + 8 = 22$$

Así, el método general consiste en hacer que los coeficientes de una misma incógnita tengan el mismo valor en las dos ecuaciones del sistema, lo cual se logra multiplicando las ecuaciones por el valor adecuado. Se puede conseguir esto, de una forma general, multiplicando cada uno de los términos de cada ecuación por el valor que tenga el coeficiente de la incógnita que se quiera eliminar en la otra ecuación. Si los coeficientes del mismo valor aparecen con el mismo signo, se realiza una resta entre las ecuaciones; en caso contrario (signos diferentes), se realiza una suma. En cualquier caso, de lo que se trata es de poder eliminar una de las incógnitas.

A1.2.3.1 Ejercicios de ejemplo

✎ *A.1.2.3.1.1*

$$\boxed{\begin{array}{l} 2x - 6y = 2 \\ 6x - 8y = 16 \end{array}}$$

Vamos a eliminar la incógnita *x*. Multiplicando la primera ecuación por el coeficiente de *x* de la otra ecuación, que es 6, se tiene:

$$6 \times (2x - 6y = 2) \Rightarrow 12x - 36y = 12$$

Y multiplicando la segunda ecuación por el coeficiente de *x* de la primera ecuación, que vale 2, tenemos:

$$2 \times (6x - 8y = 16) \Rightarrow 12x - 16y = 32$$

Se obtiene así un sistema equivalente en el cual los coeficientes de *x* tienen el mismo valor:

$$12x - 36y = 12$$

$$12x - 16y = 32$$

Y al ser del mismo signo, se elimina la *x* restando las ecuaciones:

$$(12x - 36y) - (12x - 16y) = 12 - 32$$

$$-20y = -20 \Rightarrow y = \frac{20}{20} = 1$$

De lo cual se obtiene también:

$$2x - 6y = 2 \Rightarrow x = \frac{2 + 6y}{2} = \frac{2 + (6 \times 1)}{2} = 4$$

Se simplifica el desarrollo estableciendo la operación de suma (o resta) de las ecuaciones de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rrcl} & 12x - 36y & = & 12 \\ (-) & 12x - 16y & = & 32 \\ \hline & -20y & = & -20 \Rightarrow y = 1 \end{array}$$

✎ *A.1.2.3.1.2.*

$$\boxed{\begin{aligned} 2x+3y&=7 \\ 3x-4y&=2 \end{aligned}}$$

$$3\times(2x+3y=7) \Rightarrow 6x+9y=21$$

$$2\times(3x-4y=2) \Rightarrow 6x-8y=4$$

$$\begin{array}{rl} & 6x+9y=21 \\ (-) & 6x-8y=4 \\ \hline & 17y=17 \quad \Rightarrow y=1 \end{array}$$

$$2x+3y=7 \Rightarrow \quad x=\frac{7-3y}{2}=\frac{7-(3\times 1)}{2}=\frac{4}{2}=2$$

✎ *A.1.2.3.1.3.*

$$\boxed{\begin{aligned} 3x-6y&=27 \\ -x+8y&=-21 \end{aligned}}$$

En este caso, se consigue la igualación de los coeficientes de x con sólo multiplicar por 3 la segunda ecuación:

$$3\times(-x+8y=-21) \Rightarrow -3x+24y=-63$$

Se obtiene así el sistema:

$$3x-6y=27$$

$$-3x+24y=-63$$

Y cuando los coeficientes igualados aparecen con signo diferente, la incógnita se elimina sumando las ecuaciones:

$$\begin{array}{rl} & 3x-6y=27 \\ (+) & -3x+24y=-63 \\ \hline & 18y=-36 \quad \Rightarrow y=\frac{-36}{18}=-2 \end{array}$$

Y el valor de x:

$$3x-6y=27 \Rightarrow x=\frac{27+6y}{3}=\frac{27+6\times(-2)}{3}=\frac{15}{3}=5$$

✎ *A.1.2.3.1.4.*

En este caso, vamos a resolver un sistema donde aparecen tres incógnitas:

$$\boxed{\begin{aligned} x+2y-z&=6\\ x+y+2z&=7\\ 2x+3y-z&=11 \end{aligned}}$$

Como los coeficientes de x son igual en las dos primeras ecuaciones, restándolas tenemos:

$$\begin{array}{rr} & x+2y-z=6 \\ (-) & x+y+2z=7 \\ \hline & y-3z=-1 \end{array}$$

eliminándose así la incógnita x.

Multiplicando ahora la segunda ecuación por 2, para igualar el coeficiente de la x con la tercera ecuación:

$$2\times(x+y+2z=7) \Rightarrow 2x+2y+4z = 14$$

Y haciendo la resta entre la segunda ecuación (multiplicada por 2) con la tercera ecuación:

$$\begin{array}{rr} & 2x+2y+4z=14 \\ (-) & 2x+3y-z=11 \\ \hline & -y+5z=3 \end{array}$$

Se elimina así también la incógnita x, con lo cual se obtiene un sistema con dos incógnitas:

$$y-3z=-1$$

$$-y+5z=3$$

Puesto que los coeficientes de y tienen el mismo valor, pero con diferente signo, sumando las dos ecuaciones tenemos:

$$\begin{array}{rr} & y-3z=-1 \\ (+) & -y+5z=3 \\ \hline & 2z=2 \Rightarrow z=1 \end{array}$$

Y conociendo el valor de z se halla el de y y después el de x:

$$y=5z-3=(5\times 1)-3=2$$

$$x=6+z-2y=6+1-(2\times 2)=3$$

A1.2.4 Método por determinantes

Este es un método de resolver los sistemas de ecuaciones de una forma sistemática y sencilla. Además, tiene la peculiaridad de que se puede obtener directamente el valor de sólo la incógnita que interese, sin necesidad de tener que calcular las otras. Es por ello que, cuando se tiene algo de práctica, es el método que normalmente se utiliza.

Se basa en escribir los coeficientes de las incógnitas de una cierta manera, matricial, y después efectuar unas operaciones de multiplicación y resta. Aunque el método es extensivo a *n* ecuaciones de *n* incógnitas, nos limitaremos a los casos más prácticos: los de 2 y 3 incógnitas.

A1.2.4.1 Determinantes de segundo orden

Es el tipo más simple de determinante. Se representa de la manera siguiente:

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

Aparece en los sistemas de ecuaciones de dos incógnitas; se estructura en dos filas y dos columnas. Su valor se calcula haciendo la resta de los productos en diagonal, como se indica:

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_0\, b_1 - a_1\, b_0$$

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - 6 \times 4 = 6 - 24 = -18$$

Aparecen dos tipos de determinantes en la resolución de las ecuaciones: el determinante de los coeficientes y los determinantes de las incógnitas. Tomando, por ejemplo, el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\boxed{\begin{array}{l} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 4y = 2 \end{array}}$$

El determinante de los coeficientes se forma poniendo los coeficientes de las incógnitas en forma matricial, en filas y columnas, según la posición que ocupan en la representación del sistema de ecuaciones. O sea:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 4y = 2 \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2 \times (-4) - 3 \times 3 = -8 - 9 = -17$$

Y los determinantes de las incógnitas se obtienen partiendo del determinante de los coeficientes, en el cual se sustituyen los coeficientes de la incógnita en cuestión por los términos constantes. Así, pues, en el ejemplo del sistema de ecuaciones anterior, aparece:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 7 \times (-4) - 2 \times 3 = -28 - 6 = -34$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 3 \times 7 = 4 - 21 = -17$$

Y en el caso del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\boxed{\begin{array}{r} 5\,x + 6\,y = 7 \\ 10\,x + 8\,y = 10 \end{array}}$$

los determinantes que se obtienen son:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = (5 \times 8) - (10 \times 6) = 40 - 60 = -20$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = (7 \times 8) - (10 \times 6) = 56 - 60 = -4$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 10 & 10 \end{vmatrix} = (5 \times 10) - (10 \times 7) = 50 - 70 = -20$$

El cálculo de los valores numéricos de las incógnitas se halla por medio de las operaciones siguientes:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Ejemplos:

En el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\boxed{\begin{array}{r} 2\,x + 3\,y = 7 \\ 3\,x - 4\,y = 2 \end{array}}$$

Los valores de las incógnitas son:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}7 & 3\\2 & -4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3\\3 & -4\end{vmatrix}}=\frac{7\times(-4)-2\times 3}{2\times(-4)-3\times 3}=\frac{-28-6}{-8-9}=\frac{-34}{-17}=2$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}2 & 7\\3 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3\\3 & -4\end{vmatrix}}=\frac{2\times 2-3\times 7}{2\times(-4)-3\times 3}=\frac{4-21}{-8-9}=\frac{-17}{-17}=1$$

Y en el sistema siguiente:

$$\boxed{\begin{array}{r}5\,x+6\,y\;=7\\10\,x+8\,y=10\end{array}}$$

Como los valores de los determinantes son:

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & 6\\10 & 8\end{vmatrix}=40-60=-20$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}7 & 6\\10 & 8\end{vmatrix}=56-60=-4$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}5 & 7\\10 & 10\end{vmatrix}=50-70=-20$$

Los valores que se obtienen para las incógnitas son:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-4}{-20}=0{,}2$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-20}{-20}=1$$

De hecho, la estructura de los determinantes se basa en desarrollos algebraicos. Según se desarrolló, al principio, en el método de sustitución, el resultado del sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{c}\mathrm{a}_0\,x+\mathrm{b}_0\,y=\mathrm{c}_0\\\mathrm{a}_1\,x+\mathrm{b}_1\,y=\mathrm{c}_1\end{array}$$

viene dado por unas expresiones que coinciden con el desarrollo de unos determinantes:

$$y = \frac{a_0 c_1 - a_1 c_0}{a_0 b_1 - a_1 b_0} = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{b_1 c_0 - b_0 c_1}{a_0 b_1 - a_1 b_0} = \frac{\begin{vmatrix} c_0 & b_0 \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}$$

Y si resolvemos el sistema de ecuaciones por el método de igualación también se obtiene el mismo resultado, como se muestra a continuación para la incógnita *y:*

Despejando las incógnitas en las dos ecuaciones:

$$x = \frac{c_0 - b_0 y}{a_0} \qquad y = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1}$$

Igualando las dos expresiones:

$$\frac{c_0 - b_0 y}{a_0} = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1}$$

Operando se llega a que:

$$a_1 c_0 - a_1 b_0 y = a_0 c_1 - a_0 b_1 y \Rightarrow a_0 b_1 y - a_1 b_0 y = a_0 c_1 - a_1 c_0$$

$$y (a_0 b_1 - a_1 b_0) = a_0 c_1 - a_1 c_0 \Rightarrow y = \frac{a_0 c_1 - a_1 c_0}{a_0 b_1 - a_1 b_0} = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}$$

Y desarrollando mediante el método de reducción se obtiene el mismo resultado:

Multiplicando la primera ecuación por a_1 y la segunda por a_0 y operando se obtiene:

$$a_1 (a_0 x + b_0 y = c_0) \Rightarrow a_1 a_0 x + a_1 b_0 y = a_1 c_0$$

$$a_0 (a_1 x + b_1 y = c_1) \Rightarrow a_0 a_1 x + a_0 b_1 y = a_0 c_1$$

Restando las ecuaciones y simplificando, tenemos:

$$a_0\, a_1\, x + a_0\, b_1\, y - a_0\, a_1\, x - a_1\, b_0\, y = a_0\, c_1 - a_1\, c_0$$

$$a_0\, b_1\, y - a_1\, b_0\, y = y\,(a_0\, b_1 - a_1\, b_0) = a_0\, c_1 - a_1\, c_0$$

Despejando el valor de y:

$$y = \frac{a_0\ c_1 - a_1\ c_0}{a_0\ b_1 - a_1\ b_0} = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}$$

A1.2.4.2 Determinantes de tercer orden

Cuando se trata con sistemas de ecuaciones con tres incógnitas aparecen los determinantes de tercer orden. Son matrices de 3 filas y 3 columnas, según se representa:

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Para obtener su valor, se opera de la siguiente manera:

– Se efectúa la suma de los productos de los coeficientes según se indica:

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \Rightarrow (a_0\, b_1\, c_2 + a_1\, b_2\, c_0 + a_2\, b_0\, c_1)$$

– Se efectúa la suma de los productos de los coeficientes según se indica:

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \Rightarrow (a_2\, b_1\, c_0 + a_1\, b_0\, c_2 + a_0\, b_2\, c_1)$$

– Se realiza la resta de los dos grupos de sumas de productos obtenidos. O sea, de forma general, aparece:

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (a_0\, b_1\, c_2 + a_1\, b_2\, c_0 + a_2\, b_0\, c_1) - (a_2\, b_1\, c_0 + a_1\, b_0\, c_2 + a_0\, b_2\, c_1)$$

Ejemplos:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 10 & 0 & 5 \\ 20 & 2 & 5 \end{vmatrix} = [0 + 10 \times 2 \times 1 + 20 \times 5 \times (-1)] - [0 + 10 \times (-1) \times 5 + 0] = -80 - (-50) = -30$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = [2 \times (-1) \times (-1) + 1 \times 2 \times (-3) + 4 \times (-2) \times 1] - [4 \times (-1) \times (-3) + 1 \times 1 \times (-1) + 2 \times (-2) \times 2] = (2 - 6 - 8) - (12 - 1 - 8) = -12 - 3 = -15$$

Los valores de las incógnitas se hallan tal como se explicó anteriormente, para el caso de los determinantes de segundo orden.
O sea, que:

$$\boxed{x = \frac{\Delta x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta}}$$

Ejercicio de ejemplo:

En el sistema de ecuaciones con tres incógnitas siguiente:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x + 2y - z & = & 6 \\ x + y + 2z & = & 7 \\ 2x + 3y - z & = & 11 \end{array}}$$

el desarrollo para calcular los valores de las incógnitas es:

Determinante de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = [1\times 1\times(-1)+1\times 3\times(-1)+2\times 2\times 2]-[2\times 1\times(-1)+ \\ +1\times 2\times(-1)+1\times 2\times 3]=(-1-3+8)-(-2-2+6)= \\ =(-4+8)-(-4+6)=4-2=2$$

Determinante de *x:*

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 11 & 3 & -1 \end{vmatrix} = [6\times 1\times(-1)+7\times 3\times(-1)+11\times 2\times 2]-[11\times 1\times(-1)+ \\ +7\times 2\times(-1)+6\times 2\times 3]=(-6-21+44)-(-11-14+ \\ +36)=17-11=6$$

Determinante de *y:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 11 & -1 \end{vmatrix} = [1\times 7\times(-1)+1\times 11\times(-1)+2\times 2\times 6]-[2\times 7\times(-1)+ \\ +1\times 6\times(-1)+1\times 2\times 11]=(-7-11+24)- \\ -(-14-6+22)=6-2=4$$

Determinante de *z:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 11 \end{vmatrix} = [1\times 1\times(11)+1\times 3\times 6+2\times 7\times 2]-[2\times 1\times 6+1\times 2\times \\ \times 11+1\times 7\times 3]=(11+18+28)-(12+22+21)= \\ =57-55=2$$

Los valores de las incógnitas son, pues:

$$\boxed{\begin{aligned} x&=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{6}{2}=3 \\ y&=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{4}{2}=2 \\ z&=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{2}{2}=1 \end{aligned}}$$

Los determinantes de tercer orden se pueden desarrollar también en determinantes de segundo orden, con lo cual sistemas de ecuaciones de tres incógnitas se pueden resolver también por medio únicamente de determinantes de segundo orden.

O sea, se cumple que:

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_0 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_0 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_0 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el cálculo de los determinantes de segundo orden tenemos:

$$a_0 (b_1 c_2 - b_2 c_1) - b_0 (a_1 c_2 - a_2 c_1) + c_0 (a_1 b_2 - a_2 b_1) =$$
$$= a_0 b_1 c_2 - a_0 b_2 c_1 - b_0 a_1 c_2 + b_0 a_2 c_1 + c_0 a_1 b_2 - c_0 a_2 b_1 =$$
$$= (a_0 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_0 + a_2 b_0 c_1) - (a_2 b_1 c_0 + a_1 b_0 c_2 + a_0 b_2 c_1)$$

Cuyo resultado coincide con el desarrollo de cálculo del determinante de tercer orden:

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (a_0 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_0 + a_2 b_0 c_1) - (a_2 b_1 c_0 + a_1 b_0 c_2 + a_0 b_2 c_1)$$

Como se puede observar, cada determinante de segundo orden se obtiene eliminando los coeficientes de la fila y columna del coeficiente que se toma como multiplicador.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 [(1\times 11) - (3\times 7)] - 2[(1\times 11) - (2\times 7)] + 6 [(1\times 3) - (2\times 1)] = -10 + 6 + 6 = 2$$

Ejercicio práctico:

Dado el circuito representado en la figura A1.2, aplicando los principios de Kirchhoff, se obtiene:

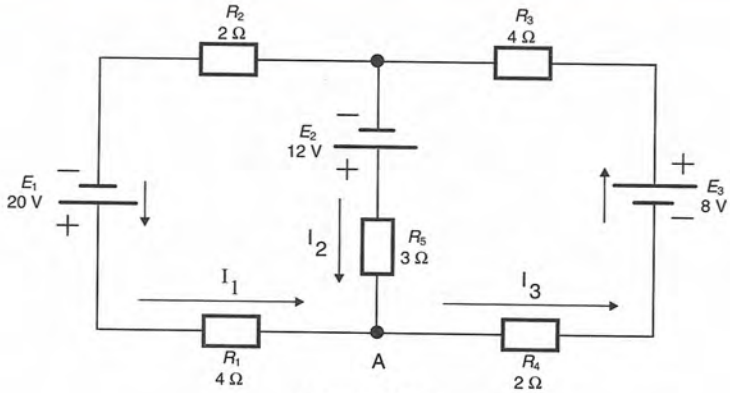


Figura A1.2

En el nudo A:

$$I_3 = I_1 + I_2$$

Ecuación de la malla izquierda:

$$20 - 12 = 4\,I_1 - 3\,I_2 + 2\,I_1 \;\Rightarrow\; 8 = 6\,I_1 - 3\,I_2$$

Ecuación de la malla derecha:

$$8 + 12 = 4\,I_3 + 3\,I_2 + 2\,I_3 \;\Rightarrow\; 20 = 6\,I_3 + 3\,I_2$$

Aparece un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$I_3 = I_1 + I_2$$

$$8 = 6\,I_1 - 3\,I_2$$

$$20 = 6\,I_3 + 3\,I_2$$

Estructurando su representación para resolver por determinantes, se pone:

$$\boxed{\begin{aligned} I_1 + \;\; I_2 \; - \;\; I_3 &= 0 \\ 6\,I_1 - 3\,I_2 + 0\,I_3 &= 8 \\ 0\,I_1 + 3\,I_2 + 6\,I_3 &= 20 \end{aligned}}$$

Se deducen así los siguientes determinantes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -18 - 36 - 18 = -72$$

$$\Delta I_1=\begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\ 8 & -3 & 0\\ 20 & 3 & 6\end{vmatrix}=0\begin{vmatrix}-3 & 0\\ 3 & 6\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}8 & 0\\ 20 & 6\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}8 & -3\\ 20 & 3\end{vmatrix}=-48-24-60=-132$$

$$\Delta I_2=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 6 & 8 & 0\\ 0 & 20 & 6\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}8 & 0\\ 20 & 6\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}6 & 8\\ 0 & 20\end{vmatrix}=48-120=-72$$

$$\Delta I_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 6 & -3 & 8\\ 0 & 3 & 20\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}-3 & 8\\ 3 & 20\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}6 & 8\\ 0 & 20\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}6 & -3\\ 0 & 3\end{vmatrix}=(-60-24)-120=-204$$

Y de estos datos se obtienen los valores de las incógnitas, que son las corrientes I_1, I_2 e I_3:

$$\boxed{\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\Delta I_1}{\Delta} = \frac{-132}{-72} = 1{,}833\\
I_2 &= \frac{\Delta I_2}{\Delta} = \frac{-72}{-72} = 1\\
I_3 &= \frac{\Delta I_3}{\Delta} = \frac{-204}{-72} = 2{,}833
\end{aligned}}$$

Apéndice 2

Resumen de conceptos y fórmulas fundamentales

En este apéndice se expone una síntesis, conceptual, sobre los temas más importantes que se han desarrollado en el libro y que, por su interés práctico, se consideran fundamentales.

Electricidad: Es un tipo de energía, y como tal, capaz de realizar trabajo. De forma semejante a la fuerza magnética, no resulta visible, pero su existencia queda claramente manifiesta por los efectos que produce.

Positivo (+), negativo (–): Denominaciones que se utilizan para diferenciar dos estados eléctricos (o polaridades) diferentes entre sí.

Electrón: Es la partícula elemental con carga eléctrica negativa (–e), que forma parte de la corteza del átomo. Los electrones son cargas móviles, y dan origen a la corriente eléctrica. Carga del electrón: **$-e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C.** Masa: $9{,}11 \times 10^{-31}$ kg.

Protón: Es la partícula elemental con carga eléctrica positiva (+e). Forma parte del núcleo del átomo. Su carga es de la misma magnitud que la del electrón, pero de signo contrario: **$+e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C.** Su masa es: $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg (unas 1830 veces mayor que la del electrón).

Cuerpo cargado positivamente: Son cuerpos con déficit de cargas negativas; sus átomos han perdido electrones, han dejado de ser neutros, tienen menos electrones que protones.

Cuerpo cargado negativamente: Son cuerpos con exceso de cargas negativas; sus átomos han recibido electrones, han dejado de ser neutros, tienen más electrones que protones.

Campo eléctrico: Es una fuerza originada por las cargas eléctricas, similar a la magnética; invisible, de acción a distancia, que puede ser de atracción o repulsión. Existe una fuerza de campo eléctrico en un cierto punto del espacio, si en dicho punto se ejerce fuerza sobre cualquier otro tipo de carga.

Fuerza entre las cargas eléctricas: Entre cargas eléctricas del mismo signo o polaridad se produce una fuerza de repulsión. Y entre cargas eléctricas de diferente signo, la fuerza es de atracción. Ocurre lo mismo que con los polos magnéticos de los imanes.

Ley de Coulomb: *La fuerza,* **F**, *ejercida entre dos cargas eléctricas,* $\mathbf{q}_1$ *y* $\mathbf{q}_2$, *es directamente proporcional a su producto e inversamente proporcional a su distancia de separación:*

$$F = K\frac{q_1\,q_2}{d^2}$$

K: constante de proporcionalidad (en el aire, $K \approx 9 \cdot 10^9$)
q_1 y q_2: cargas eléctricas, culombios (C).
d: distancia de separación, metros (m).

Si las cargas son de igual polaridad la fuerza será de repulsión, y si son de diferente polaridad será de atracción.

Conductor: Material que deja pasar la corriente con más o menos facilidad, o sea, opone poca resistencia. Los mejores conductores son la plata, el cobre y el aluminio.

Aislantes: Son materiales con una muy elevada oposición a la circulación de la corriente y se utilizan para impedir el paso de la misma. Son materiales aislantes: el aire (seco), la porcelana, goma, papel, etc.

Semiconductores: *Materiales cuya conductividad es intermedia entre los buenos conductores y los aislantes*. El material semiconductor más utilizado es el *silicio*. Se caracterizan también porque *su resistividad disminuye al aumentar la temperatura,* lo contrario que ocurre en los buenos conductores. Con este tipo de materiales se fabrican los componentes electrónicos, desde el más elemental (diodo) al más complejo (microprocesador).

Corriente eléctrica: Es la circulación ordenada de los electrones a través de un material conductor, para lo cual es necesario que se aplique una fuerza externa que se denomina tensión (voltaje). De una forma natural, sin aplicar tensión, en los materiales ya existe un cierto movimiento de los electrones; pero esto no es corriente porque no es un movimiento ordenado, sino aleatorio.

Culombio (C): Unidad de carga eléctrica. Un culombio equivale a la carga de $6{,}28 \cdot 10^{23}$ electrones aproximadamente.

Intensidad eléctrica: Cantidad de carga eléctrica (culombios) que circula en la unidad de tiempo (segundo):

$$I = \frac{q}{t}$$

Amperio: Es la unidad de intensidad eléctrica. Un amperio es la circulación de la carga de un culombio por segundo:

$$\boxed{I = \frac{q}{t} \Rightarrow 1\,\text{amperio} = \frac{1\,\text{culombio}}{1\,\text{segundo}}}$$

Tensión eléctrica: Fuerza que hace que los electrones se muevan ordenadamente en una cierta dirección a través de las líneas de conductores, o sea, lo que hace que aparezca una corriente eléctrica. Su unidad es el voltio (V).

Voltio (V): Es la unidad de tensión eléctrica. Un voltio se puede definir como la fuerza (eléctrica) que hace que se efectúe el trabajo de 1 julio para hacer circular la carga de 1 culombio: $V=\frac{\text{trabajo}}{\text{carga}} \Rightarrow 1\,V=\frac{1\,J}{1\,C}$.

Diferencia de potencial: *Es la tensión que existe entre dos puntos con diferente potencial eléctrico;* por ejemplo, entre los terminales de una resistencia, los terminales de una pila, etc. Se mide en voltios.

Fuerza electromotriz (f.e.m.): En los generadores de electricidad, como consecuencia de algún tipo de proceso, se produce en su interior una *fuerza que obliga a moverse a los electrones dentro del generador* (del polo + al polo −), y que *tiene por efecto producir una tensión eléctrica entre los terminales (polos) de salida;* es el voltaje de salida. Su unidad es el voltio.

Sentido de la corriente eléctrica: El *sentido electrónico real de la corriente es de negativo a positivo*, ya que así es el sentido de circulación de los electrones. En la práctica, por razones convencionales, históricas, suele tomarse de positivo a negativo: *sentido convencional*.

Corriente continua: Existe *corriente continua* (c.c.) cuando el flujo de electrones circula siempre por el circuito en el mismo sentido, y en este caso aparece el concepto de polaridad (+ y −). Es el tipo de corriente que se obtiene de las pilas y baterías.

Corriente alterna: Existe *corriente alterna* (c.a.) cuando el sentido de circulación de la corriente se va invirtiendo constantemente en función del tiempo. Es el tipo de corriente que suministran las centrales eléctricas, por medio de máquinas eléctricas denominadas *alternadores*.

Circuito eléctrico: Conjunto de componentes cuya conexión forma un *camino por el cual puede circular la corriente eléctrica;* la corriente debe poder entrar por un punto y salir por otro (*circuito cerrado*).

Generador de electricidad: *Fuente de energía eléctrica*, proporciona *tensión eléctrica (voltios)*, que es lo que da lugar a la circulación de una intensidad eléctrica a través del circuito. En las pilas y baterías la electricidad se genera mediante una reacción química. En los alternadores y dinamos, que son máquinas eléctricas, la generación de electricidad se basa en un efecto magnético.

Receptor: Es el *dispositivo, o aparato eléctrico, que mediante la recepción de la energía eléctrica realiza algún tipo de trabajo o función:* bombilla, motor, radio, etc. El concepto de receptor a veces se expresa simplemente por *carga* [en los esquemas se suele indicar por R_L (*resistor load),* resistencia de carga].

Conductores eléctricos: *Líneas por las cuales se transporta la energía eléctrica.* El material normalmente utilizado es el cobre por su buena relación conductividad-precio. *Hilo:* línea conductora, de tipo rígido, formada por un solo conductor. *Cable:* línea conductora, con cierta flexibilidad mecánica, formada por varios hilos.

Sección de un conductor: Viene determinada por su radio (r) o diámetro (D); *es el área del corte transversal circular del conductor:*

$$S=\pi\cdot r^2=\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2=\pi\frac{D^2}{4}$$

Efecto térmico de la corriente: Como consecuencia del trabajo realizado en el transporte de las cargas eléctricas, *la circulación de corriente a través de los conductores siempre produce más o menos calor (ley de Joule).* Este efecto se aprovecha, por ejemplo, en estufas eléctricas, planchas, soldadores, etc. Como defecto queda patente en el posible calentamiento de las líneas conductoras, y, en general, el de los aparatos eléctricos cuya aplicación no sea producir calor (ordenadores, televisores, amplificadores, etc.).

Efecto magnético de la corriente: *La circulación de la corriente eléctrica a través de un conductor genera también fuerza de tipo magnético a su alrededor.* El funcionamiento de, por ejemplo, los transformadores y motores se basa en este efecto.

Efecto químico de la corriente. Es la *descomposición química que se produce en una solución conductora (líquido) cuando se le hace pasar corriente eléctrica;* este fenómeno se llama *electrólisis*. Al líquido se le denomina *electrólito*, y a los elementos sumergidos, a los cuales se les aplica la corriente, *electrodos.* Este efecto se da, por ejemplo, en la carga de las baterías.

Galvanómetro: *Instrumento de medida* cuyo elemento móvil indicador (aguja) se mueve como reacción entre la fuerza de campo magnético que origina el paso de la corriente a través de una bobina y el campo magnético fijo producido por los polos de un imán. Se basa en el principio fundamental del magnetismo: *Los efectos de la fuerzas magnéticas pueden dar lugar a fuerzas de atracción o de repulsión; polos magnéticos iguales se repelen* (fuerza de repulsión) y *polos diferentes se atraen* (fuerza de atracción).

Amperímetro: *Instrumento para la medida de la intensidad de la corriente* (amperios). *Se tiene que conectar siempre en montaje **serie*** con el elemento del cual se quiere medir la corriente. El amperímetro clásico, de aguja, se basa en el galvanómetro; o sea, funciona bajo el principio de generación de fuerza magnética a que da lugar la circulación de la corriente a través de un conductor.

Voltímetro: *Instrumento para la medida de la tensión eléctrica* (voltaje). *Se debe conectar en paralelo,* o sea, entre los terminales del elemento del cual interese conocer su voltaje. En su versión clásica, indicación por aguja, se basa en el mismo mecanismo que el amperímetro, el galvanómetro.

Multímetro: *Instrumento de medida versátil* que, básicamente, permite la medida de amperios (A), voltios (V) y ohmios (Ω). También se denomina *polímetro* y, muy típicamente, *tester*. Resulta muy eficaz para la detección de averías tanto en aparatos eléctricos como electrónicos. Su modelo clásico se basa en el galvanómetro, o indicación por aguja; son los denominados *analógicos*. En su versión moderna, la indicación, en vez de ser por aguja, es numérica; son los denominados *digitales*. Es un instrumento imprescindible para todo aquel que tenga que trabajar con aparatos eléctricos o electrónicos.

Resistencia: Se puede definir como la *mayor o menor oposición que presentan los materiales al paso de la corriente eléctrica*. Se mide en ohmios (Ω).

Ohmio (Ω): *Unidad de resistencia eléctrica*. Según la ley de Ohm, un conductor tiene la resistencia de un ohmio si la corriente que circula es de un amperio cuando entre sus extremos existe la tensión de un voltio: $1\Omega=\dfrac{1\,V}{1\,A}$.

Coeficiente de resistividad (ρ): *Valor característico de resistividad que tiene cada material*. Se expresa en $\Omega\ m/mm^2$. Por ejemplo, el coeficiente del cobre es: $\rho = 0{,}0175$ (un hilo de cobre de 1 m de largo y de 1 mm^2 de sección tiene 0,0175 Ω).

Resistividad de un conductor: La resistencia eléctrica de todo conductor viene dada por:

$$R=\rho\,\frac{L}{S}$$

ρ: coeficiente de resistividad del material
L: longitud del conductor (m)
S: sección del conductor (mm^2).

Densidad de corriente: Se define como *la magnitud de intensidad que circula por unidad de sección de un conductor*. Es la relación entre la intensidad y la sección:

$$\text{densidad de corriente} = \frac{\text{intensidad}}{\text{sección}}$$

Su unidad viene expresada en amperios por milímetro cuadrado (A/mm^2): $\dfrac{1A}{1\,mm^2} = 1A\ /\ mm^2$. La densidad de corriente máxima permitida en las líneas conductoras depende del tipo de material y de la facilidad de evacuación del calor.

Fusibles: *Son elementos de protección frente a sobrecargas o cortocircuitos*. Son dispositivos conductores que constituyen la parte más débil del circuito (o instalación), con el fin de que si se produce algún tipo de sobrecarga (exceso de corriente), se destruyan y de esta manera se interrumpa el paso de corriente a través del circuito. La destrucción del fusible se produce por fusión del material, debido a la elevada temperatura que adquiere al circular la corriente.

Conductancia: Se puede definir como *la mayor o menor facilidad que tienen los conductores para dejar pasar la corriente eléctrica;* es la inversa de la resistencia:

$$G = \frac{1}{R}$$

Se simboliza por *G*, y su unidad es el *siemens.*

Coeficiente de temperatura de los conductores: Cada material tiene un coeficiente de temperatura característico (α) que da cuenta de la magnitud de la variación de su resistividad característica en función de la variación de temperatura:

$$\rho_c = \rho_f\,(1+\alpha\,\Delta T)$$

ρ_c = coeficiente de resistividad en caliente
ρ_f = coeficiente de resistividad en frío
ΔT = variación de temperatura $(t_2 - t_1)$
α = coeficiente de temperatura del material

El coeficiente de temperatura de, por ejemplo, el cobre es: $\alpha = 0{,}00393$.

Variación de la resistencia de los conductores con la temperatura: En general, *en los cables conductores, la resistencia aumenta cuando se calientan*: $\uparrow T \Rightarrow \uparrow R$. Como el valor de resistencia, *R,* de un conductor depende de su coeficiente de resistividad (ρ):

$$R = \rho\,\frac{L}{S}$$

al variar ρ con la temperatura, esto afecta a su resistencia *R*. Así, la resistencia de un conductor en función de la temperatura se puede expresar por:

$$R_c = R_f\,(1+\alpha\,\Delta T)$$

La resistencia, como componente eléctrico-electrónico: Es un tipo de componente muy utilizado en todos los aparatos electrónicos, y su función es presentar una cierta magnitud de resistencia. Mediante estos componentes se consigue un control de la corriente en los circuitos eléctricos-electrónicos, así como ciertos valores de tensión. También denominado resistor.

Potencia de una resistencia: La potencia disipada en una resistencia se puede obtener por: $P = I^2 \cdot R$. Se deduce, pues, que la corriente máxima que se le debe hacer circular es: $I = \sqrt{\frac{P}{R}}$. El que una resistencia sea de más o menos potencia da cuenta únicamente de la temperatura que puede soportar como consecuencia del paso de la corriente. La potencia nominal depende principalmente de las dimensiones físicas de la resistencia, ya que esto tiene que ver con la facilidad para evacuar el calor. A mayor potencia, mayores dimensiones.

Potenciómetros: Los potenciómetros son elementos de resistencia cuyo valor se puede variar por medio de un eje. Son los elementos utilizados, por ejemplo, para el ajuste de volumen en los amplificadores.

Resistencias en montaje serie: En este tipo de montaje, se consigue un valor de resistencia mayor al del más alto de las resistencias utilizadas. El valor total es la suma de los valores de todas las resistencias conectadas:

$$\boxed{R_T = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_n}$$

Resistencias en paralelo: En este tipo de montaje, el valor total de resistencia que se obtiene siempre es más bajo que el de la resistencia de más bajo valor del montaje. Viene dado por la fórmula:

$$\boxed{R_T = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\ldots+\frac{1}{R_n}}}$$

En el caso de sólo dos resistencias:

$$\boxed{R_T = \frac{R_1\ R_2}{R_1 + R_2}}$$

Y si todas las resistencias son de igual valor: $R_T = \dfrac{R}{n}$

Óhmetro: *Es un instrumento para la medida de la resistencia* (Ω). Por medio de dicho instrumento se puede obtener una lectura del valor resistivo de las resistencias, y también permite detectar cortocircuitos ($R \approx 0\ \Omega$) o circuitos abiertos [$R \approx$ *infinito* (∞)]. Al igual que el amperímetro y el voltímetro, el óhmetro, en su versión clásica, se basa en el galvanómetro: indicación analógica, por aguja. En su versión moderna, la digital, la indicación es de tipo numérica. Al igual que la función de voltímetro y amperímetro, la función óhmetro se encuentra también en los multímetros.

Ley de Ohm: Básicamente, la ley de Ohm se expresa por medio de la fórmula:

$$\boxed{I = \frac{V}{R}}$$

En ella se indica *que la corriente* (I) *que circula por un conductor es directamente proporcional al valor de la tensión* (V) *e inversamente proporcional al valor de su resistencia* (Ω). Y de esta fórmula fundamental, se deducen otras dos:

$$\boxed{R = \frac{V}{I}} \qquad \boxed{V = I \times R}$$

Caída de tensión en una resistencia: Al voltaje, o diferencia de potencial, que aparece entre los terminales de una resistencia como consecuencia de la circulación de una corriente se denomina *caída de tensión.* Su valor se obtiene aplicando la fórmula de la ley de Ohm: $V_R = I_R \times R$.

Caída de tensión en las líneas (conductores): En los conductores de las líneas de alimentación, debido a que tienen una cierta resistividad, también se produce una más o menos pequeña caída de tensión, como ocurre en las resistencias. Por ley de Ohm: $V_{línea} = R_{línea} \times I$. Esta caída de tensión supone una pérdida, ya que dicha tensión no la recibe el dispositivo receptor (carga) y, además, la potencia perdida ($P_{línea} = I^2 \cdot R_{línea}$) se trasforma en calor que puede dar lugar a problemas. Así, cuanto más baja sea la resistividad de los cables, menos pérdidas energéticas se pueden producir; de ahí que los conductores de las líneas deben ser de calidad, y adecuados en cuanto a la potencia que tienen que transportar.

Circuito serie: *El valor de la corriente que circula es el mismo en todos los componentes*: $I_T = I_{R1} = I_{R2} = I_{R3}$... siendo:

$$I_T = \frac{V_B}{R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_n}$$

La suma de todas las caídas de tensión tiene que ser igual a la tensión del generador (ley de Kirchhoff):

$$V_B = V_{R1} + V_{R2} + V_{R3} + \ldots = I_T R_1 + I_T R_2 + I_T R_3 + \ldots = I_T (R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_n)$$

Circuito paralelo: En los circuitos de tipo paralelo *todos los componentes tienen la misma tensión* (la del generador). Y la corriente que circulará por cada uno de los componentes dependerá de su valor resistivo:

$$I_{R1} = \frac{V_B}{R_1}, \quad I_{R2} = \frac{V_B}{R_2}, \quad I_{R3} = \frac{V_B}{R_3}, \quad \ldots$$

Y la suma de todas las corrientes es igual a la total que entrega el generador (ley de Kirchhoff): $I_T = I_{R1} + I_{R2} + I_{R3} + \ldots$

Circuitos mixtos: Son circuitos en los cuales se combinan los dos tipos de montajes fundamentales: el serie y el paralelo. Su análisis se basa en descomponerlos en sus circuitos básicos serie y paralelo.

Nudo: En un circuito, *un nudo es un punto de unión donde concurren varias corrientes;* normalmente, es la unión de más de dos conductores.

Rama: *Una rama es el conjunto de componentes que se encuentran entre dos nudos consecutivos.*

Malla: *Es el conjunto de ramas que forman un circuito cerrado.*

Leyes de Kirchhoff: Estas leyes se basan en dos principios:

Ley de los nudos: La suma de las corrientes que entran en un nudo es igual a la suma de las corrientes que salen: $\Sigma I_{entrada} = \Sigma I_{salida}$.

Ley de las mallas: En toda malla, *la suma algebraica de todas las ff.ee.mm. aplicadas es igual a la suma algebraica de todas las caídas de tensión que se producen en las resistencias de dicha malla:* Σ **f.e.m.** $= \Sigma \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{R}$.

Corriente de malla: Corriente que circula por todos los componentes de una malla. Si por un componente circula más de una corriente de malla, su valor efectivo es la suma algebraica de las corrientes que circulen; corrientes en el mismo sentido se suman y en sentido contrario se restan.

Teorema de Thévenin: *El conjunto de componentes entre dos puntos de un circuito, en el cual pueden encontrarse diversos generadores y resistencias, tiene por equivalente un circuito compuesto por un solo generador con una resistencia en serie.*

Trabajo mecánico: En principio, para hacer trabajo se necesita energía; por ello, trabajo y energía son términos semejantes y se indican con la misma unidad: julio. Matemáticamente, el trabajo mecánico se puede expresar por:

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e} = (m \cdot a)\, e$$

siendo:
W = trabajo realizado
F = fuerza aplicada
e = espacio recorrido
a = aceleración

Así, se puede entender por trabajo mecánico el *efecto de movimiento a que puede dar lugar una fuerza, de manera que una cierta masa* (m) *adquiere una cierta aceleración* (a) *y, en consecuencia, realiza un desplazamiento* (e)*.*

Trabajo eléctrico: Para que se produzca una corriente eléctrica, que es un desplazamiento de cargas eléctricas, también se precisa de una fuerza, que se denomina tensión. *Se realiza el trabajo de un julio si se hace mover la carga eléctrica de un culombio entre dos puntos cuya d.d.p. es de un voltio:*

$$W = V \cdot q \Rightarrow 1 \text{ julio} = 1 \text{ voltio} \times 1 \text{ culombio}$$

Y como 1 culombio = 1 amperio × 1 segundo, también se puede poner:

$$W = V \cdot q = V(I \cdot t) \Rightarrow 1 \text{ J} = 1 \text{ V} \ (1 \text{ A} \times 1 \text{ s})$$

Potencia: En general, el concepto de potencia indica la realización de trabajo en la unidad de tiempo:

$$\text{potencia} = \frac{\text{trabajo}}{\text{tiempo}}$$

Es una expresión indicativa de la velocidad de realización del trabajo.

Potencia eléctrica: El concepto de potencia eléctrica da cuenta de la velocidad a la cual se hace el trabajo eléctrico. Como el trabajo eléctrico se puede expresar por:

$$W = V \cdot I \cdot t,$$

se obtiene:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{V \cdot I \cdot t}{t} \Rightarrow \boxed{P = V \cdot I}$$

Por medio de la ley de Ohm, la potencia también se puede expresar por:

$$P = I^2 \cdot R$$

$$P = \frac{V^2}{R}$$

Vatio (W): Es la unidad de potencia eléctrica. En general, *se obtiene la potencia de 1 vatio (1 W) si se realiza el trabajo de 1 julio por segundo:*

$$1\,\text{vatio} = \frac{1\,\text{julio}}{1\,\text{segundo}}$$

Eléctricamente, 1 vatio es la potencia a que da lugar la tensión de 1 voltio si circula la corriente de 1 amperio:

$$P = V \cdot I \Rightarrow 1\text{ W} = 1\text{ V} \times 1\text{ A}$$

Por ejemplo, si por una resistencia de 1 Ω circula 1 A, como su caída de tensión es de 1 A × 1 Ω = 1 V, la potencia disipada en la resistencia será de 1 W. Esto también se puede calcular por:

$$P = I^2 \cdot R = 1^2 \times 1 = 1\text{ W}$$

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{1^2}{1} = 1\text{W}$$

Caballo (CV): Es una unidad industrial para la expresión de la potencia: 1 CV≈ 736 W.

Ley de Joule: En general, al *efecto de emisión de energía calorífica debido al paso de la corriente se conoce por ley (o efecto) Joule*. La circulación de una intensidad de corriente en un conductor de resistencia R produce un efecto de calentamiento que es proporcional al valor de resistencia (R), al cuadrado del valor de la intensidad (I^2) y al tiempo (t). Teniendo en cuenta que 1 julio = = 0,24 calorías, la energía calorífica emitida por un conductor se puede expresar por:

$$\text{cal} = 0{,}24 \cdot R \cdot I^2 \cdot t$$

Caloría (cal): Es la *cantidad de calor necesaria para que 1 g de agua aumente su temperatura en 1ºC* (concretamente de 14,5 a 15,5ºC). La kilocaloría (kcal) son 1000 calorías.

Elevación de temperatura que adquiere un cuerpo: Conociendo lo que se denomina *calor específico* de un material, se puede calcular también la elevación de temperatura que adquiere un cuerpo en función de la cantidad de calorías aportadas. Se aplica la fórmula:

$$\text{cal} = c \cdot m \cdot \Delta T$$

siendo:

c = calor específico del material
m = masa del material
ΔT = incremento de temperatura
cal = calorías aportadas

El calor específico (c) *es la cantidad de calor necesaria para aumentar en 1ºC la masa de 1 g de una sustancia.*

Unidad de consumo de energía eléctrica: Basado en el concepto de potencia, el trabajo eléctrico viene dado, en general, por:

$$\text{Potencia}\,(P) = \frac{\text{trabajo}\,(W)}{\text{tiempo}\,(t)} \Rightarrow \text{trabajo eléctrico } (W) = P \cdot t$$

Y se obtiene la energía-trabajo de 1 julio para:

$$W = P \cdot t \Rightarrow 1 \text{ julio} = 1 \text{ vatio} \times 1 \text{ segundo}$$

La unidad de consumo de energía eléctrica normalmente utilizada es el ***kilovatio-hora (kWh),*** que es lo que miden los contadores de energía eléctrica:

$$1.000 \text{ Wh} = 1 \text{ kWh}$$

Y puesto que 1 julio = 1 vatio × 1 segundo y 1 hora son 60 × 60 = 3.600 segundos:

$$1 \text{ kWh} = 1.000 \times 3.600 = 3.600.000 \text{ julios}$$

Y como 1 julio = 0,24 cal:

$$1 \text{ kWh} = 864 \text{ kcal}$$

Rendimiento: *Es la relación que hay entre la energía efectiva disponible (de salida) y la energía empleada para ello (de entrada):*

$$\eta = \frac{\text{energía de salida}}{\text{energía de entrada}}$$

Puede indicarse por una fracción decimal o en porcentaje (%). Como, en la práctica, en todo proceso siempre se producen más o menos pérdidas, el rendimiento siempre es menor a 1 (o menor al 100%).

Respuestas a los ejercicios propuestos

CAPÍTULO 1

Ejercicio 1.1

La estructura del átomo se compone de **núcleo** (carga positiva) y **corteza** (carga negativa) (apartado 1.3, fig. 1.4). Y la partícula elemental que da origen a la corriente eléctrica es el **electrón;** mínima expresión de carga negativa.

Ejercicio 1.2

La corriente eléctrica se puede definir como: **un movimiento (circulación) ordenado (en un mismo sentido) de las partículas denominadas electrones.** Y para que esto se produzca es necesario que exista una fuerza, que se denomina **tensión** (voltaje).

Ejercicio 1.3

La unidad de carga eléctrica es el **culombio,** y su valor es:

$$1\ \mathrm{C} \approx 6{,}28 \cdot 10^{18}\ \text{electrones}$$

Ejercicio 1.4

Cuando un cuerpo, por la razón que sea, pierde electrones adquiere **carga positiva** (+), debido a que, entonces, tiene más cargas positivas elementales (protones) que cargas negativas (–) elementales (electrones).

Se denominan *iones* a los **átomos que dejan de ser neutros,** porque han perdido o ganado electrones.

Ejercicio 1.5

La fuerza entre los dos electrones, al ser cargas del mismo signo, negativas, es de **repulsión.** Si la distancia de separación es de $9{,}5 \cdot 10^{-11}$ m, por la ley de Coulomb, como la carga del electrón es $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C y en el vacío $K = 9 \cdot 10^9$, la fuerza será:

$$F = K\,\frac{q_1\ q_2}{d^2} \approx 9 \cdot 10^9 \times \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{(9{,}5 \cdot 10^{-11})^2} \approx 2{,}55 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{N}$$

Ejercicio 1.6

En los materiales **buenos conductores la corriente circula con facilidad,** y en los materiales **aislantes no puede circular la corriente.**

Ejercicio 1.7

El material normalmente utilizado para hacer los conductores de electricidad (cables, hilo) es el **cobre,** debido a su buena conductividad y relativo bajo costo.

Ejercicio 1.8

a) La intensidad eléctrica se define como: la **cantidad de carga eléctrica** (culombios) **que circula en la unidad de tiempo** (segundo): $I = q/t$.

b) La intensidad eléctrica se puede comparar al caudal de agua (litros/tiempo).

c) La unidad es el **amperio,** que es la circulación de 1 culombio por segundo.

Ejercicio 1.9

a) La tensión eléctrica es la **fuerza que hace que los electrones se muevan,** o sea, da lugar a la corriente.

b) La tensión eléctrica se puede comparar a la **fuerza, o presión,** que hace que el agua circule por las tuberías.

c) Su unidad es el **voltio.**

d) Se obtiene mediante los **generadores de electricidad** (pila, batería, alternador, etc.).

Ejercicio 1.10

En el **sentido real** de la electricidad (sentido electrónico) la corriente circula de **negativo a positivo** (los electrones tienden a moverse hacia la carga positiva). Y el **sentido convencional** es al contrario, circulación de **positivo a negativo.**

Ejercicio 1.11

La corriente continua (c.c.) circula siempre en un mismo sentido, tiene polaridad. Y **en la corriente alterna (c.a.), el sentido de circulación va cambiando periódicamente,** no tiene polaridad.

Ejercicio 1.12

Si circula una intensidad de 350 mA, la cantidad de culombios que circulan por segundo es:

En principio, la conversión de miliamperios a amperios es:

$$1 \text{ mA} = 0{,}001 \text{ A} \Rightarrow 350 \text{ mA} = 0{,}001 \times 350 = 0{,}35 \text{ A}$$

De la expresión de la intensidad, se obtiene:

$$I = \frac{q}{t} \Rightarrow q = I \cdot t = 0{,}35 \times 1 = 0{,}35 \text{ culombios}$$

CAPÍTULO 2

Ejercicio 2.1

Un circuito eléctrico es un conjunto de componentes cuya conexión forma un camino por donde puede circular la corriente (fig. 2.1).

Ejercicio 2.2

El efecto térmico de la corriente se aprovecha, por ejemplo, en las estufas y soldadores eléctricos.

Ejercicio 2.3

El efecto térmico de la corriente siempre se produce en mayor o menor magnitud cuando la corriente circula. En general, resulta no deseado siempre que no se quiere aprovechar, como ocurre, por ejemplo, en los televisores y ordenadores. Y en las líneas de una instalación, resulta en pérdidas de energía y hasta puede dar lugar a accidentes por incendio.

Ejercicio 2.4

La luz en las bombillas se produce por la incandescencia del filamento, debido a la elevada temperatura que alcanza (unos 2500ºC) al circular la corriente; se basa, por tanto, en un efecto térmico.

Ejercicio 2.5

Los transformadores y motores eléctricos funcionan debido al efecto magnético que produce la corriente cuando circula (fig. 2.13).

Ejercicio 2.6

Un galvanómetro es un instrumento de medida cuya aguja se mueve como reacción entre la fuerza magnética que se produce en una bobina al circular la corriente y la fuerza magnética de un imán fijo; opera bajo los mismos principios que el motor eléctrico. Su funcionamiento se basa, pues, en los efectos magnéticos de la corriente.

Ejercicio 2.7

Las dos aplicaciones fundamentales que tiene el galvanómetro son como amperímetro y como voltímetro.

Ejercicio 2.8

El amperímetro se debe conectar siempre en montaje serie con el circuito; o sea, se debe interrumpir (cortar) el circuito y conectar el amperímetro entre los dos puntos (fig. 2.16). Para que el amperímetro perturbe lo menos posible las características del circuito donde se conecta, interesa que su resistividad sea lo más baja posible.

Ejercicio 2.9

El voltímetro se debe conectar en montaje paralelo (fig. 2.20); o sea, entre los terminales del componente (o puntos del circuito) donde se quiere medir la tensión. La resistividad del voltímetro interesa que sea lo más alta posible, para que absorba la mínima corriente y así se perturbe lo menos posible las características del circuito a medir.

Ejercicio 2.10

En las mediciones con c.c. se debe tener en cuenta la polaridad. En los instrumentos de medida tipo galvanómetro, si los terminales (o puntas de prueba) se conectan de forma incorrecta, la aguja tiende a marcar hacia atrás. En el caso de los instrumentos digitales, esto no ocurre; simplemente en el valor indicado puede aparecer el signo de negativo (–).

CAPÍTULO 3

Ejercicio 3.1

El concepto de resistencia eléctrica se puede definir como: *la mayor o menor oposición que presentan los materiales al paso de la corriente eléctrica.* Su unidad es el *ohmio* (Ω).

Ejercicio 3.2

La resistencia que tiene un hilo de cobre de 8 metros de largo y de 2 mm de diámetro se calcula aplicando la fórmula:

$$R = \rho \, \frac{l}{S}$$

Un diámetro, D, de 2 mm equivale a una sección, S, de:

$$S = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = 3{,}14 \times \left(\frac{2}{2}\right)^2 \approx 3{,}14 \, \text{mm}^2$$

Y puesto que el coeficiente de resistividad del cobre es: $\rho = 0{,}0175$, se obtiene:

$$R = \rho \, \frac{l}{S} = 0{,}0175 \times \frac{8}{3{,}14} \approx 0{,}045 \, \Omega$$

Ejercicio 3.3

En general, *en las líneas de conducción eléctrica se produce un aumento de su resistividad cuando se calientan.* En el caso de los semiconductores (material con que se fabrican los componentes electrónicos), ocurre al contrario: su resistividad disminuye al aumentar la temperatura.

Ejercicio 3.4

La conductancia es el inverso de la resistencia, es decir, *la mayor o menor facilidad que tienen los materiales para dejar pasar la corriente eléctrica.* Su unidad es el *siemens*.

Ejercicio 3.5

En general, *en los aparatos eléctricos el consumo disminuye cuando llevan un cierto tiempo funcionando debido a que los conductores (filamento, resistencias) se calientan*, y el aumento de su resistividad hace que disminuya la intensidad.

Ejercicio 3.6

Si un hilo de cobre tiene 2 Ω a la temperatura de 25ºC, a la temperatura de 50ºC, su valor de resistencia será:

Variación de temperatura: $\Delta T = 50 - 25 = 25$ºC.

Coeficiente de temperatura del cobre: $\alpha = 0{,}00393$.

$$R_C = R_f\,(1 + \alpha\,\Delta T) = 2\,(1 + 0{,}00393 \times 25) \approx 2{,}197\ \Omega$$

Ejercicio 3.7

Las expresiones 1,2 K, 4K7 y 1M5 indican:

1,2 K = 1200 Ω

4K7 = 4700 Ω

1M5 = 1.500.000 Ω

La codificación de colores para indicar un valor 3,9 Ω con una tolerancia del 10% es la representada en la figura R3.1:

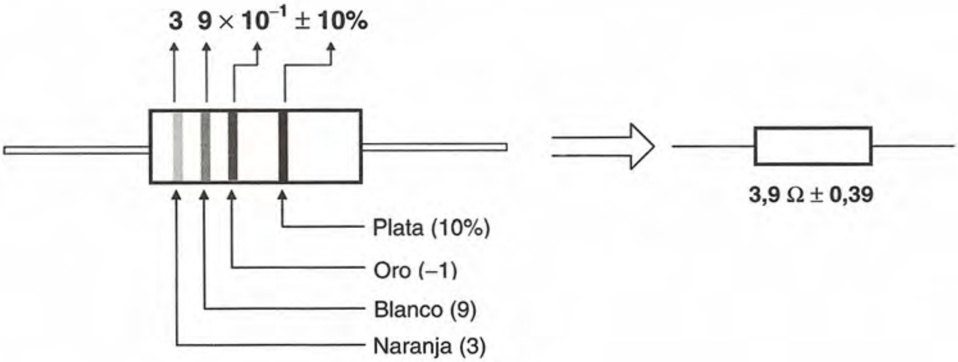


Figura R3.1

Ejercicio 3.8

La codificación de colores de la resistencia de la figura 3.23 indica un valor de 1000 Ω con una tolerancia del 5% (fig. R3.2). Como el 5% de 1000 es 50, el valor de la resistencia se debe encontrar en el margen:

$$R_{\text{mín}} = 1000 - 50 = 950\ \Omega$$

$$R_{\text{máx}} = 1000 + 50 = 1050\ \Omega$$

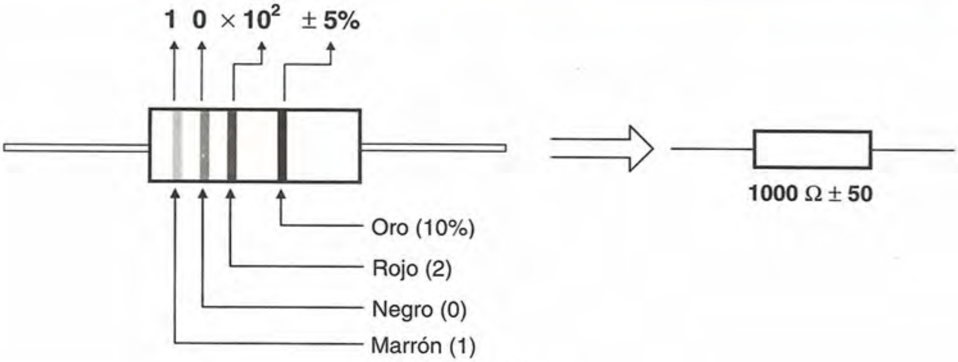


Figura R3.2

Ejercicio 3.9

En el montaje serie (fig. 3.24*a*), el valor que se obtiene es:

$$R_T = 12 + 82 + 56 + 47 = 197\ \Omega$$

Y en el montaje paralelo (fig. 3.24*b*):

$$R_T = \frac{1}{\frac{1}{47}+\frac{1}{56}+\frac{1}{91}+\frac{1}{33}} \approx 12{,}43\ \Omega$$

Ejercicio 3.10

Cuando en el montaje paralelo todas las resistencias son del mismo valor, el valor total se obtiene dividiendo el valor de una de ellas entre el número de resistencias conectadas:

$$R_T = \frac{R}{n} = \frac{200}{10} = 20\ \Omega$$

CAPÍTULO 4

Ejercicio 4.1

Basándonos en la ley de Ohm, un amperio (1 A) es la intensidad que circula por una resistencia de 1 Ω a la que se aplica 1 V entre sus terminales.

Ejercicio 4.2

Por aplicación directa de la ley de Ohm, se obtiene:

a) $I = \frac{V}{R} = \frac{12\ \text{V}}{10\ \Omega} = 1{,}2\ \text{A}$

b) $V = I\ R = 2\ \text{A} \times 5\ \Omega = 10\ \text{V}$

c) Como 100 mA = 0,1 A $\Rightarrow$ $R = \dfrac{V}{I} = \dfrac{6\,\text{V}}{0{,}1\,\text{A}} = 60\,\Omega$

Ejercicio 4.3

La caída de tensión en una resistencia es el voltaje que aparece entre sus terminales cuando por ella circula una corriente.

Ejercicio 4.4

Diferencia de potencial (d.d.p.) es, en general, la tensión que se puede medir entre dos puntos cualesquiera de un circuito; es, por ejemplo, la caída de tensión en una resistencia.

Ejercicio 4.5

En el circuito de la figura 4.25*a* se observa que un terminal de la resistencia se encuentra a un potencial de + 6 V y el otro terminal a – 6 V; o sea, entre sus terminales existe una diferencia de potencial de 6 – (–6) = 6 + 6 = 12 V. Por tanto, por ella circulará una corriente de:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{12\,\text{V}}{3\,\Omega} = 4\,\text{A}$$

Y aplicando el mismo razonamiento al circuito de la figura 4.25*b*, como la diferencia de potencial a que se encuentra el montaje serie de las dos resistencias es de 12 – 6 = 6 V, la corriente que circulará por ellas y su caída de tensión serán:

$$I = \frac{V}{R_1 + R_2} = \frac{6}{2+3} = 1{,}2\,\text{A}$$

$$V_{R1} = I\ R_1 = 1{,}2 \times 2 = 2{,}4\,\text{V}$$

$$V_{R2} = I\ R_2 = 1{,}2 \times 3 = 3{,}6\,\text{V}$$

Ejercicio 4.6

Como que la batería es de V_B = 12 V y la lamparita tiene que recibir una tensión de 6 V, es cuestión de poner en serie con la lamparita una resistencia en

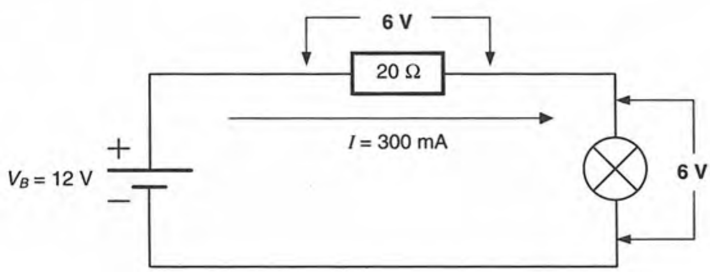


Figura R4.1. *Circuito del resultado del ejercicio 4.6.*

la cual se produzca una caída de tensión de 6 V (fig. R4.1). Si la corriente por la lamparita es de 300 mA, al ser un montaje serie, este valor de corriente circulará también por la resistencia. Por tanto, el valor de la resistencia debe ser:

$$\text{Como } 300\text{ mA} = 0{,}3\text{ A} \Rightarrow \quad R = \frac{V}{I} = \frac{6\text{ V}}{0{,}3\text{ A}} = 20\,\Omega$$

Ejercicio 4.7

El valor total de las tres resistencias en serie (fig. 4.26) es:

$$R_T = 60 + 40 + 100 = 200\ \Omega$$

Y el valor de la intensidad que entregará la fuente de tensión, V_B, será pues:

$$I_T = \frac{V_B}{R_T} = \frac{20}{200} = 0{,}1\text{ A}$$

Como es un montaje serie, por las tres resistencias circulará este valor de corriente, y las caídas de tensión serán:

$$V_{R1} = R_1\, I_T = 60 \times 0{,}1 = 6\text{ V}$$

$$V_{R2} = R_2\, I_T = 40 \times 0{,}1 = 4\text{ V}$$

$$V_{R3} = R_3\, I_T = 100 \times 0{,}1 = 10\text{ V}$$

Ejercicio 4.8

La corriente total, I_T, que entregará la fuente de tensión V_B (fig. 4.27) se puede hallar calculando la resistencia total y aplicando la ley de Ohm:

$$R_T = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}} \approx 1{,}053\,\Omega$$

$$I_T = \frac{V_B}{R_T} = \frac{10}{1{,}053} = 9{,}5\text{ A}$$

Otra forma de hallar este resultado es calculando las corrientes parciales y sumándolas:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_B}{R_1} = \frac{10}{4} = 2{,}5\text{ A} \\ I_2 &= \frac{V_B}{R_2} = \frac{10}{2} = 5\text{ A} \\ I_3 &= \frac{V_B}{R_3} = \frac{10}{5} = 2\text{ A} \end{aligned}\right\} \Rightarrow I_T = I_1 + I_2 + I_3 = 2{,}5 + 5 + 2 = 9{,}5\text{ A}$$

Ejercicio 4.9

Por simple observación del circuito de la figura 4.28, se deduce que la diferencia de potencial a que se encuentra el montaje de las resistencias es de 0 V, ya que ambos extremos se encuentran al mismo potencial; d.d.p.= = 12 V −12 V = 0 V. Por tanto, la corriente por el circuito es 0 y $V_{R2} = 0$ V.

Ejercicio 4.10

Los valores de tensión y corriente que se obtienen en el circuito mixto de la figura 4.29, son:

En la rama compuesta por el montaje serie de R_5 y R_6 tenemos:

$$R_5+R_6 = 10+12 = 22\ \Omega$$

Por tanto, las corrientes y caídas de tensión en R_5 y R_6 son:

$$I_5 = I_6 = \frac{V_B}{R_5 + R_6} = \frac{10}{22} = 0{,}455\ \text{A}$$

$$V_{R5} = R_5\, I_5 = 10 \times 0{,}455 = 4{,}55\ \text{V}$$

$$V_{R6} = R_6\, I_6 = 12 \times 0{,}455 = 5{,}455\ \text{V}$$

En la otra rama, se deduce que la resistencia e intensidad totales son:

$$R_1 + \frac{R_2\, R_3}{R_2 + R_3} + R_4 = 4{,}7 + \frac{9{,}1 \times 4{,}7}{9{,}1 + 4{,}7} + 2{,}2 = 10\,\Omega \;\Rightarrow\; I = \frac{10}{10} = 1\ \text{A}$$

Y de la estructura del montaje también se deduce que: $I_{R1} = I_{R4} = I_{(R2\,||\,R3)}$. Por tanto:

$$I_{R1} = 1\ \text{A}$$
$$I_{R4} = 1\ \text{A}$$
$$I_{(R2\,||\,R3)} = 1\ \text{A}$$

Así pues, se obtiene que las caídas de tensión en R_1 y R_4 son:

$$V_{R1} = R_1\, I_1 = 4{,}7 \times 1 = 4{,}7\ \text{V}$$

$$V_{R4} = R_4\, I_4 = 2{,}2 \times 1 = 2{,}2\ \text{V}$$

En el montaje paralelo de R_2 y R_3 ($R_2 || R_3$), que también es recorrido por 1 A:

$$V_{R2} = V_{R3} = \frac{R_2\, R_3}{R_2 + R_3}\, I_{(R2\,||\,R3)} = \frac{9{,}1 \times 4{,}7}{9{,}1 + 4{,}7} \times 1 \approx 3{,}1\text{V}$$

Así, puesto que se conoce la tensión en las resistencias R_2 y R_3, su corriente es:

$$I_{R2} = \frac{V_{R2}}{R_2} = \frac{3{,}1}{9{,}1} = 0{,}341\ \text{A}$$

$$I_{R3} = \frac{V_{R3}}{R_3} = \frac{3{,}1}{4{,}7} = 0{,}66 \text{ A}$$

Como se comprueba, la suma de las corrientes por R_2 y R_3 coincide con la corriente por R_1 (o R_4): $I_{R2} + I_{R3} =$ 0,34 A + 0,66 A = 1 A.

CAPÍTULO 5

Ejercicio 5.1

Cálculo por Kirchhoff de las corrientes y caídas de tensión del circuito de la figura 5.36.

Ecuación de las corrientes de nudo (fig. 5.36):

$$\boldsymbol{I_3 = I_1 + I_2}$$

Ecuaciones de malla:

En la malla compuesta por E_1, R_2, E_2 y R_1, tomando el generador E_1 como sentido de referencia de recorrido de la malla, se deduce:

$$E_1 - E_2 = -R_2 I_2 + R_1 I_1 \Rightarrow 12 - 9 = -I_2 + 0{,}5\, I_1 \Rightarrow 3 = 0{,}5\, I_1 - I_2$$

En la malla compuesta por E_2, R_2, R_3:

$$E_2 = R_2 I_2 + R_3 I_3 \Rightarrow 9 = I_2 + 10\, I_3$$

Sustituyendo la expresión $I_3 = I_1 + I_2$ por I_3, se obtiene:

$$9 = I_2 + 10\, I_3 = I_2 + 10\,(I_1 + I_2) = I_2 + 10\, I_1 + 10\, I_2 = 10\, I_1 + 11\, I_2$$

Se llega así al sistema de ecuaciones:

$$0{,}5\, I_1 - I_2 = 3$$

$$10\, I_1 + 11\, I_2 = 9$$

Aplicando determinantes se hallan los valores de I_1 e I_2:

$$I_1 = \frac{\Delta I_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0{,}5 & -1 \\ 10 & 11 \end{vmatrix}} = \frac{33-(-9)}{5{,}5-(-10)} = \frac{42}{15{,}5} = 2{,}71 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\Delta I_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 0{,}5 & 3 \\ 10 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0{,}5 & -1 \\ 10 & 11 \end{vmatrix}} = \frac{4{,}5-30}{5{,}5-(-10)} = \frac{-25{,}5}{15{,}5} = -1{,}645 \text{ A}$$

El valor de I_2 aparece con signo negativo porque dicha corriente circula en sentido contrario al asignado en el esquema de la figura 5.36. Y el valor de I_3 será, pues:

$$I_3 = I_1 + I_2 = 2{,}71 + (-1{,}645) = 1{,}065 \text{ A}$$

En la figura R5.1 se muestra el esquema del circuito con los valores calculados y sentidos reales de las corrientes.

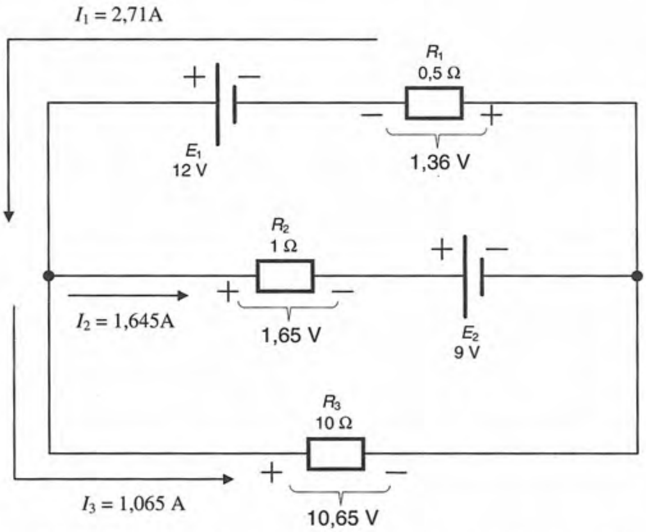


Figura R5.1. *Circuito del ejercicio 5.1, con los resultados obtenidos.*

En general, cuando algún resultado aparece con signo negativo éste se debe tomar en sentido contrario. En este caso, si en el planteamiento de las corrientes de nudo se hubiera tomado I_2 en el sentido que se muestra en el circuito de la figura R5.1, no hubiera salido I_2 con signo negativo, como se comprueba a continuación:

Ecuación del nudo (fig. R5.1):

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Ecuaciones de malla:

Malla compuesta por E_1, R_2, E_2 y R_1:

$$E_1 - E_2 = R_2\, I_2 + R_1\, I_1 \;\Rightarrow\; 12 - 9 = I_2 + 0{,}5\, I_1 \;\Rightarrow\; 3 = 0{,}5\, I_1 + I_2$$

En la malla E_2, R_2, R_3:

$$E_2 = -R_2\, I_2 + R_3\, I_3 \Rightarrow 9 = -I_2 + 10\, I_3$$

De la primera ecuación, $I_1 = I_2 + I_3$, se deduce que $I_3 = I_1 - I_2$; sustituyendo esta expresión por I_3 en la tercera ecuación, se obtiene:

$$9 = -I_2 + 10\, I_3 = -I_2 + 10\,(I_1 - I_2) = -I_2 + 10\, I_1 - 10\, I_2 = 10\, I_1 - 11\, I_2$$

Se obtiene así el sistema de ecuaciones:

$$0{,}5\, I_1 + I_2 = 3$$

$$10\, I_1 - 11\, I_2 = 9$$

El valor de I_2 que se obtiene es:

$$I_2 = \frac{\Delta I_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 0{,}5 & 3 \\ 10 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0{,}5 & 1 \\ 10 & -11 \end{vmatrix}} = \frac{4{,}5-30}{-5{,}5-10} = \frac{-25{,}5}{-15{,}5} = 1{,}645\,\text{A}$$

Como se comprueba, aparece la misma magnitud pero con signo positivo, puesto que I_2 se ha planteado con el correcto sentido de corriente. Si se calculan los valores de I_1 e I_3, aparecen con la misma magnitud y signo anterior.

Ejercicio 5.2

En principio, aunque este problema puede parecer sencillo no puede resolverse simplemente aplicando la ley de Ohm y los conceptos de serie-paralelo.

Como R_5 está recorrida por dos corrientes de malla (I_1 e I_2) de sentido contrario, el valor de I_{R5} vendrá dado por la diferencia: $I_{R5} = I_1 - I_2$.

A partir de la asignación de los sentidos de corrientes de malla (fig. 5.37), se deducen las ecuaciones de malla.

Para la malla de I_1:

En esta malla no aparece ningún generador, siendo, por tanto, su expresión:

$$0 = R_1 I_1 - R_1 I_3 + R_3 I_1 + R_5 I_1 - R_5 I_2 = (R_1 + R_3 + R_5)\, I_1 - R_1 I_3 - R_5 I_2 =$$
$$= (33 + 91 + 1000)\, I_1 - 33\, I_3 - 1000\, I_2 \Rightarrow 0 = 1124\, I_1 - 1000\, I_2 - 33\, I_3$$

Para la malla I_2:

Tampoco aparece ningún generador en esta malla:

$$0 = R_2 I_2 - R_2 I_3 + R_5 I_2 - R_5 I_1 + R_4 I_2 = (R_2 + R_5 + R_4)\, I_2 - R_2 I_3 - R_5 I_1 =$$
$$= (47 + 1000 + 200)\, I_2 - 47\, I_3 - 1000\, I_1 \Rightarrow 0 = -1000\, I_1 + 1247\, I_2 - 47\, I_3$$

Para la malla I_3:

$$E = R_1 I_3 - R_1 I_1 + R_2 I_3 - R_2 I_2 = (R_1 + R_2)\, I_3 - R_1 I_1 - R_2 I_2 =$$
$$= (33 + 47)\, I_3 - 33\, I_1 - 47\, I_2 \Rightarrow 10 = -33\, I_1 - 47\, I_2 + 80\, I_3$$

Se obtiene así el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\boxed{\begin{array}{rrrl} 1124\, I_1 & -1000\, I_2 & -33\, I_3 & = 0 \\ -1000\, I_1 & +1247\, I_2 & -47\, I_3 & = 0 \\ -33\, I_1 & -47\, I_2 & +80\, I_3 & = 10 \end{array}}$$

Aplicando determinantes de tercer orden, tenemos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1124 & -1000 & -33 \\ -1000 & 1247 & -47 \\ -33 & -47 & 80 \end{vmatrix} = 109.028.240 - 83.840.899 = 25.187.341$$

$$\Delta I_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1000 & -33 \\ 0 & 1247 & -47 \\ 10 & -47 & 80 \end{vmatrix} = 470.000 - (-411.510) = 881.510$$

$$\Delta I_2 = \begin{vmatrix} 1124 & 0 & -33 \\ -1000 & 0 & -47 \\ -33 & 10 & 80 \end{vmatrix} = 330.000 - (-528.280) = 858.280$$

Los valores de I_1 e I_2 que se obtienen son:

$$I_1 = \frac{\Delta I_1}{\Delta} = \frac{881.510}{25.187.341} = 0{,}035\,\mathrm{A}$$

$$I_2 = \frac{\Delta I_2}{\Delta} = \frac{858.280}{25.187.341} = 0{,}0341\,\mathrm{A}$$

De estos valores se obtiene el valor de I_{R5}, que viene dado por:

$$I_{R5} = I_1 - I_2 = 0{,}035 - 0{,}0341 = 0{,}000924\ \mathrm{A} = 924\ \mu\mathrm{A}$$

Podemos comprobar el resultado verificando que se cumple:

$$E = V_{R3} + V_{R4}$$

Como:

$$\left.\begin{array}{l} V_{R3} = R_3\, I_1 = 91 \times 0{,}035 = 3{,}185\ \mathrm{V} \\ V_{R4} = R_4\, I_2 = 200 \times 0{,}0341 = 6{,}82\ \mathrm{V} \end{array}\right\} \Rightarrow E = V_{R3} + V_{R4} \Rightarrow 10 = 3{,}185 + 6{,}82$$

Ejercicio 5.3

Este circuito (fig. 5.11) ya ha sido resuelto por Kirchhoff (ejercicio 5.2.4.2) y por Maxwell (ejercicio 5.3.2.2), por lo cual resulta interesante hacerlo ahora por Thévenin a nivel comparativo.

Cálculo de la tensión V_{TH}:

Suponiendo R_3 suprimida (carga desconectada), se deduce que la tensión que se mediría entre los puntos A y B es:

$$V_{AB} = E_2 - V_{R2} = E_2 - (R_2 I)$$

siendo el valor de la corriente: $$I = \frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2} = \frac{20 - 10}{2 + 3} = 2\,\mathrm{A}$$

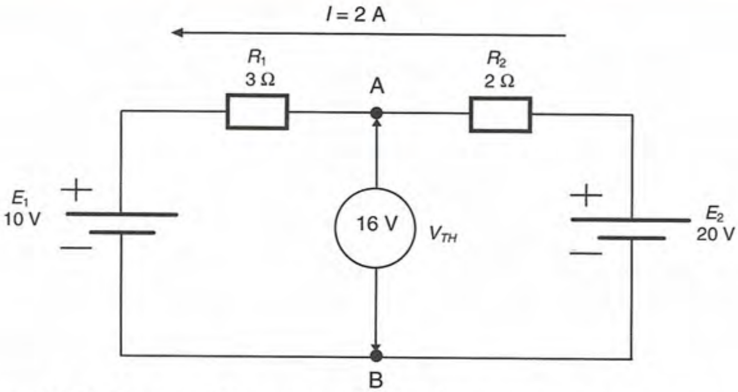


Figura R5.2. *Circuito del ejercicio 5.3, con la tensión Thévenin que se obtiene.*

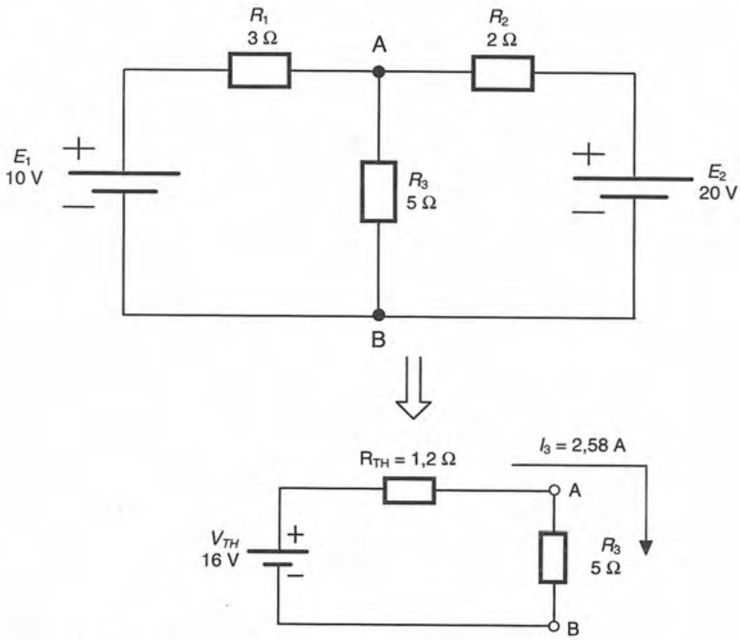


Figura R5.3. *Del equivalente de Thévenin que se obtiene, se halla que la corriente por R_3 es de 2,58 A.*

Por tanto (fig. R5.2):

$$V_{AB} = 20 - (2 \times 2) = 16 \text{ V}$$

Cálculo del valor de R_{TH}:

Suponiendo R_3 suprimida y los generadores cortocircuitados ($E = 0$ V), es fácil deducir que el valor de resistencia que se mediría entre los puntos A y B sería:

$$R_{AB} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2 \times 3}{2+3} = 1{,}2\,\Omega$$

Así, pues, el circuito de Thévenin equivalente es el que se representa en la figura R5.3. Y de aquí se obtiene que el valor de la corriente a través de R_3 será:

$$I_{R3} = \frac{V_{TH}}{R_{TH} + R_3} = \frac{16}{1{,}2+5} = 2{,}58\,\text{A}$$

Dicho resultado, como debe ser, coincide con el obtenido en los desarrollos por Kirchhoff y Maxwell.

Sabiendo que $I_{R3} = 2{,}58$ A, se pueden deducir el resto de datos:

Tensión en la resistencia R_3 (V_{R3}):

$$V_{R3} = I_{R3}\, R_3 = 2{,}58 \times 5 = 12{,}9\ \text{V}$$

Y de ello se deducen las tensiones y corrientes existentes en R_1 y R_2:

$$V_{R1} = V_{R3} - E_1 = 12{,}9 - 10 = 2{,}9\ \text{V} \Rightarrow I_{R1} = \frac{V_{R1}}{R_1} = \frac{2{,}9}{3} = 0{,}967\,\text{A}$$

$$V_{R2} = E_2 - V_{R3} = 20 - 12{,}9 = 7{,}1\ \text{V} \Rightarrow I_{R2} = \frac{V_{R2}}{R_2} = \frac{7{,}1}{2} = 3{,}55\,\text{A}$$

Valores que coinciden todos con los obtenidos en los desarrollos por Kirchhoff y Maxwell (fig. 5.14).

Ejercicio 5.4

Este ejercicio ya ha sido resuelto por el método de Maxwell, en el apartado 5.3.2 (ejercicio desarrollado 5.3.2.3). Ahora, a nivel comparativo, resulta interesante su cálculo aplicando el método de Thévenin.

Cálculo de la tensión Thévenin:

En el circuito de la figura 5.21, suponiendo la resistencia de carga (R_L) desconectada, se calcula que la tensión que habrá entre los terminales de salida será:

$$V_{TH} = E_1 - V_{R1} = E_2 + V_{R2}$$

Y como, en este caso, la corriente que circularía (entre los dos generadores) es:

$$I_{R1} = I_{R2} = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} = \frac{14-12}{0{,}5+1} \approx 1{,}33\,\text{A}$$

Entonces, la caída de tensión en R_1 es:

$$V_{R1} = I_{R1}\, R_1 = 1{,}33 \times 0{,}5 \approx 0{,}67\ \text{V}$$

Por tanto, la tensión entre los terminales de salida (con R_L desconectada), *tensión Thévenin*, será:

$$V_{TH} = E_1 - V_{R1} = 14 - 0{,}67 = 13{,}33 \text{ V}$$

En un montaje práctico, este es el valor de tensión que se mediría con el voltímetro.

Cálculo de la resistencia Thévenin:

Suponiendo nula la tensión de los generadores ($E = 0$ V), cortocircuitados, la resistencia que se calcula que habrá entre los terminales de salida (con la R_L desconectada) es el paralelo de R_1 y R_2 :

$$R_{TH} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} = \frac{0{,}5 \times 1}{0{,}5 + 1} = 0{,}33\ \Omega$$

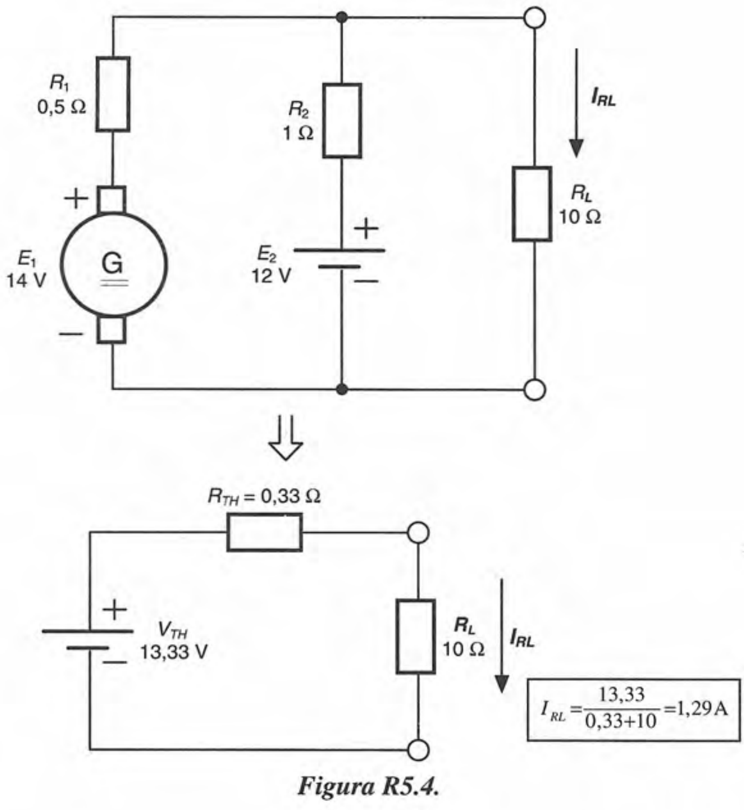


Figura R5.4.

Así, pues, conocido el equivalente de Thévenin (fig. R.5.4), se obtiene que la corriente y tensión en la resistencia de carga es:

$$I_{RL} = \frac{V_{TH}}{R_{TH} + R_L} = \frac{13{,}33}{0{,}33 + 10} = 1{,}29 \text{ A} \Rightarrow V_{RL} = R_L\ I_{RL} = 10 \times 1{,}29 = 12{,}9 \text{ V}$$

Y de este dato se deduce la corriente por el generador E_1. Si en los terminales de salida (V_{RL}) hay 12,9 V y E_1 = 14 V, la caída de tensión en R_1 es:

$$V_{R1} = E_1 - V_{RL} = 14 - 12{,}9 = 1{,}1 \text{ V}$$

Por tanto, la corriente que circula por E_1 es:

$$I_{E1} = I_{R1} = \frac{V_{R1}}{R_1} = \frac{1{,}1}{0{,}5} = 2{,}2 \text{ A}$$

Y de forma análoga, se deduce la corriente que circula por E_2:

$$V_{R2} = V_{RL} - E_2 = 12{,}9 - 12 = 0{,}9 \text{ V} \quad \Rightarrow I_{E2} = \frac{V_{R2}}{R_2} = \frac{0{,}9}{1} = 0{,}9 \text{ A}$$

O sea, se obtienen los mismos resultados que en el desarrollo por Maxwell (figura 5.22).

Ejercicio 5.5

Este circuito (fig. 5.11) ya ha sido calculado por Kirchhoff (ejercicio desarrollado 5.2.4.2), por Maxwell (ejercicio desarrollado 5.3.2.2) y por Thévenin (respuesta al ejercicio propuesto 5.3). Ahora se expone su cálculo por el método de Millman; así, el estudiante podrá sacar conclusiones comparativas sobre estos métodos de cálculo.

Puede tomarse el circuito como dos fuentes de tensión alimentando a la resistencia R_3. Por tanto, aplicando las fórmulas de Millman, tenemos:

$$V_M = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{\frac{10}{3} + \frac{20}{2}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = \frac{13{,}33}{0{,}833} = 16 \text{ V}$$

$$R_M = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{0{,}833} = 1{,}2\,\Omega$$

Y la corriente y tensión en R_3 será, pues:

$$I_{R3} = \frac{V_M}{R_M + R_3} = \frac{16}{1{,}2 + 5} = 2{,}58 \text{ A} \Rightarrow V_{R3} = R_3 \; I_{R3} = 5 \times 2{,}58 = 12{,}9 \text{ V}$$

Y puesto que $V_{R3} = E_1 + V_{R1}$, se deduce que la tensión y corriente en R_1 es:

$$V_{R1} = V_{R3} - E_1 = 12{,}9 - 10 = 2{,}9 \text{ V} \Rightarrow I_{R1} = \frac{V_{R1}}{R_1} = \frac{2{,}9}{3} = 0{,}97 \text{ A}$$

Como que $V_{R1} > E_1$, la corriente circula entrando por el polo positivo de E_1 (el generador E_1 recibe corriente).

Por otra parte, como $V_{R3} = E_2 + V_{R2}$, la tensión y corriente en R_2 es:

$$V_{R2} = V_{R3} - E_2 = 12{,}9 - 20 = -7{,}1 \text{ V} \Rightarrow I_{R2} = \frac{V_{R2}}{R_2} = \frac{-7{,}1}{2} = -3{,}55 \text{ A}$$

Debido a que $V_{R3} < E_2$, el valor de V_{R2} e I_{R2} sale negativo; la corriente circula saliendo del polo positivo de E_2.

Se obtienen los mismos resultados (fig. 5.14) que en los desarrollos por los otros métodos.

CAPÍTULO 6

Ejercicio 6.1

Un julio es una unidad de energía. Eléctricamente, se puede definir como la energía necesaria para que la carga de un culombio se mueva entre dos puntos cuya diferencia de potencial es de 1 V:

$$W = q\,V \Rightarrow 1 \text{ julio} = 1 \text{ C} \times 1 \text{ V}$$

Ejercicio 6.2

En una resistencia de 10 Ω/2 W, la corriente máxima permisible se obtiene por:

$$P = I^2 \cdot R \Rightarrow I = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{2}{10}} \approx 0{,}447 \text{ A}$$

Ejercicio 6.3

Si en una bombilla conectada a 220 V se mide una corriente de 0,273 A, se deduce que su potencia es:

$$P = V \cdot I = 220 \times 0{,}273 = 60 \text{ W}$$

Ejercicio 6.4

Si en la batería la tensión es de 11 V y en el motor de arranque se mide una tensión de 10 V y una intensidad de 50 A, se supone que en la instalación se produce una caída de tensión de 11 – 10 = 1 V. Y si la corriente es de 50 A, en la instalación se produce una pérdida de potencia de: $P = V \cdot I = 1 \times 50 = 50$ W.

Ejercicio 6.5

Las calorías necesarias se obtienen por la fórmula:

$$\text{cal} = c \cdot m \cdot \Delta T$$

siendo:

$$c = 1 \text{ cal/g},\ m = 1.000 \text{ g} \ \text{ y } \ \Delta T = 90 - 25 = 65 \text{ºC}$$

Por tanto:

$$1 \times 1.000 \times 65 = 65.000 \text{ cal} = 65 \text{ kcal}$$

Y como 15 minutos = 15 × 60 = 900 segundos, la potencia necesaria es:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{65.000}{900} = 72{,}2 \text{ W}$$

Ejercicio 6.6

Como la potencia total de todos los aparatos es:

$$P_T = 30 + (4 \times 60) + 1.500 + 2.000 = 3.770 \text{ W}$$

la corriente de consumo será:

$$I_T = \frac{P_T}{V} = \frac{3.770}{220} \approx 17{,}14 \text{ A}$$

Ejercicio 6.7

Las kilocalorías que puede generar se obtienen mediante la fórmula:

$$\text{kcal} = \frac{0{,}24 \cdot P \cdot t}{1.000}$$

Como $P = 2.000$ W y $t = 7 \times 4 \times 60 \times 60 = 100.800$ s, se obtiene:

$$\text{kcal} = \frac{0{,}24 \cdot P \cdot t}{1000} = \frac{0{,}24 \times 2.000 \times 100.800}{1000} = 48.384 \text{ kcal}$$

Y la corriente de consumo será:

$$I = \frac{P}{V} = \frac{2.000}{220} \approx 9{,}09 \text{ A}$$

Ejercicio 6.8

El coste de la energía eléctrica es:

núm. de horas: 4 × 365 = 1.460 h

núm. de kW: $\dfrac{3 \times 60}{1.000} = 0{,}18 \text{ kWh}$

Si 1 kWh = 16 PTA, se obtiene:

coste = 0,18 × 1.460 × 16 = 4.205 PTA

Ejercicio 6.9

La potencia que suministrará la fuente de tensión V_B del circuito de la figura 6.7 se puede deducir rápidamente de la siguiente manera:

Como la resistencia total del circuito paralelo es:

$$R_T = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}} = \frac{1}{\frac{1}{30}+\frac{1}{20}+\frac{1}{50}} = 9{,}677\,\Omega$$

La potencia que entregará la fuente V_B se obtiene por la fórmula:

$$P_T = \frac{V_B^2}{R_T} = \frac{10^2}{9{,}677} = 10{,}33\,\mathrm{W}$$

Otra forma de hallar la potencia total, quizá más intuitiva, consiste en calcular la corriente por cada resistencia y aplicar la fórmula $P = I\,V$; la suma de todas las potencias es la potencia total. O sea:

$$I_1 = \frac{V_B}{R_1} = \frac{10}{30} = 0{,}33\,\mathrm{A} \Rightarrow P_{\mathrm{R1}} = I_1\,V_B = 0{,}33\times 10 = 3{,}33\,\mathrm{W}$$

$$I_2 = \frac{V_B}{R_2} = \frac{10}{20} = 0{,}5\,\mathrm{A} \Rightarrow P_{\mathrm{R2}} = I_2\,V_B = 0{,}5\times 10 = 5\,\mathrm{W}$$

$$I_3 = \frac{V_B}{R_3} = \frac{10}{50} = 0{,}2\,\mathrm{A} \Rightarrow P_{\mathrm{R3}} = I_3\,V_B = 0{,}2\times 10 = 2\,\mathrm{W}$$

Y como se comprueba, la suma de las tres potencias coincide con el resultado anterior:

$$P_T = P_{\mathrm{R1}} + P_{\mathrm{R2}} + P_{\mathrm{R3}} = 3{,}33 + 5 + 2 = 10{,}33\,\mathrm{W}$$

Ejercicio 6.10

La potencia en cada una de las resistencias del circuito de la figura 6.8 se puede hallar de la siguiente manera:

En primer lugar se calcula la resistencia total:

$$R_T = R_1 + \frac{R_2 \times R_3}{R_2 + R_3} + R_4 = 47 + \frac{91\cdot 47}{91+47} + 22 \approx 100\,\Omega$$

De aquí se halla la corriente total:

$$I_T = \frac{V_B}{R_T} = \frac{20\,\mathrm{V}}{100\,\Omega} = 0{,}2\,\mathrm{A}$$

Este es el valor de corriente que entregará el generador (V_B) y que circulará también por R_1, por el valor resultante de R_2 y R_3 en paralelo ($I_{R2 \parallel R3}$) y por R4:

$$I_T = I_{R1} = I_{R4} = I_{R2 \parallel R3} = 0{,}2 \text{ A}$$

Así, aplicando la fórmula $P = I^2\ R$ se puede obtener el valor de la potencia disipada en las resistencias R_1 y R_4:

$$P_{R1} = I_{R1}^2\ R = 0{,}2^2 \times 47 = 1{,}88 \text{ W}$$

$$P_{R4} = I_{R4}^2\ R = 0{,}2^2 \times 22 = 0{,}88 \text{ W}$$

Y como la tensión en el paralelo de R_2 y R_3 se deduce que es:

$$V_{R2} = V_{R3} = V_B - I_T\,(R_1 + R_4) = 20 - 0{,}2\,(47 + 22) = 6{,}2 \text{ V}$$

la potencia en las resistencias R_2 y R_3 es:

$$P_{R2} = \frac{V_{R2}^2}{R_2} = \frac{6{,}2^2}{91} = 0{,}42 \text{ W}$$

$$P_{R3} = \frac{V_{R3}^2}{R_3} = \frac{6{,}2^2}{47} = 0{,}82 \text{ W}$$

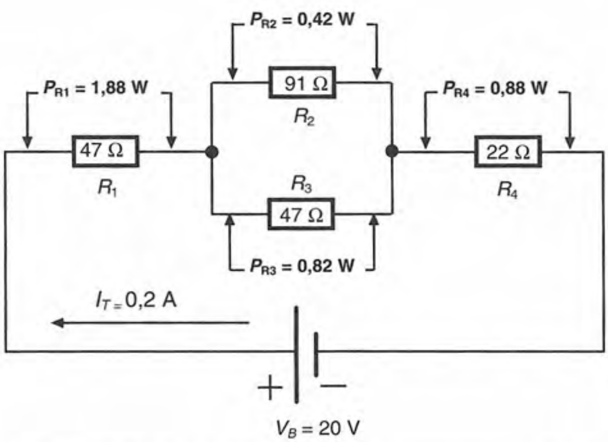


Figura R6.1. *Potencias disipadas en las resistencias.*

En la figura R6.1 se muestra el circuito con los valores calculados. Y como debe ser, la suma de todas las potencias es igual a la potencia total:

$$P_T = P_{R1} + P_{R2} + P_{R3} + P_{R4} = 1{,}88 + 0{,}42 + 0{,}82 + 0{,}88 = 4 \text{ W}$$

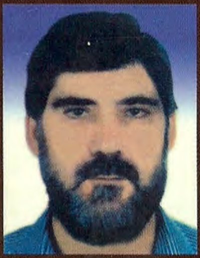
$$P_T = I_T\ V_B = 0{,}2 \times 20 = 4 \text{ W}$$

P30/E1/R1/02
Esta edición se terminó de imprimir en julio de 2002. Publicada por ALFAOMEGA GRUPO EDITOR, S.A. de C.V. Apartado Postal 73-267, 03311, México, D.F. La impresión se realizó en SERVICIOS LITOGRAFICOS ULTRASOL, Fiscales No. 43, Col. Sifón, 09400, México, D. F.

PRINCIPIOS DE ELECTRICIDAD Y ELECTRONICA I

La materia que se expone en esta obra constituye los principios fundamentales de la electricidad y proporciona una introducción a la electrónica. En este primer tomo de la serie se explican principios de la electricidad (que también lo son de la electrónica) tales como corriente, tensión, resistencia, potencia, circuitos, leyes de Ohm, Kirchhoff, Thévenin, etc. El nivel técnico es básico/medio, procurando alcanzar un máximo nivel didáctico y un buen enfoque práctico. Estas características hacen que el libro resulte de especial interés en los estudios de formación técnica profesional en general, así como a todo aquel interesado en las bases de la electricidad y electrónica.

EL AUTOR:



Antonio Hermosa Donate es Técnico Superior en la especialidad de Sistemas Automáticos, por la E.I.B. Asimismo ha cursado estudios de ingeniería electrónica, así como cursos de extensión sobre técnicas digitales y microprocesadores en la UPC. También ha sido formado en robótica industrial y electrónica de potencia por la General Motors (España y Alemania).

Ha sido jefe del laboratorio de electrónica en IME, S.A. (1974) y director técnico en EUREL, S.A. (1977), donde diseñó varios modelos de órganos electrónicos. Asimismo ha trabajado en robótica industrial y control de procesos para la General Motors, hasta 1982. Desde entonces se dedica a la enseñanza técnica profesional como profesor de electrónica, actividad que combina con la realización de proyectos para la industria y asesoría técnica en el sector de nuevas tecnologías. En 1980 recibió el Premio Mundo Electrónico concedido al mejor libro de electrónica de afición. Es autor de diversos artículos técnicos y de varios libros sobre electrónica.

Diseño de la cubierta: Javier Perdomo M.

ISBN 970-15-0489-5

9 789701 504895

Alfaomega Grupo Editor