



Jaime García

Matemáticas Financieras

con ecuaciones de diferencia finita

Quinta edición



PEARSON
Prentice
Hall

Matemáticas financieras

con ecuaciones de diferencia finita

Matemáticas financieras

con ecuaciones de diferencia finita

QUINTA EDICIÓN

JAIME A. GARCÍA

*Director del Departamento de Matemáticas
Universidad Colegio Mayor de Nuestra Señora del Rosario*



Colombia • Argentina • Bolivia • Brasil • Costa Rica • Chile • Ecuador
El Salvador • España • Guatemala • Honduras • México • Nicaragua • Panamá
Paraguay • Perú • Puerto Rico • República Dominicana • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

GARCÍA, JAIME A.

Matemáticas financieras
con ecuaciones de diferencia finita. --5ta edición--
Pearson Educación de Colombia, Ltda, 2008

360 p.; 21 x 27 cm

ISBN: 978-958-699-100-1

1. Matemáticas financieras --

Editora: María Fernanda Castillo
fernanda.castillo@pearsoned.com.pe

Corrección de estilo: José Luis Carrillo / Alessandra Canessa

Diseño y diagramación: Magdalena Acevedo

GARCÍA, JAIME A.

MATEMÁTICAS FINANCIERAS
con ecuaciones de diferencia finita
5ta edición

No está permitida la reproducción total o parcial de esta obra ni su tratamiento o transmisión por cualquier medio o método sin autorización escrita de la editorial.

DERECHOS RESERVADOS

Copyright © 2008 quinta edición, por Jaime A. García
Copyright © 2008 por Pearson Educación de Colombia, Ltda.
PEARSON EDUCACIÓN DE COLOMBIA, LTDA.
Carrera 68 A # 22-055
Santa Fe de Bogotá, D.C., Colombia

ISBN: 978-958-699-100-1

Impreso en Colombia
Printed in Colombia

Índice

Prólogo	11
Objetivo	12
Contenido	12
Sobre los problemas	14
Metodología para la resolución de problemas	15
CAPÍTULO 1	
Funciones exponencial y logarítmica y progresiones	17
1.1 Introducción	18
1.2 Función exponencial	18
1.3 Función logarítmica	21
1.4 Progresiones	26
Problemas resueltos	31
Problemas I	34
Problemas II	38
CAPÍTULO 2	
Ecuaciones de diferencia finita	43
2.1 Introducción	44
2.2 Diferencia finita	44
2.3 Ecuaciones de diferencia finita de primer orden	45
2.4 Ecuación de diferencia lineal de primer orden	46
2.5 Soluciones de la ecuación de diferencia de primer orden	47
2.6 Casos especiales	53
Problemas resueltos	59
Problemas I	66
Problemas II	71
CAPÍTULO 3	
Interés y valores presente y futuro	75
3.1 Introducción	76
3.2 Interés	76
3.3 Clases de interés	77
3.4 Diagrama de flujo de caja	80
3.5 Valores presente y futuro	81
3.6 Cálculo del tiempo y la tasa de interés	86
3.7 Interpolación lineal	87
3.8 Tasa de interés	89
Problemas resueltos	113
Autoevaluación	124
Problemas I	126
Problemas II	136

CAPÍTULO 4

Series uniformes o anualidades	141
4.1 Introducción	142
4.2 Series uniformes o anualidades	142
4.3 Anualidad vencida	143
4.4 Anualidad anticipada	149
4.5 Anualidad diferida	151
4.6 Anualidad perpetua	153
4.7 Anualidad con tasa anticipada	161
Problemas resueltos	163
Autoevaluación	168
Problemas I	170
Problemas II	180

CAPÍTULO 5

Series variables	183
5.1 Introducción	184
5.2 Gradiente aritmético	184
5.3 Gradiente aritmético creciente	185
5.4 Gradiente aritmético decreciente	193
5.5 Gradiente geométrico	196
5.6 Gradiente geométrico creciente vencido	197
5.7 Gradiente geométrico decreciente vencido	201
5.8 Gradiente geométrico perpetuo	202
5.9 Otros casos	206
5.10 Uso de la regresión en matemáticas financieras	208
Problemas resueltos	210
Autoevaluación	216
Problemas I	218
Problemas II	226

CAPÍTULO 6

Amortización y saldos	235
6.1. Introducción	236
6.2 Amortización	236
6.3 Saldos	237
6.4 Composición de los pagos	244
6.5 Amortización y saldos en los sistemas UPAC y UVR	248
6.6 Capitalización	257
Problemas resueltos	261
Autoevaluación	268
Problemas I	269
Problemas II	275

CAPÍTULO 7		
Valor presente neto (VPN)		281
7.1	Introducción	282
7.2	Índice del VPN para un solo proyecto	283
7.3	Índice de VPN para dos o más proyectos	285
7.4	Costo capitalizado	290
Problemas resueltos		291
Problemas		295
CAPÍTULO 8		
Costo anual uniforme equivalente (CAUE)		305
8.1	Introducción	306
8.2	Cálculo del CAUE	306
8.3	El CAUE neto	307
8.4	El CAUE en la selección de alternativas	309
Problemas resueltos		311
Problemas		316
CAPÍTULO 9		
Tasa interna de retorno (TIR) y beneficio/costo (B/C)		323
9.1	Introducción	324
9.2	La tasa interna de retorno	324
9.3	Cálculo de la TIR	325
9.4	Aplicaciones de la TIR en la selección de alternativas	328
9.5	Tasa de rentabilidad verdadera	329
9.6	La relación beneficio/costo (B/C)	336
Problemas		340
Formulario		349
Respuestas (A los problemas múltiples de tres)		353
Índice analítico		359

*Dedicado a:
Jaime Andrés
Martha Catalina
Juan Daniel
y mis alumnos*

Prólogo

*La quinta edición de **Matemáticas financieras con ecuaciones de diferencia finita** aparece gracias al estímulo y motivación recibidos de mis alumnos de pregrado y posgrado tanto de la Universidad del Rosario como de todas aquellas otras universidades de Colombia y del exterior donde utilizan este libro como texto para asignaturas de Matemáticas financieras o de Ingeniería económica. El libro debe mucho también a los comentarios, recomendaciones y sugerencias de mis colegas de labores académicas en esta asignatura, quienes en forma amable, desinteresada y muy profesional han hecho sus aportes para el mejoramiento continuo del trabajo, así como al interés de la editorial Pearson Educación de Colombia, que ha querido ampliarlo y mejorarlo.*

Objetivo

El objetivo de este libro es servir de apoyo a todos aquellos estudiantes de las ciencias económicas y administrativas que quieran conocer y manejar el valor del dinero en el tiempo. Resulta necesario el estudio y aplicación a este tema de las ecuaciones de diferencia finita con el fin de poder resolver aquellos problemas financieros para los cuales no se tiene una fórmula preestablecida; con la ayuda de estas ecuaciones el estudiante logrará estimar el resultado que más se ajuste a la solución del problema bajo condiciones y respuestas financieras.

Así, se busca que, una vez finalizada la asignatura correspondiente, el estudiante sea capaz de solucionar problemas más allá de los tradicionales, para los cuales o ya se tiene la fórmula correspondiente o pueden ser resueltos con un programa de la calculadora financiera.

De manera similar, dado el adelanto tecnológico y el uso obligatorio que debe hacerse en esta asignatura de la calculadora financiera o de la computadora, no se incluyen las tablas de factores financieros, porque esos valores se pueden obtener directamente con el apoyo de la tecnología; además, se requiere que el estudiante adquiera gran habilidad en el manejo de la máquina, de tal manera que el tiempo para cálculos sea mínimo y, en cambio, sea mayor el que se dedique a entender, plantear e interpretar el problema.

Ahora bien: como con el tema expuesto en cada capítulo se busca que el estudiante llegue a dominarlo con propiedad y seguridad, para los problemas propuestos al final solo se ofrecen las respuestas de unos pocos de ellos, los numerados con los múltiplos de tres, de tal manera que el alumno vaya adquiriendo confianza en sus conocimientos y capacidades más que en la concordancia con sus resultados numéricos.

Contenido

El contenido del libro se divide en tres partes:

PARTE PRIMERA: ALGUNOS FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS BÁSICOS CAPÍTULOS 1 Y 2

- Comprender los temas sobre funciones exponencial, logarítmica, progresiones y ecuaciones de diferencia finita.
- Como las matemáticas financieras requieren de conceptos cuánticos previos, en esta sección se revisan los temas que el estudiante necesitará para el desarrollo de los capítulos centrales del libro. Estos temas son los correspondientes a funciones exponenciales y logarítmicas, su álgebra y sus aplicaciones, así como las ecuaciones de diferencia finita de primer orden.

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio de esta parte el alumno estará en capacidad de:

- a) Conocer sobre las funciones exponenciales y logarítmicas.
- b) Utilizar las propiedades de estas funciones.
- c) Manejar la calculadora para estas funciones en cualquier base.
- d) Identificar una progresión aritmética y una geométrica.
- e) Plantear y resolver una ecuación de diferencia finita de primer orden
- f) Aplicar estas ecuaciones a los problemas financieros.

RESUMEN

En esta parte se revisan los conceptos y temas como el de las funciones exponenciales y logarítmicas y sus propiedades en diferentes bases, así como el de la progresión aritmética y geométrica, con ejemplos aplicados.

También se presentan las ecuaciones de diferencia finita lineales de primer orden, su planteamiento, solución y aplicaciones a problemas económicos y financieros.

Como complemento, y con el fin de que el lector se familiarice con el desarrollo de problemas propios de la sección, se incluyen problemas y sus respectivas soluciones.

PARTE SEGUNDA: VALOR DEL DINERO EN EL TIEMPO CAPÍTULOS 3, 4 Y 5

- Comprender los temas sobre interés y valores presente y futuro, series uniformes o anualidades y series variables de pagos.
- En esta sección se introduce el concepto de interés y la construcción de diagramas de tiempo-valor o flujo de caja para una operación financiera, y se establece el equilibrio o equivalencia entre ingresos y egresos de esa operación financiera.

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio de esta parte el alumno estará en capacidad de:

- a) Identificar las diferentes clases de tasas de interés.
- b) Construir el diagrama de flujo de caja de una operación financiera.
- c) Hallar el valor presente y futuro para el flujo de caja.
- d) Manejar diferentes flujos de caja, como los de pagos únicos, los de varios pagos, los de pagos uniformes, los de pagos variables como gradiente aritmético, gradiente geométrico y otros casos.

RESUMEN

En esta parte se estudian las tasas de interés vencidas, anticipadas, efectivas, nominales y equivalentes. También, los diagramas de flujo, de caja, de valor presente y valor futuro, series uniformes o anualidades vencidas, anticipadas, diferidas y perpetuas. Además, se analizan las series variables como gradientes tanto aritméticos como geométricos, ya sean crecientes o decrecientes, y, por último, casos que solo se pueden resolver utilizando ecuaciones de diferencia finita.

Como complemento, y para que el lector reafirme sus conocimientos sobre los temas de esta parte, se presentan los ejercicios resueltos.

PARTE TERCERA: ÍNDICE DE EVALUACIÓN FINANCIERA CAPÍTULOS 6, 7, 8 Y 9

- Comprende temas sobre amortización y saldos, valor presente neto, costo anual uniforme equivalente, tasa interna de retorno, tasa de rentabilidad verdadera y beneficio/costo.
- En esta sección se presentan las principales aplicaciones de los temas vistos en la sección anterior, en problemas prácticos del sector financiero y económico, como son los relacionados con la financiación, la amortización y la proyección de saldos; además, se tratan otros temas que sirven de base para la evaluación financiera de proyectos, como el VPN, el CAUE y la TIR.

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio de esta sección el lector estará en capacidad de:

- a) Diseñar y manejar sistemas de amortización de deudas y la proyección de saldos.
- b) Calcular e interpretar el índice de valor presente neto del flujo de caja de una opción de inversión.
- c) Calcular e interpretar el índice promedio financiero o costo anual uniforme equivalente del flujo de caja de un proyecto.
- d) Determinar e interpretar los índices de tasa interna de retorno del flujo de caja de un proyecto de inversión, la tasa de rentabilidad verdadera y el beneficio/costo.

RESUMEN

En esta parte se estudian temas de aplicación vistos en la sección dos, como son los correspondientes a sistemas de financiación, amortización de deudas, proyección de saldos, refinanciación de deudas y una breve presentación de lo que fue el sistema UPAC. Asimismo, se explica el concepto de cálculo e interpretación del valor presente neto (VPN) del flujo de caja de una inversión y el promedio financiero de pérdida o ganancia en una inversión, también conocido como costo anual uniforme equivalente. La sección termina con la presentación, definición, cálculo e interpretación de la tasa interna de retorno (TIR) para una inversión, la tasa de rentabilidad verdadera (TRV) y el beneficio/costo (B/C).

Como complemento, el lector encuentra una serie de problemas resueltos que le permiten revisar y reafirmar sus conocimientos sobre los temas vistos en esta parte.

Con las tres partes anteriores el estudiante estará en capacidad de enfrentar cualquier problema de matemáticas financieras y de abordar un costo de evaluación financiera de proyectos.

Sobre los problemas

Al final de la teoría de cada capítulo de las tres partes se presentan algunos problemas resueltos con el objetivo de que el estudiante pueda ver y entender la aplicación de los conceptos estudiados en el capítulo, con la advertencia de no memorizar procedimientos para resolver problemas.

Los capítulos de las partes primera y segunda tienen también al final una sección de autoevaluación compuesta por problemas y preguntas con múltiples posibilidades de respuestas, y cuyo objetivo es que el estudiante ponga a prueba su conocimiento de los conceptos teóricos vistos en el capítulo y obtenga la suficiente competencia para resolver los problemas de fin de capítulo.

Los problemas de fin de capítulo de las partes primera y segunda están distribuidos en dos clases: la I y la II. Los problemas de la clase I, o básica, son los que contienen los elementos mínimos necesarios que debe manejar un estudiante de un curso básico de Matemáticas financieras. Los problemas de la clase II, o intermedia, son aquellos que, junto con los primeros, se deben manejar en un curso más avanzado o de posgrado en la materia de Matemáticas financieras. Muchos de ellos deben ser resueltos con ecuaciones de diferencia finita, o requieren para su solución del conocimiento de temas matemáticos más avanzados, o deben ser consultados en otras materias para poder resolverlos, de tal manera que sea el profesor de la asignatura correspondiente quien determine los temas, contenidos, enfoques y clases de problemas que deben desarrollarse dependiendo del objetivo y nivel de la asignatura. Esta clasificación no se encuentra en la parte tercera, porque quien la estudie debe tener todo el conocimiento de los temas anteriores y al mejor nivel, dado que se trata de temas relacionados con la evaluación financiera de proyectos.

En el caso de los problemas de fin de capítulo, tanto para los de la clase I como para los de la clase II, se presentan solo las respuestas de aquellos numerados con un múltiplo de tres, con el fin de que el profesor resuelva uno que no tenga respuesta; luego el alumno se ejercita con el que tiene respuesta, y con estos dos ejercicios se espera que el estudiante esté en capacidad de resolver por sí solo

el otro que no tenga respuesta y, así, adquirir la competencia necesaria para resolver los problemas de la vida práctica en los que las respuestas no se conocen de antemano.

Por último, al final del volumen se incluye un formulario que contiene las expresiones clásicas de matemáticas financieras tratadas a lo largo del libro y que deben ser consultadas en el momento de resolver un problema. El alumno debe participar haciendo la anotación sobre la aplicación de cada una de esas fórmulas.

Metodología para la resolución de problemas

En todo campo del saber, y específicamente en las matemáticas financieras, un alto porcentaje del trabajo consiste en el manejo de problemas. Según Albert Einstein, “un problema es una situación interesante”; por tanto, su resolución requiere procedimientos y metodologías adecuados.

Aquí proponemos el camino sugerido por el ilustre físico, autor de la teoría de la relatividad, que nos lleva a lograr éxito en la solución de problemas. Los pasos que deben seguirse son los siguientes:

- a) Entender el problema
 - b) Plantear el problema
 - c) Resolver el problema
 - d) Interpretar resultados
- a) Entender el problema: se refiere a la etapa crítica en todo problema, pues para ello no se cuenta ni con reglas ni con modelos que permitan a la persona entender el problema. Hay, sí, procedimientos que hacen posible un buen acercamiento a él, como, entre otros, una buena lectura (de ahí la expresión “comprensión de lectura”), concentración en lo que se lee, no preocuparse en ese momento por el cómo se va a resolver el problema y un conocimiento de cada uno de los términos que intervienen en el enunciado del problema.
 - b) Plantear el problema: corresponde al paso que debe darse una vez entendido el enunciado del problema. Consiste en interrelacionar las proposiciones que conforman el problema en términos de ecuaciones, desigualdades o cualquier otra expresión matemática que sustituya a la proposición o proposiciones del enunciado. Si el problema ha sido entendido, el planteamiento no debe ofrecer mayor dificultad.
 - c) Resolver el problema: consiste en ejecutar las operaciones matemáticas propias para hallar el valor de la variable o variables involucradas en el problema y expresadas en su planteamiento. Aquí desempeña un papel importante el manejo de la tecnología computacional que permite resolver las operaciones planteadas y dar solución a la pregunta del problema.
 - d) Interpretar resultados: todo problema contiene una pregunta que, por lo general, se presenta con una variable. Una vez resuelto el problema, o hallado el valor o valores de la variable, debe no solamente informarse sobre este valor numérico sino que también se debe interpretar financieramente ese valor, indicando lo que significa de acuerdo con el enunciado del problema.

Recordemos que esta metodología se debe aplicar a lo largo del desarrollo de los temas de este libro, pues ella capacita al estudiante para llegar a entender, plantear, resolver e interpretar problemas relacionados con el tema.

El adecuado uso de la tecnología disponible en el momento hará que el estudiante de hoy, profesional del mañana, se caracterice por ser una persona competente para entender, plantear e interpretar problemas relacionados con el valor del dinero a lo largo del tiempo, lo que sería imposible con el solo uso de la tecnología o de modelos preestablecidos. Esto es lo que caracteriza al buen profesional, y particularmente al de las finanzas, cuando pone al servicio del problema en estudio su capacidad analítica más que la misma mecánica u operativa, sin que con ello se quiera afirmar que esta última no sea importante.

La forma como se desarrollan las matemáticas financieras en este texto, a partir de las ecuaciones de diferencia finita, hace que, al mismo tiempo que el estudiante no tenga que mecanizar o memorizar fórmulas, pueda resolver muchos problemas pertinentes a la materia y de aplicación práctica para los cuales no se haya establecido una fórmula directamente; se trata de que, a partir del entendimiento del problema, el alumno logre, cuando sea posible, mostrar una ecuación de diferencia finita y obtener la expresión matemática que genera la solución del problema, así como de aquellos otros que se deriven del primero y que sean el resultado de cambios en algunos o en algunas de las variables que los conforman. Por eso es frecuente encontrar problemas en cadena que se originan de uno inicial al hacer cambios o modificaciones en el enunciado.

Se sugiere al estudiante que no intente mecanizar procedimientos para resolver problemas, sino que plantee diferentes alternativas de resolución justificando en cada caso su decisión de resolverlo de una u otra manera.

Para simplificar un poco la parte mecánica y operativa, el libro se acompaña con un disquete que contiene las principales fórmulas financieras. Estas sirven de apoyo al estudiante y le permiten economizar tiempo de operaciones, de modo que pueda dedicarse sobre todo a los pasos que corresponden al conocimiento humano: entender, plantear, resolver e interpretar situaciones financieras o de otra índole relacionadas en este caso con el valor del dinero a lo largo del tiempo.



Funciones exponencial y logarítmica y progresiones

El propósito de este capítulo es presentar los elementos básicos de las funciones logarítmica y exponencial, necesarios para las operaciones financieras que se realizarán en capítulos posteriores.

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

Al terminar el capítulo el lector deberá estar en capacidad de:

- *Conocer y manejar las propiedades de las funciones logarítmica y exponencial.*
- *Resolver problemas en los que intervengan estas funciones.*
- *Identificar, en un problema, cuándo se debe utilizar una u otra de las funciones.*
- *Manejar los conceptos y el álgebra de una progresión aritmética y de una progresión geométrica para su aplicación posterior en los temas de interés simple e interés compuesto respectivamente.*

1.1 Introducción

A pesar de que la mayoría de calculadoras contienen en sus programas y comandos las funciones exponencial y logarítmica, es conveniente revisar los conceptos básicos de estas, debido a la continua explicación que de ellas se hará a lo largo de los ejercicios y problemas. Otro tanto ocurrirá respecto de las progresiones, en especial las geométricas, por su aplicación en las operaciones financieras con interés compuesto.

El objetivo de este capítulo es que el lector maneje y aplique los conceptos matemáticos anteriores en todos aquellos casos que así lo exijan, y que esté capacitado para complementar el trabajo de las calculadoras en aquellos asuntos que estas no ejecutan, como las propiedades de estas funciones, que son de tanta importancia en el planteamiento y desarrollo de un problema.

1.2 Función exponencial

DEFINICIÓN 1.1

Dado un número real positivo b , se llama función exponencial en la base b a la función expresada como $f(x) = b^x$.

En este caso la variable independiente x se llama exponente, y la constante b , base. El dominio de la función exponencial es $(-\infty, \infty)$, y el recorrido es $(0, \infty)$. Las **propiedades de la función exponencial** son las siguientes: para $b > 0$, $a > 0$ y todo m y n , números reales.

- i) $b^m > 0$
- ii) $b^m b^n = b^{m+n}$
- iii) $b^{-n} = 1/b^n$
- iv) $b^m / b^n = b^{m-n}$ (1-1)
- v) $(b^m)^n = b^{mn}$
- vi) $a^m b^m = (ab)^m$
- vii) $a^m / b^m = (a/b)^m$

Hay dos bases de gran aplicación: cuando $b = e = 2,718281828$ y cuando $b = 10$. Las funciones respectivas se denotan e^x y 10^x , como aparecen en las calculadoras.

La fórmula general de la función exponencial es $y = Ab^{ax}$, donde A y a son constantes y b es la **base**. La mayoría de las veces no se conoce la base de la función exponencial, como cuando dados algunos datos o valores de la función se requiere hacer una regresión para hallar una función estimada; en estos casos la función toma la forma $y = Ab^x$, donde A es la constante coeficiente y b la base de la exponencial.

En otros casos, cuando tampoco se especifica la base pero se dice que una determinada función crece o decrece exponencialmente, se supone que la base es $b = e$, y entonces la función toma la forma $y = \mathfrak{R}e^{ax}$, donde \mathfrak{R} y a son constantes.

EJEMPLO 1.1

Las ganancias de una empresa en 1998 fueron \$ 500 millones, y en el 2005, \$ 630 millones. Si las ganancias de esa empresa crecen exponencialmente, estimar las ganancias para el 2008.

Solución

Sea $G(t)$ la función de ganancias que dependen del tiempo t en años. Esta función tendrá la forma: $G(t) = ke^{at}$, donde k y a son constantes cuyos valores deben determinarse con base en los valores conocidos de la función.

Para facilitar el manejo de los datos, tomemos 1998 como el año cero, y así el 2005 será el año siete y, finalmente, el 2008 será el año diez. Con este cambio de notación, al reemplazar en la función tenemos:

$$500 = G(0) = Ke^0 = K$$

Luego, $K = 500$, y

$$630 = G(7) = 500 e^{7a}$$

Así que $e^{7a} = 63/50$, de tal manera que:

$$G(20) = 500 e^{20a} = 500(e^{7a})^{20/7} = 500(63/50)^{20/7} = 967.700$$

millones de pesos, y estas serán las utilidades estimadas o proyectadas para el 2008.

EJEMPLO 1.2

Se sabe que la población de una ciudad está dada (en millones de habitantes) por la expresión siguiente:

$$P(t) = 2e^{0,15t}$$

donde t está dada en años, desde 1986

Determinar:

- La población proyectada para el 2006.
- El crecimiento porcentual de la población cada año.

Solución

- Para determinar la población proyectada para el 2006, simplemente calculamos la función en $t = 20$ (tomando 1986 como el año cero); entonces:

$$P(20) = 2e^{0,15(20)} = 40.170 \text{ millones de habitantes}$$

- Del cálculo diferencial se sabe que la variación porcentual de una función $f(x)$ está dada por:

$$\Delta \% = \frac{f'(x)}{f(x)} \times 100$$

Por tanto, para nuestro caso tenemos:

$$\Delta \% = \frac{p'(t)}{p(t)} \times 100 = \frac{0,3e^{0,15t}}{2e^{0,15t}} \times 100 = 0,15 \times 100 = 15 \%$$

que corresponde al coeficiente del exponente de la función dada.

Uno de los casos más frecuentes en matemáticas financieras es aquel en el que una cantidad crece periódicamente en el mismo porcentaje. Supongamos que se inicia con una cantidad P y que

en cada período t se sucede un aumento del $r\%$ sobre el valor inmediatamente anterior; entonces se formaría la siguiente sucesión de valores:

$$\begin{aligned} t = 0 & \quad P \\ t = 1 & \quad P + rP = P(1 + r) \\ t = 2 & \quad P(1 + r) + rP(1 + r) = P(1 + r)^2 \\ t = 3 & \quad P(1 + r)^2 + rP(1 + r) = P(1 + r)^3 \end{aligned}$$

Y así sucesivamente hasta llegar en un tiempo t cualquiera a un valor de $P(1 + r)^t$. Esta función exponencial en la base $(1 + r)$ se utilizará más adelante en el manejo del interés compuesto, y será determinada en el capítulo 3.

EJEMPLO 1.3

Hallar el valor de r tal que:

$$300.671 = 100.000(1 + r)^{32}$$

Solución

La expresión dada equivale a $(1 + r)^{32} = 3,00671$. Tomando la raíz treinta y dos en ambos lados obtenemos:

$$1 + r = (3,00671)^{(1/32)} = 1,035$$

Por tanto:

$$r = 0,035$$

EJEMPLO 1.4

Para qué valor r se cumplirá la siguiente igualdad:

$$630.000(1 + r)^{15} = 465.957(1 + r)^{26}$$

Solución

La igualdad es equivalente a:

$$\frac{630.000}{465.957} = \frac{(1 + r)^{26}}{(1 + r)^{15}}$$

o sea:

$$1,35056 = (1 + r)^{11}$$

Aplicando la raíz once en ambos miembros, llegamos a:

$$r = 0,0278 \text{ aproximadamente}$$

En muchos casos prácticos se necesita proyectar o estimar hacia el futuro el comportamiento de una variable basada en valores históricos conocidos de esa variable. Las matemáticas resuelven este problema mediante lo que se conoce como **regresión exponencial**, que se trata en los cursos de Estadística.

EJEMPLO 1.5

Supongamos que la población de un país ha tenido la siguiente variación en los últimos cinco años:

Año	1994	1995	1996	1997	1998
Población (en millones de habitantes)	22	23	25,6	28.600	32

Hallar la función exponencial que más se ajuste a los datos anteriores y determinar en qué porcentaje ha aumentado la población anualmente.

Solución

Para facilitar el manejo de los datos anteriores, llamaremos uno al año 1994, dos a 1995 y así sucesivamente; y utilizaremos el programa correspondiente para hallar una función de la forma:

$$Y = ab^x$$

donde x es el año e Y el número de habitantes. Se trata de hallar los valores de a y b . Ejecutando en la calculadora la regresión exponencial anterior, obtenemos:

$$a = 19,44256059, b = 1,101562846$$

Así, la función exponencial que más se ajusta a los datos dados es la siguiente:

$$Y = 19,44256059 (1,101562846)^x$$

La población habrá aumentado cada año en aproximadamente el 10,156%.

El estudiante debe manejar cualquiera de los programas y métodos existentes en la tecnología para calcular regresiones tanto lineales como exponenciales, porque se utilizarán en problemas posteriores para estimar las tendencias de flujos de caja en operaciones financieras.

1.3 Función logarítmica

DEFINICIÓN 1.2

Dado un número real positivo b , se llama función logarítmica en la base b y se denota $\log_b y$, a la función inversa de $y = b^x$.

De esta manera, las funciones exponencial y logarítmica son inversas entre sí. El dominio de la función logarítmica es $(0, \infty)$, y el recorrido, $(-\infty, \infty)$.

Para las dos bases anotadas anteriormente, las funciones logarítmicas se denotan así: \ln si la base es e , y se llama logaritmo natural o neperiano, y \log si la base es diez.

Las **propiedades de la función logarítmica**, expresadas para el logaritmo natural, son las siguientes, para M y N positivos.

$$\text{i) } \ln(M \times N) = \ln M + \ln N$$

$$\text{ii) } \ln(M/N) = \ln M - \ln N$$

$$\text{iii) } \ln M^r = r \ln M$$

$$\text{iv) } \ln 1 = 0$$

$$\text{v) } \ln e = 1$$

(1-2)

Del hecho de ser inversas entre sí las funciones exponencial y logarítmica, se desprenden algunas relaciones fundamentales entre ellas:

- i) $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$
- ii) $e^{1nt} = t$ (1-3)
- iii) $\ln e^u = u$

Con esta breve exposición de las funciones exponencial y logarítmica, estamos en capacidad de desarrollar algunos ejemplos. Se trata de que el lector se familiarice con el manejo de estas funciones, ayudado, naturalmente, por la calculadora.

EJEMPLO 1.6

El precio de venta o de mercado de una maquinaria puede expresarse como:

$$V = \$ 10.000 e^{-0,1t}$$

donde t es el tiempo de antigüedad de la máquina medido en años.

Preguntas:

- a) ¿cuál será el valor de la máquina al cabo de ocho años?; y ,
- b) ¿en qué momento la máquina tendrá un valor de venta de \$ 6.053,3?

Solución

- a) El valor de la máquina al cabo de ocho años estará dado por:

$$V(8) = \$ 10.000 e^{-0,1(8)} = \$ 4.493,3$$

- b) En este caso $V = \$ 6.065,3$ representa el valor de la máquina de t años, de tal manera que al reemplazar este valor en la función de valor de la máquina se tiene:

$$6.065,3 = 10.000 e^{-0,1t}$$

o sea:

$$e^{-0,1t} = 0,60653$$

Tomando el logaritmo natural en ambos miembros de la igualdad obtenemos:

$$\ln e^{-0,1t} = \ln(0,60653)$$

Y aplicando la relación (1-3) al miembro de la izquierda de esta igualdad, se llega a:

$$-0,1t = -0,5$$

Es decir, $t =$ cinco años es la respuesta a la pregunta del literal (b) de este ejemplo.

EJEMPLO 1.7

La expresión $3.000 [(1 + 0,02)^n - 1]/0,02$ representa, como lo veremos en el capítulo 4, el valor total acumulado después de realizar n depósitos de \$ 3.000 cada uno en una cuenta de ahorros que paga un interés del 2% mensual. Si el total acumulado asciende a \$ 96.090,9, ¿cuántos depósitos se han realizado?

Solución

Tenemos que:

$$96.090,9 = 3.000 [(1,02)^n - 1] / 0,02$$

o sea:

$$(1,02)^n = 1,640606$$

Tomando el logaritmo natural en ambos miembros de la igualdad obtenemos:

$$\ln(1,02)^n = \ln(1,640606)$$

Por la relación (1-2):

$$n \times \ln(1,02) = \ln(1,640606)$$

de donde:

$$n = \frac{\ln(1,640606)}{\ln(1,02)} = 25$$

Es decir, después de veinticinco depósitos de \$ 3.000 cada uno tendremos la suma de \$ 96.090,9, según las condiciones del ejemplo.

EJEMPLO 1.8

Hallar el valor n tal que:

$$\ln(3-2n) - 2\ln(n) = 0$$

Solución

La ecuación del problema es equivalente a:

$$\ln(3 - 2n) - \ln(n)^2 = 0$$

La cual, a su vez, podemos escribir como:

$$\ln \left[\frac{(3 - 2n)}{n^2} \right] = 0$$

De acuerdo con otra propiedad de la función \ln , la expresión anterior es equivalente a:

$$(3 - 2n)/n^2 = e^0 = 1$$

o sea que:

$$n^2 + 2n - 3 = 0$$

que corresponde a una ecuación de segundo grado cuyas raíces son:

$$n = 1 \text{ y } n = -3$$

Sin embargo, la solución al problema original es solo $n = 1$, pues para $n = -3$ no existe el logaritmo.

El lector debe resolver el mismo problema utilizando otras propiedades de la función logarítmica.

EJEMPLO 1.9

Con la expresión $P \times e^{in}$ se calcula el valor total acumulado en una cuenta en la que el interés del $i\%$ se capitaliza continuamente, y n es el número de años transcurridos desde el depósito de la cantidad P . Con base en esta expresión, hallar el número de años para que el total acumulado sea una cantidad F .

Solución

Tenemos $F = P e^{in}$, en la cual debemos hallar el valor de n .

Podemos escribir la ecuación anterior como:

$$e^{in} = F/P$$

Tomando el logaritmo natural en ambos miembros de la igualdad, tenemos:

$$\ln e^{in} = \ln(F/P)$$

De acuerdo con la expresión (1-3), se tiene:

$$\ln = \ln(F/P)$$

O sea que:

$$n = \left(\frac{1}{i}\right) \times \ln(F / P)$$

EJEMPLO 1.10

La función de costos de una determinada empresa viene dada por $C(t) = 5.000 - A e^{bt}$ (expresado en miles de pesos), donde A y b son constantes y t es el tiempo medido en meses. Si el costo original ($t = 0$) fue de \$ 4.400.000 y el costo en el cuarto mes es de \$ 4.200.000, determinar el costo a los quince meses.

Solución

Lo primero que debe hacerse es determinar la función que cumpla las condiciones expresadas en el problema, o sea, que $C(0) = 4.400$ millones y $C(4) = 4.200$ millones; para ello debe determinarse el valor de las constantes A y b . Esto lo logramos a partir de:

$$4.400 = C(0) = 5.000 - A e^{b(0)} = 5.000 - A$$

Por tanto:

$$A = 600$$

Además:

$$4.200 = C(4) = 5.000 - 600 e^{b(4)}$$

de donde:

$$e^{4b} = 1,3333$$

Tomando el logaritmo natural en ambos miembros de la igualdad obtenemos:

$$\ln e^{4b} = \ln(1,3333)$$

$$b = \frac{\ln(2)}{4} = 0,0719205$$

Así, la función tendría la forma:

$$C(t) = 5.000 - 600 e^{0,0719205t}$$

Y, por tanto, el costo a los quince meses será de:

$$C(15) = 5.000 - 600 e^{0,0719205(15)} = 3.235.300$$

Esto quiere decir que el costo a los quince meses será de \$ 3.235.300 millones.

EJEMPLO 1.11

Si la variación del monto de una inversión en cualquier período t es proporcional al monto en ese momento, hallar el valor total acumulado en cualquier momento.

Solución

Sea P el valor del monto en cualquier momento t ; entonces, la variación en ese tiempo será dP/dt .

Ahora, si esta variación es proporcional al monto P , obtenemos que:

$$\frac{dP}{dt} = kP, \text{ donde } k \text{ es la constante de proporcionalidad.}$$

Para resolver esta ecuación, primero separamos las variables así:

$$\frac{dP}{P} = k dt$$

Integrando en ambos miembros, llegamos a:

$$\int \frac{dP}{P} = \int k dt$$

$\ln P = kt + c$, donde c es una constante de integración, y entonces:

$$P = e^{kt+c} = e^{kt} e^c = Ae^{kt}$$

donde $A = e^c$ y k son constantes; por tanto, el total acumulado en cualquier momento t será:

$$P(t) = Ae^{kt}$$

que es una función exponencial en la cual la variación porcentual es constante al $k\%$.

EJEMPLO 1.12

Si una cantidad crece exponencialmente variando en el 10% cada mes, ¿al cabo de cuántos meses habrá triplicado su valor inicial?

Solución

Sea V_0 el valor inicial de esa cantidad. Entonces, al cabo de t meses tendrá un valor de:

$$V_t = V_0 e^{0,1t}$$

Se trata de hallar el valor de t para el cual se cumpla que:

$$V_t = 3V_0$$

O sea:

$$V_0 e^{0,1t} = 3V_0$$

Es decir:

$$e^{0,1t} = 3$$

Tomando el logaritmo natural en ambos lados de la igualdad, obtenemos:

$$\ln e^{0,1t} = \ln 3$$

$$0,1t = \ln 3$$

$$t = \frac{\ln 3}{0,1} = 11$$

Al cabo de once meses, el valor original se habrá triplicado.

EJEMPLO 1.13

Hallar el valor de n que cumpla con la siguiente igualdad:

$$702.507 = \frac{45.600}{0,035 - 0,02} \left[1 - \left(\frac{1,02}{1,035} \right)^n \right]$$

Solución

Esta ecuación, que encontraremos más adelante en los flujos de caja que crecen en forma geométrica (capítulo 5), puede resolverse de dos formas: una mediante el programa correspondiente a gradientes

geométricos crecientes, la otra por el álgebra y la función logarítmica que corresponda al siguiente procedimiento:

El objetivo es despejar el factor $\left(\frac{1,02}{1,035}\right)^n$, y esto es igual a:

$$\left(\frac{1,02}{1,035}\right)^n = (0,7689121711)$$

Tomando el logaritmo en ambos lados de la igualdad, obtenemos:

$$\ln\left(\frac{1,02}{1,035}\right)^n = \ln(0,7689121711)$$

$$\therefore n = \ln(0,7689121711) / \ln\left(\frac{1,02}{1,035}\right) = 18$$

Así, el valor de la variable n que cumple la ecuación dada en el ejercicio es n = 18.

1.4 Progresiones

Existen dos clases especiales de progresiones, la aritmética y la geométrica, y las encontraremos en algunos problemas de matemáticas financieras, principalmente las segundas.

DEFINICIÓN 1.3

Se llama **progresión aritmética** a toda sucesión de términos en la que cada uno de ellos, a diferencia del primero, se obtiene sumando una cantidad fija al anterior a este. A esta cantidad fija, que se adiciona a cada término, se le conoce con el nombre de **incremento o diferencia común**.

Sea a el primer término y h el incremento o diferencia de una serie aritmética, entonces los n primeros términos estarán dados por:

$$a, a + h, a + 2h, \dots, a + (n - 1)h$$

Una de las mayores aplicaciones de la progresión aritmética en matemáticas financieras es la suma de los n primeros términos, que podemos representar por S; es decir:

$$S = a + [a + h] + [a + 2h] + \dots + [a + (n - 1)h]$$

Esta expresión equivale a:

$$S = na + h \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2} [2a + (n-1)h]$$

O sea que la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética está dada por:

(1-4)

$$S = (n/2) \times [2a + (n-1)h]$$

Debe advertirse que la diferencia común puede ser positiva o negativa, lo que origina las progresiones aritméticas crecientes o decrecientes respectivamente.

EJEMPLO 1.14

Un cliente solicitó un préstamo a una entidad financiera por \$ 36.000, con el acuerdo de que pagaría tanto el capital como los intereses en doce cuotas mensuales de \$ 4.080 la primera, \$ 3.990 la segunda, \$ 3.900 la tercera y así sucesivamente. Hallar la suma total de los pagos efectuados.

Solución

La sucesión de pagos constituye una progresión aritmética en la que:

$$a = \$ 4.080; h = -90; n = 12$$

Aplicando la expresión (1-3), tenemos:

$$S = 12 / 2 [2(4.080) + (12 - 1)(-90)] = \$43.020$$

Debe tenerse en cuenta que en este ejemplo se pide hallar únicamente la suma total de los pagos, mas no el valor del dinero pagado; este último concepto será la base de los temas que van a tratarse en capítulos posteriores de este texto.

Para determinar si una sucesión dada corresponde o no a una progresión aritmética, basta hallar el incremento. Este se obtiene calculando la diferencia entre un término cualquiera y el anterior a este, y comprobando luego si se cumple o no la definición 1.3.

En matemáticas financieras podemos utilizar la progresión geométrica, entre otros casos, para calcular el total del interés más capital al cabo de un determinado tiempo, liquidados sobre una cantidad fija y una tasa de interés simple. Casos como estos se tratarán en el capítulo 3.

EJEMPLO 1.15

Usted toma un crédito por valor de \$ 500.000 y acuerda con el acreedor un interés simple del 2% mensual, y que, además, se cancelaría el total de capital más interés al cabo de un año. Determinar el total que usted deberá cancelar en esa fecha.

Solución

El interés mensual sería: $0,02(500.000) = \$ 10.000$. Como en interés simple estos intereses no ganan intereses en los meses siguientes, el valor de su deuda total al final de cada mes sería:

510.000, 520.000, 530.000, y así sucesivamente.

Por tanto, el valor de su deuda al cabo de doce meses sería igual al duodécimo término de esta serie, que estará dado por:

$$a + (n - 1)h = 510.000 + (12 - 1)(10.000) = \$ 620.000$$

Lo que significa que al cabo de un año de tener ese crédito, según las condiciones dadas, usted debería cancelar en total la suma de \$ 620.000.

EJEMPLO 1.16

Un artículo debe comprarse al principio de cada mes. Se sabe que su costo original fue de \$ 50.000 y que cada mes aumentará en \$ 8.000. ¿Cuánto sumarán los desembolsos para la compra del artículo durante dos años?

Solución

Los desembolsos para la compra del artículo son:

50.000, 58.000, 66.000

y así sucesivamente, y estos forman una progresión aritmética con $a = 50.000$, $h = 8.000$ y $n = 24$, de tal manera que la suma de los desembolsos por dos años será, aplicando la expresión (1-4), igual a:

$$S = \left(\frac{24}{2}\right) [2(50.000) + (24 - 1)(8.000)] = \$3.408.000$$

Lo que significa que para comprar ese artículo durante dos años debieron hacer unos desembolsos que suman \$ 3.408.000 millones.

En general, las progresiones aritméticas se utilizan en todos aquellos problemas en los que haya una sucesión de valores que aumenten o disminuyan periódicamente en la misma cantidad.

DEFINICIÓN 1.4

Se llama **progresión geométrica** a toda sucesión de términos en la cual la razón o cociente entre un término cualquiera y el anterior a este es constante.

Esta definición equivale a decir que una sucesión de términos constituye una progresión geométrica si cada término se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad fija.

Entonces, dado un primer término a y una razón r , la progresión geométrica correspondiente a los n primeros términos estará dada por:

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1}$$

Al igual que en la progresión aritmética, aquí nos interesa especialmente la suma de los n primeros términos de esta progresión. Es decir, el valor de S :

$$S = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

Si multiplicamos ambos miembros por r y hallamos la diferencia entre las dos expresiones, llegamos a:

$$S = \begin{cases} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}; & \text{si } r \neq 1 \\ a \times n; & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

Para determinar si una sucesión de términos constituye o no una progresión geométrica, basta con hallar la razón correspondiente. Esta se obtiene dividiendo un término cualquiera por el anterior y comprobando luego si se cumple o no la definición 1.4.

EJEMPLO 1.17

Dada la sucesión $3, -2, 3/4, -8/9, \dots$, hallar el décimo término y la suma de los veinte primeros términos.

Solución

Primero debemos comprobar si la sucesión constituye o no una progresión geométrica. Para ello calculamos una razón dividiendo un término cualquiera por el anterior a este, lo que nos da que $r = -2/3$. Como esta cantidad cumple las condiciones dadas en la definición 1.4, entonces podemos asegurar que la sucesión corresponde a una progresión geométrica en la cual $a = 3$ y $r = -2/3$.

Como el n -ésimo término es $a \times r^{n-1}$, tenemos que el décimo término es:

$$3 \times (-2/3)^9 = -512 / 6.561$$

Aplicando la primera parte de la expresión (1-5), tenemos que la suma de los veinte primeros términos de la progresión geométrica es:

$$S = \frac{3[1 - (-2/3)^{20}]}{1 - (-2/3)} = 1,799458$$

Las progresiones geométricas pueden ser crecientes, constantes o decrecientes, según la razón sea mayor que uno, igual a uno o menor que uno pero positiva respectivamente.

Las progresiones geométricas son de mucha aplicación en las matemáticas financieras, en todos los casos relacionados con interés compuesto, que será tratado en el capítulo 3.

Sin embargo, aquí desarrollamos algunos ejemplos y ejercicios que capaciten al estudiante en el uso y el álgebra de estas progresiones más que en las aplicaciones financieras.

Algunas veces se presentan sucesiones de términos tales que una parte de ellos constituye una progresión aritmética y la otra una progresión geométrica. En el siguiente ejemplo veremos la forma de resolver estos problemas.

EJEMPLO 1.18

Una persona recibe el primer día $1/2$, el segundo día $2/4$, el tercer día $3/8$, el quinto día $4/16$ y así sucesivamente, en millones de pesos. Si en estas condiciones estuvo durante treinta días, hallar el valor que recibió el último día y la cantidad total recibida durante este tiempo.

Solución

La sucesión formada por las cantidades recibidas es $1/2, 2/4, 3/8, 4/16, \dots$, en la cual los numeradores forman una progresión aritmética y los denominadores una progresión geométrica. Como podemos observar, no corresponde en total ni a una progresión aritmética ni a una geométrica. Sin embargo, sí podemos determinar el n ésimo término, que tiene la forma $n/2^n$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, de tal manera que el valor que recibió el último día ($n = 30$) fue $30/2^{30} = 2.793,9 \times 10^{-8}$.

Para hallar la cantidad total recibida debemos sumar los treinta primeros términos de esta serie; es decir, hallar el valor de:

$$S = 1/2 + 2/2^2 + 3/2^3 + 4/2^4 \dots + 30/2^{30}$$

Si multiplicamos la expresión anterior por $1/2$, tenemos:

$$(1/2)S = 1/2^2 + 2/2^3 + 3/2^4 + 4/2^5 + \dots + 30/2^{30}$$

Y ahora, si de la primera restamos la segunda, obtenemos:

$$(1/2)S = [1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + 1/2^4 + \dots + 1/2^{30}] - 30/2^{31}$$

La expresión entre paréntesis es la suma de los treinta primeros términos de una progresión geométrica, cuyo primer término es $1/2$ y la razón también es $1/2$, de manera que:

$$S = 2 \left[\frac{1/2 [1 - (1/2)^{30}]}{1 - 1/2} - 3/20^{31} \right] = 2, \text{ aproximadamente.}$$

Esto quiere decir que la cantidad total recibida fue \$ 2 millones aproximadamente.

EJEMPLO 1.19

Una empresa dispone de una suma de dinero para repartirla entre diez empleados. Al primero le entrega la tercera parte de esa suma, al segundo la tercera parte del resto y así sucesivamente hasta el décimo, que recibe \$ 200.000. ¿Cuál es el valor de la suma total que tiene la empresa para repartir y cuánto repartió?

Solución

Sea X la suma de dinero que tiene la empresa para repartir. Al primero le corresponderá $1/3X$ y sobrarán $2/3X$; al segundo le corresponderá $1/3(2/3)X = (2/9)X$ y sobra $(2/3)X - 2/9X = 4/9X$; al tercero le corresponderá $1/3(4/9)X = 4/27X$ y sobra $4/9X - 4/27X = 8/27X$, y así sucesivamente. Las cantidades entregadas a los empleados son las siguientes:

$$A/ \quad 1^\circ: \frac{1}{3} X$$

$$A/ \quad 2^\circ: \frac{2}{9} X = \frac{2}{3^2} X$$

$$A/ \quad 3^\circ: \frac{4}{27} X = \frac{2^2}{3^3} X$$

$$A/ \quad 10^\circ: \frac{2^9}{3^{10}} X$$

Si a este último le correspondieron \$ 200.000, entonces:

$$\frac{2^9}{3^{10}} X = 200.000$$

Luego, $X = \$ 23.066.015,62$ es la suma de dinero que la empresa tenía para repartir. Podemos ver aquí que las cantidades recibidas por los empleados forman una progresión geométrica, en la que el primer término es:

$$a = \frac{1}{3} X$$

Y la razón, $r = 2/3$.

Por tanto, para saber cuánto repartió simplemente sumamos los diez primeros términos de esta progresión:

$$S = \frac{\frac{1}{3} X \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{10} \right]}{1 - \frac{2}{3}} = X \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{10} \right] = 23.066.015,63 (0,982658471) = 22.666.015,63$$

Así, la cantidad que la empresa repartió fue \$ 22.666.015,63.

EJEMPLO 1.20

Si una maquinaria costó \$ 6 millones y cada año se deprecia el 30% del valor inmediatamente anterior, ¿cuál será el valor de la maquinaria al cabo de cinco años y cuánto suman las cantidades depreciadas?

Solución

Las cantidades depreciadas son: valor original 6.000.000.

Primer año: $0,3(6.000.000) = 1.800.000$; valor restante, 4.200.000

Segundo año: $0,3(4.200.000) = 1.260.000$; valor restante, 2.940.000

Tercer año: $0,3(2.940.000) = 882.000$; valor restante, 2.058.000

Y así sucesivamente.

Para encontrar la razón en la sucesión de valores depreciados, hallamos la razón entre uno cualquiera de esos valores y el anterior, y obtenemos que $r = 0,7$, de tal manera que la suma de las cantidades depreciadas con $a = 1.800.000$ es:

$$S = \frac{1.800.000 [1 - (0,7)^5]}{1 - 0,7} = \$4.991.580$$

Por tanto, el valor de la maquinaria al cabo de los cinco años será igual a:

$$\$ 6.000.000 - \$ 4.991.580 = \$ 1.008.420$$

El estudiante deberá comprobar este resultado con base en el cálculo de la serie de valor restante que venía desarrollándose y hallar una expresión para el n -ésimo término de esa sucesión.

Podemos encontrar otra aplicación de las progresiones geométricas en el concepto económico de la **propensión marginal al consumo**. Este concepto se define como la proporción (porcentaje) de ingreso adicional recibido por los consumidores y que se gasta en bienes y servicios.

Propongamos que la propensión marginal al consumo en una economía es del 0,5. Una empresa que forma parte de esta economía emplea a uno de los trabajadores durante algunas horas extras, y por esta razón la empresa le paga al empleado \$ 1.000 más. Se trata de registrar el efecto de este aumento inicial de \$ 1.000 en el gasto total de toda la economía. Entonces, en primer lugar tenemos que el gasto total aumentará por el incremento de los \$ 1.000. En segundo lugar, el trabajador que recibe estos \$ 1.000 gastará el 50% de ellos, o sea, \$ 500. La persona que recibe estos \$ 500 gastará el 50% de ellos, o sea, \$ 250, y así sucesivamente.

De este modo se genera una sucesión que puede representarse así:

$$\$ 1.000, \$ 500, \$ 250, \dots, 1.000(0,5)^{n-1}$$

y que corresponde a una progresión geométrica cuyo primer término es 1.000 y la razón 0,5.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.1 Hallar el valor de n , tal que:

$$377.666,5 = \frac{25.000}{0,03 - 0,012} \left[1 - \frac{(1,012)^n}{(1,03)^n} \right]$$

Solución

La expresión dada en el problema es equivalente a:

$$377.666,5 = \frac{25.000}{0,03 - 0,012} \left[1 - \left(\frac{1,012}{1,03} \right)^n \right]$$

De donde:

$$\left(\frac{1,012}{1,03} \right)^n = 0,72808012$$

Tomando \ln en ambos miembros de la igualdad, se tiene que:

$$\ln \left(\frac{1,012}{1,03} \right)^n = \ln(0,72808012)$$

$$n \ln \left(\frac{1,012}{1,03} \right) = \ln(0,72808012)$$

De donde:

$$n = \frac{\ln(0,72808012)}{\ln \left[\frac{1,012}{1,03} \right]} = 18$$

2.1 Hallar X tal que $\log_x 28 = 1,75$.

Solución

Decir que $\log_x 28 = 1,75$ equivale a decir que:

$$X^{1,75} = 28$$

$$\text{Así que } X = (28)^{1/1,75} = 6,71347$$

3.1 Hallar la suma de los veinte primeros términos de la serie:

8; 14; 24,5; 42,875; 75,03125;...

Solución

Como la diferencia entre dos términos consecutivos no es constante, entonces no corresponde a una serie aritmética.

Veamos si es geométrica. Para ello dividimos un término por el anterior; por ejemplo: $42,875/24,5 = 1,75$, y vemos que este es el valor de la razón y que la serie es geométrica con $a = 8$, $r = 1,75$ y $n = 20$; entonces:

$$S = \frac{8[1 - (1,75)^{20}]}{1 - (1,75)} = 774,076,20$$

4.1 Hallar el valor de X de tal manera que los números $X + 1$, $3X + 2$, $8X + 1$ sean términos consecutivos de una progresión geométrica.

Solución

Si los términos $X + 1$, $3X + 2$ y $8X + 1$ son consecutivos en una serie geométrica, se deberá cumplir que:

$$r = \frac{3X + 2}{X + 1} = \frac{8X + 1}{3X + 2}$$

o sea: $X^2 + 3X + 3 = 0$, y no existe un número real X que cumpla con esta ecuación; luego, no existe X tal que los términos dados sean consecutivos en una progresión geométrica.

5.1 Hallar el valor A tal que:

$$4.200.000 = \frac{A}{0,03 - 0,015} \left[\frac{(1,03)^{18} - (1,015)^{18}}{(1,03)^{18}} \right]$$

Solución

La expresión dada en el problema equivale a:

$$4.200.000 = \frac{A}{0,015} \left[1 - \left(\frac{1,015}{1,03} \right)^{18} \right]$$

De donde:

$$A = 271.463,8$$

6.1 Hallar el valor de j tal que:

$$32.450.000 = 19.340.000 \left(\frac{12 + j}{12} \right)^{36}$$

Solución

La expresión del problema es equivalente a:

$$\frac{32.450.000}{19.340.000} = \left(1 + \frac{j}{12} \right)^{36}$$

Aplicando $\sqrt[36]{\quad}$ en ambos miembros y despejando j , se llega a que $j = 0,17375$.

7.1 Para qué valor de n se cumple que:

$$580.600 (1,02)^n = \frac{420 - 280 (1,02)^{2n}}{6(1,02)^n}$$

Solución

La expresión del problema es equivalente a:

$$6(580.600)(1,02)^{2n} = 420 - 280(1,02)^{2n}$$

O sea:

$$3.483.880(1,02)^{2n} = 420$$

$$(1,02)^{2n} = 0,00012055$$

$$2n = \frac{\ln(0,00012055)}{\ln(1,02)}$$

$$n = -227,83$$

PROBLEMAS I

- 1.1** Si $\ln x = a$, y $\ln y = b$, expresar cada uno de los logaritmos siguientes en términos de a y b .
- $\ln(x \cdot y)$
 - $\ln(x^2 \cdot y)$
 - $\ln(x / y^2)$
 - $\ln(x^2 / y^3)$
 - $2\ln(x^3 \cdot y^{1/2})$
- 1.2** Averiguar dónde se origina el error del siguiente razonamiento: como $3 > 2$ es verdadero, entonces $3[\ln(1/2)] > 2[\ln(1/2)]$; 1,3 o sea, $\ln(1/2)^3 > \ln(1/2)^2$. Por tanto, $(1/2)^3 > (1/2)^2$, 1,4 o sea, $1/8 > 1/4$. Lo cual es falso.
- 1.3** Resolver, para x , cada uno de los casos siguientes:
- $\log_x 25 = 2$
 - $\log_2(1-x) = 2$
 - $\log x e^5 = 5$
 - $\log(3x^2) = 1 + \log(9x)$
 - $\ln(3 - 2x) - 2\ln(x) = 0$
- 1.4** Resolver, para x , cada uno de los casos siguientes:
- $e^{-0,05x} = 0,01$
 - $(1/3)(2)^x = 12$
 - $(1/2)^{1-2x} = 3/5$
 - $(4/5)^{1/x} = 3$
 - $2(10)^{2x-3} = 12$
- 1.5** En un determinado país, la población aumenta a una tasa del 10% anual. A esta tasa, ¿en cuánto tiempo se duplicará la población inicial?
- 1.6** Explicar por qué el número 1 no puede utilizarse como base para logaritmos.
- 1.7** ¿Cuánto tiempo tardará en triplicarse un capital invertido al 25% de interés, si se supone una capitalización continua?
- 1.8** Si $D = \{x/x = 5 + 3(n-1); n = 1, 2, 3, \dots\}$, encontrar el valor mínimo de n tal que $D_n > 100$, donde D_n representa la suma de los n primeros términos de D .

1.9 Para cada una de las sucesiones definidas para las funciones siguientes, con $n = 1, 2, 3, \dots$, determinar cuáles son progresiones aritméticas y cuáles geométricas.

i) $f(n) = 1 / n$

ii) $f(n) = n$

iii) $f(n) = 1 / n$

iv) $f(n) = (1 + 1 / n)^n$

v) $f(n) = 1 / 2^n$

vi) $f(n) = 2^n$

1.10 Hallar el valor de:

$$i. \sum_{k=0}^{20} 2^k \qquad ii. \sum_{k=2}^{20} \frac{1}{2^k} \qquad iii. \sum_{k=0}^{10} \left(1 - \frac{1}{3^k}\right)$$

1.11 Hallar la suma de los diez primeros términos de la progresión cuyos primeros términos son 2, 6, 18, 54,...

1.12 Hallar el valor de A sabiendo que:

$$A = \sum_{k=1}^{12} \left(\frac{2}{3}\right)^k + \sum_{k=13}^{30} \left(\frac{3}{2}\right)^k$$

1.13 Una serie de datos tiene la siguiente forma: 1, 1/2, 3, 1/4, 5, 1/8, 7, 1/16... Hallar la suma de los cincuenta primeros términos de esta sucesión y el valor del término cincuenta.

1.14 Determinar el valor de n tal que:

$$4.797,45 = 30 \left[\frac{1 - (1,02)^{-n}}{0,02} \right]$$

1.15 Determinar el valor de n tal que:

$$14.241,3 = 530 \left[\frac{(1,03)^n - 1}{0,03} \right]$$

1.16 Una progresión geométrica tiene el siguiente comportamiento: el primer término es $a = 2$ y aumenta con una razón de $r = 2$ hasta el vigesimocuarto término, y de allí en adelante disminuye con una razón de $r = 1/2$. Hallar la suma de los cuarenta primeros términos de la progresión.

1.17 Una persona se informa de un suceso a las doce del día. A los 20 minutos ya se lo había contado a otra persona. Las dos personas informadas, a su vez, lo contaron cada una a otra después de 20 minutos. Cada una de estas cuatro personas lo cuenta a otra a los 20 minutos siguientes, y así sucesivamente hasta las seis de la tarde del mismo día. Hallar el número de personas que se informaron a las seis de la tarde y el número total de personas informadas desde las doce del día hasta las seis de la tarde.

- 1.18** ¿Es posible repartir \$ 75.000 en quince premios, de tal manera que cada premio sea \$ 500 menos que el anterior? En caso afirmativo, hallar el valor de los premios.
- 1.19** Hallar el número K de tal manera que $K - 2$, $K + 4$ y $3K$ sean términos consecutivos de una progresión aritmética. ¿Es única la solución?
- 1.20** Resolver el problema 1.19 si se trata de una progresión geométrica.
- 1.21** Un empleado acepta trabajar para una empresa por 1 centavo el primer día, 2 centavos el segundo día, 4 centavos el tercer día, 8 centavos el cuarto día y así sucesivamente durante dos meses (sesenta días). a) Averiguar cuánto recibió el empleado durante el primer mes. b) ¿Cuánto llevaba ganado el día sesenta?
- 1.22** El costo de vida aumentó en el 24% anual en término medio desde 1978. Si un artículo costaba \$ 1.540 el 1 de enero de 1978, ¿cuánto costó el 31 de diciembre de 1982?
- 1.23** Para el problema 1.22, ¿en qué momento el artículo estaba costando \$ 3.540?
- 1.24** Si la propensión marginal al consumo para una economía es 0,8, el Gobierno decide aumentar su gasto en \$ 2 millones para un período. ¿Cuáles serán los tres primeros incrementos y el décimo incremento del gasto total, como términos de una progresión geométrica?
- 1.25** Un automóvil recorre 40 metros el primer segundo y durante cada uno de los segundos siguientes recorre los $\frac{4}{5}$ de la distancia recorrida en el segundo inmediatamente anterior. Se sabe además que con un galón de gasolina, que cuesta \$ 350, recorre 550 metros. ¿Cuánto ha gastado en gasolina durante la primera media hora de recorrido?
- 1.26** Resolver el problema 1.25 para el tiempo en que el auto esté en movimiento.
- 1.27** Sea p el precio unitario de un artículo, y $V(p) = 100e^{-0,02p}$ la función de ventas. ¿Cuál debe ser el precio unitario para que las ventas sean de cincuenta unidades?
- 1.28** Analizar las ventas para el problema 1.27, si el precio aumenta indefinidamente.
- 1.29** Resolver el problema 1.28 para el caso en que la función de ventas está dada por $V(p) = 2.000(1 - e^{-0,02p})$.
- 1.30** El número de artículos que se fabrican diariamente, después de n días de iniciada la producción, está dado por $D = 500 - 500e^{-0,25n}$. ¿En qué momento el nivel de producción será cuatrocientos setenta y cinco unidades?
- 1.31** El mensajero de una empresa recibió \$ 1.200 por el primer paquete entregado un día y luego recibió \$ 80 de aumento por cada paquete siguiente. Calcular cuánto recibió en total ese día, si entregó treinta y ocho paquetes.

- 1.32** La calificación de un estudiante fue de sesenta y cuatro puntos en el primero de siete exámenes de matemáticas. Si en cada uno de los siguientes obtuvo cuatro puntos más que en el inmediatamente anterior, hallar la calificación en el último examen y su promedio de puntos por examen.
- 1.33** Un automóvil se deprecia el 30% de su valor cada año. ¿Cuál será el valor al cabo de cinco años, sabiendo que el automóvil costó originalmente \$ 30 millones?
- 1.34** Hallar el valor de X de tal manera que los números $X + 1$, $4X + 1$ y $8X - 1$ sean términos consecutivos de una progresión geométrica.
- 1.35** Los tres dígitos de un número en su orden original forman una progresión aritmética, cuya suma es veintiuno. Encuentre el número si este disminuye trescientas noventa y seis unidades al invertir el orden de los dígitos.

- 1.36** Hallar el valor de n que cumpla la ecuación:

$$1.144,473 = \frac{85.000}{0,03 - 0,02} \left[1 - \frac{(1,01)^n}{(1,03)^n} \right]$$

- 1.37** Hallar la función exponencial de la forma $F(t) = a \cdot b^t$ que más se ajuste a los datos siguientes:

t	20	21	23	24	26	30
F(t)	480	478	450	453	432	415

- 1.38** Expresar, en términos de logaritmos, el valor de R en la expresión siguiente:

$$Y = A \left[1 + \frac{i}{a} \right]^{Ra}$$

- 1.39** El valor de un activo al cabo de t meses estará dado por la función:

$$V(t) = 500.000 - A e^{at}$$

Si el valor original del activo fue \$ 450.000 y al cabo de cinco meses es de \$ 380.000, hallar el valor del activo cuando tenga un tiempo de diez meses.

- 1.40** Un estudio de mercado mostró los siguientes valores que relacionan el precio P de un artículo con la correspondiente cantidad Q demandada:

P	5.800	6.000	6.300	6.800
Q	52	50	47	40

Hallar la función demandada de la forma $Q(p) = e^{ap}$ que más se ajuste a los datos anteriores, y determinar el precio que optimice la ganancia por la venta del artículo, sabiendo que el costo del artículo por unidad es de \$ 5.600.

PROBLEMAS II

2.1 Determine el valor de α tal que:

- a) $2^x = e^{\alpha x}$
- b) $2^{\alpha x} = e^x$
- c) $\alpha^x = e^{x-1}$
- d) $3^{\alpha+2} = \frac{1}{2}(2)^\alpha$
- e) $(\alpha+1)^{-2} = \frac{e}{3}$

2.2 En cada uno de los ejercicios siguientes, determinar (si existe) el valor de X que cumpla con la relación dada:

- a) $38.500 = 22.200 + 630e^{-0,02x}$
- b) $2.500 = \frac{35}{1 + 2e^{-x}}$
- c) $\frac{435}{2 + e^{2x}} = 57$
- d) $\frac{180}{4 - 3e^{-x}} = \frac{5}{8e^{-x}}$
- e) $8e^{-0,03x} + e^2 = 20$

2.3 Si $Y(t)$ presenta los ingresos en el mes t de una compañía y se cumple que $Y(t) = Y_0 e^{-\alpha t}$, donde Y_0 son los ingresos iniciales y α una constante, se pide hallar t para el cual $Y_0/5 = Y(t)$, con $Y_0 = \$ 150.000.000$ y $\alpha = 0,02$.

2.4 Hallar t (si existe) en cada uno de los siguiente ejercicios:

- a) $30.000 = 15.000(1,02)^t$
- b) $120.000 = \frac{15.500}{0,02 - 0,01} \left[1 - \left(\frac{1,01}{1,02} \right)^t \right]$
- c) $250.000 = 640(1,02)^t + 280 \left[\frac{(1,02)^t - 1}{0,02} \right]$
- d) $400.000 - 220(1,025)^{t-1} = 140.000$
- e) $500.000 = 25.000 \left[\frac{(1,03)^t - 1}{0,03(1,03)^t} \right]$

2.5 Hallar el valor de x en cada uno de los siguientes casos:

- a) $Y = k(1 - e^{-\alpha x})$
- b) $C = \frac{1}{p + q} \ln \left(\frac{q}{x} \right)$
- c) $50 = 12(1 - x)^{1/2}$
- d) $q = 80 - 2^x$

2.6 Hallar el valor de i (si existe) en cada uno de los siguientes casos:

$$\text{a) } 20(1+i)^{12} - \frac{4}{(1+i)^3} = 0$$

$$\text{b) } 620.000 = \frac{80}{0,02} \left[1 - \frac{(1+i)^{10}}{(1,03)^{10}} \right]$$

$$\text{c) } 300(1-i)^3 - \frac{6}{(1-i)^2} = 0$$

2.7 De la expresión:

$$Pe^r = P \left(1 + \frac{j}{n} \right)^n. \text{ Hallar } r \text{ en función de } j \text{ y de } n.$$

2.8 Hallar el valor de t en la expresión:

$$5.600.000(1,02)^t = \frac{300.000}{0,02 - 0,015} [(1,02)^t - (1,015)^t]$$

2.9 Hallar el valor de n (si existe) tal que:

$$3.200.000(1,021)^n = 6.250.000 + \frac{310.000}{0,032} [(1,021)^n - 1]$$

2.10 Por el método del tanteo e interpolación lineal, hallar el valor de n en cada uno de los siguientes casos:

$$\text{a) } 3^n - 2^n = 6.395$$

$$\text{b) } 4.400.000 = \frac{360.000}{0,01} [(1,03)^n - (1,02)^n]$$

$$\text{c) } 45.600.000 = 32.100.000(1,021)^n - \frac{180.000}{0,006} [(1,021)^n - (1,015)^n]$$

$$\text{d) } 2.800.000 = 120.000 \left[\frac{(1,02)^{n-1}}{0,02} \right] + 10.000 \left[\frac{(1,02)^n - 1}{0,02} - n \right]$$

2.11 Hallar la suma de cada una de las siguientes sucesiones finitas de números:

$$\text{a) } 2.000, 2.020, 2.040, \dots, 2.640$$

$$\text{b) } 4.600, 4.590, 4.580, \dots, 4.120$$

$$\text{c) } 252, 260, 268, \dots, 532.$$

$$\text{d) } 1.120, 1.115, 1.110, \dots, 910$$

2.12 Hallar el valor de t tal que:

$$22.340 + 60(1,04)^{-1/t} = 610 \left(\frac{2}{3(1,04)^{1/t}} \right)$$

2.13 Hallar la suma de cada una de las siguientes sucesiones:

- a) $520, 520(1,03)^{-1}, 520(1,03)^{-2}, \dots, 520(1,03)^{-24}$
- b) $120(1,02)^{15}, 120(1,02)^{14}, 120(1,02)^{13}, \dots, 120$
- c) $A(1+k)^{11}, A(1+k)^{10}, A(1+k)^9, \dots, A$
- d) $R(1+i)^{-30}, R(1+i)^{-29}, R(1+i)^{-28}, \dots, R(1+i)^{-1}$

2.14 En cada uno de los siguientes casos, hallar el valor de h:

- a) $365.400 = 227.200(1+h)^{18}$
- b) $1.240.000 = 863.500 \left(1 + \frac{h}{12}\right)^{12}$
- c) $17.415 = 5.628(1+0,02)^{1/2}$
- d) $490.600(1,042)^h - 231.420(1,042)^{-3h} = 0$
- e) $2.360.520 = 1.485.370 \left(1 + \frac{h}{1-h}\right)^{24}$

2.15 Suponga que en una cierta actividad financiera el dinero crece según la expresión: $D(t) = D_0 e^{\alpha t}$, donde D_0 y α son constantes, y $D(t)$ la cantidad de dinero en el año t . Si al final del año uno se tenía una cantidad de \$ 12.300.000 y si al terminar el tercer año se tenía la suma de \$ 14.520.000, ¿cuánto se tendrá seis años más tarde de haber iniciado la actividad?

2.16 Si la función de demanda de un artículo está dada por la función $D(p) = 20.000 - 55.000e^{-0,4p}$ unidades, donde p es el precio/unidad en miles de pesos, determinar: a) El número de unidades demandadas cuando el precio/unidad sea de \$ 2.000. b) El precio por unidad para que la demanda sea de 19.400 unidades.

2.17 En la función $D(t) = D_0 e^{\alpha t}$, se pide:

- a) Hallar α cuando $t = 3, D(3) = 400$ y $D_0 = 180$
- b) Hallar t cuando $\alpha = 1/2, D(7) = 110$ y $D_0 = 75$
- c) Hallar D_0 cuando $t = 10, D(10) = 200$ y $\alpha = -0,01$

2.18 El valor de un determinado proyecto el 1/1/01 era de \$ 1.650 millones y de \$ 1.870 millones el 1/1/06. Si el valor del proyecto crece exponencialmente según una función de la forma $V(t) = V_0 e^{\alpha t}$, donde t es el tiempo en años y V_0 y α son constantes, estimar el valor del proyecto el 1/1/08 y determinar el tiempo al cabo del cual el valor del proyecto haya aumentado en \$ 530 millones a partir del valor inicial.

2.19 En 1990 la población de una ciudad era de 2.520.000 de habitantes, y en el año 2000, de 3.140.000 de habitantes. Si la población crece exponencialmente según la función $p(t) = Ke^{\alpha t}$, donde K y α son constantes, hallar la función de población de esta forma donde t es el tiempo en años y estimar la población de esa ciudad para el año 2008.

- 2.20** El capital invertido en el punto 0 es $K(0) = \$ 5$ millones, y el capital existente cuatro meses más tarde era de $K(4) = \$ 5.245.853,28$. Si el capital crece según la relación $K(t) = Re^{\alpha t}$, donde R y α son constantes, y t es el tiempo medido en meses, se pide hallar el capital existente al cabo de dos años y medio y determinar el momento en el cual el capital existente sea el doble de la inversión en el punto cero.
- 2.21** Si la función que representa una cantidad de dinero al cabo de t meses está dada por $S(t) = a \cdot b^t$, donde a y b son constantes, y además se sabe que $S(0) = \$ 3.820.000$ y que $S(6) = 4.055.007$, se pide hallar los valores de a y b , expresando la constante b como $b = 1 + r$, y determinar el valor de r .
- 2.22** Suponga que la demanda mensual de un artículo está dada por $Q(t) = 40 + 3t$ unidades, donde t está medido en meses. Si el artículo se vende a $\$ 50.000$ la unidad cada mes, se pide calcular la mitad de los ingresos mensuales para los próximos doce meses y hallar la suma de esos doce valores.
- 2.23** Resolver el problema anterior para el caso de una función de demanda de la forma:
 $Q(t) = 34(1,05)^t$

Ecuaciones de diferencia finita

El propósito de este capítulo es conocer las ecuaciones de diferencia finita y su aplicación para resolver problemas propios de las matemáticas financieras en los que la variable independiente sea discreta.

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

Al terminar este capítulo el lector estará en capacidad de:

- *Identificar una ecuación de diferencia finita lineal de primer orden.*
- *Resolver una ecuación de diferencia finita lineal de primer orden.*
- *Aplicar las ecuaciones de diferencia finita en la solución de problemas relacionados con el valor del dinero en el tiempo.*

2.1 Introducción

Las situaciones en las que interviene una variable discreta son de gran importancia en las ciencias económicas. Entre estas se encuentran: los problemas que relacionan valores en pesos con cantidades cuando estas últimas deben expresarse en números enteros positivos; las relaciones entre las funciones de oferta y demanda cuando ellas dependen del tiempo medido en días, meses o años, entre otros; el valor acumulado de una inversión cuando depende del tiempo medido en períodos de capitalización; el saldo de un sistema de amortización cuando se pagan cuotas periódicas. Lo anterior justifica el estudio, así sea elemental, de las ecuaciones de diferencia finita en las que la variable independiente debe ser discreta y, por tanto, constituyen una de las herramientas matemáticas utilizadas para resolver estos problemas.

Además, con la ayuda de estas ecuaciones podemos resolver problemas propios de las matemáticas financieras que no se ajustan a los modelos o fórmulas tradicionales en esta materia.

Debido a que casi la totalidad de problemas que relacionan los valores relativos al tiempo, propios de las matemáticas financieras, siempre consideran el valor en un período respecto del inmediatamente anterior, esto nos indica que solo necesitamos ecuaciones de diferencia de primer grado. Sin embargo, quien esté interesado en ampliar sus conocimientos en esta clase de ecuaciones puede consultar a Goldberg (*Introduction to Difference Equations*, Science Editions).

Además, aun cuando muchas de las fórmulas utilizadas en matemáticas financieras pueden obtenerse de progresiones aritméticas o geométricas, aquí se lograrán de una ecuación de diferencia finita, con el fin de familiarizarnos con el manejo de estas ecuaciones y garantizar así el éxito en aquellos problemas en los que el único camino que debe seguirse es plantear y resolver una de tales ecuaciones.

2.2 Diferencia finita

DEFINICIÓN 2.1

Sea $y = f(t)$ una función para valores enteros no negativos de t —o sea, para $t = 0, 1, 2, 3, \dots$ —, se llama **primera diferencia**, o diferencia finita de primer grado de $y = f(t)$, a la expresión dada por:

$$\Delta f(t) = f(t+1) - f(t) \quad (2-1)$$

donde $f(t)$ representa el valor de la función f en el punto t , y $f(t+1)$ el valor de la función f en el punto $t+1$.

Con frecuencia se utilizan otras notaciones, como:

$$Y_t \text{ ó } f_t \text{ en lugar de } f(t) \text{ e } Y_{t+1} \text{ ó } f_{t+1} \text{ en vez de } f(t+1)$$

La interpretación gráfica de la primera diferencia de una función $y = f(t)$ podemos verla en la figura 2.1.

De esta manera, $\Delta f(t)$ corresponde al incremento que sufre $y = f(t)$ cuando la variable t se incrementa en una unidad. De aquí su aplicación en las matemáticas financieras, pues en ellas se estudia fundamentalmente la variación que experimenta el dinero al modificarse el tiempo en un período.

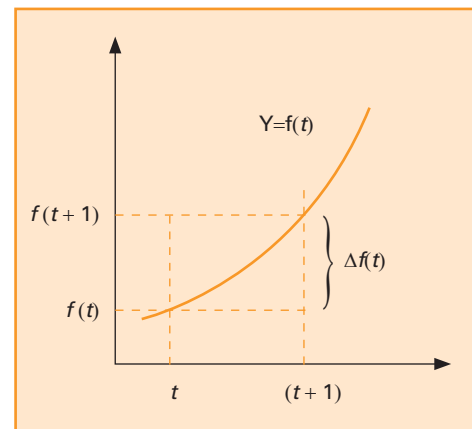


FIGURA 2.1 representación gráfica de $\Delta f(t)$

EJEMPLO 2.1

Si $y = f(t) = 4t^2 - 6$, hallar la diferencia de primer orden.

Solución

Como $y_t = f(t) = 4t^2 - 6$, entonces $y_{t+1} = f(t+1) = 4(t+1)^2 - 6 = 4t^2 + 8t - 2$

Aplicando la expresión (2-1), tenemos:

$$\Delta f(t) = Y_{t+1} - Y_t = (4t^2 + 8t - 2) - (4t^2 - 6) = 8t + 4$$

Como puede observarse, el resultado del ejemplo anterior de $\Delta f(t)$ es una función que depende de nuevo de la variable t ; por tanto, puede hablarse de la primera diferencia de $\Delta f(t)$. Esta se denota por $\Delta^2 f(t)$ y se llama la **segunda diferencia** de $f(t)$, y así sucesivamente. Pero como ya se anotó, uno de los objetivos de este texto es la aplicación de las ecuaciones de diferencia a problemas de matemáticas financieras, y para ello es suficiente el tratamiento de las diferencias de primer orden.

2.3 Ecuaciones de diferencia finita de primer orden

DEFINICIÓN 2.2

Una ecuación que relacione los valores de una función $y = f(t)$ con una o varias de sus diferencias finitas se llama **ecuación de diferencia finita** en $f(t)$.

En adelante las llamaremos simplemente ecuaciones de diferencia. El orden de estas ecuaciones está determinado por la diferencia de mayor grado que se encuentre en la ecuación.

Por ejemplo, son ecuaciones de diferencia de primer orden:

- a) $Y_{t+1} + 3Y_t = 0$
- b) $Y_{t+1} = 2Y_t + 5t$
- c) $Y_{t+1} - Y_t = 8$
- d) $Y_{t+1} - 3Y_t = 2t$
- e) $Y_{t+1} = Y_t$
- f) $2Y_{t+1} + Y_t = 4(2)^t$

Ecuaciones de este tipo aparecen al plantear los problemas de matemáticas financieras en los que la variable t representa el tiempo medido en períodos como días, semanas, meses, trimestres, semestres o años (por tanto, esta variable solo podrá tomar los valores 0, 1, 2, 3, ...), y la variable y_t representa los valores en dinero en el tiempo t .

DEFINICIÓN 2.3

Una función $y_t = f(t)$ es una solución de la **ecuación de diferencia finita** si está definida para valores enteros no negativos y satisface la ecuación dada.

EJEMPLO 2.2

Comprobar que la función $Y_t = f(t) = \frac{t(t-1)}{2}$ es una solución de la ecuación de diferencia siguiente:

$$Y_{t+1} - Y_t = t$$

Para $t = 0, 1, 2, 3, \dots$

Solución

A partir de la función y_t dada, obtenemos:

$$Y_{t+1} = \frac{(t+1)[(t+1)-1]}{2} = \frac{(t+1)t}{2}$$

Reemplazando los valores de Y_t e Y_{t+1} en la ecuación, tenemos:

$$\frac{(t+1)t}{2} - \frac{t(t-1)}{2} = \frac{(t+1)t - t(t-1)}{2} = \frac{t^2 + t - t^2 + t}{2} = \frac{2t}{2} = t$$

o sea que la función $y_t = f(t)$ cumple la ecuación de diferencia dada en el ejemplo.

Existen dos clases de soluciones para una ecuación de diferencia finita: general y particular. Se llama solución general a aquella función que, teniendo una o varias constantes arbitrarias, cumple con la definición 2.3. Se denomina solución particular a aquella función que no tiene constantes arbitrarias y que cumple con la definición 2.3. Por ejemplo, la función $y_t = f(t)$ del ejemplo 2.2 es una solución particular de la ecuación dada allí. El lector puede comprobar que la función

$$Y_t = \frac{C + t(t-1)}{2}$$

donde C es una constante arbitraria, también es solución de la ecuación dada en el ejemplo 2.2. Esta última función es la solución general de la ecuación.

2.4 Ecuación de diferencia lineal de primer orden

DEFINICIÓN 2.4

Se llama ecuación de **diferencia lineal** de primer orden con coeficiente constante en y_t a toda expresión de la forma:

$$a_1 Y_{t+1} + a_0 Y_t = g(t) \quad (2-1)$$

donde a_1 y a_0 son constantes y $g(t)$ es una función que depende de t , siendo $t = 0, 1, 2, 3, \dots$. Son ejemplos de ecuaciones de esta clase, además de los casos (a), (b), (c), (d), (e) y (f) de la sección 2.3, los siguientes:

a) $2Y_{t+1} - 3Y_t = 4t^2 + 6$

b) $Y_{t+1} + 5Y_t = 2(3^t)$

c) $6Y_{t+1} - (3/4)Y_t - (1/4)t + (1/5)e^{-t} + 2 = 0$

En el caso de las matemáticas financieras, la función $g(t)$ se presenta solo como una función polinomial o exponencial, de tal manera que en adelante no trataremos sino estos dos casos.

Debe tenerse en cuenta que una función polinomial es toda expresión que tenga la forma:

$$g(t) = C_n t^n + C_{n-1} t^{n-1} + \dots + C_1 t + C_0$$

donde $C_n, C_{n-1}, \dots, C_1, C_0$ son constantes y n es un entero no negativo. La función exponencial ya se estudió en el capítulo 1.

Según la ecuación (2-2), estas igualdades son aplicables siempre y cuando el valor de la función en estudio, en un período cualquiera, esté relacionado o dependa del valor de esa función en el período inmediatamente anterior; además, la variable independiente debe tomar los valores $0, 1, 2, 3, \dots$

Para efectos de aplicación de estas ecuaciones, consideramos siempre el intervalo general de la forma $[t, t + 1]$ y los valores de una función $y = f(t)$ como Y_t e Y_{t+1} en los extremos de este intervalo. Sin embargo, puede presentarse otra notación para estas ecuaciones, como las que se obtienen al considerar el intervalo general de la forma $[t - 1, t]$. En este caso, la ecuación (2-2) se escribe como:

$$a_1 Y_t + a_0 Y_{t-1} = g_1(t)$$

donde a_1 y a_0 son las mismas constantes de la ecuación (2-2) y $g_1(t)$ es una función que depende de t relacionada con $g(t)$. El manejo de estas nuevas ecuaciones es idéntico al que haremos para aquellas que tienen la forma de la ecuación (2.2); simplemente que la Y_t de la primera ecuación corresponde a la Y_{t-1} de la segunda, y la Y_{t+1} de la primera ecuación corresponde a la Y_t de la segunda.

Veamos, con un ejemplo sencillo, cómo plantear una ecuación de diferencia a partir del enunciado de un problema.

EJEMPLO 2.3

Una compañía recibe un ingreso mensual que cumple la siguiente condición: el ingreso recibido un mes cualquiera es igual a las tres cuartas partes del ingreso recibido en el mes inmediatamente anterior, aumentado en \$ 2.000. Plantear una ecuación de diferencia que relacione los ingresos de dos meses consecutivos.

Solución

En este caso el ingreso depende del tiempo. Sea Y_t el ingreso recibido al final del mes t ; entonces, Y_{t+1} será el ingreso recibido al final del mes siguiente, es decir, en el mes $t + 1$. Esto lo podemos ver en la figura siguiente.

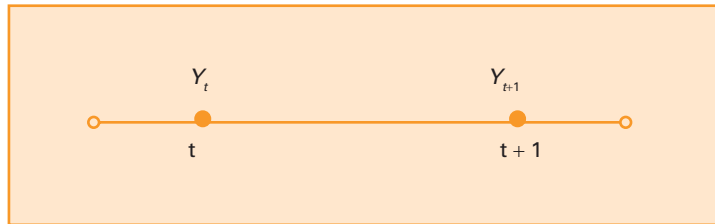


FIGURA 2.2

Según la condición dada en el problema, tenemos:

$$Y_{t+1} = (3 / 4) Y_t + 2.000$$

Y esta es la ecuación de diferencia que, según el enunciado del problema, relaciona los ingresos de los meses consecutivos t y $t + 1$.

2.5 Soluciones de la ecuación de diferencia de primer orden

Para hallar la solución de la ecuación de diferencia de orden dada en la expresión (2-2), debemos tener en cuenta dos casos respecto de la función $g(t)$:

- i) Cuando $g(t)$ sea constante
- ii) Cuando $g(t)$ sea variable

Para cada uno de estos casos se utilizan métodos diferentes que originan soluciones diferentes.

CASO I

Sea $g(t) = k =$ constante. Entonces, la ecuación (2-2) se convierte en:

$$a_1 Y_{t+1} + a_0 Y_t = k$$

que puede llevarse a la forma:

$$Y_{t+1} = AY_t + B \tag{2-3}$$

donde:

$$A = \frac{-a_0}{a_1} \quad \text{y} \quad B = \frac{K}{a_1}$$

Para hallar una solución particular de la ecuación (2-3) es preciso conocer Y_0 , o un valor Y_k para $k = 0$. Estos son los problemas más comunes en matemáticas financieras.

Si conocemos Y_0 , el problema se reduce a resolver la ecuación:

$$Y_{t+1} = AY_t + B, \text{ dado } Y_0$$

Entonces, la ecuación (2-3) va tomando las formas siguientes según el valor de t :

$$\text{Para } t = 0 \quad Y_1 = AY_0 + B$$

$$\text{Para } t = 1 \quad Y_2 = AY_1 + B = A^2Y_0 + B(1 + A)$$

$$\text{Para } t = 2 \quad Y_3 = AY_2 + B = A^3Y_0 + B(1 + A + A^2)$$

$$\text{Para un } t \text{ cualquiera} \quad Y_3 = AY_2 + B = A^3Y_0 + B(1 + A + A^2)$$

$$Y_t = A^tY_0 + B(1 + A + A^2 + \dots + A^{t-1})$$

$$= A^tY_0 + B \left[\frac{1 - A^t}{1 - A} \right], \text{ si } A \neq 1$$

Pero si $A = 1$, se obtiene que $Y_t = Y_0 + Bt$.

En resumen, la solución particular de la ecuación (2-3), conocido el valor de Y_0 , está dada por:

$$Y_t = \begin{cases} A^tY_0 + B \left[\frac{1 - A^t}{1 - A} \right], & \text{si } A \neq 1 \\ Y_0 + Bt, & \text{si } A = 1 \end{cases} \quad (2-4)$$

Si conocemos el valor de Y_k para $K \neq 0$, entonces basta considerar $Y_0 = C$, donde C es una constante arbitraria. Siguiendo el mismo procedimiento anterior, llegamos a la solución general:

$$Y_t = \begin{cases} A^tC + B \left[\frac{1 - A^t}{1 - A} \right], & \text{si } A \neq 1 \\ Y_0 + Bt, & \text{si } A = 1 \end{cases} \quad (2-5)$$

En la expresión (2-5), al reemplazar t por k e Y_k por su valor, se halla el valor de C , que, al sustituirlo en la expresión (2-5), nos da la solución particular correspondiente.

EJEMPLO 2.4

Resolver la ecuación $3Y_{t+1} - 6Y_t = 1$, sabiendo que $Y_0 = 2/3$.

Solución

Primero debemos escribir la ecuación del problema en la forma de la ecuación (2-3):

$$Y_{t+1} = 2Y_t + 1/3$$

Aquí podemos ver que $A = 2$ y $B = 1/3$; como $A \neq 1$, entonces aplicamos la parte correspondiente de la expresión (2-4) y tenemos:

$$Y_t = 2^t(2/3) + 1/3 \left[\frac{1 - 2^t}{1 - 2} \right] = 2^t(2/3) + 1/3(2^t) - 1/3 = 2^t - 1/3$$

EJEMPLO 2.5

Resolver la ecuación $Y_{t+1} - 3Y_t = 2$, si $Y_2 = 17$.

Solución

La ecuación del problema podemos escribirla como $Y_{t+1} = 3Y_t + 2$, en la cual $A = 3$ y $B = 2$; como $A \neq 1$, aplicamos la parte correspondiente de la fórmula (2-5) y tenemos:

$$Y_t = 3^t C + 2 \left[\frac{1-3^t}{1-3} \right] = 3^t C - [1-3^t] = 3^t [C+1] - 1$$

donde C es una constante arbitraria. Su valor puede calcularse mediante la condición $Y_2 = 17$; sustituyendo t por 2 en la solución anterior e Y_2 por 17, llegamos a:

$$17 = Y_2 = 3^2 [C+1] - 1$$

O sea, $18 = 9[C+1]$; y de aquí obtenemos que $C = 1$. Reemplazando este valor de C en la solución hallada anteriormente, obtenemos:

$$Y_t = 2(3)^t - 1$$

y esta es la solución del problema, según la condición dada.

EJEMPLO 2.6

Una empresa tiene unos costos totales mensuales que guardan la siguiente relación: los costos totales de cada mes son iguales a los costos totales del mes anterior, aumentados en \$ 100.000. Si los costos del cuarto mes fueron \$ 3.600.000, estimar los costos para el mes decimoquinto.

Solución

Sea Q_t el costo total en el mes t ; entonces, Q_{t+1} será el costo total en el mes $t + 1$. Del enunciado del problema obtenemos la siguiente relación entre Q_t y Q_{t+1} :

$$Q_{t+1} = Q_t + 100.000$$

Además, tenemos una condición, que es $Q_4 = \$ 3.600.000$. La ecuación anterior es de la forma expresada en (2-3), con $A = 1$ y $B = 100.000$, de tal manera que la solución viene dada por la expresión (2-5) para $A = 1$. Es decir:

$$Q_t = C + 100.000t$$

Como conocemos el valor del costo total en el cuarto mes, entonces sustituimos t por 4 en la solución anterior para llegar a $3.600.000 = Q_4 = C + 100.000(4)$; así que $C = 3.200.000$, y, por tanto, la solución a la ecuación planteada originalmente estará dada por:

$$Q_t = 3.200.000 + 100.000t$$

Finalmente, con esta función el valor del costo total al cabo de quince meses será:

$$Q_{15} = 3.200.000 + 100.000(15) = \$ 4.700.000$$

Según las hipótesis y condiciones expresadas en el enunciado del problema, el costo total para la empresa en el mes decimoquinto será de \$ 4.700.000.

CASO II

Cuando $g(t)$ sea variable, consideramos solamente las dos situaciones siguientes:

- $g(t)$ es una función polinomial
- $g(t)$ una función exponencial

Para ambas situaciones, la solución general de la ecuación homogénea asociada a la ecuación (2-2) tiene la forma siguiente:

$$Y_t = Y_h(t) + Y_p(t) \quad (2-6)$$

Donde $Y_h(t)$ representa la **solución general de la ecuación homogénea** asociada a la ecuación (2-2); es decir, la solución de la ecuación:

$$a_1 Y_{t+1} + a_0 Y_t = 0$$

puede hallarse aplicando el método visto en el caso (i) y, más exactamente, utilizando la solución dada en la fórmula (2-5), así no conozcamos el valor de Y_0 . La función $Y_p(t)$ representa una **solución particular** en la ecuación (2-2). Esta solución particular será de la misma clase de la función $g(t)$. Es decir, si $g(t)$ es un polinomio, entonces $Y_p(t)$ también será un polinomio y del mismo grado que $g(t)$, y si $g(t)$ es una función exponencial, entonces $Y_p(t)$ también será una función exponencial, en la misma base de $g(t)$. Esta solución particular no debe tener constantes arbitrarias, y para hallar esta función se utiliza el método de los coeficientes indeterminados, que se explicará con los ejemplos más adelante.

La solución Y_t debe contener una constante arbitraria en la parte correspondiente a la solución $Y_h(t)$, y esta constante quedará determinada si conocemos Y_0 o Y_k para $k = 0$. La sustitución de t por 0 o por k y de Y_0 o Y_k por su correspondiente valor solo debe hacerse una vez que estén sumadas las dos soluciones, es decir, una vez que se tenga la expresión (2-6).

CASO A

Con un ejemplo, veamos la forma de resolver una ecuación del tipo representado en la expresión (2-2), cuando la función $g(t)$ es un polinomio.

EJEMPLO 2.7

Hallar la solución para el problema siguiente:

$$2Y_{t+1} - 3Y_t = 4t^2 + 1, \text{ si } Y_0 = 5$$

Solución

Primero hallamos la ecuación homogénea asociada a la ecuación del problema; esta ecuación es:

$$2Y_{t+1} - 3Y_t = 0$$

A partir de esta ecuación obtenemos su solución, que es $Y_h(t)$. Utilizando la fórmula (2-5) del caso (i) llegamos a:

$$Y_h(t) = (3/2)^t C$$

donde C es una constante arbitraria; no debe sustituirse en este caso por Y_0 .

En segundo lugar, debemos hallar la solución particular $Y_p(t)$. Como en nuestro caso la función $g(t) = 4t^2 + 1$ es un polinomio de segundo grado, entonces $Y_p(t)$ también será un polinomio de segundo grado en la variable t , y tendrá la forma:

$$Y_p(t) = at^2 + bt + c$$

donde a , b y c son constantes. Estas pueden determinarse hallando $Y_p(t+1)$, que en nuestro caso es:

$$Y_p(t+1) = a(t+1)^2 + b(t+1) + c$$

Y reemplazando en el problema original Y_t por $Y_p(t)$ e Y_{t+1} por $Y_p(t+1)$, esto nos da:

$$2[a(t+1)^2 + b(t+1) + c] - 3[at^2 + bt + c] = 4t^2 + 1$$

o sea:

$$(-a)t^2 + (4a - b)t + (2a + 2b - c) = 4t^2 + 1$$

Igualando los coeficientes de las respectivas potencias de t , tenemos:

$$-a = 4$$

$$4a - b = 0$$

$$2a + 2b - c = 1$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones lineales, obtenemos:

$$a = -4, b = -16, c = -41$$

de tal manera que la solución particular es:

$$Y_p(t) = 4t^2 - 16t - 41$$

Y aplicando la expresión (2-6) tenemos que la solución general es:

$$Y_t = (3/2)^t C - 4t^2 - 16t - 41$$

Como el problema tiene una condición inicial que es $Y_0 = 5$, entonces sustituyendo t por 0 e Y_0 por 5 en la solución general, tenemos:

$$5 = Y_0 = (3/2)^0 C - 4(0) - 16(0) - 41$$

$$\text{o sea que } C = 46$$

Reemplazando C por este valor en la solución general, obtenida anteriormente, llegamos a que la solución del problema original está dada por:

$$Y_t = 46(3/2)^t - 4t^2 - 16t - 41$$

Si en un problema como el anterior no se conoce el valor de Y_0 sino el de Y_k para $k \neq 0$, procedemos de una forma similar a la anterior para hallar el valor de la constante C .

CASO B

Cuando la función $g(t)$ sea una función exponencial, el procedimiento para resolver la ecuación (2-2) es bastante similar al anterior.

EJEMPLO 2.8

Hallar la solución para el problema siguiente:

$$Y_{t+1} = 4Y_t + 3(2)^t, \text{ si } Y_0 = 1$$

Solución

De nuevo, como en el ejemplo 2.6, primero hallamos la ecuación homogénea asociada a la ecuación del problema. Esta ecuación es:

$$Y_{t+1} - 4Y_t = 0$$

Cuya solución es $Y_h(t)$ y está dada por:

$$Y_h(t) = C(4)^t$$

donde C es una constante arbitraria.

Ahora, nuestra función $g(t) = 3(2)^t$ es una función exponencial en la base dos; entonces, la solución particular correspondiente también será una función exponencial en la base dos, con coeficiente arbitrario. Es decir, la solución $Y_p(t)$ tendrá la forma:

$$Y_p(t) = k(2)^t$$

donde K es una constante que debemos calcular como lo hicimos en el ejemplo 2.6.

De esta solución particular obtenemos:

$$Y_p(t+1) = K(2)^{t+1}$$

Reemplazando Y_t por $Y_p(t)$ e Y_{t+1} por $Y_p(t+1)$ en el problema original, tenemos:

$$K(2)^{t+1} - 4K(2)^t = 3(2)^t$$

o sea que:

$$2K(2)^t - 4K(2)^t = 3(2)^t$$

Y aquí llegamos a:

$$-2K = 3, \text{ o sea } K = -3 / 2$$

de tal manera que la solución particular está dada por:

$$Y_p(t) = -\frac{3}{2}(2)^t$$

Aplicando la expresión (2-6), la solución general es:

$$Y_t = C(4)^t - \frac{3}{2}(2)^t$$

y como el problema tiene una condición inicial que es $Y_0 = 1$, entonces sustituimos t por 0 e Y_0 por 1 en la solución general anterior y tenemos:

$$1 = Y_0 = C(4)^0 - \frac{3}{2}(2)^0$$

O sea que $C = 5/2$

Reemplazando C por este valor en la solución general, llegamos a que la solución del problema original está dada por:

$$Y_t = \frac{5}{2}(4)^t - \frac{3}{2}(2)^t$$

EJEMPLO 2.9

Una persona invierte \$ 1.500.000 y al final de cada año tiene los $4/3$ de lo que tenía al final del año anterior, pero, a su vez, retira cantidades así: \$ 80.000 al final del primer año, \$ 90.000 al final del segundo año, \$ 100.000 al final del tercer año y así sucesivamente. ¿Cuánto tendrá al cabo de doce años?

Solución

Sea S_t la cantidad o saldo que la persona tendrá al final del año t después del retiro, entonces S_{t+1} será lo que tenga al final del año $t+1$ después del retiro. Según el enunciado del problema, la relación que podemos establecer entre estas dos cantidades es:

$$S_{t+1} = \frac{4}{3}S_t - R_{t+1}$$

Donde R_{t+1} es el retiro en el año $t+1$. Pero estos retiros guardan alguna relación con el tiempo, y es:

Año	Retiro
1	80.000
2	90.000
3	100.000
.	.
.	.
.	.
t	70.000 + 10.000t
t + 1	80.000 + 10.000t

De tal manera que la ecuación queda así:

$$S_{t+1} = \frac{4}{3} S_t - (80.000 + 10.000 t), \text{ con } S_0 = 1.500.000$$

O, lo que es lo mismo:

$$S_{t+1} - \frac{4}{3} S_t = -10.000 t - 80.000, \text{ con } S_0 = 1.500.000$$

Esta ecuación es de la forma (2-2) con $\mathbf{g(t)} = -10.000t - 80.000$, de tal manera que la ecuación homogénea asociada es:

$$S_{t+1} - \frac{4}{3} S_t = 0$$

Y su solución homogénea será:

$$S_h(t) = \left(\frac{4}{3}\right)^t C$$

Como la función $\mathbf{g(t)}$ es un polinomio de primer grado, entonces la solución particular será de la forma:

$$S_p(t) = at + b$$

Por tanto:

$$S_p(t+1) = a(t+1) + b = at + a + b$$

Sustituyendo estas dos funciones en la ecuación original, obtenemos:

$$[at + a + b] - \frac{4}{3}[at + b] = -10.000 t - 80.000$$

donde, igualando coeficientes, llegamos a que: $a = 30.000$ y $b = 330.000$. Así que la solución particular será:

$$S_p(t) = 30.000t + 330.000$$

Y la solución general será:

$$S_t = \left(\frac{4}{3}\right)^t C + 30.000t + 330.000$$

Pero como $S_0 = 1.500.000$, tenemos:

$$1.500.000 = S_0 = C + 330.000$$

Luego, $C = \$ 1.170.000$, y así la solución al problema es:

$$S_t = 1.170.000\left(\frac{4}{3}\right)^t + 30.000t + 330.000$$

De tal manera que el saldo al cabo de los doce años será:

$$S_{12} = \$ 37.626.071$$

2.6 Casos especiales

Al igual que las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, en las ecuaciones de diferencia finita se presentan algunos casos para los cuales no pueden aplicarse los procedimientos de solución ya estudiados, sino que es necesario hacerles algunas modificaciones. Veamos los casos más frecuentes.

CASO 1

Si la función $\mathbf{g(t)}$ en la expresión (2-2) es una combinación lineal entre una función exponencial y una función polinomial, entonces la solución particular $\mathbf{Y_p(t)}$ también debe ser una combinación lineal de

tales funciones, y los coeficientes se determinan por los mismos métodos vistos en los casos (a) y (b) anteriores.

EJEMPLO 2.10

Hallar la solución a la siguiente ecuación de diferencia bajo la condición dada:

$$Y_{t+1} - 2Y_t = 3(4)^t + 4t, \quad \text{si } Y_0 = 4$$

Solución

La solución de la homogénea asociada:

$$Y_{t+1} - 2Y_t = 0$$

está dada por la función:

$$Y_h(t) = C(2)^t$$

Donde **C** es una constante arbitraria.

La solución particular $Y_p(t)$ será de la forma:

$$Y_p(t) = K(4)^t + at + b$$

donde **K**, **a** y **b** son constantes cuyos valores se determinan, como ya se anotó, por los procedimientos vistos anteriormente. A partir de esta función, tenemos:

$$Y_p(t+1) = K(4)^{t+1} + a(t+1) + b$$

Sustituyendo estas dos funciones en el problema original, se obtiene:

$$[K(4)^{t+1} + a(t+1) + b] - 2[K(4)^t + at + b] = 3(4)^t + 4t$$

Efectuando las operaciones indicadas y simplificando, llegamos a:

$$2K(4)^t - at + (a - b) = 3(4)^t + 4t$$

Igualando coeficientes, tenemos:

$$2K = 3, \quad -a = 4, \quad a - b = -0$$

Y esto nos da:

$$K = 3/2, \quad a = -4, \quad b = -4$$

De tal manera que la solución particular es:

$$Y_p(t) = 3/2(4)^t - 4t - 4$$

Y la solución general es:

$$Y_t = C(2)^t + 3/2(4)^t - 4t - 4$$

A partir de la condición inicial de $Y_0 = 4$, obtenemos el valor de $C = 13/2$; y así la solución al problema original está dada por:

$$Y_t = \frac{13}{2}(2)^t + \frac{3}{2}(4)^t - 4t - 4$$

CASO 2

Si la ecuación (2-2) tiene la forma:

$$Y_{t+1} - aY_t = ra^t$$

donde **r** y **a** son constantes, equivalente a decir que el **A** de la homogénea es igual a la base de la exponencial, entonces la solución de la homogénea asociada a esta ecuación es:

$$Y_h(t) = Ca^t$$

Sin embargo, la solución particular ya no puede ser de la forma:

$$Y_p(t) = Ka^t$$

como puede comprobar el lector al tratar de hallar el valor de **K**. Por tanto, en este caso –es decir, cuando el valor a_0/a_1 en la ecuación (2-2) es el negativo de la base en la función exponencial de **g(t)**– debe tomarse como solución particular una función de la forma:

$$Y_p(t) = Kta^t$$

La función es solución del problema original para $K = r/a$.

EJEMPLO 2.11

Hallar la solución a la siguiente ecuación de diferencia según la condición dada:

$$Y_{t+1} - 3Y_t = 12(3)^t, \text{ si } Y_0 = 2$$

Solución

La solución de la homogénea asociada está dada por:

$$Y_h(t) = C(3)^t$$

La solución particular será de la forma:

$$Y_p(t) = Kt(3)^t$$

El lector debe comprobar por qué la solución particular no puede ser de la forma:

$$Y_p(t) = K(3)^t$$

A partir de nuestra solución particular, tenemos:

$$Y_p(t+1) = K(t+1)(3)^{t+1}$$

Y sustituyendo $Y_p(t+1)$ e $Y_p(t)$ en la ecuación original llegamos a:

$$3K(3)^t = 12(3)^t$$

Igualando coeficientes obtenemos $K = 4$, y la solución particular es:

$$Y_p(t) = 4t(3)^t$$

Por tanto, la solución general es de la forma:

$$Y_t = C(3)^t + 4t(3)^t$$

A partir de la condición de $Y_0 = 2$, obtenemos $C = 2$, y entonces la solución del problema es:

$$Y_t = (3)^t [4t + 2]$$

CASO 3

Si la ecuación (2-2) tiene la forma:

$$Y_{t+1} - Y_t = C_1 t + C_0$$

donde C_1 y C_0 son constantes; es decir, cuando el valor a_0/a_1 en la ecuación (2-2) es -1 , equivalente a decir que el valor de **A** en la homogénea es 1 y **g(t)** es un polinomio de cualquier grado, como en nuestro caso que es de primer grado, entonces la solución particular no puede tener la forma:

$$Y_p(t) = at + b$$

Sino que debe ser:

$$Y_p(t) = t(at + b)$$

EJEMPLO 2.12

Hallar la solución de la siguiente ecuación de diferencia según la condición dada:

$$Y_{t+1} - Y_t = 2t - 3, \text{ si } Y_0 = 4$$

Solución

La solución de la homogénea es $Y_h(t) = C$.

La solución particular debe tener la forma siguiente:

$$Y_p(t) = t(at + b)$$

El lector debe comprobar por qué la solución particular no puede ser de la forma:

$$Y_p(t) = at + b$$

A partir de nuestra solución particular, tenemos:

$$Y_p(t+1) = (t+1)[a(t+1) + b]$$

Sustituyendo estas funciones en la ecuación original, llegamos a:

$$2at + (a + b) = 2t - 3$$

Igualando coeficientes, tenemos que $a = 1$ y $b = -4$, y así la solución particular es:

$$Y_p(t) = t(t - 4)$$

Y la solución general será:

$$Y_t = C + t(t - 4)$$

Con la condición inicial de $Y_0 = 4$, obtenemos que $C = 4$; por tanto, la solución al problema es:

$$Y_t = 4 + t(t - 4)$$

CASO 4

Si $g(t)$ es combinación de polinomio y exponencial, y si en la homogénea $A = 1$ para hallar la solución particular multiplicamos por t solamente la parte correspondiente al polinomio en $Y_p(t)$ y no toda la solución particular. Otro tanto sucede si a es igual a la base de la exponencial: solamente multiplicamos por t la parte de $Y_p(t)$ que corresponde a la función exponencial.

EJEMPLO 2.13

Hallar la solución de:

$$Y_{t+1} - 3Y_t = 4(3)^t - 2t, \quad Y_0 = 2$$

Solución

La ecuación homogénea asociada es:

$$Y_{t+1} - 3Y_t = 0$$

Tenemos que $Y_h(t) = 3^t C$. En este caso, $A = 3$.

La solución particular sería de la forma:

$$Y_p(t) = [K(3)^t] + [at + b]$$

donde el primer paréntesis angular de la derecha de la igualdad es la parte de la solución correspondiente a $4(3)^t$ de $g(t)$, y el segundo paréntesis angular es el correspondiente a la expresión $-2t$ de $g(t)$.

Sin embargo, como $A = 3$ y la base de la exponencial es también tres, entonces la verdadera solución particular tendría la forma:

$$Y_p(t) = [K(3)^t \times t] + [at + b] = Kt(3)^t + at + b$$

De tal manera que:

$$Y_p(t+1) = K(t+1)3^{t+1} + a(t+1) = 3Kt(3)^t + 3K(3)^t + at + a + a + b$$

Reemplazando en el problema original tendremos:

$$[3Kt(3)^t + 3K(3)^t + at + a + b] - 3[Kt(3)^t + at + b] = 4(3)^t - 2t$$

Reduciendo o igualando coeficientes de las respectivas funciones llegamos a:

$$3K = 4$$

$$-2a = -2$$

$$a - 2b = 0$$

De donde $K = 4/3$, $a = 1$ y $b = 1/2$; de tal manera que la solución particular es:

$$Y_p(t) = \frac{4}{3}t(3)^t + t + \frac{1}{2}$$

Pero como $Y_0 = 2$, al reemplazar este valor en la solución general obtenemos $C = 3/2$; por tanto, la solución al problema, según la condición dada, es:

$$Y_t = \left(\frac{3}{2}\right)(3)^t + \left(\frac{4}{3}\right)t(3)^t + t + \frac{1}{2}$$

Con los casos especiales recién vistos completamos el estudio de las ecuaciones de diferencia lineales de primer orden que nos propusimos.

Como se dijo al principio del capítulo, el objetivo es familiarizar al lector con el manejo de las ecuaciones de diferencia para que más adelante puedan aplicarse en la solución de problemas propios de matemáticas financieras; por tal razón, los ejemplos y problemas que aparecen en este capítulo hacen referencia más al aspecto matemático de estas ecuaciones que a las aplicaciones directas de matemáticas financieras. Estas últimas aplicaciones se plantearán más adelante, una vez que hayamos estudiado algunos conceptos básicos como intereses, períodos de capitalización, valor presente y futuro, etcétera.

Sin embargo, veremos cómo plantear algunos problemas en términos de una ecuación de diferencia de primer orden.

EJEMPLO 2.14

Un empleado empieza a trabajar en una empresa con un salario mensual de \$ 15.000. La empresa aumenta los salarios cada año en el 16%. Establecer la relación entre el ingreso mensual del empleado en un año cualquiera y el ingreso mensual del año inmediatamente anterior.

Solución

Como podemos observar, el ingreso mensual depende del tiempo. Entonces, tomamos Y_t como el ingreso mensual en el año t e Y_{t+1} como el ingreso mensual en el año siguiente, es decir, en el año $t + 1$. En un diagrama, esto se representa como en la figura 2.2.

El ingreso o salario en un mes del año $t + 1$, que es Y_{t+1} , debe ser igual al salario mensual del año anterior (t), que es Y_t , más el reajuste del 16%, que es $0,16Y_t$, o sea:

$$Y_{t+1} = Y_t + 0,16Y_t = (1,16)Y_t$$

La que corresponde a una ecuación de diferencia de la clase vista en la expresión (2-3) con $Y_0 = \$ 15.000$.

EJEMPLO 2.15

Usted dispone hoy de \$ 45.000 y cada día, desde mañana, gasta la mitad de lo que tenía el día inmediatamente anterior. Establecer una ecuación que le permita calcular la suma de dinero que aún le queda cualquier día después de efectuar el gasto correspondiente.

Solución

Llamemos saldo a la suma de dinero que le queda diariamente después de efectuar el gasto. Este saldo depende del tiempo; si denominamos S_t al saldo en el día t , una vez efectuado el gasto, entonces S_{t+1} será el saldo al día siguiente después de hacer el gasto correspondiente.

Con la ayuda de la figura 2.2 podemos ver que el saldo S_{t+1} será igual al saldo del día anterior (S_t) menos el gasto del día $t + 1$, que es $(1/2) S_t$; o sea:

$$S_{t+1} = S_t - (1/2)S_t = (1/2) S_t$$

$$\text{y } S_0 = \$ 45.000$$

Esto corresponde a una ecuación de diferencia vista en la expresión (2-3).

EJEMPLO 2.16

En el ejemplo 2.15, suponer que usted recibe \$ 10 el día que efectúa el primer gasto, \$ 20 el día que efectúa el segundo gasto, \$ 30 el día del tercer gasto y así sucesivamente. Establecer una ecuación que le permita calcular la suma de dinero que aún le queda cualquier día, después de efectuar el gasto correspondiente.

Solución

En este caso, los ingresos diarios tienen la forma de $10t$ para $t = 1, 2, 3, \dots$. Entonces el saldo en el día $t + 1$ será igual al saldo del día anterior, menos el gasto del día $t + 1$, más el ingreso de este día; es decir:

$$S_{t+1} = S_t - (1/2)S_t + 10(t+1)$$

O sea:

$$S_{t+1} - (1/2)S_t = 10t + 10$$

Y, además, $S_0 = \$ 45.000$, lo que corresponde a la ecuación vista en la expresión (2-2), con $g(t)$ como un polinomio de primer grado. Por último, debemos tener en cuenta que en casi todos los problemas prácticos se requiere el valor de la función Y_t en un punto específico. Este valor se halla tomando la función Y_t que obtengamos como solución final de la ecuación de diferencia respectiva, y calculándola en el punto específico que pide el problema. Así, por ejemplo, si en el problema del ejemplo (2.15) se pide hallar el saldo dentro de quince días, es decir, una vez efectuado el gasto catorce, entonces debemos resolver la ecuación dada allí. Su solución es:

$$S(t) = 45.000(1/2)^t; \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

y así el saldo dentro de quince días estará dado por:

$$S_{14} = 45.000(1/2)^{14} = \$ 2,75$$

El lector debe resolver este mismo caso cambiando la remuneración, es decir, denotando con 1 el día de hoy y $S_1 = 45.000$. ¿Qué observa?

EJEMPLO 2.17

Dadas las funciones de oferta y demanda:

$$S_t = -35 + \frac{3}{2} P_{t-1} \quad \text{y} \quad D_t = 5 - 3P_t$$

encontrar el precio de equilibrio, suponiendo que el valor inicial del precio es $P_0 = 10$, y calcular P_t para $t = 6$.

Solución

El precio de equilibrio se obtiene a partir de la igualdad $S_t = D_t$, o sea, de:

$$-35 + 1,5P_{t-1} = 5 - 3P_t$$

es decir que:

$$P_t + \frac{1}{2} P_{t-1} = \frac{40}{3}$$

El valor del precio de equilibrio p se obtiene tomando $P_t = P_{t-1} = p$ en la ecuación anterior, lo que equivale a:

$$p + \frac{1}{2} p = \frac{40}{3} \text{ entonces } p = 80 / 9$$

Ahora bien: la ecuación de diferencia respecto del precio queda así:

$$P_t = -\frac{1}{2} P_{t-1} + \frac{40}{3}$$

O, lo que es lo mismo:

$$P_{t+1} = -\frac{1}{2} P_t + \frac{40}{3}$$

y cuya solución es:

$$P_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t P_0 + \frac{40}{3} \left[\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^t}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \right] = \frac{10}{9} \left(-\frac{1}{2}\right)^t + \frac{80}{9}$$

De tal manera que cuando $t = 6$, el precio será:

$$P_6 = \frac{10}{9} \left(-\frac{1}{2}\right)^6 + \frac{80}{9} = \$8,9$$

Con este último ejemplo hemos visto cómo manejar una ecuación de diferencia referida a los períodos t y $t - 1$, muy utilizadas en los textos de teoría económica.

En la sección de problemas el lector encontrará suficientes ejercicios que le permitirán reafirmar los conocimientos básicos sobre estas ecuaciones de diferencia y lo capacitarán para su buen uso en problemas de aplicación a las matemáticas financieras.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Resolver: $2y_{t-1} + 4y_t = 80$; $y_0 = 10$.

Solución

La ecuación del ejemplo es equivalente a la ecuación $2y_t + 4y_{t+1} = 80$; $y_0 = 10$.

Equivalente a decir que:

$$Y_{t+1} = \frac{1}{2} Y_t + 20$$

cuya solución es:

$$y_t = \left(-\frac{1}{2}\right)^t (10) + 20 \left[\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \right] = \frac{40}{3} - \frac{10}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^t$$

2. Resolver la ecuación $3y_t - y_{t-1} = 2t$; $y_0 = 5$.

Solución

La ecuación anterior es equivalente a:

$$3y_{t+1} - y_t = 2(t+1) = 2t+2; \quad Y_0 = 5$$

Y la solución de esta ecuación se obtiene así:

Solución de la homogénea:

$$3y_{t+1} - y_t = 0$$

$$y_{t+1} = \frac{1}{3} y_t \quad \text{entonces} \quad y_h(t) = \left(\frac{1}{3}\right)^t C$$

Solución particular:

$$Y_p(t) = at + b$$

$$Y_p(t+1) = a(1+t) + b = at + a + b$$

Reemplazando estos valores en el problema original, se tiene:

$$3[at + a + b] - [at + b] = 2t + 2$$

$$t(3a - a) + (3a + 3b - b) = 2t + 2$$

$$2a = 2 \rightarrow a = 1$$

$$3a + 2b = 2 \rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Entonces: } Y_p(t) = t - 1/2$$

Por lo tanto, la solución general será igual a:

$$y_t = \left(\frac{1}{3}\right)^t C + t - 1/2$$

Pero como $Y_0 = 5$, se tiene que:

$$5 = y_0 = C - 1/2$$

$$\text{o sea que } C = 11/2$$

Así que la solución final del problema original es:

$$y_t = \frac{11}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^t + t - \frac{1}{2}$$

3. Resolver la ecuación:

$$2y_{t+1} - y_t = 6 \left(\frac{2}{3}\right)^t, \quad y_2 = 10$$

La ecuación homogénea es:

$$2y_{t+1} - y_t = 0$$

cuya solución es:

$$y_h(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t C$$

La solución particular es de la forma:

$$y_p(t) = K \left(\frac{2}{3}\right)^t$$

y entonces:

$$y_p(t+1) = K \left(\frac{2}{3}\right)^{t+1} = \frac{2}{3} K \left(\frac{2}{3}\right)^t$$

Sustituyendo estas funciones en el problema original, se tiene:

$$2 \left[\frac{2}{3} K \left(\frac{2}{3}\right)^t \right] - K \left(\frac{2}{3}\right)^t = 6 \left(\frac{2}{3}\right)^t$$

o sea que:

$$\left(\frac{1}{3}K\right) \left(\frac{2}{3}\right)^t = 6 \left(\frac{2}{3}\right)^t$$

Es decir que $K = 18$.

Así que la solución particular es:

$$y_p(t) = 18 \left(\frac{2}{3}\right)^t$$

y la solución general será de la forma:

$$y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t C = 18 \left(\frac{2}{3}\right)^t$$

Pero como $y_2 = 10$, entonces se tiene que:

$$10 = y_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 C + 18 \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

o sea que $C = 8$.

Y así la solución del problema original, bajo la condición dada, es:

$$y_t = 8 \left(\frac{1}{2}\right)^t + 18 \left(\frac{2}{3}\right)^t$$

El lector debe calcular, a partir de esta solución, los valores y_2 e y_3 , y, con ellos, comprobar que se cumple la ecuación dada por el problema original.

4. Resolver la ecuación $q_t = 20 + 2(P_t - P_{t-1})$, sabiendo que $P_t = 1/3 q_t$ y que $q_0 = 8$.

Solución

La ecuación dada en el problema es equivalente a $q_{t+1} = 20 + 2(P_{t+1} - P_t)$; además, como $p_t = 1/3 q_t$, se obtiene que $q_{t+1} = 20 + 2(1/3q_{t+1} - 1/3q_t)$, o sea que $q_{t+1} = -2 q_t + 60$, cuya solución se puede escribir como:

$$q_t = (-2)^t (8) + 60 \left[\frac{1 - (-2)^t}{1 - (-2)} \right]$$

equivalente a decir que:

$$q_t = -12(-2)^t + 20$$

y entonces:

$$q_t = -4(-2)^t + 20 / 3$$

5. Una persona tiene hoy \$ 2.800.000. Si cada día gasta la décima parte de lo que tenía el día anterior, ¿en qué momento le quedará la suma de \$ 100?

Solución

Si se denota con S_t lo que aún tiene el día t , o saldo en ese momento, se obtiene la ecuación:

$$S_{t+1} = S_t - 1/10 S_t \quad \text{con } S_0 = 2.800.000$$

La solución de esta ecuación es:

$$S_t = \left(\frac{9}{10}\right)^t (2.800.000)$$

Así que aún le quedará la suma de \$ 100 cuando:

$$100 = \left(\frac{9}{10}\right)^t (2.800.000)$$

o sea, $(0,9)^t = 0,000035714$.

$$t = \frac{\ln(0,000035714)}{\ln(0,9)} = 97 \text{ días}$$

6. Resolver la ecuación:

$$S_{t+1} = 0,98S_t + 5t + 2, \quad S_0 = 7.000$$

Solución

La ecuación se debe escribir como:

$$S_{t+1} = 0,98S_t + 5t + 2$$

La ecuación homogénea asociada es:

$$S_{t+1} = 0,98S_t = 0$$

cuya solución es:

$$S_h(t) = (0,98)^t C$$

La solución particular es de la forma: $S_p(t) = at + b$, por ser un polinomio de la parte derecha de la ecuación.

$$\text{Así que: } S_p(t+1) = a(t+1) + b.$$

Entonces, reemplazando en la ecuación original se tiene:

$$a(t+1) + b - 0,98(at+b) = 5t + 2$$

$$\text{o sea, } t(a - ,98a) + (a + b - ,98b) = 5t + 2$$

Equivalente a decir, al igualar los respectivos coeficientes, que:

$$0,02a = 5$$

$$a + 0.02b = 2$$

cuya solución es:

$$a = 250 \text{ y } b = 12.400$$

Así que la función solución tiene la forma:

$$S_t = (0,98)^t C + 250t - 12.400$$

$7.000 = S_0 = C - 12.400$; entonces, $C = 19.400$; por lo tanto, la solución del problema es:

$$S_t = 19.400(0,98)^t + 250t - 12.400$$

7. Resolver la ecuación:

$$R_t - 3R_{t+1} = 6 - \left(\frac{1}{3}\right)^t \quad R_0 = 1.000$$

Solución

La ecuación se debe ordenar como:

$$R_{t+1} = -\left(\frac{1}{3}\right) R_t = 1/3 \left(\frac{1}{3}\right)^t - 2$$

La solución de la ecuación homogénea $R_{t+1} - \left(\frac{1}{3}\right)R_t = 0$, es:

$$R_h(t) = \left(\frac{1}{3}\right)^t C$$

La solución particular es de la forma:

$$R_p = K \left(\frac{1}{3}\right)^t + Q$$

Por tratarse de un caso especial donde el valor de $A = 1/3$ es igual a la base de la exponencial y tener una constante o término independiente:

$$R_p(t+1) = K \left(\frac{1}{3}\right)^{t+1} (t+1) + Q$$

$$K(1/3)^t \left(\frac{1}{3}\right) (t+1) = K(1/3)^t \left(\frac{1}{3}\right)t + K(1/3)^t (1/3) + Q$$

Reemplazando en el problema original se obtiene:

$$K(1/3)^t (1/3)t + K(1/3)^t \left(\frac{1}{3}\right) + Q - (1/3)[K(1/3)^t t + Q] = 1/3(1/3)^t - 2$$

Equivalente a decir que:

$$1/3K(1/3)^t + 2/3Q = 1/3(1/3)^t - 2$$

Igualando coeficientes se obtiene:

$$1/3K = 1/3$$

$$2/3Q = -2$$

Así que $K = 1$ y $Q = -3$.

A partir de estos valores se llega a que la solución tendrá la forma:

$$S_t = (1/3)^t C + (1/3)^t t - 3$$

Como $S_0 = 1.000$; entonces:

$$1.000 = S_0 = C - 3$$

Luego, $C = 1.003$.

Así, la solución general del problema será:

$$S_t = 1003(1/3)^t + (1/3)^t t - 3$$

$$= (1003 + t)(1/3)^t - 3$$

8. Resolver la ecuación:

$$3Y_{t+1} + Y_t = (1/3)^t; \quad Y_0 = 6$$

Solución

La ecuación se debe resolver a partir de la homogénea y la particular, así:

$$3Y_{t+1} + Y_t = 0$$

o:

$$Y_{t+1} + (1/3)Y_t = 0$$

Cuya solución es: $Y_h(t) = (-1/3)^t C$.

La solución particular es de la forma $Y_p(t) = K(1/3)^t$, porque el valor de A ($-1/3$) en este caso es diferente de la base de la exponencial, que es $1/3$.

Entonces: $Y_p(t+1) = K(1/3)^{(t+1)} = K/3(1/3)^t$, y reemplazando en el problema se obtiene:

$$3[K/3(1/3)^t] + K(1/3)^t = (1/3)^t$$

o sea: $2K(1/3)^t = (1/3)^t$; por lo tanto, $2K = 1$ y $K = 1/2$, y así la solución tiene la siguiente forma:

$$Y_t = (-1/3)^t C + 1/2(1/3)^t$$

Como $Y_0 = 6$, se obtiene que $C = 11/2$, y así se llega a que:

$$Y_t = 11/2(-1/3)^t + 1/2(1/3)^t$$

Es la ecuación general de la ecuación dada en el problema.

9. Se inicia una inversión hoy con \$ 3.000.000. Cada año se tiene los $4/3$ de lo que se tenía el año anterior, pero, a la vez, se retira la suma de \$ 1.000.000 cada año. Hallar el saldo al cabo de ocho años.

Solución

Si se denota por S_t el saldo al final del año t después del retiro y por S_{t+1} el del año siguiente también después del retiro, se obtiene la ecuación:

$$S_{t+1} = (4/3)S_t - 1.000.000, \text{ Con } S_0 = 3.000.000$$

La solución de esta ecuación es:

$$S_t = (4/3)^t (3.000.000) - 1.000.000 \left[\frac{1 - (4/3)^t}{1 - 4/3} \right]$$

o sea:

$$S_t = 3.000.000$$

Y así $S_8 = \$ 3.000.000$, lo que significa que en cualquier momento (año) siempre tendrá como saldo \$ 3.000.000, porque lo que retira cada año son los rendimientos de la inversión.

10. Resolver el problema anterior si el retiro es de \$ 900.000.

Solución

La ecuación se cambia, respecto de la del problema anterior, en:

$$S_{t+1} = 4/3 S_t - 900.000$$

Cuya solución es:

$$S_t = (4/3)^t (3.000.000) - 900.000 \left[\frac{1 - (4/3)^t}{1 - 4/3} \right]$$

o sea:

$$S_t = 300.000(4/3)^t + 900.000$$

y así el saldo al cabo de ocho años será:

$$S_8 = \$ 3.896.616$$

11. Resolver el problema 9 si los retiros son de \$ 500.000, \$ 550.000, \$ 605.000, \$ 665.000 y así sucesivamente.

Solución

Los retiros forman una progresión geométrica en la que la razón es 1,1; esto quiere decir que el retiro del mes t será $500.000(1,1)^{t-1}$, y el del mes $t + 1$, $500.000(1,1)^t$, así que la ecuación del saldo dará:

$$S_{t+1} = 4 / 3S_t - 500.000(1,1)^t, \text{ con } S_0 \$ 3.000.000$$

La solución de la ecuación es de la forma de la solución de la homogénea más la solución de la particular. Para esto se escribe la ecuación como:

$$S_{t+1} = 4 / 3S_t - 500.000(1,1)^t$$

y así:

$$S_h(t) = (4 / 3)^t C$$

$$\text{y } S_p(t) = K(1,1)^t; \text{ luego, } S_p(t + 1) = K(1,1)^{t+1} = (1,1)K(1,1)^t.$$

Reemplazando en la ecuación original, se tiene:

$$(1,1)K(1,1)^t - 4 / 3K(1,1)^t = -500.000(1,1)^t$$

o sea:

$$\left(-\frac{0,7}{3}\right)K = -500.000$$

y

$$K = 2.142.857,14$$

Por lo tanto, la solución particular será:

$$S_p(t) = 2.142.857,14(1,1)^t$$

Y así la solución general tendrá la forma:

$$S_t = (4 / 3)^t C + 2.142.857,14(1,1)^t$$

Como $S_0 = 3.000.000$, se tiene que:

$$3.000.000 = S_0 = C + 2.142.857,14$$

Luego, $C = 857.142,86$.

Y así se obtiene que:

$$S_t = 857.142,86(4/3)^t + 2.142.857,14(1,1)^t$$

Por lo tanto, el saldo al cabo de ocho años será:

$$S_8 = \$ 13.155.165$$

PROBLEMAS I

1.1 Averiguar si la función dada $Y = f(t)$ es o no solución de la ecuación correspondiente (K : constante).

- a) $f(t) = K$; $Y_{t+1} - Y_t = 0$
 b) $f(t) = K(2)^t$; $Y_{t+1} = 2Y_t$
 c) $f(t) = K + t(t+1)$; $Y_{t+1} - Y_t = 2t + 3$
 d) $f(t) = t$; $Y_{t+1} - Y_t = 1$
 e) $f(t) = \frac{t(t+1)}{2} + K$; $Y_{t+1} - Y_t = t$
 f) $f(t) = \frac{K}{1+Kt}$; $Y_{t+1} = 3Y_t - 1$
 g) $f(t) = \frac{1}{2} [3^{t+1} + 1]$; $Y_{t+1} = \frac{Y_t}{1+Y_t}$
 h) $f(t) = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^t$; $2Y_{t+1} + Y_t - 3 = 0$
 i) $f(t) = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^t$; $Y_{t+1} + 2Y_t + 1 = 0$

1.2 Hallar la solución de cada uno de los problemas siguientes:

- a) $Y_{t+1} - Y_t = 1$; $Y_0 = 3$
 b) $2Y_{t+1} + Y_t = 3$; $Y_0 = 1/2$
 c) $Y_{t+1} = 2Y_t$; $Y_0 = 4$
 d) $(1/3)Y_t - (4/3)Y_{t+1} = 6$; $Y_0 = 2/3$
 e) $4Y_t - Y_{t+1} = 1$; $Y_0 = 1$
 f) $KY_{t+1} - 2Y_t = 2$; $Y_0 = 2; K)2$
 g) $3Y_{t+1} - 2Y_t - 3 = 3$; $Y_0 = 3$
 h) $2Y_{t+1} - Y_t = 2$; $Y_0 = 4$
 i) $2Y_{t+1} + Y_t = -2$; $Y_0 = 3$
 j) $15Y_{t+1} - 10Y_t - 3 = 0$; $Y_0 = 1$
 k) $3Y_{t+1} - 2Y_t - 6 = 0$; $Y_0 = 4$

1.3 Hallar la solución de cada uno de los problemas siguientes:

- a) $Y_{t+1} = 3Y_t - 1$; $Y_0 = 1/2$
 b) $2Y_{t+1} - Y_t = 2$; $Y_1 = 4$
 c) $Y_{t+1} + Y_t = 0$; $Y_2 = 6$
 d) $(1/2)Y_t - (3/4)Y_{t+1} = 0$; $Y_2 = 6$
 e) $4Y_{t+1} - 2Y_t = 1$; $Y_2 = 2$

1.4 Hallar la solución de cada uno de los problemas siguientes:

- a) $Y_{t+1} + Y_t = 2t + 1$; $Y_0 = 6$
 b) $Y_{t+1} - 3Y_t - 10t^2 = 0$; $Y_1 = 4$
 c) $Y_{t+1} = Y_t + 4t$; $Y_0 = 1$
 d) $Y_{t+1} - Y_t = 2t^2 + t$; $Y_2 = 5$
 e) $2Y_{t+1} - 2Y_t = 3t - 1$; $Y_2 = 6$

1.5 Hallar la solución de cada uno de los problemas siguientes:

- a) $2Y_{t+1} + 3Y_t = 5(2)^t$; $Y_0 = 3$
 b) $Y_{t+1} - 2Y_t = 6(2)^t$; $Y_0 = 1$
 c) $Y_{t+1} + 3Y_t = 2(4)^t - t$; $Y_0 = 2$
 d) $3Y_{t+1} + Y_t = (1/3)^t$; $Y_0 = 6$
 e) $2Y_t - Y_{t+1} = (4)^{t-1} - 3t + 8$; $Y_1 = 4, Y_0 = 1$

1.6 Resolver las ecuaciones de diferencia obtenidas en los ejemplos 2.14, 2.15 y 2.16 de la sección 2.6.

1.7 Una persona ahorra mensualmente sumas diferentes de dinero en una corporación de ahorro que abona un cierto interés. Al denotar por F_t el valor total acumulado o saldo existente al final del mes t , y por F_{t+1} el existente al final del mes siguiente, se ha llegado a que la relación entre estos valores es:

$$F_{t+1} = 0,03F_t + 100(3/2)^t$$

Además, $F_0 = 0$. Hallar el saldo existente dentro de treinta meses.

1.8 Para el caso especial 2 de la sección 2.6, comprobar que el valor de K debe ser igual a r/a para que la función Kta^t sea solución particular.

1.9 Una persona tiene hoy \$ 40.000 y a partir del segundo día gasta cada día la tercera parte de lo que tenía el día inmediatamente anterior. ¿En qué momento le queda aproximadamente \$ 1?

1.10 Un estudiante de inglés empieza aprendiendo el primer día una palabra y en cada día siguiente el doble de las palabras aprendidas el día inmediatamente anterior más una palabra adicional. Calcular cuántas palabras aprenderá dentro de tres meses (noventa días) y cuántas habrá aprendido hasta ese momento.

1.11 Hallar el precio de equilibrio en cada uno de los siguientes casos y calcular el precio en el tiempo dado:

- a) $S_t = -10 + 2p_{t-1}$; $D = 80 - 4p_t$; $P_0 = 18$; $t = 10$
 b) $S_t = -10P_{t+1}$; $D = 80 - P_t$; $P_0 = 50$; $t = 5$
 c) $S_t = -20 + 2P_{t-1}$; $D_t = 100 - 4P_t$; $P_0 = 60$; $t = 6$

1.12 Hallar el precio de equilibrio en cada uno de los siguientes casos y calcular el precio en el tiempo dado:

$$S_t = -40 + 3P_t \text{ donde } P_t = 2P_{t-1} + \frac{2}{3}(32 - P_{t-1})$$

$$D_t = 140 - 3P_t$$

$$P_0 = 40$$

1.13 Sean Y_t la función de ingreso en el período t y C_t la función de consumo en el período t , si estas funciones se relacionan según el modelo siguiente:

$$C_t = \alpha Y_{t-1} + b$$

$$Y_t = C_t + \delta$$

donde α , β y δ son constantes positivas. Hallar las funciones Y_t y C_t sabiendo que $Y(0) = Y_0$ y $C(0) = C_0$.

- 1.14** Si denotamos con P_t el precio de ciertas obligaciones en el período t y con P_{t+1} el precio de esas obligaciones en el período siguiente, supongamos que hemos llegado a una expresión de la forma:

$$P_{t-1} = \left(1 - \frac{a}{b}\right) P_t + \frac{a}{b} K$$

donde a , b y K son constantes. Si $P_0 = h$, hallar una expresión de estas obligaciones en un período t cualquiera.

- 1.15** Expresar en forma matemática cada una de las siguientes proposiciones:

- El ingreso de una compañía en cualquier período es igual al consumo más la inversión en ese período.
- El consumo en cualquier período es proporcional al ingreso en ese período.
- La diferencia entre el ingreso de un período t y el ingreso en el período inmediatamente anterior es proporcional a la inversión en el período t .

- 1.16** Si todas las constantes de proporcionalidad del ejercicio anterior son positivas, resolver el modelo formado por las tres afirmaciones.

- 1.17** Si se inicia con una suma de \$ 60.000, y por efecto de su rendimiento, al final de cada año se tiene el doble de lo que se tenía al final del año inmediatamente anterior, pero, a la vez, cada año se retiran \$ 25.000, empezando después de un año, hallar la suma de dinero que se tendrá diez años después y diez años antes del retiro respectivo.

- 1.18** Resolver el problema 2.17 suponiendo que los retiros son \$ 2.000 el primer año, \$ 4.000 el segundo año, \$ 6.000 el tercer año y así sucesivamente.

- 1.19** Resolver el problema 2.17 suponiendo que los retiros son \$ 2.000 el primer año, \$ 4.000 el segundo año, \$ 8.000 el tercer año y así sucesivamente.

- 1.20** Resolver el problema 2.17 suponiendo que los retiros son \$ $1.000 + 10 = 1.010$ el primer año; \$ $2.000 + 20 = 2.020$ el segundo año; \$ $4.000 + 30 = 4.030$ el tercer año; \$ $8.000 + 40 = 8.040$ el cuarto año, y así sucesivamente.

- 1.21** Resolver cada una de las ecuaciones de diferencia siguientes:

a) $S_{t+1} = (1,03)S_t - 50$; $S_0 = 3.000$

b) $S_{t+1} = (0,98)S_t + 5t + 2$; $S_0 = 7.000$

c) $F_{t+1} = (1,1)F_t - 3.500 + 3t$; $F_1 = 2.500$

d) $U_{t+1} = U_t + 2t$; $U_0 = 250$

e) $R_t - 3R_{t+1} = 6 - (1/3)^t$; $R_0 = 1.000$

- 1.22** La inversión anual que hace una empresa es inversamente proporcional al gasto en el año. Además, el gasto en que se incurre en cualquier año es directamente proporcional al gasto en el año inmediatamente anterior. Si la primera constante de proporcionalidad es 10.000 y la segunda es 1,2, hallar la inversión en el quinto año sabiendo que el gasto del segundo año fue \$ 15.000.000.

- 1.23** El saldo de una cuenta de ahorros al final de cualquier mes es igual al saldo del mes inmediatamente anterior más una cantidad constante. Escribir una ecuación de diferencia representativa de la situación anterior.

1.24 Suponer que un pozo de petróleo produce q_t barriles de petróleo anualmente, donde $t = 1, 2, 3, \dots$ y que al final de cada año se experimenta una disminución en la producción del $r\%$. Determinar el nivel de producción en el año t sabiendo que $q_1 = p$ fue la producción del primer año.

1.25 Un modelo económico que relaciona el consumo C_t , el ingreso Y_t y la inversión I_t en el tiempo t puede ser el siguiente:

$$C_t = 70 + (2/3)Y_{t-1}$$

$$Y_t = C_t + I_t$$

Resolver este modelo para los casos:

a) $I_t = \$ 200$

b) $I_t = \$ 300$

c) $I_t = \$ 500$

Observar el comportamiento de las funciones C_t e Y_t a medida que I_t aumenta.

1.26 Si denotamos por S_t el saldo existente al final del mes t de una cierta deuda que está cubriéndose con pagos mensuales, y por S_{t+1} el saldo existente al final del mes $t + 1$, entonces supongamos que se cumple la siguiente relación:

$$S_{t+1} = S_t + 0,02S_t - 100(t + 1)$$

Y si, además, la deuda original es de \$ 65.000, hallar el saldo pendiente una vez pagada la cuota quince.

1.27 Resolver el problema 2.26 si la relación entre S_t y S_{t+1} es:

$$S_{t+1} = S_t + 0,25 S_t + \left(\frac{1}{3}\right)(5/4)^t$$

1.28 El capital invertido en un proyecto N experimenta un aumento cada año según la relación siguiente:

$$R_{t+1} = \left(\frac{3}{2}\right)R_t + 10t$$

donde R_t representa el capital existente en el proyecto al final del año t . Si la inversión inicial fue \$ 2.500.000, hallar el valor del capital existente en el proyecto al cabo de doce años.

1.29 Resolver el problema 2.28 si la relación entre R_t y R_{t+1} es la siguiente:

$$R_{t+1} = R_t + 10t$$

1.30 Las utilidades que recibe una empresa mensualmente dependen de las utilidades del mes inmediatamente anterior, según la relación:

$$U_t = 2U_{t-1} + 800$$

¿De cuánto fueron las utilidades del primer mes para que al cabo de dos años la empresa tenga unas utilidades de \$ 110.000?

1.31 Se invirtieron hoy \$ 4.000.000 en una entidad financiera. Al final de cada semestre el saldo del semestre anterior se aumenta en el 10%, se retira la suma de \$ 100.000 y se hacen depósitos

así: \$ 50.000 el primer semestre, \$ 60.000 el segundo semestre, \$ 70.000 el tercer semestre y así sucesivamente. ¿Cuál será el saldo ocho años después de realizada la inversión inicial?

1.32 Una cantidad se duplica cada diez meses; se inició con 85. ¿Al cabo de cuántos meses la cantidad total será 2.048 veces la cantidad inicial?

1.33 Si denotamos por Y_t , C_t e I_t el ingreso, el consumo y la inversión respectiva en el período t , medido en años, un modelo que relaciona estas funciones medidas en millones de pesos puede ser el siguiente:

$$Y_t = C_t + I_t$$

$$C_t = 10 + 0,2 Y_t$$

$$Y_{t+1} - Y_t = 3I_t$$

Si $Y_0 = 50$, estimar el consumo al cabo de cinco años.

1.34 La demanda mensual de un artículo guarda la siguiente relación: la cantidad demandada en cualquier mes es igual a los 3/4 de la demanda del mes anterior. Si la demanda del tercer mes fue 1.200 unidades, ¿cuáles serán los ingresos totales por la venta del artículo para el décimo mes, si el precio/unidad para esta fecha se estima en \$ 3.600?

1.35 En el problema 2.34, suponer que la demanda se estabiliza del decimocuarto mes en adelante. ¿Cuáles serán los ingresos por las ventas en el decimosexto mes, si el precio/unidad es el mismo del problema 2.34?

1.36 Cuando se invierte en una institución financiera, esta se compromete a que el dinero rinda de la siguiente manera: cada año el inversionista tendrá un acumulado igual a los 4/3 de lo que tenía el año anterior, pero le descuentan también cada año la décima parte del total acumulado en ese momento. ¿Cuánto tendrá al cabo de doce años una persona que invierte en esa institución \$ 2.500.000?

1.37 Resolver el problema 2.36 si el inversionista deposita cada año \$ 200.000 y el descuento se lo hacen antes del depósito pero después de contabilizado el rendimiento del dinero.

1.38 En un modelo en el que se asegura que en cualquier período t el ingreso Y_t es igual al consumo C_t más la inversión I_t en ese período; y en el que, además, el consumo en cualquier período t es proporcional al ingreso en el período anterior, determinar las funciones de ingreso y consumo en cualquier momento, suponiendo una inversión constante y que $Y(0) = y_0$.

1.39 Resolver el problema 2.38 suponiendo que la constante de proporcionalidad es 1/3 y que $Y_0 = 5.000$ y $I_t = 2.000$ para cualquier tiempo t .

1.40 Resolver el problema 2.38 suponiendo que el consumo en cualquier período t es proporcional al ingreso del período anterior, más una constante.

PROBLEMAS II

- 2.1** Cuando se invierte la suma de \$ 12.000.000 en un proyecto, el total acumulado en cualquier mes depende del total que se tenga al final del mes inmediatamente anterior; suponga que la relación es la siguiente:

$$S_{t+1} = \frac{3}{4} S_t + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3}\right)^t + 3t \text{ millones de pesos,}$$

donde S_t representa el saldo o total acumulado en el mes t . Se pide determinar el total acumulado en el proyecto al cabo de cinco años.

- 2.2** Se inicia un proyecto con una inversión de \$ 32.000.000. El dinero rinde de tal manera que al final de cada semestre se tiene las $4/3$ partes de lo que se tenía al final del semestre anterior; además, cada semestre se retiran cantidades así: \$ 100.000 el primer semestre, \$ 110.000 el segundo, \$ 121.000 el tercero, \$ 133.100 el cuarto y así sucesivamente. Determinar el total que se tendrá al cabo de cinco años antes y después del retiro.

- 2.3** Si Q_t representa la producción de un artículo en el mes t y Q_{t+1} la producción en el mes $t + 1$, suponga que se cumple la relación:

$$Q_{t+1} = 3Q_t + 200 \text{ unidades}$$

y, además, se sabe que $Q_5 = 240$.

Se pide hallar la variación de la producción entre los meses 9 y 10.

- 2.4** Hallar el valor S_{20} en cada caso sabiendo que:

a) $\frac{2}{3} S_t - 2 S_{t+1} - 4t^2 = 205, \quad S_1 = 30$

b) $3S_t - 4S_{t+1} - 6(3/4)^t = 0, \quad S_1 = 120$

- 2.5** En cada uno de los casos siguientes, hallar el valor que se pide bajo las condiciones de cada problema:

a) $S_{10},$ si: $3S_t - 12S_{t+1} - 5 = 0$ y $S_0 = 80$

b) $R_6,$ si: $\frac{R_{t-1} + 4R_t}{6} = 5R_{t-1} + 40$ y $R_1 = 15$

c) $Y_{12},$ si: $6Y_t - 5Y_{t+1} - \frac{1}{2}(3)^t = 1.5000$ y $Y_2 = 8$

d) $U_{24},$ si: $\frac{1}{2}U_t - 2U_{t-1} = 300t$ y $U_0 = 30$

e) $Q_{36},$ si: $8Q_{t+1} + 2Q_t = \frac{3}{2}(Q_t - 5t + 1); \quad Q_1 = 10$

- 2.6** Al cabo de cuántos meses el valor de la función R es igual a 628,43, sabiendo que se cumple la relación $2R_{t+1} - R_t = 310$ y que $R_3 = 10.500$, donde t representa el tiempo medido en meses.

- 2.7** Hallar el valor de $S(t)$ para el valor dado de t en cada uno de los siguientes casos:

a) $2S_{t+1} - S_t = 5t + 3\left(\frac{1}{2}\right)^t; \text{ con } S_0 = 10: \text{ para } t = 6$

b) $4S_{t-1} + 3S_t = 30 + 5\left(\frac{3}{4}\right)^t; \text{ con } S_0 = 18: \text{ para } t = 5$

- c) $\frac{1}{3} S_t - 2 S_{t-1} = t^2 - 2 \left(\frac{2}{3}\right)^t$; con $S_0 = 20$: para $t = 10$
- d) $12 \left(\frac{1}{4}\right)^t + 5t = S_t - S_{t-1}$; con $S_1 = 8$: para $t = 12$
- e) $S_{t+1} - (1,02) S_t = \left(\frac{51}{50}\right)^t + 200$; con $S_0 = 10.000$: para $t = 8$

Se estima que los costos mensuales de un proyecto guardan la siguiente relación: los costos en cualquier mes son iguales a los $\frac{5}{4}$ de los costos del mes anterior, más unos costos fijos mensuales de \$ 4.500.000; se pide determinar los costos del mes 18 sabiendo que los costos totales del segundo mes fueron de \$ 3.100.000.

- 2.9 Sean Y_t , C_t y U_t las funciones de ingreso, costos y utilidades respectivamente (en millones de pesos), en el mes t . Suponga que se cumplen las siguientes relaciones:

$$Y_t - 2Y_{t-1} = 40; Y_1 = 8$$

$$4C_t - 40 = 3C_{t-1}; C_1 = 4$$

Hallar la utilidad cuando:

- a) $t = 1$
 b) $t = 10$
 c) $t = 12$

- 2.10 En un determinado sistema de amortización, las cuotas mensuales para dos meses consecutivos guardan la siguiente relación:

$$\frac{3}{4} C_t - 5 \left(\frac{4}{3}\right)^{t-1} + 80 = \frac{2}{5} (C_{t+1} - C_t)$$

Sabiendo que $C_1 = 20$, hallar los valores de: a) C_4 ; b) C_5 ; y, c) C_6 , e interpretar el comportamiento de las cuotas.

- 2.11 Si denotamos por I_t e Y_t las inversiones y el ingreso en el mes t , supongamos que se cumplen las relaciones siguientes entre esas funciones, medidas en millones de pesos:

$$Y_t = 35 - \frac{1}{3} (I_{t-1} - I_t)$$

$$2Y_{t-1} - 60 = 3Y_t$$

Si $Y_2 = 8$, hallar el valor de I_1 sabiendo que $I_5 = 10$.

- 2.12 Suponga que la relación entre el saldo que se tenga en cualquier mes (S_{t+1}) y el saldo del mes anterior (S_t) sea la siguiente:

$$4S_{t+1} + 3t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^t = 3 + 4S_t; S_0 = 12$$

Se pide determinar los valores S_2 y S_8 .

- 2.13 Sean U_t , Y_t y C_t las funciones de utilidad, ingreso y costos en el mes t , y supongamos que se cumple:

$$U_{t+1} = Y_t - C_t$$

$$Y_t = 20 - \frac{1}{2} Y_{t+1}$$

$$2C_{t+1} = C_t + 40$$

Si $Y_0 = 50$ y $C_0 = 30$, hallar U_{10} .

- 2.14** La inversión que se realiza en un proyecto tiene el siguiente comportamiento: el total acumulado cada trimestre es igual a los $\frac{4}{5}$ del total que se tenía al final del trimestre anterior. Si, además, cada trimestre se reinvierten sumas de dinero que aumentan en el 5%, y \$ 100.000 es la primera reinversión en el mes tres, hallar el total acumulado al cabo de cuatro años y medio, sabiendo que la inversión inicial fue de \$ 80.000.000.
- 2.15** Resolver el problema anterior sabiendo que la primera reinversión de \$ 100.000 se hace nueve meses más tarde de la inversión inicial.
- 2.16** En la siguiente tabla se muestra el comportamiento de las utilidades mensuales de una empresa para los ocho meses anteriores:

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8
Utilidades (millones de \$)	5	4	7	8	6	10	7	9

Se pide completar la tabla siguiente:

Mes (t)	1	2	3	4	5	6	7
U_t	5	4	7				
U_{t+1}	4	7	8				

- 2.17** En el sistema UPAC, uno de los métodos de amortización de una deuda es el de abonos constantes al capital. Si su crédito está pactado en este sistema para ser pagado en n meses con un abono constante A_c al capital, entonces la cuota en el mes t estará dada por:

$$C_t = A_c[1 + (n - t + 1)i], \text{ donde } i \text{ es la tasa mensual.}$$

La relación entre los saldos de los meses t y $t + 1$ es:

$$S_{t+1} = S_t + iS_t - C_t + 1$$

donde S_t es el saldo en el mes t después de pagar la cuota. Si $S_0 = P$ es el valor del crédito inicial, hallar una expresión para S_t .

- 2.18** Dadas las funciones de oferta S_t y demanda D_t siguientes, donde t es cualquier tiempo:

$$S_t = -10 + P_t \text{ y } D_t = 80 - P_{t-1}$$

Si P_t es el precio en el tiempo t , hallar el precio de equilibrio en t , sabiendo que $P_0 = 50$.

- 2.19** En el sistema de **cuotas en UPAC decrecientes** en el $r\%$ a partir de la primera cuota C_1 , se tiene que:

$$C_{t+1} = C_1 - C_1rt$$

donde C_{t+1} es la cuota en el mes $t + 1$. Si el crédito original es P , resolver la ecuación correspondiente de saldos:

$$S_{t+1} = S_t + iS_t - C_{t+1}$$

i es la tasa mensual.

2.20 En un sistema de abono al capital en UPAC geoméricamente decreciente cada mes, la cuota en el mes t está dada por:

$$C = (AC_1)m^{t-1} + \left[P - AC_1 \left(\frac{m^{t-1} - 1}{m - 1} \right) \right] \cdot i$$

donde:

AC_1 = abono al capital en el primer mes

$m = (1-g)^{1/12}$ y g = tasa anual de disminución

P = crédito original, e i = tasa mensual

Escribiendo la cuota del mes t de la forma $C_t = Am^t + B$, resolver la ecuación de diferencia del saldo siguiente:

$$S_{t+1} = S_t + iS_t - C_{t+1}$$

2.21 Un modelo simple de consumo puede ser el siguiente:

$$C_t + S_t = Y_t$$

$$Y = aS_{t-1}$$

$$C_t = bY_t \text{ con } Y_0 \text{ constante, } a > 0; 0 < b < 1$$

donde C_t , S_t e Y_t son las funciones de consumo ahorro e ingreso en el tiempo t respectivamente. Hallar la función de ahorro S_t .

2.22 En el sistema de abono al capital en UPAC decrecientes en una cantidad fija mensual se tiene que:

$$ACU_t = \frac{P}{n} + g \left(\frac{n - 2t + 1}{2} \right)$$

donde ACU_t es el abono al capital en UPAC en el mes t ; entonces:

$$CU_t = ACU_t + \left[P + ACU_t - \frac{Pt}{n} - \frac{g}{2}(nt - t^2) \right] \cdot i$$

siendo CU_t la cuota en UPAC en el mes t , con:

$$g = \frac{6}{12} \cdot \frac{P}{n},$$

donde g es el porcentaje fijo anual de abono constante en el que disminuyen los abonos al capital. Expresar la cuota CU_t en la forma:

$$CU_t = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$$

La expresión que mide el saldo de un crédito P que se amortice con este sistema queda de la forma siguiente:

$$S_{t+1} = S_t + i S_t - CU_{t+1}, \text{ con } S_0 = P(\text{en UPAC})$$

Hallar la expresión para S_t .

2.23 Supongamos una ecuación del precio de mercado como $P_t = Kq_t$, donde q_t es la cantidad de dinero en el mercado en demanda de un bien que tiene un precio P_t , si, además, se cumple que:

$$q_t = q_0 + a(p_t - p_{t-1})$$

Hallar el valor de P_t suponiendo un valor conocido para P_0 .

Interés y valores presente y futuro

El objetivo de este capítulo es llegar a conocer y manejar los conceptos de interés, valores presente y futuro, las principales clases de tasas de interés y su aplicación en problemas financieros.

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

Al terminar este capítulo el lector debe estar en capacidad de:

- *Identificar las principales clases de interés, su aplicación y su interpretación.*
- *Calcular el valor presente y el valor futuro de un flujo de caja.*
- *Establecer relaciones y equivalencias entre diferentes clases de tasas de interés, como efectivas, nominales, anticipadas y vencidas.*
- *Determinar los factores tiempo y tasa de interés en flujos de caja de un solo valor actual y un valor final.*
- *Financiar deudas y obligaciones a lo largo del tiempo en pagos diferentes y no periódicos.*

3.1 Introducción

El uso del dinero no es gratuito, como tampoco lo es el de cualquier otro activo (una casa, un automóvil), ni el de un servicio (luz, agua, teléfono, entre otros). Por tanto, el usuario del dinero, activos o servicios debe satisfacer los deseos de utilidad de quien los proporciona. En el caso del dinero, esta utilidad se mide en unidades monetarias, que, unida al capital en uso, hace que este cambie el valor del dinero con el tiempo, y por esto se habla del **valor cronológico del dinero**.

Frases como “el dinero crea dinero” y “el dinero tiene un valor en el tiempo” son consecuencia de estos deseos de utilidad, y esto genera el concepto de interés, que podríamos definir diciendo que es la compensación pagada o recibida por el uso del dinero o cualquier otro activo.

Como ya se anotó, este concepto puede cuantificarse y medirse en unidades monetarias, como veremos más adelante.

El concepto de interés constituye la base fundamental no solo de las matemáticas financieras, sino de toda operación financiera particular en la que intervienen valores y tiempos.

3.2 Interés

Como ya se planteó en el numeral anterior, el interés corresponde a la renta que se paga por el uso del capital durante un determinado tiempo. De tal manera que si hacemos hoy una inversión de un capital \$ P_0 , es decir, prestamos este dinero, después de un tiempo t tendremos una cantidad total acumulada de \$ F , y entonces podremos representar el interés allí obtenido \$ I mediante la relación siguiente:

$$I = F - P_0 \quad (3-1)$$

Esta cantidad recibe diferentes nombres comerciales: interés, utilidad, variación del dinero en el tiempo t , rentabilidad, etcétera. Sin embargo, algunos de estos nombres no son los propios, como ocurre con el de utilidad, con el cual denotamos otro concepto totalmente diferente. En nuestro caso utilizaremos el nombre interés.

Con el siguiente ejemplo sencillo podrá clarificarse un poco más el concepto anterior. Supongamos que depositamos \$ 1.000 hoy en una cuenta de ahorros (invertimos \$ 1.000) y al cabo de seis meses retiramos todos nuestros ahorros, que ascienden entonces a \$ 1.194 (suma total acumulada). Como podemos ver, el dinero inicial, \$ 1.000, sufrió una variación al cabo de un tiempo de seis meses y se transformó en \$ 1.194.

La diferencia entre estas dos cantidades (es decir, \$ 1.194 – \$ 1.000 = 194) es lo que recibe el nombre de interés.

La relación dada en (3-1) puede expresarse en términos financieros como:

$$\text{Interés} = \text{suma total acumulada} - \text{inversión inicial}$$

que, aplicada al ejemplo anterior, nos da el resultado ya conocido.

Una primera interpretación que podemos darle a estos intereses de \$ 194 es la siguiente: disponer de \$ 1.000 hoy es equivalente a disponer de \$ 1.194 dentro de seis meses. Esta equivalencia obviamente está sujeta a que la variación del poder adquisitivo de \$ 1.000 sea de \$ 194 al cabo de seis meses. En este punto radica una de las mayores dificultades para la aplicación del concepto de interés a la verdadera equivalencia entre dos cantidades de dinero, esto es, en el hecho de que se encuentren en tiempos diferentes a la variación del poder adquisitivo del dinero, ya que en la práctica no siempre se cuenta con índices verdaderamente confiables.

Para medir esta variación del dinero respecto del tiempo se ha convenido en tomar como unidad para el capital invertido \$ P_0 el equivalente a cien unidades monetarias y determinar el rendimiento o variación de esta nueva unidad.

Así, si \$ 100 invertidos hoy se transforman en \$ 120 al cabo de un año, decimos que la variación fue de \$ 20 por \$ 100 invertidos durante un año, y se denota el 20% (se lee el veinte por ciento) o $20/100 = 0,2$. En general, se denotará por el $i\%$ la variación de esta nueva unidad durante un intervalo de tiempo y se le llamará la **tasa de interés**. Así, por ejemplo, es frecuente oír expresiones como: “esta inversión rinde el 36% anual”; “debo pagar unos intereses del 3% mensual”; “mis ahorros están ganando el 8% trimestral”; etcétera.

Grosso modo, definimos el interés como el alquiler que se paga por una suma de dinero tomada en préstamo.

En cualquier sistema financiero, para esa suma de dinero se define una nueva unidad, que es cien unidades monetarias, y se mide con esta. El interés devengado por una de estas unidades se conoce con el nombre de **tasa de interés**, y por eso se denota como el $i\%$ (**i por ciento**); por ejemplo: el 3% indica que debemos pagar o recibir tres por cada cien unidades monetarias, de tal manera que se tiene la siguiente relación: $3\% = 3/100 = 0,03$.

Más adelante estudiaremos las diferentes clases de tasas de interés y las relaciones que existen entre algunas de ellas. Pero dada la importancia que tiene la tasa de interés en la evolución financiera de proyectos de inversión, dedicamos el capítulo 9 a lo que se conoce como **tasa interna de retorno**.

Otro concepto básico en el estudio de la variación del dinero es precisamente el tiempo, y por eso debemos tener claros los conceptos de **tiempo y período**.

Tiempo: es el intervalo durante el cual tiene lugar la operación financiera en estudio. La unidad de tiempo es el año.

Así, por ejemplo, “esta inversión es por dos años”; “un préstamo debemos cancelarlo dentro de tres años”; “refinanciar un saldo a cinco meses”; “la evaluación de este proyecto es a cuatro años y medio”; etcétera, corresponden a los tiempos para cada una de estas operaciones financieras, y, como vemos, no necesariamente deben estar dadas en un número exacto de años, sino que puede ser en un intervalo mayor o menor del año.

Período: se llama período al intervalo de tiempo en el que se liquida la tasa de interés.

Los períodos más utilizados en la práctica son: año, semestre, trimestre, bimestre, mes, quincena, día o cualquier otro período que sea necesario utilizar para la realización de la operación financiera en estudio. Por ejemplo, no debe extrañar que una institución financiera o una persona establezcan unos pagos periódicos cada veintitrés días o cada dos meses y medio, o en cualquier otro período. Así, encontramos expresiones que dicen: “esta inversión rinde el 3,5% mensual”; “el banco me prestó un dinero al 9,5% trimestral”; “invertí en un certificado al 18% semestral”; “el costo del dinero es del 42% anual”; “la tasa de corrección monetaria es del 0,065% diaria”; entre otras. En estos casos, los períodos son: el mes, el trimestre, el semestre, el año y el día respectivamente.

3.3 Clases de interés

Hay tres clases principales de interés:

- Interés simple
- Interés compuesto
- Interés continuo

INTERÉS SIMPLE

DEFINICIÓN 3.1

Se llama interés simple a aquel en el cual los intereses devengados en un período no ganan intereses en el período siguiente.

Por ejemplo, si depositamos hoy \$ 5.000 en una cuenta que paga el 2% mensual de interés simple y no retiramos los intereses mensualmente, entonces al cabo de tres meses tendremos un total acumulado de:

$$5.000 + 2,02(5.000) + 2,02(5.000) + 2,02(5.000) = \$ 5.300$$

Esta clase de interés tiene hoy la desventaja de que, al no capitalizar los intereses, estos pierden poder adquisitivo con el tiempo, de modo que al final de la operación financiera se tendrá una suma total no equivalente a la original, lo que significa que el valor acumulado allí no será representativo del valor inicial. Por esta razón, hoy en día esta clase de interés no se aplica, y si existe una operación en la que no se cobran intereses sobre los intereses, estos deben pagarse periódicamente, ya sea al principio o al final del período. Este caso lo veremos más adelante, en el capítulo 6, cuando estudiemos sistemas de amortización y saldos.

Sin embargo, aquí es importante hacer referencia a operaciones en las que se trata el interés simple.

Una primera será calcular el valor acumulado o saldo al cabo de n períodos con una tasa de interés simple del $i\%$, partiendo de una suma inicial dada de \$ P .

Se tiene que los intereses de cada período serán de iP , así que designamos por S_t el acumulado al final del período t incluyendo los intereses de ese período, y por S_{t+1} el acumulado al final del período $t + 1$ en las mismas condiciones anteriores.

Tenemos:

$$S_{t+1} = S_t + iP; \text{ con } S_t = P$$

Por tanto, resolviendo esta ecuación se llega a:

$$S_t = P(1 + in)$$

Así que al cabo de n períodos, el total acumulado será:

$$S_n = P(1 + in)$$

(3-2)

Por ejemplo, si invertimos hoy \$ 3.000.000 a una tasa de interés simple del 2% mensual, entonces dentro de ocho meses tendremos un total acumulado de:

$$S_8 = 3.000.000(1 + 0,02 \times 8) = 3.480.000$$

que comprenden a los \$ 3.000.000 originales más los ocho montos de intereses de \$ 3.000.000(0,02) = \$ 60.000 cada uno.

Con base en la ecuación (3-2) pueden calcularse cualquiera de las cuatro variables: S_n , P , i o n conociendo las otras tres.

EJEMPLO 3.1

Se invierte hoy la suma de \$ 2.500.000, y se espera recibir dentro de quince meses \$ 3.362.500. Si el interés pactado es simple, hallar la tasa mensual correspondiente.

Solución

Según la ecuación (3-2) tenemos:

$$3.362.500 = 2.500.000(1 + i \times 15)$$

de donde $i = 0,023$.

Es decir, la tasa mensual de interés simple de la operación financiera es del 2,3%.

Otra de las operaciones financieras que incluyen esta clase de interés es la denominada **descuento racional** o **descuento simple**, y se utiliza en los títulos de participación emitidos por algunos gobiernos; títulos que se venden por un valor menor al inicial para luego ser redimidos o liquidados por el total del valor estipulado en el título.

EJEMPLO 3.2

El Gobierno vende un título de partición al 91,40% de su valor inicial, que es de \$ 4.200.000, y se redimirá a los 180 días por el 100%. Determinar el descuento simple o racional que se hizo en el título.

Solución

En este caso tenemos que el inversionista o comprador del título lo adquirió por un valor de $0,914(4.200.000) = \$ 3.838.800$ y recibió la suma de \$ 4.200.000 al cabo de 180 días con sus intereses, de tal manera que el descuento simple que se hizo sobre el título fue:

$$D = 4.200.000 - 3.838.800 = \$ 361.200$$

En el ejemplo anterior también puede calcularse, como se hizo en 3.1, la tasa de interés equivalente a este descuento en el semestre. Por tanto, aquí se cumple, para un período de un semestre, lo siguiente:

$$\$ 4.200.000 = 3.838.800(1 + i \times 1)$$

de donde: $i = 0,09409$ = el 9,41% semestral aproximadamente, lo que en tasa anual equivaldría a $0,09409 \times 2 = 0,18818$, o el 18,82% anual de interés simple.

El estudiante encontrará problemas relacionados con el interés simple o descuento simple, para lo cual deberá, ante todo, tener claro el concepto de interés simple; y, con base en la ecuación (3-2), podrá determinar el valor de la variable en el problema correspondiente.

INTERÉS COMPUESTO**DEFINICIÓN 3.2**

Se llama interés compuesto a aquel que al final del período capitaliza los intereses devengados en el período inmediatamente anterior.

Esto equivale a decir que los intereses obtenidos en un período ganan intereses en el período siguiente, y por esta razón se habla de intereses sobre intereses, lo que financieramente se conoce con el nombre de **capitalización**. La operación matemática que se realiza en cada período es sumarle al capital los intereses y así formar el total acumulado o nuevo capital para el período siguiente.

EJEMPLO 3.3

Si usted deposita hoy \$ 50.000 en una cuenta de ahorros que paga un interés del 6% por trimestre vencido, registrar en una tabla el movimiento de la operación de capitalización durante un año.

Trimestre	Intereses	Total
0	0	50.000,0
1	$50.000 (0,06) = 3.000$	53.000,0
2	$53.000 (0,06) = 3.180$	56.180,0
3	$56.180 (0,06) = 3.370,8$	59.550,8
4	$59.550,8 (0,06) = 3.573$	63.123,8

Podemos observar, con base en la tabla anterior, que los intereses en cada trimestre se calculan según el capital total acumulado hasta ese momento, y estos intereses se suman a ese capital para formar el capital base del período siguiente, es decir, se capitalizan los intereses.

Con esta operación de capitalizar los intereses se busca básicamente que el dinero o capital inicial conserve por más tiempo su poder adquisitivo, a diferencia de lo ocurrido con el interés simple, en el que para lograr este objetivo necesitaríamos tasas de interés bastante elevadas.

3.4 Diagrama de flujo de caja

Dado que en todas las operaciones intervienen dos clases de valores a lo largo del tiempo, los ingresos y los egresos relacionados con tal operación, se llama flujo de caja a la secuencia que representa esos valores, o, lo que es lo mismo, a la secuencia de entradas y salidas de capitales durante el tiempo de la operación financiera. Con el fin de visualizar esta operación, suelen representarse tales valores sobre un segmento de recta que tenga como longitud el tiempo que dure la operación medido en períodos. Esta representación gráfica es conocida con los nombres de **diagrama de flujo de caja** o **diagrama de tiempo valor**, principalmente. También se ha convenido en que los valores se señalen con una flecha, hacia arriba si son ingresos y hacia abajo si son egresos; sin embargo, este orden puede invertirse debido a que esto no afecta los resultados.

Así, por ejemplo, si hacemos una inversión (egreso) hoy por un valor de \$ 10.000 y recibimos unos ingresos de \$ 4.000 dentro de cuatro meses y de \$ 8.000 dentro de diez meses, tenemos que el diagrama de flujo será:

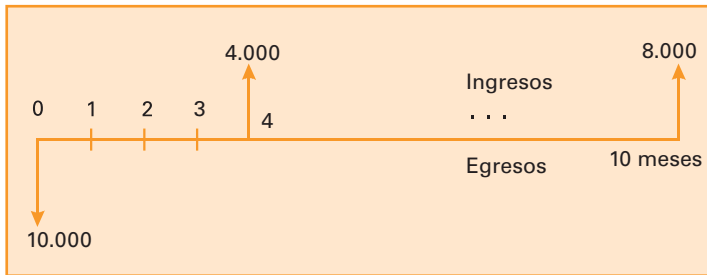


FIGURA 3.1

Representar gráficamente el flujo de caja de un crédito hoy por valor de \$ 850.000, sabiendo que el deudor cubrió esta deuda con cinco pagos trimestrales de \$ 212.000 cada uno y debe pagar el primero tres meses más tarde de contraída la deuda.

Es importante recordar que en toda operación financiera intervienen dos partes –o dos **jugadores**, como se acostumbra decir–, quienes reciben

los nombres de acreedor el uno y deudor el otro. Con el siguiente ejemplo puede verse la relación que existe entre dos diagramas de flujo de caja: el del acreedor y el del deudor.

EJEMPLO 3.4

El Banco AB le otorga un préstamo al señor S por un valor de \$ 5.000.000 y exige que la deuda sea cubierta con tres pagos, así: \$ 2.000.000 dentro de seis meses, \$ 2.500.000 dentro de ocho meses y \$ 2.300.000 dentro de un año. Se pide representar los flujos de caja tanto del Banco AB como del señor S.

Solución

En este caso el Banco AB desempeña el papel del acreedor y, por tanto, su flujo de caja para esta operación financiera es el siguiente:

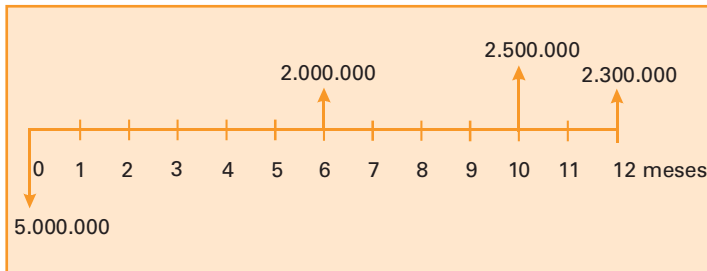


FIGURA 3.2

porque el banco desembolsa (egreso) \$ 5.000.000 y recibe (ingresos) del deudor, señor S, los valores de \$ 2.000.000 al cabo de seis meses, \$ 2.500.000 al cabo de ocho meses y \$ 2.300.000 al cabo de doce meses.

El diagrama de flujo del deudor o señor S es el siguiente (figura 3.3):

porque el deudor recibe hoy (punto 0) la suma de \$ 5.000.000 (ingresos para él) y le paga al banco (desembolsos o egresos para el deudor) los valores dados en el ejercicio en los tiempos correspondientes.

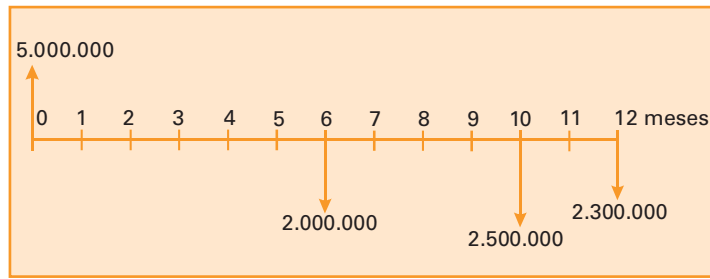


FIGURA 3.3

Aun cuando el ejemplo parece muy elemental, tiene un significado e interpretación básicos, como veremos en los próximos temas que vamos a tratar. También podemos observar que uno es simplemente el inverso del otro; por esta razón, si existe equilibrio entre ingresos y egresos en un diagrama, también existirá equilibrio en el otro.

3.5 Valores presente y futuro

En la sección 3.3 se nombraron las principales clases de interés; sin embargo, debido a que en la actualidad el interés que más se utiliza es el compuesto, el desarrollo de los temas de este libro se hará alrededor de esta clase de interés, sin pasar por alto el interés continuo, que tendría su aplicación hacia el futuro.

Dos conceptos básicos en matemáticas financieras son los que hacen referencia al valor presente y valor futuro de una o varias sumas de dinero. Debido a la estrecha relación que existe entre los dos conceptos anteriores, no importa cuál se define primero, de aquí en adelante calcularemos primero el valor futuro y luego el valor presente, pues en la mayoría de casos utilizaremos las ecuaciones de diferencia finita, que operan en sentido de izquierda a derecha en el tiempo.

DEFINICIÓN 3.3

Dada una suma de dinero \$ P hoy, se llama valor futuro de P al cabo de n períodos y con una tasa de interés del $i\%$ por período al valor \$ F que en esa fecha sea equivalente a \$ P de hoy.

El concepto **equivalencia** desempeña un papel de gran importancia en las matemáticas financieras, tanto que en la casi totalidad de problemas de esta materia lo que se busca es la equivalencia financiera o equilibrio entre los ingresos y los egresos, cuando ellos tienen lugar en puntos diferentes.

En matemáticas financieras este concepto corresponde al equilibrio en otras disciplinas como economía, contabilidad, física y ciencias sociales.

Vamos a obtener una expresión que nos permita hallar F cuando se conocen la cantidad P , la tasa de interés del $i\%$ por período y el número n de períodos.

En el diagrama de flujo de caja siguiente se representa el caso general de una suma invertida de \$ P hoy y su valor futuro F dentro de n períodos. Para obtener F analizaremos los valores en un período cualquiera $[t, t + 1]$.

Sean:

F_t = el valor futuro de P al final del período t .

F_{t+1} = el valor futuro de P al final del período $t + 1$.

Como la tasa de interés por período es el $i\%$, podemos establecer la siguiente relación entre los dos valores futuros anteriores:

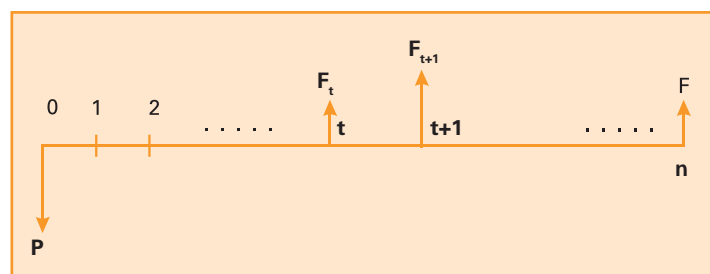


FIGURA 3.4

$$F_{t+1} = F_t + iF_t$$

y se interpreta como que el valor futuro al final del período $t + 1$ es igual al valor futuro o cantidad acumulada al final del anterior (es decir, F_t), más los intereses devengados por esta cantidad durante el período. La expresión anterior es equivalente a:

$$F_{t+1} = (1 + i)F_t, \text{ con } F_0 = P$$

que corresponde a una ecuación de diferencia finita cuya solución, según la sección 2.5, es:

$$F_t = P(1 + i)^t$$

Y esta función, calculada en el punto n (final de n períodos), nos da:

$$F = P(1 + i)^n \quad (3-3)$$

que corresponde a la fórmula para hallar el valor futuro de una cantidad P al cabo de n períodos con una tasa de interés del $i\%$ por período.

El factor $(1+i)^n$ se denota por $(F/P, i\%, n)$ y se conoce con el nombre de **factor de acumulación en pago único**. Esta expresión se lee: "F dados $P, i\%$ y n ".

Existen las tablas de interés que contienen este factor acumulado para algunos valores del $i\%$ y algunos valores de n ; sin embargo, con el uso de la calculadora este factor puede hallarse rápidamente para cualquier valor del $i\%$ y de n .

Podemos expresar entonces la fórmula (3-3) de la manera siguiente:

$$F = P(F/P, i\%, n)$$

y esta será la forma como encontraremos representado el valor futuro de aquí en adelante cuando corresponda a un pago único.

EJEMPLO 3.5

Una persona deposita hoy la suma de \$ 500.000 en una cuenta de ahorros que paga un interés del 2% mensual. Hallar la cantidad total acumulada dentro de cinco años en la cuenta de ahorros.

Solución

Según los datos del problema, tenemos:

$$P = \$ 500.000; i\% = 2\% \text{ mensual}; n = 60 \text{ meses}; F = ?$$

Aplicando la fórmula (3-3) obtenemos el siguiente resultado:

$$F = \$ 500.000(F/P, 2\%, 60) = \$ 1.640.515$$

que representa la cantidad total (capital más intereses) acumulada al cabo de cinco años. La interpretación de este resultado es que si el dinero rinde el 2% mensual a lo largo de los cinco años, es equivalente a tener hoy \$ 500.000 y a tener \$ 1.640.515 dentro de cinco años.

Vamos a considerar ahora la situación recíproca, es decir, aquella en la que, dada una suma futura de dinero, debemos hallar su equivalente hoy. Esto origina el concepto de valor presente como se define enseguida.

DEFINICIÓN 3.4

Dada una cantidad de dinero \$ F al final de n períodos, se llama valor presente de F con tasa de interés del $i\%$ por período a la cantidad \$ P que hoy equivale a F .

En el caso del ejemplo 3.5, tenemos que \$ 1.640.515 es el valor futuro de \$ 500.000, y según la definición 3.4, \$ 500.000 es el valor presente de \$ 1.640.515 en el tiempo considerado en el ejemplo y a una tasa del 2% mensual.

Como podemos observar, esta definición es la recíproca de la definición 3-3, así que según la ecuación (3-3) la cantidad **P** es igual a:

$$P = \frac{F}{(1+i)^n} = F(1+i)^{-n} \quad (3-4)$$

El factor $(1+i)^n$ se denota por **(P/F, i%, n)** y se conoce con el nombre de factor de descuento o factor de valor presente para pago único.

EJEMPLO 3.6

Una persona tiene una obligación por cancelar dentro de dos años y medio por valor de \$ 629.270, con una tasa de interés del 2,5% mensual. Si esta persona desea cancelar la deuda hoy, ¿cuál es el valor de este pago?

Solución

Según los datos del ejemplo, tenemos:

$$F = \$ 629.270; i = 2,5\% \text{ mensual}; n = 30 \text{ meses}; P = ?$$

Aplicando la fórmula (3-4), tenemos:

$$P = \$ 629.270 (P / F, 2,5, 30) = 300.000$$

Este valor se interpreta diciendo que con una tasa de interés del 2,5% mensual es equivalente para el deudor pagar hoy \$ 300.000 o \$ 629.270 dentro de dos años y medio. Similar equivalencia tiene para el acreedor.

Desde el punto de vista gráfico, y de acuerdo con el diagrama anterior, podemos afirmar que el factor $(F/P, i\%, n)$ sirve para llevar una cantidad de izquierda a derecha **n** períodos cuando la tasa sea del **i%** por período, y el factor $(P/F, i\%, n)$ para llevar una cantidad de derecha a izquierda, en las mismas condiciones anteriores.

Sin embargo, no siempre en los problemas prácticos o de la vida real la fórmula o expresión (3-3) puede aplicarse directamente. Por ejemplo, cuando en una operación financiera interviene, además de la tasa de interés, una tasa de retención o de descuento (esto es de gran aplicación hoy en día).

EJEMPLO 3.7

Si usted invierte hoy \$ 4.000.000 en una institución que paga una tasa de interés del 3% mensual pero a su vez hace una retención cada mes del 2% sobre intereses devengados, hallar la suma que tendrá acumulada usted dentro de dos años y medio.

Solución

Si denotamos por S_t el saldo total acumulado al final del mes **t** después de la retención, y por S_{t+1} similar para el mes **t + 1**, entonces se cumple que:

$$S_{t+1} = S_t + 0,03 S_t - 0,02 [0,03 S_t]$$

o sea:

$$S_{t+1} = 1,0294 S_t \text{ con } S_0 = \$ 4.000.000$$

Entonces:

$$S_t = (1,0294)^t (4.000.000):$$

es el total acumulado al final del mes **t**, de tal manera que:

$$S_{30} = (1,0294)^{30} (4.000.000) = \$ 9.540.803$$

es el total acumulado al cabo de treinta meses (dos años y medio).

Como pudo observarse en este ejemplo, la tasa real devengada cada mes no es la diferencia entre la tasa de interés y la tasa de retención, como podría pensarse.

El estudiante debe resolver el ejemplo anterior con la condición de que no se aplique la retención.

EJEMPLO 3.8

Resolver el ejemplo 3.7, pero con la condición de que la retención se aplique sobre el total acumulado al final del mes anterior.

Solución

Con la misma notación del ejemplo 3.7, tenemos:

$$S_{t+1} = S_t + 0,03S_t - 0,02S_t$$

o sea:

$$S_{t+1} = (1,01)S_t \quad S_0 = 4.000.000$$

De tal manera que resolviendo esta ecuación llegamos a:

$$S_t = (1,01)^t (4.000.000)$$

Y así el total al cabo de dos años y medio será:

$$S_{30} = (1,01)^{30} (4.000.000) = \$ 5.391.396$$

Como puede observarse en este ejemplo, la tasa real de rendimiento del dinero es la diferencia entre la tasa de interés mensual y la tasa de retención mensual.

EJEMPLO 3.9

En el ejemplo 3.7, suponer que la retención se hace cada mes sobre el total acumulado ese mes después de cargados los intereses. Hallar el total acumulado al cabo de dos años y medio.

Solución

Con la misma notación del ejemplo 3.7, se cumple al final del mes $t + 1$ que:

$$S_{t+1} = S_t + 0,03 S_t - 0,02 [S_t + 0,03 S_t]$$

o sea:

$$S_{t+1} = 1,0094 S_t \quad \text{con } S_0 = \$ 4.000.000$$

Por tanto, resolviendo esta ecuación llegamos a:

$$S_t = (1,0094)^t (4.000.000)$$

y en dos años y medio tenemos:

$$S_{30} = (1,0094)^{30} (4.000.000) = \$ 5.296.134$$

Podemos darnos cuenta de que en cada uno de los tres ejemplos anteriores la expresión final para calcular el total acumulado al cabo de los dos años y medio es una expresión similar a la dada en la fórmula (3-3), pero en cada caso para una tasa diferente. Estos problemas son comunes en la vida diaria de las operaciones financieras.

Cuando en un ejemplo de caja intervienen varios valores en tiempos diferentes, que es el caso típico para el flujo de caja de un proyecto, el valor presente total se obtiene por la suma de los valores presentes de cada uno de los valores que intervienen. De manera similar puede obtenerse el valor futuro total; es decir:

$$P \text{ total} = \Sigma (\text{valores presentes parciales})$$

$$F \text{ total} = \Sigma (\text{valores futuros parciales})$$

Observación

Una de las reglas básicas de las matemáticas financieras es que solamente pueden relacionarse (+, -, =, <) cantidades que estén en el mismo punto.

EJEMPLO 3.10

Una persona hace los siguientes depósitos en una cuenta de ahorros que paga el 2,5% mensual: \$ 30.000 dentro de tres meses, \$ 42.000 dentro de cinco meses y \$ 28.000 dentro de un año.

- a) Hallar la cantidad total acumulada en la cuenta de ahorros dentro de un año.
- b) ¿Qué depósito único hoy es equivalente a los tres depósitos realizados?

Solución

El diagrama de flujo de caja para este ejemplo es el 3.5.

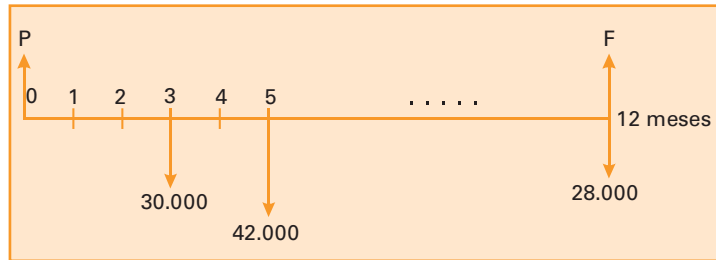


FIGURA 3.5

- a) La cantidad total acumulada dentro de un año corresponde al valor futuro en esa fecha de los tres depósitos realizados. Entonces, con una tasa del 2,5% mensual, tenemos:

$$F = 30.000(F/P, 2,5\%, 9) + 42.000(F/P, 2,5\%, 7) + 28.000 = \$ 115.390$$

Esta es la cantidad que la persona tendrá dentro de un año en la cuenta de ahorros.

- b) El depósito único hoy (punto 0) equivalente a los tres depósitos es el valor presente de estos depósitos; de tal manera que tenemos:

$$P = 30.000(P/F, 2,5\%, 3) + 42.000(P/F, 2,5\%, 5) + 28.000(P/F, 2,5\%, 12) = \$ 85.799$$

Este mismo valor también puede obtenerse como el valor presente de \$ 115.390 de la parte (a); en efecto:

$$P = 115.390(P/F, 2,5\%, 12) = 85.799$$

El lector debe justificar la razón por la cual se obtiene el mismo valor.

En el ejemplo anterior, podemos afirmar que las tres situaciones siguientes son equivalentes:

- i) Los depósitos de \$ 30.000, \$ 42.000 y \$ 28.000 en sus fechas correspondientes.
- ii) El valor de \$ 115.390 dentro de un año.
- iii) El valor de \$ 85.799 hoy.

En general podemos afirmar que, dado un flujo de caja cualquiera, es independiente el punto que elijamos para establecer el equilibrio entre ingresos y egresos, siempre y cuando la tasa de interés sea la misma tanto para los ingresos como para los egresos. Este punto que se escoge para equilibrar el flujo de caja se conoce comúnmente con el nombre de **punto focal**.

EJEMPLO 3.11

Financiar una deuda de hoy por valor de \$ 1.200.000 a un año, en cuatro pagos así: \$ 400.000 dentro de dos meses, \$ 500.000 dentro de seis meses, \$ 100.000 dentro de diez meses y el resto dentro de un año, sabiendo que el acreedor cobra un interés del 3% mensual.

El diagrama de flujo de caja para este caso es el siguiente:

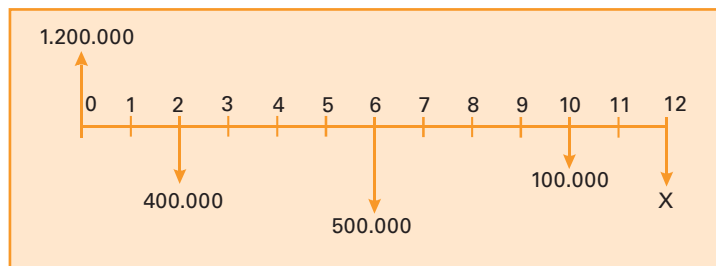


FIGURA 3.6

donde **X** es el valor del cuarto pago por cancelar dentro de un año.

a) Tomemos como punto focal el día de hoy (punto cero); entonces la ecuación de equilibrio es:

$$1.200.000 = 400.000(1,03)^{-2} + 500.000(1,03)^{-6} + 100.000(1,03)^{-10} + X(1,03)^{-12}$$

de donde:

$$X = \$ 470.230$$

b) Tomando como punto focal doce meses, o sea el punto final del diagrama, la ecuación de equilibrio es:

$$1.200.000(1,03)^{12} = 400.000(1,03)^{10} + 500.000(1,03)^6 + 100.000(1,03)^2 + X$$

de donde:

$$X = \$ 470.230$$

c) Si, por ejemplo, quisiéramos tomar como punto focal el 5 (mes cinco) del diagrama, la ecuación de equilibrio allí es:

$$1.200.000 (1,03)^5 = 400.000(1,03)^3 + 500.000(1,03)^{-1} + 100.000(1,03)^{-5} + X(1,03)^{-7}$$

de donde:

$$X = \$ 470.230$$

Como podemos observar, es indiferente el punto de equilibrio que escojamos para equilibrar el diagrama, como ya se anotó, siempre y cuando tanto ingresos como egresos se capitalicen o descuenten con la misma tasa de interés.

3.6 Cálculo del tiempo y la tasa de interés

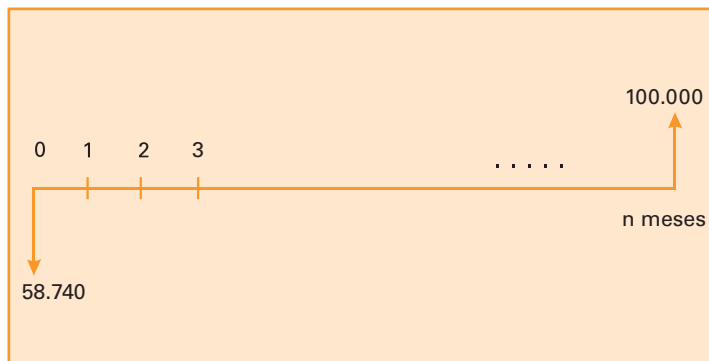
Con base en las expresiones (3-3) y (3-4), podemos hallar los valores de cualquiera de las variables **F**, **P**, **i%** o **n**. Para hallar las dos primeras de estas variables basta aplicar las expresiones antes citadas; para las variables **n** y **i%**, utilizar la calculadora en sus funciones logarítmica y exponencial o también el método de interpolación lineal; y para el caso de hallar el **i%**, utilizar el programa de la TIR en la calculadora financiera.

Veamos algunos ejemplos en los cuales, con el uso de la calculadora, podemos obtener rápidamente el valor de las variables deseadas.

EJEMPLO 3.12

¿En qué momento tener \$ 100.000 es equivalente a tener \$ 58.740 hoy, sabiendo que el dinero rinde el 3% mensual?

Solución



El diagrama de flujo de caja para este ejemplo es el siguiente:

Como la tasa de interés viene dada mensualmente, entonces nuestros períodos son meses, y así la variable estará dada también en meses. Los datos del problema son:

$$P = \$ 58.740; F = \$ 100.000; i = 3\% \text{ mensual}; n = ?$$

FIGURA 3.7

Aquí podemos aplicar independientemente cualquiera de las expresiones (3-3) o (3-4). Si tomamos la primera, tenemos:

$$100.000 = 58.740(1 + 0,03)^n$$

o sea:

$$(1,03)^n = 100.000/58.740 = 1,7024$$

Aplicando logaritmo en ambos miembros y utilizando propiedades de esta función, llegamos a:

$$n = \frac{\ln(1,7024)}{\ln(1,03)} = 18 \text{ meses}$$

o sea que tener hoy \$ 58.740 es equivalente a tener \$ 100.000 dentro de dieciocho meses, siempre que el rendimiento del dinero sea del 3% mensual.

EJEMPLO 3.13

Hallar la tasa de interés trimestral que debe rendir el dinero en una cuenta de ahorros para que un depósito de \$ 50.000 hoy se convierta en \$ 110.780 dentro de 33 meses.

Solución

El diagrama de flujo de caja para este ejemplo es el siguiente:

Como la tasa de interés que debe hallarse es trimestral, entonces nuestros períodos son trimestrales. Los datos del problema son:

$P = 50.000$; $F = 110.780$; $n = 11$ trimestres; $i = ?$

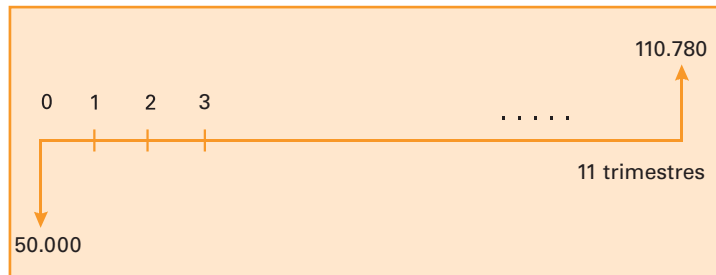


FIGURA 3.8

De la misma manera que en el ejemplo 3.12, podemos aplicar cualquiera de las expresiones: (3-3) o (3-4). Con la primera de estas tenemos:

$$110.780 = 50.000(1 + i)^{11}$$

o sea:

$$(1 + i)^{11} = 110.780/50.000 = 2,2156$$

Aplicando el logaritmo en ambos miembros y mediante propiedades de esta función, tenemos:

$$\ln(1 + i) = \frac{\ln(2,2156)}{11} = 0,07232$$

Aplicando el antilogaritmo llegamos a:

$$i = 0,075 = 7,5\% \text{ trimestral}$$

En este momento, utilizando la calculadora financiera, el lector deberá encontrar y aprender a manejar los programas que le permitan hallar una de las cuatro variables para pagos únicos, **F, P, n, i**, conocidas o dadas de las otras tres variables. Para ello se sugiere desarrollar ejercicios de la sección de problemas al final del capítulo y, aun más interesante, que el lector los construya y resuelva.

3.7 Interpolación lineal

Existe en matemáticas el llamado **método de interpolación lineal**, que consiste básicamente en: dados dos puntos de una curva, hallar otro intermedio utilizando la función lineal, es decir, suponiendo que los tres puntos están sobre la misma recta. Esto se aplica para **aproximar** o **ajustar** puntos que estén

sobre una curva a puntos que estén sobre una recta y, de esta manera, darle una solución **aproximada** a una serie de problemas.

Recordemos que si tenemos tres puntos: $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$, para que estos tres puntos estén sobre la misma recta se requiere que la pendiente entre A y B sea igual a la pendiente entre B y C (o entre A y C); es decir, que se cumpla:

$$\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1}$$

que en proporciones equivale a:

$$“(b_2 - a_2) \text{ es a } (b_1 - a_1) \text{ como } (c_2 - b_2) \text{ es a } (c_1 - b_1)”$$

En matemáticas financieras, la interpolación lineal se utiliza para calcular una tasa de interés o el tiempo en una operación, como veremos en el capítulo 9. Es de advertir que con las nuevas calculadoras podemos acercarnos a la respuesta correcta sin necesidad de acudir a la interpolación lineal.

EJEMPLO 3.14

Resolver el ejemplo 3.13 utilizando el método de interpolación lineal.

Solución

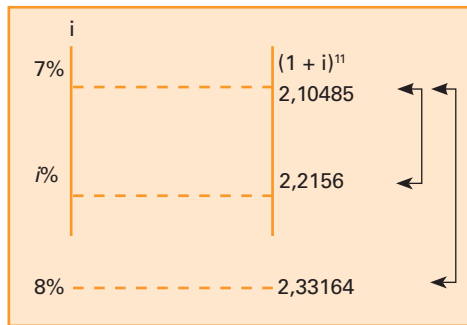


FIGURA 3.9

Según el ejemplo 3.13, tenemos:

$$(1 + i)^{11} = 2,2156$$

Por tanto, para valores del $i\%$ debemos llegar a encontrar dos tasas para las cuales los valores de $(1 + i)^{11}$ se encuentren el uno por encima de 2,2156 y el otro por debajo. Efectivamente, llegamos a que:

$$(1 + 0,07)^{11} = 2,210485 \text{ y } (1 + 0,08)^{11} = 2,33164$$

de tal manera que el valor de i tal que $(1 + i)^{11} = 2,2156$ se encontrará entre el 7% y el 8%, así como 2,2156 se encuentra entre 2,10485 y 2,33164. Para hallar este valor aproximado podemos recurrir al siguiente diagrama.

Y relacionamos los extremos y el medio con un extremo diciendo:

$$“(0,07 - 0,08) \text{ es a } (2,10485 - 2,33164) \text{ como } (0,07 - i) \text{ es a } (2,10485 - 2,2156)”$$

o sea:

$$\frac{0,07 - 0,08}{2,10485 - 2,33164} = \frac{0,07 - i}{2,10485 - 2,2156}$$

que corresponde a una proporción similar a la dada para los puntos A, B y C.

A partir de la relación anterior llegamos a:

$$i = 7,49\%$$

Aproximadamente, $i = 7,5\%$.

Como puede observarse, en este caso es más exacta la operación con logaritmos.

EJEMPLO 3.15

¿Al cabo de cuánto tiempo una inversión de \$ 65.000 se convierte en \$ 114.700, sabiendo que el dinero rinde el 2,5% mensual?

Solución

Con un diagrama de flujo de caja de la misma clase del utilizado en el ejemplo 3.14 pero donde la incógnita es n , tenemos:

$$114.700 = 65.000(1,025)^n$$

de donde:

$$(1,025)^n = 114.700 / 65.000 = 1,764615$$

Por tanto, llegamos a:

$$(1,025)^{22} = 1,72157 \text{ y } (1,025)^{24} = 1,808726$$

y con un diagrama de la forma:

llegamos a:

$$\frac{22 - 24}{1,72157 - 1,808726} = \frac{22 - n}{1,72157 - 1,764615}$$

de donde $n = 23$ meses aproximadamente. El mismo resultado puede verse utilizando la calculadora en sus funciones logarítmicas.

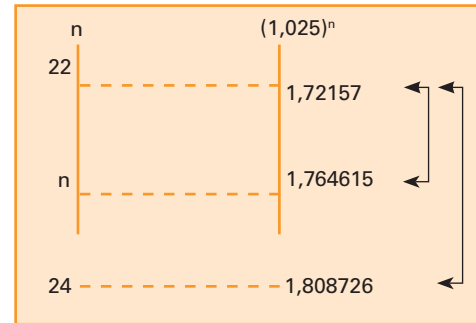


FIGURA 3.10

3.8 Tasa de interés

La tasa de interés (y, en general, las tasas utilizadas tanto en matemáticas financieras como en evaluación financiera de proyectos) recibe diferentes nombres; por esta razón enseguida veremos algunas de las más utilizadas:

- Tasa de interés simple
- Tasa de interés compuesta
- Tasa de interés efectiva
- Tasa de interés nominal
- Tasas de interés equivalentes
- Tasa de interés discreta
- Tasa de interés continua
- Tasa de interés vencida
- Tasa de interés anticipada
- Tasas de interés compuestas
- Tasa de inflación
- Tasa de devaluación
- Tasas de oportunidad
- Tasa interna de retorno

Dada la importancia que tiene la llamada tasa interna de retorno como índice de evaluación financiera, le dedicaremos el capítulo 9 de este texto.

3.8.1 TASA DE INTERÉS SIMPLE

Es la tasa de interés que, al final de cada período, se aplica únicamente sobre el capital inicial. Esto implica que el capital permanece constante durante el tiempo de la operación financiera, así como los intereses devengados al final de cada período.

Por ejemplo, cuando se invierte un capital de \$ 1.000.000 al 5% trimestral de interés simple y al cabo del primer trimestre los intereses son de $0,05(1.000.000) = 50.000$, otro tanto al final del segundo, tercero y cuarto trimestres, lo que significa que al cabo de un año el inversionista tendrá un total acumulado de $\$ 1.000.000 + 4(50.000) = \$ 1.200.000$. Esto quiere decir que la inversión ganó el 20% anual.

Como podemos ver, los intereses devengados en un trimestre no ganaron intereses en el trimestre siguiente.

En la actualidad, debido a la pérdida del poder adquisitivo del dinero, es factible que los \$ 1.200.000 del fin de año no tengan el poder adquisitivo de \$ 1.000.000 del principio del año, lo que hace que esta clase de interés ya no se utilice en las operaciones financieras, y, en cambio, sí aquel donde los intereses se capitalizan, que es el interés compuesto.

3.8.2 TASA DE INTERÉS COMPUESTO

Esta es la tasa de interés que, al final de cada período, se aplica tanto al capital anterior como a los intereses devengados en ese período. Esto equivale a decir que es la operación en la cual los intereses ganan intereses, y por eso el sistema se conoce como **sistema de capitalización**, lo que significa que los intereses devengados en un período forman parte del capital (se convierte en capital) para el período siguiente. Es el caso de la mayoría de inversiones actuales; así, por ejemplo, si invertimos hoy una suma de \$ 500.000 a una tasa del 8% trimestral, dentro de un año tendremos un total acumulado de:

$$F = 500.000(1,08)^4 = \$ 680.244,5$$

y no la suma de $500.00 + 4(40.000) = \$ 660.000$, que correspondería al caso del 8% trimestral de interés simple durante un año.

Esta clase de interés se aplica en la mayoría de las operaciones de cualquier sistema financiero, y por esta razón debe dársele la máxima atención y estudio.

3.8.3 TASA DE INTERÉS EFECTIVA

Es la tasa de interés que realmente se aplica en el período de capitalización sobre el capital, para calcular los intereses.

La tasa de interés efectiva se identifica porque solamente aparece en la parte numérica seguida del período de capitalización o liquidación de intereses; por ejemplo, se dice "una tasa de interés del 3% mensual, del 9% trimestral, del 15% semestral o del 32% anual", y también se denota como el 32% EA (el 32% efectivo anual). Es de advertir que estas tasas anteriores no son equivalentes entre sí. La interpretación es: si invertimos, por ejemplo, \$ 100 hoy al 3% mensual, dentro de un mes tendremos:

$$100(1 + 0,03) = 100(1,03) = \$ 103$$

que corresponde a:

$$100 + 0,03(100) = \$ 103$$

Al final del segundo mes tendremos:

$$103(1,03) = \$ 106,09$$

que corresponde a:

$$100 + 0,03(103) = \$ 106,09$$

Como podemos observar, la tasa del 3% se aplica cada mes al capital anterior. Al final del tercer mes tendremos:

$$100(1,03)^3 = \$ 109,27$$

que corresponde a:

$$106,09 + 0,03(106,09) = \$ 109,27$$

y así sucesivamente.

Es decir, la tasa del 3% se aplica cada mes al capital existente al final del mes anterior, y así obtenemos los intereses reales o efectivos en ese mes.

También podemos ver que al final del tercer mes los \$ 100 invertidos inicialmente al 3% mensual se han convertido en \$ 109,27, lo que nos muestra que el 3% mensual no equivale al 9% trimestral, ya que con esta última tasa el valor total acumulado al final del primer trimestre será de:

$$100 + 0,09(100) = 100(1,09) = \$ 109$$

Es importante tener en cuenta que todas las operaciones financieras se calculan con tasa de interés efectiva, así como toda fórmula que se utilice para resolver problemas financieros. Sin embargo, en la práctica muchas veces la tasa viene expresada en otros términos; por tanto, lo que debe hacerse en estos casos es convertirla a efectiva, o, utilizando una calculadora financiera, esta automáticamente hace la conversión a efectiva y desarrolla la operación correspondiente.

3.8.4 TASA DE INTERÉS NOMINAL

Es la tasa de interés que, expresada anualmente, capitaliza varias veces al año. Por esta razón, la tasa nominal no refleja la realidad en cuanto a los intereses devengados anualmente, y de ahí su nombre; a diferencia de la tasa efectiva, que sí nos indica el verdadero interés devengado por un capital al final del período respectivo. Sin embargo, en la mayor parte de las operaciones financieras se utiliza la tasa nominal para expresar el tipo de interés que debe pagarse o cobrarse en esa operación. Esto implica que para realizar los cálculos de la operación financiera, lo primero que debe hacerse es convertir esta tasa nominal a la tasa efectiva en cada período de capitalización, porque, como ya se anotó, solo debemos utilizar la tasa efectiva por período.

La forma de denotar una de estas tasas es, por ejemplo, cualquiera de las siguientes expresiones:

- El 36% nominal anual capitalizable trimestralmente.
- El 36% nominal capitalizable trimestralmente.
- El 36% nominal trimestral.
- El 36% capitalizable trimestralmente.
- El 36% anual liquidable por trimestre vencido.
- El 36% TV (TV: trimestre vencido).
- El 36% ATV (ATV: anual trimestre vencido).

La relación que existe entre una tasa nominal del $j\%$ capitalizable m veces al año y la tasa del $i\%$ efectiva en cada uno de los m períodos es la siguiente:

$$i = \frac{j}{m} \quad (3-5)$$

Así, por ejemplo, el 36% nominal trimestral corresponde a una tasa efectiva trimestral del 9% (el $36\%/4$), y es esta la tasa que debe utilizarse cada trimestre cuando la tasa pactada en la operación financiera sea del 36% nominal trimestral.

EJEMPLO 3.16

Supongamos que invertimos hoy \$ 100 en una entidad que paga el 36%TV. Si el tiempo es de un año, determinar el valor total acumulado al final del año.

La tasa trimestral para determinar los intereses es:

$$i = \frac{36\%}{4} = 9\%$$

de tal manera que al cabo de cuatro trimestres se tendrá un total acumulado de:

$$100(1,09)^4 = 141,16$$

Lo que quiere decir que los \$ 100 invertidos inicialmente ganan un total de \$ 41,16 de intereses al cabo de un año; esto es, la tasa de interés efectivo anual en esta inversión fue del 41,16%. Por esta

razón, a la tasa del 36% se le llama nominal, dado que como cifra lo es solo de nombre, puesto que la que mide la rentabilidad real es la tasa del 41,16% anual.

Debe tenerse en cuenta que algunas veces se habla, por ejemplo, del 30% nominal anual o simplemente del 30% convertible anualmente, para indicar que es la tasa que capitaliza una sola vez al año, es decir, que corresponde a una tasa efectiva anual del 30%.

Con lo anterior se quiere significar que la tasa anual es la única tasa que en forma nominal capitaliza una sola vez al año; en otras palabras, que la única tasa que puede ser simultáneamente nominal y efectiva es la tasa anual, y por eso comúnmente se habla, por ejemplo, del 32% nominal anual equivalente al 32% efectivo anual.

ALGUNOS NOMBRES ESPECIALES DE TASAS NOMINALES Y EFECTIVAS

Es importante en este momento precisar los nombres de algunas tasas nominales y efectivas que comúnmente se confunden, pero que representan modalidades totalmente diferentes.

Tasa	Período de capitalización
Semestral	Una vez cada seis meses
Cuatrimestral	Una vez cada cuatro meses
Cuatrimensual	Cuatro veces cada mes
Trimestral	Una vez cada tres meses
Trimensual	Tres veces cada mes
Bimestral	Una vez cada dos meses
Bimensual	Dos veces cada mes
Mensual	Una vez cada mes
Semanal	Una vez cada semana

3.8.5 TASAS EQUIVALENTES

Se dice que dos tasas son equivalentes cuando ambas, operando en condiciones diferentes, producen el mismo resultado.

En este caso, el concepto operar en condiciones diferentes hace referencia a que ambas capitalizan en períodos diferentes, o que una de ellas es vencida y la otra anticipada. Así, por ejemplo, decimos que el 3% mensual es equivalente al 9,27% trimestral y también al 42,57% anual.

Cuando estudiamos la tasa nominal vimos que una inversión por un año al 36% nominal trimestral ganaba al año el equivalente a una tasa del 41,16% efectiva anual, de tal manera que estas dos tasas son equivalentes.

Una expresión básica en el manejo de tasas equivalentes es la que nos permite calcular directamente la tasa anual equivalente a una tasa nominal y viceversa.

Sea el $j\%$ una tasa nominal capitalizable m veces/año, y sea el $i\%$ la tasa anual equivalente. Se

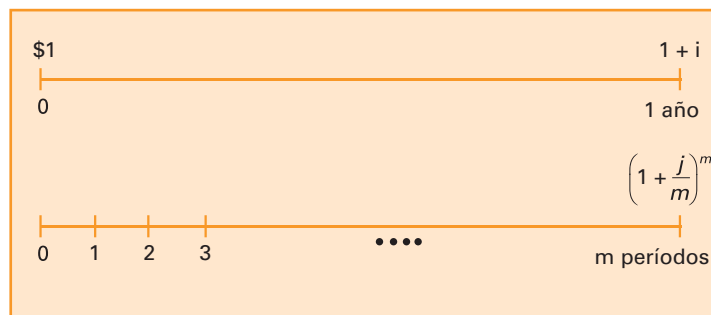


FIGURA 3.11

trata de obtener una expresión que relacione las dos tasas. Como cada tasa tiene su período de capitalización, tomamos el mayor de estos, en este caso el año, y asignamos un diagrama de un año para cada tasa: uno medido en años y otro medido en m períodos.

Y decimos que el \$ 1 invertido hoy a la tasa del $i\%$ anual se convierte al final del año en $1 + i$, y que el \$ 1 invertido hoy a la tasa del $j\%$ capitalizable m veces al año se convierte al final

del año en $(1 + j/m)^m$. Para que las tasas sean equivalentes, se requiere que los resultados al final del año sean iguales; esto es:

$$1 + i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m \tag{3-6}$$

Con esta expresión se calcula la tasa anual equivalente a una tasa nominal y viceversa; así, por ejemplo, la tasa anual equivalente al 36% nominal trimestral es:

$$1 + i = \left(1 + \frac{0,36}{4}\right)^4$$

o sea, $i = (1,09)^4 - 1 = 0,4116 = 41,16\%$ anual, como habíamos visto.

Los siguientes casos se presentan cuando, dada una tasa, se trata de hallar otra tasa equivalente:

Dada	Hallar	Equivalente
Efectiva		Efectiva
Efectiva		Nominal
Nominal		Efectiva
Nominal		Nominal

La idea central, en cualquiera de estos casos, es la utilizada para llegar a la expresión (3-6).

Cada uno de estos casos se explicará con un ejemplo.

EJEMPLO

(E→E) ¿Qué tasa trimestral es equivalente al 3% mensual?

Sea el $i\%$ la tasa trimestral que se pregunta, y tomando un tiempo de un trimestre para cada una de las tasas, tenemos:

Por \$ 1 invertido al principio del trimestre, se tendrá al final del primer diagrama un total de: $1 + i$, y, al final del segundo diagrama, un total de $(1,03)^3$, de tal manera que:

$1 + i = (1,03)^3$ o sea: $i = 9,27\%$ trimestral.

Esto quiere decir que el 9,27% trimestral es equivalente al 3% mensual.

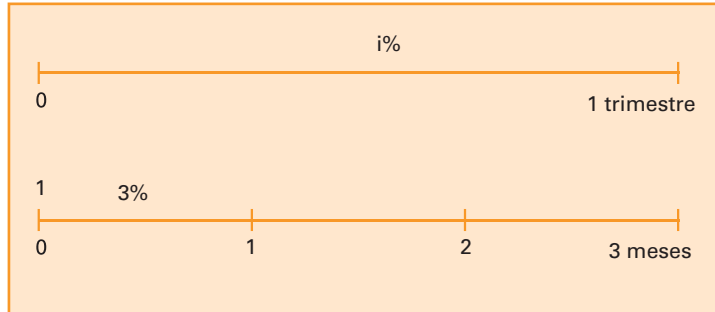


FIGURA 3.12

EJEMPLO

(E→N). ¿Qué tasa nominal trimestral es equivalente al 18% semestral?

Sea el $j\%$ la tasa nominal trimestral que se pregunta, y tomando un tiempo de un semestre para cada tasa, tenemos:

Invirtiéndose \$ 1 al principio del semestre e igualando los resultados del final del semestre, llegamos a:

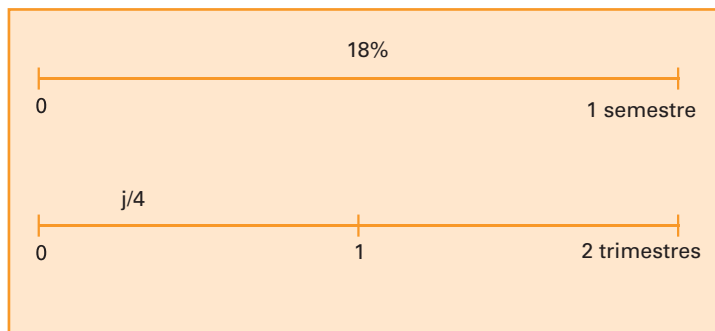


FIGURA 3.13

$$1,18 = \left(1 + \frac{j}{4}\right)^2$$

o sea: $j = 0,3451 = 34,51\%$ nominal trimestral.

EJEMPLO

(N → E). ¿Qué tasa mensual es equivalente al 134% nominal semestral?

Sea el $i\%$ la tasa mensual que se pregunta, y tomando un tiempo de seis meses para cada tasa, tenemos:

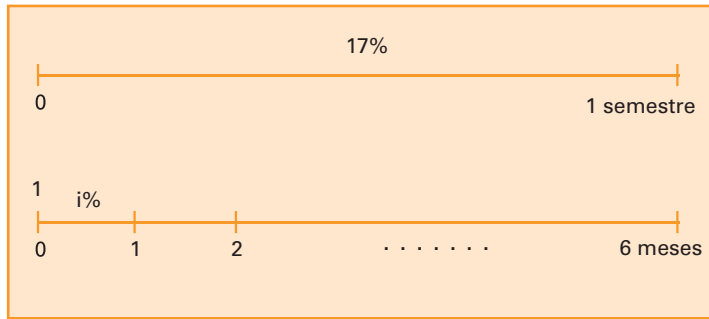


FIGURA 3.14

Similar a los ejemplos anteriores, igualando los resultados del final del semestre por la inversión de \$ 1 al principio de él, tenemos:

$$1,17 = (1 + i)^6$$

de donde:

$$i = 0,0265 = 2,65\% \text{ mensual}$$

EJEMPLO

(N → N). ¿Qué tasa nominal trimestral es equivalente al 33% nominal mensual? Sea el $j\%$ la tasa nominal trimestral que se pregunta, y tomando un tiempo de tres meses para cada tasa, tenemos:

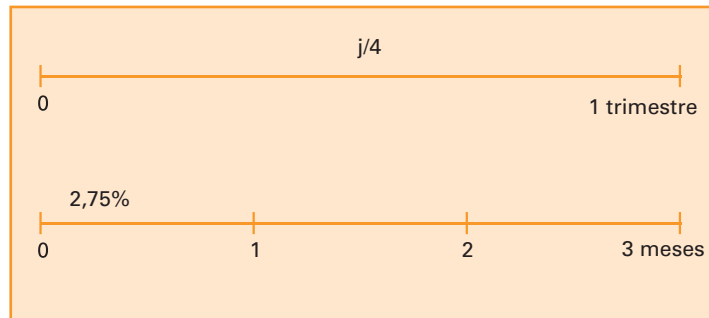


FIGURA 3.15

Igualando los resultados del final del trimestre por la inversión de \$ 1 al principio de él con cada tasa, obtenemos:

$$1 + \frac{j}{4} = (1,0275)^3$$

de donde:

$$j = 0,3391 = 33,91\% \text{ nominal trimestral}$$

Todos los casos anteriores pueden reducirse, si se quiere, a una sola expresión:

Sean:

i_m : una tasa capitalizable m veces por año

i_n : una tasa capitalizable n veces por año

De lo anterior tenemos que tanto i_m/m como i_n/n son tasas efectivas en cada uno de los m y n periodos respectivamente.

Tomando un tiempo de un año para cada una de las tasas e igualando los resultados de final de año por la inversión de \$ 1 al principio del año, obtenemos:

$$\left(1 + \frac{i_m}{m}\right)^m = \left(1 + \frac{i_n}{n}\right)^n \tag{3-7}$$

Aplicando esta expresión al ejemplo de (E → E) anterior, tenemos que: $i_m/m = i$ es la tasa trimestral que se pregunta, esto es: $i_n/n = 3\%$ mensual, o sea, que $n = 12$. Así que:

$$(1 + i)^4 = (1 + 0,03)^{12}$$

de donde:

$$i = 0,0927 = 9,27\% \text{ trimestral}$$

El lector debe resolver los demás ejemplos anteriores aplicando la expresión (3-7).

Por último, debe tenerse en cuenta que cuando una inversión rinde una tasa anual o, lo que es lo mismo, cuando se ha pactado por la inversión una tasa efectiva anual pero los intereses se retiran cada mes, es decir, no hay capitalización de los intereses, entonces la tasa para calcular los intereses y para la reinversión de estos debe ser la tasa nominal equivalente.

Así, por ejemplo, si invertimos \$ 1.000.000 a un año con una tasa del 30% anual, entonces para calcular los intereses que se causan cada mes, que deben retirarse e invertirse por fuera, debe calcularse la tasa nominal mensual equivalente, que en nuestro caso es del 26,25%, cuya tasa mensual correspondiente es el 2,210445%.

De tal manera que los intereses mensuales serán de \$ 1.000.000(0,02210445) = \$ 22.104,45. Si estos intereses se reinvierten a la tasa del 2,210445% mensual durante los doce meses, tendremos un valor futuro de \$ 300.000 para un total al cabo del año de \$ 1.300.000 (capital + intereses), que corresponden al valor futuro del millón de pesos a un año a una tasa del 30% anual.

El planteamiento anterior corresponde a la forma algebraica de hallar tasas equivalentes entre efectivas y nominales; sin embargo, hoy en día el uso de la calculadora financiera nos simplifica el trabajo y nos da los resultados directamente. En este momento el estudiante debe capacitarse, si ya no lo está, en el manejo de su calculadora financiera en todo lo relacionado con la conversión de tasas.

Como ejercicio, el lector debe comprobar la validez de la equivalencia entre las tasas que aparecen a continuación, correspondiente al uso de alguna tarjeta de crédito:

Tasa de interés Ceredibanco X					
Interés compras	3 meses	6 meses	9 meses	12 meses	avance en efectivo
Interés mensual	3%	3,10%	3,20%	3,50%	3,50%
Interés efectivo anual	42,58%	44,25%	45,94%	51,11%	51,11%

3.8.6 TASA DE INTERÉS DISCRETA

Como su nombre lo indica, es la tasa de interés que se aplica cuando el tiempo o período de capitalización es una variable discreta, es decir, cuando el período se mide en intervalos fijos de tiempo tales como años, semestres, trimestres, meses, días u otros. Es el caso de las tasas que se han tratado hasta este momento y otras como del 42% anual, el 18% semestral, el 8% trimestral, el 3% mensual o el 0,013% diario.

3.8.7 TASA DE INTERÉS CONTINUO

Se define una tasa de interés continuo del r% como aquella cuyo período de capitalización es lo más pequeño posible. Por ejemplo, se habla del 35% capitalizable continuamente, lo que significa que es una tasa expresada anualmente y su período de capitalización puede ser lo más pequeño posible.

En términos matemáticos, esto quiere decir que el número de períodos de capitalización durante el tiempo de la operación financiera crece indefinidamente. A diferencia del interés discreto, en el interés continuo la tasa se presenta siempre en forma nominal.

Vamos a determinar la equivalencia entre el valor presente y el valor futuro por una inversión única con interés continuo. Si hoy invertimos una cantidad de \$ P a una tasa de interés continuo del r% capitalizable continuamente durante n años, vamos a determinar el valor futuro o total acumulado \$ F al final de ese tiempo.

Si denotamos por Δt el período de capitalización, por C(t) el capital al final del tiempo t y por C(t + Δt) el capital al final del tiempo t + Δt, se tiene que el interés devengado en el período Δt está dado por:

$$C(t) \times r \times \Delta t$$

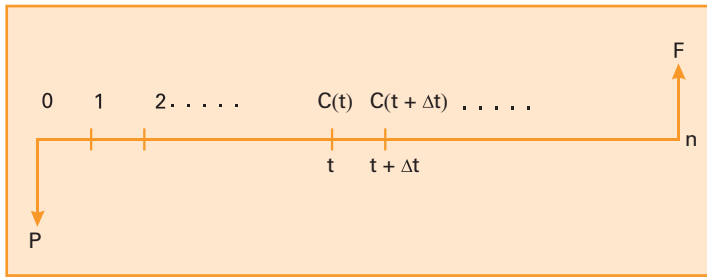


FIGURA 3.16

En el siguiente diagrama puede verse más claramente la relación entre estos valores y el tiempo:

De tal manera que se cumple la siguiente relación:

$$C(t + \Delta t) = C(t) + C(t) \times r \times \Delta t$$

o, lo que es lo mismo:

$$\frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t} = C(t) \times r$$

Para que la capitalización sea continua se requiere que $\Delta t \rightarrow 0$, de tal manera que debe cumplirse:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} C(t) \times r$$

La expresión de la izquierda es la definición de la derivada de **C(t)** respecto de **t**, y así tenemos:

$$\frac{dC}{dt} = C \times r$$

Esta relación corresponde a una ecuación diferencial de variables separables, cuya solución se plantea así:

$$\int_P^F \frac{dC}{C} = \int_0^n r dt$$

para llegar a:

$$F = P \times e^{rn} \tag{3-8}$$

Y también:

$$P = F e^{-rn} \tag{3-9}$$

Las fórmulas (3-8) y (3-9) relacionan el valor presente y el valor futuro de un pago único con interés continuo.

EJEMPLO 3.17

Una persona deposita hoy una suma de dinero de \$ **P** en una institución financiera que paga un interés del 27% anual capitalizable continuamente. Si el saldo a favor del inversionista es de \$ 855.000 dentro de tres años, hallar la cantidad depositada originalmente.

Solución

En este caso tenemos:

$$F = 855.000; n = 3 \text{ años}; r\% = 27\% \text{ anual capitalizable continuamente}; P = ?$$

Aplicando la fórmula (3-9), obtenemos:

$$P = 855.000 e^{-(0.27) \times 3} = 855.000 e^{-0.81} = \$ 380.354$$

Con base en las expresiones (3-8) y (3-9), es posible determinar cualquiera de las variables **P**, **F**, **r** o **n**, según el caso.

EJEMPLO 3.18

¿Al cabo de cuánto tiempo una inversión de \$ 420.000 se convierte en \$ 1.465.944 si el rendimiento del dinero es del 25% nominal capitalizable continuamente?

Solución

En este caso la información del problema nos dice:

$$P = \$ 420.000; F = \$ 1.465.944; r\% = 25\% \text{ capitalizable continuamente}; n = ?$$

Aplicando la fórmula (3-8) tenemos:

$$1.465.944 = 420.000 e^{0,25n}$$

o sea:

$$e^{0,25n} = \frac{1.465.944}{420.000} = 3,49034$$

Tomando el logaritmo natural en ambos miembros de la igualdad llegamos a:

$$\ln e^{0,25n} = \ln(3,49034)$$

$$n = \frac{\ln(3,49034)}{0,25} = 5 \text{ años}$$

Es decir que al cabo de cinco años la inversión original de \$ 420.000 se habrá convertido en \$ 1.465.944 con la tasa de interés dada.

Con el siguiente ejemplo podemos ver el comportamiento de una misma tasa de interés a medida que el período de capitalización disminuye.

EJEMPLO 3.19

Calcular el monto que se tendrá al cabo de un año por una inversión de \$ 100.000 hoy, según las siguientes tasas:

- El 30% anual
- El 30% nominal semestral
- El 30% nominal trimestral
- El 30% nominal mensual
- El 30% nominal diario
- El 30% nominal continuo

Solución

El monto que va a calcularse en cada caso es el valor futuro al cabo de un año con la tasa correspondiente.

- $F = 100.000(1,3) = \$ 130.000$
- $F = 100.000(1,15)^2 = \$ 132.250$
- $F = 100.000(1,075)^4 = \$ 133.546,9$
- $F = 100.000(1,025)^{12} = \$ 134.488,9$
- $F = 100.000(1 + 0,3/365)^{365} = \$ 134.969$
- $F = 100.000e^{0,3(1)} = \$ 134.985,9$

Como podemos observar, el valor futuro va creciendo a medida que aumenta el número de períodos al año de capitalización de la tasa nominal, pero lo más importante es ver cómo en los literales (e) y (f) de capitalización diaria y capitalización continua los resultados son bastante cercanos; en nuestro caso la diferencia es mínima (\$ 16,9) en un valor futuro de \$ 134.969, lo que nos indica que para liquidaciones diarias la capitalización continua sería un sistema bastante cercano.

Esta clase de interés es de uso frecuente en países donde la inflación es muy alta (por ejemplo, del 70%, el 90% y el 100% anuales), porque allí el dinero pierde poder adquisitivo muy rápido, a veces

en un mismo día, como puede observarse con el tipo de cambio que se da en esos lugares. Entonces, el interés continuo es una de las soluciones para la determinación del valor del dinero.

La tasa de interés continua tiene una propiedad que no tiene la tasa de interés capitalizable m veces al año, y es que si estamos trabajando con una tasa, por ejemplo, del 30% capitalizable continuamente y el tiempo de la operación financiera es de solo un semestre, entonces simplemente tomamos como tasa continua para el semestre el 15%; y si el tiempo de la operación financiera es de un trimestre, entonces tomamos como tasa continua para el trimestre el 7,5%, y así sucesivamente.

EJEMPLO 3.20

Invertimos hoy \$ 100.000 durante seis meses a una tasa de interés del 30% capitalizable continuamente. Hallar la suma de dinero que se tendrá al final de los seis meses.

Solución

Tenemos:

$$P = \$ 100.000; r = 30\% \text{ capitalizable continuamente; } n = \text{seis meses; } F = ?$$

En este caso podemos resolver el ejemplo de cualquiera de las siguientes formas:

i) Tomando un período de un semestre, y entonces la tasa sería $0,3/2 = 15\%$ semestral capitalizable continuamente; por tanto:

$$F = 100.000e^{0,15(1)} = \$ 116.183$$

ii) Tomando períodos de trimestres, y entonces la tasa sería $0,3/4 = 0,075 = 7,5\%$ trimestral capitalizable continuamente; por tanto:

$$F = 100.000e^{0,075(2)} = \$ 116.183$$

iii) Tomando períodos de meses, y entonces la tasa sería $0,3/12 = 0,025 = 2,5\%$ mensual capitalizable continuamente; por tanto:

$$F = 100.000e^{0,025(6)} = \$ 116.183$$

Como observamos, la tasa de interés capitalizable continuamente puede dividirse por cualquier submúltiplo del año para ser aplicada al período correspondiente, lo que no puede hacerse si se trata de una tasa nominal discreta.

3.8.8 TASA VENCIDA

Una tasa de interés se llama **vencida** si la liquidación se hace al final del período.

Así, por ejemplo, son tasas vencidas cualquiera de las siguientes: el 3% mensual o el 3% mensual vencido, el 8% trimestral, el 32% anual o el 32% EA (EA: efectivo anual) y el 28% ATV. Como podemos observar, cuando no se especifica el término **vencido**, debe sobreentenderse que la tasa es vencida.

Es importante tener en cuenta que la gran mayoría de fórmulas financieras operan o funcionan con tasa vencida, y que si la tasa viene dada —por ejemplo, anticipada—, por lo general hay que hallar su equivalente vencida para, luego, ejecutar la operación correspondiente.

3.8.9 TASA ANTICIPADA

Se dice que una tasa es **anticipada** cuando su liquidación se hace al principio del período.

Así, por ejemplo, son tasas anticipadas cualesquiera de las siguientes: el 2,5% mensual anticipada, el 7% trimestral anticipada, el 29% anual anticipada o el 29% AA y el 32% ATA.

Como podemos observar, en la tasa anticipada es necesario especificar que la liquidación es por anticipado, a diferencia de la vencida, en la que si no se especifica entonces debe sobreentenderse. Esto significa que si decimos que una entidad financiera nos paga un interés por nuestra inversión del 7% trimestral anticipado, al principio de cada trimestre nos abonará el 7% del monto invertido y, además,

estos intereses no se capitalizarán de nuevo por anticipado, sino que los debemos retirar. Supongamos, por ejemplo, que invertimos \$ 2.000.000 al 7% trimestral anticipado; entonces, al principio de cada trimestre recibiremos por concepto de intereses la cantidad de $0,07(2.000.000) = \$ 140.000$, que no necesariamente podremos invertir en la misma institución a la misma tasa, sino posiblemente en otra modalidad.

Ahora bien: con frecuencia se necesita establecer equivalentes financieros con tasas vencidas, correspondientes a tasas anticipadas, así que es necesario establecer la relación entre una tasa anticipada y su correspondiente vencida en el mismo período y viceversa.

Sea i_a la tasa anticipada en un determinado período, y sea i_v la correspondiente tasa vencida equivalente en el mismo período. Si hoy (principio del período) nos prestan \$ 1 a una tasa del i_a por anticipado, debemos cancelar hoy mismo por concepto de intereses la suma de i_a , de tal manera que solo recibimos la suma de $1 - i_a$, y, sin embargo, al final del período debemos cancelar la suma de \$ 1.

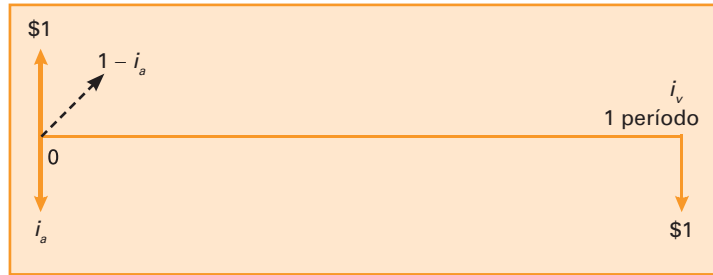


FIGURA 3.17

En un diagrama tendremos:
Lo que significa que, a una tasa vencida i_v , el \$ 1 del final de período es el valor futuro de $1 - i_a$; es decir:

$$1 = (1 - i_a)(1 + i_v)$$

A partir de esta relación obtenemos las expresiones:

$$i_a = \frac{i_v}{1 + i_v} \quad \text{y} \quad i_v = \frac{i_a}{1 - i_a} \tag{3-10}$$

que relacionan entre sí la tasa anticipada en un período con su equivalente tasa vencida.

Por ejemplo, ¿qué tasa mensual anticipada equivale al 3,3% mensual vencida? Para esto, aplicamos la expresión que mide la tasa anticipada en función de la tasa vencida:

$$i_a = \frac{0,033}{1 + 0,033} = 0,0319 = 3,19\% \text{ mensual anticipada}$$

y viceversa: una tasa del 3% mensual anticipada, ¿a qué tasa mensual vencida será equivalente? Aplicando la expresión que determina la tasa vencida en función de la tasa anticipada, tendremos:

$$i_v = \frac{0,03}{1 - 0,03} = 0,0309 = 3,09\% \text{ mensual vencida}$$

Cuando en una operación financiera interviene una tasa anticipada, esta debe llevarse a su equivalente vencida y luego aplicar las fórmulas correspondientes para valores futuros y presentes, pues todas las fórmulas financieras utilizan para estos fines solo tasas vencidas.

La tasa anticipada también se presenta en forma nominal, y es así como se habla, por ejemplo, del 32% nominal trimestre anticipada, o del 32% trimestre anticipada, o el 32%TA para indicar que esta es una tasa que, expresada anualmente, capitaliza cuatro veces al año y al principio de cada trimestre. También, al igual que la tasa nominal vencida, la nominal anticipada se divide por el número de períodos de capitalización al año para obtener la tasa efectiva por período anticipado; así, por ejemplo, del 32% nominal trimestre anticipada obtenemos el 8% efectiva por trimestre anticipada ($\frac{32\%}{4} = 8\%$). Las demás expresiones que vimos en las tasas vencidas para hallar las tasas equivalentes solamente pueden aplicarse al final del período y no al principio, de tal manera que con la ayuda de esas relaciones y las expresiones (3-10) podemos hacer conversiones en las tasas equivalentes entre anticipadas, entre vencidas o entre anticipadas y vencidas, y viceversa.

Por ejemplo, ¿qué tasa trimestral anticipada equivale al 3% mensual anticipada? El 3% mensual anticipada equivale, según la expresión (3-10), a:

$$\frac{0,03}{1 - 0,03} = 0,0309 = 3,09\% \text{ mensual vencida}$$

y esta a su vez equivale a: $(1,0309)^3 - 1 = 9,56\%$ trimestral vencida, y esta a su vez, según la expresión (3-10), equivale a:

$$\frac{0,0956}{1 + 0,0956} = 0,0872 = 8,72\% \text{ trimestral anticipada}$$

de tal manera que el 3% mensual anticipada equivale al 8,72% trimestral anticipada.

También es factible pasar una tasa nominal vencida a su equivalente nominal anticipada. Por ejemplo, ¿qué tasa nominal mensual anticipada equivale al 38% nominal trimestral vencida?

Este ejemplo lo desarrollaremos mediante un diagrama de equivalencias, y el lector deberá justificar cada uno de los pasos con base en la teoría expuesta hasta este momento.

El 38% nominal trimestral vencida



El 9,5% trimestral vencida



El 3,07% mensual vencida



El 2,98% mensual anticipada



El 35,75% nominal mensual anticipada

Es decir, el 35,75% nominal mensual anticipada equivale al 38% nominal trimestral vencida.

Como aplicación de conversiones de tasas nominales o efectivas y anticipadas o vencidas, tenemos las tablas que se encuentran en el mercado bajo los nombres de **tablas de intereses efectivos anuales** editadas principalmente por instituciones financieras, donde aparecen: la tasa nominal anual capitalizable mensual, bimestral, trimestral, etcétera, por anticipado o vencida, y su correspondiente valor anual efectivo.

Veamos solo algunos de los valores que contienen estas tablas y su forma de calcularlos e interpretarlos:

Tabla 3.1

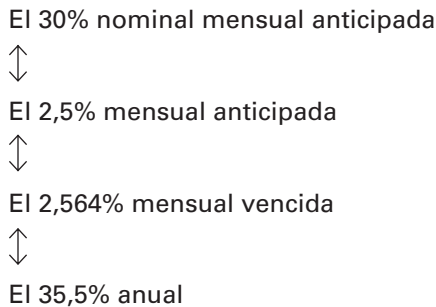
I Interés nominal anual	II Mes anticipado					III Mes vencido						
	1	2	3	...	6	12	1	2	3	...	6	12
5%	5,14	5,15	5,16	...	5,19	5,26	5,12	5,11	5,09	...	5,06	
10%	10,56	10,61	10,66	...	10,8	11,11	10,47	10,43	10,38	...	10,25	
20%	22,35	22,56	22,77	...	23,46	25,0	21,94	21,74	21,55	...	21,0	
30%	35,5	36,04	36,59	...	38,41	42,86	34,49	34,01	33,55	...	32,25	
40%	50,2	51,28	52,42	...	56,25	66,67	48,21	47,29	46,41	...	44,0	

En la columna cuyo cabezal es I se expresa la tasa nominal anual capitalizable en períodos de tantos meses al año como indiquen las columnas numeradas con II, si se trata de capitalización por período anticipado o las columnas numeradas con III si se trata de capitalización por período vencido.

Así, por ejemplo, si en I tomamos el 30% y en II la columna encabezada con 1, esto indica que estamos tomando el 30% nominal capitalizable en períodos de un mes y por anticipado; es decir, el 30% nominal capitalizable mensualmente por anticipado o el 30% mes anticipado. Si tomamos en I el 30% y en III la columna encabezada con 3, esto indica que estamos tomando el 30% nominal capitalizable en períodos de tres meses, es decir, el 30% nominal anual capitalizable trimestralmente y por trimestre vencido, o, como lo hemos denotado anteriormente, el 30% nominal trimestral. La cifra que se encuentra en la fila del 30% y en la columna encabezada con 1 de la parte II, que es el 35,5%, representa la tasa efectiva anual equivalente al 30% nominal mensual anticipado; también en la misma fila

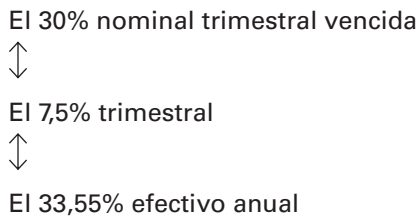
y en la columna encabezada con 3 de la parte III, que es el 33,55%, representa la tasa efectiva anual equivalente al 30% nominal trimestral; y de manera similar se interpretan las demás cifras. Así, para la fila del 40% tenemos: el 40% nominal mensual anticipado equivale al 50,20% efectivo anual; el 40% nominal bimestral anticipado equivale al 51,28% efectivo anual; el 40% nominal trimestral anticipado equivale al 52,42% efectivo anual; el 40% nominal semestral anticipado equivale al 56,25% efectivo anual; y el 40% anual anticipado equivale al 66,67% efectivo anual. Pasando a la parte III tenemos: el 40% nominal mensual vencida equivale al 48,21% efectivo anual; el 40% nominal bimestral equivale al 47,29% efectivo anual; y así sucesivamente.

El cálculo de estas tasas se hace a partir de las relaciones que vimos en tasas nominales efectivas y equivalentes para tasas vencidas y a partir de las expresiones (3-10) para el paso de anticipada a vencida. Volvamos a la tasa del 30% en I a la columna de II encabezada con 1: se trata de hallar la tasa efectiva anual vencida equivalente al 30% nominal mensual anticipado. Utilizando el mismo diagrama de equivalencias visto anteriormente tenemos:



O sea que el 30% nominal mensual anticipado equivale al 35,5% efectivo anual, como aparece en la tabla 3.1.

De la misma manera, si tomamos, por ejemplo, el 30% en I y la columna en III encabezada con 3, vemos que el valor correspondiente, que es el 35,55%, se obtiene así:



O sea que el 30% nominal trimestral vencido equivale al 33,55% efectivo anual.

Existen en la práctica varias fórmulas que son equivalentes entre sí, y a partir de ellas podemos obtener los mismos resultados, en lugar de la aplicación individual de otras como se ha hecho en los ejemplos anteriores que hemos desarrollado por diagramas de equivalencia.

Veamos cómo con una sola fórmula podemos establecer la equivalencia entre una tasa nominal por período anticipado y la correspondiente anual vencida.

Sean:

- i_{av} = tasa anual vencida
- i_{ma} = tasa nominal capitalizable m veces al año por período anticipado
- i_v = tasa efectiva vencida en cada uno de los m períodos
- i_a = tasa efectiva anticipada en cada uno de los m períodos

Aplicando las fórmulas (3-5) y (3-9) obtenemos:

$$i_{av} = (1 + i_v)^m - 1 = \left(1 + \frac{i_a}{1 - i_a}\right)^m - 1 = \left(\frac{1}{1 - i_a}\right)^m - 1 = (1 - ia)^{-m} - 1 = \left(1 - \frac{i_{ma}}{m}\right)^{-m} - 1$$

o sea:

$$i_{av} = \left(1 - \frac{i_{ma}}{m}\right)^{-m} - 1 \quad (3-11)$$

Esta fórmula nos permite calcular directamente todas las tasas de la parte II de la tabla 3.1 sin necesidad de los pasos iterativos que hemos utilizado. Así, por ejemplo, el 30% nominal mensual anticipado tiene su tasa efectiva anual dada por:

$$i_{av} = \left(1 - \frac{0,3}{12}\right)^{-12} - 1 = 0,355 = 35,5\% \text{ anual}$$

como aparece en la tabla 3.1.

De la misma manera, si tomamos el 38,41% anual vencido y queremos hallar la tasa nominal semestral anticipada equivalente, aplicando la fórmula (3-11) llegamos a:

$$0,3481 = \left(1 - \frac{i_{na}}{2}\right)^2 - 1$$

Y de aquí obtenemos:

$i_{na} = 30\%$ nominal semestral anticipado, como aparece en la tabla 3.1.

De tal manera que para establecer estas equivalencias que encontramos en la tabla 3.1 podemos utilizar cualquiera de los procedimientos vistos, pues por medio de ellos llegamos al mismo resultado.

RELACIÓN ENTRE TASAS NOMINALES: UNA VENCIDA Y LA OTRA ANTICIPADA

No obstante que en la calculadora financiera se puede pasar de una tasa nominal vencida a una tasa nominal anticipada equivalente y viceversa, también se puede realizar esta operación a partir de la siguiente expresión, cuya deducción puede ser un buen ejercicio para que la desarrolle aquella persona interesada en profundizar en las deducciones financieras. La expresión es:

$$i_{nap} = P \left(1 - \left(1 + \frac{i_{nvm}}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}\right)$$

donde: i_{nvm} = es una tasa nominal vencida que capitaliza m veces al año

i_{nap} = es una tasa nominal anticipada que capitaliza p veces al año

y las dos tasas son equivalentes.

EJEMPLO

Hallar la tasa TA equivalente al 21% SV.

En este caso se tiene que: $i_{nvm} = 21\%$ SV, donde $m = 2$; se trata de hallar i_{nap} donde $p = 4$.

Utilizando la expresión anterior se tiene que:

$$i_{na4} = 4 \left(1 - \left(1 + \frac{0,21}{2}\right)^{-\frac{2}{4}}\right) = 0,19488$$

Es decir, 19,48% TA.

EJEMPLO

Hallar la tasa MV equivalente al 14% BA.

En este caso se tiene que: $i_{nap} = 14\%$ BA., donde $p = 6$; se trata de hallar i_{nvm} para $m = 12$.

Entonces, utilizando la expresión anterior se tiene que:

$$0,14 = 6 \left(1 - \left(1 + \frac{i_{nvm}}{12} \right)^{-\frac{12}{6}} \right) = 0,1425$$

Es decir, que el 14% BA es equivalente al 14.25% MV. Se puede comprobar utilizando la calculadora financiera.

La expresión anterior también se puede utilizar para hallar equivalencias entre tasas efectivas anuales donde una es anticipada y la otra es vencida.

EJEMPLO

Hallar la tasa efectiva anual vencida equivalente al 23% anual anticipada. Para este caso se tiene: $i_{nap} = 23\%$, donde $p = 1$; se busca la tasa i_{nvm} para $m = 1$.

Entonces se establece la relación:

$$0,23 = 1 \left(1 - \left(1 + \frac{i_{nvm}}{1} \right)^{-\frac{1}{1}} \right)$$

y se obtiene $i_{nvm} = 0,2987$.

Es decir, la tasa anual vencida del 29,87% es equivalente al 23% AA.

Esta equivalencia también se puede establecer a partir de la expresión número 3 del formulario que aparece al final del texto.

En efecto:

$$i_v = \frac{i_a}{1 - i_a} = \frac{0,23}{1 - 0,23} = 0,2987$$

Como aplicación práctica, el estudiante deberá comprobar la validez de las relaciones siguientes entre tasas nominales anticipadas y su equivalente efectivo anual, sobre información que comúnmente encontramos en instituciones bancarias (lo que se acostumbra llamar “el tablero económico”).

i) Operaciones pasivas internas

				Tasa nominal	Tasa efectiva
CDT	a	90 días	TA	23,94%	28%
CDT	a	180 días	TA	22,46%	26%
CDT	a	360 días	TA	22,46%	26%

ii) Rentabilidad diaria para saldos mayores de:

				Tasa nominal	Tasa efectiva
30.000	hasta	10.000.000	DA	23,90%	27%
10.000.001	hasta	50.000.000	DA	22,32%	25%
50.000.001	hasta	100.000.000	DA	21,11%	23,5%
Ssuperiores	a	100.000.000	DA	20,29%	22,50%

iii) DTF

El DTF (depósito a término fijo) es una tasa muy utilizada en el sistema financiero colombiano. Se calcula como el promedio ponderado de las diferentes tasas de interés de captación utilizadas por los bancos, corporaciones financieras, corporaciones de ahorro y vivienda y compañías de financiamiento comercial, para calcular los intereses que reconocerán a los certificados de depósito a término (CDT). El cálculo del DTF como un promedio ponderado se hace siguiendo los pasos que se enuncian a continuación:

- Recolectar para cada una de las entidades financieras descritas anteriormente el valor de la tasa de interés que reconoce por los CDT y la cantidad de dinero o recursos que el inversionista tiene depositados en CDT.
- Multiplicar el valor de la tasa de interés por la cantidad de recursos, haciendo esto para cada entidad por separado, y sumar los resultados obtenidos.
- Dividir la suma obtenida anteriormente entre la suma de los recursos depositados en CDT.
- El valor así obtenido corresponde al DTF que se utilizará en la siguiente semana; esta tasa es calculada por el Banco de la República semanalmente a partir de la información suministrada por la Superintendencia Bancaria.

Así, por ejemplo, para el siguiente caso en el que los recursos están en millones de pesos:

Entidad financiera	Tasa de interés del CDT (TV)	Recursos en CDT	Total recurso x tasa
Banco	el 5,5%	1.300	7.150
Corporación financiera	el 5%	980	4.900
Corporación de ahorro y vivienda	el 7,6%	1.420	10.792
Compañía de financiamiento comercial	el 6,8%	860	5.848
Total		4.560	28.690

Entonces:

$$DTF = \frac{28690}{4560} = 6,29\% TV$$

Equivalente a: DTF = 6,19% TA.

La **tasa DTF** también se utiliza, sumándole algunos puntos, para determinar el costo financiero de un crédito en algunas líneas especiales de crédito, como por ejemplo las tasas de redescuento en pesos para empresas vinculadas al comercio exterior. Así, se habla de que para un crédito con vigencia de dos hasta tres años se cobrará una tasa del DTF (EA) + 2,20 (EA), y así el costo financiero dependerá del valor que tenga el DTF en la fecha correspondiente.

A continuación se presenta una tabla que tiene como fuente el Banco de la República y que muestra la tasa efectiva anual y algunas nominales equivalentes tanto para el DTF como para la TCC, en dos semanas consecutivas de junio del año 2006.

Aquí se muestran dos formas como se publican estas tasas cada semana en medios diferentes, donde se puede observar la equivalencia entre los términos utilizados para expresar o denotar las tasas nominales.

Tasa de interés semanal

		Junio 19 Junio 25	Junio 12 Junio 18
DTF	EA	6,13	6,01
DTF	TA	5,91	5,79
DTF	TV	5,99	5,88
DTF	SA	5,86	5,75
DTF	SV	6,04	5,92
TCC	EA	6,51	6,79
TCC	TA	6,26	6,52
TCC	TV	6,36	6,62
TCC	SA	6,21	6,46
TCC	SV	6,41	6,68
CDT	180	6,60	6,72
CDT	360	5,66	6,15

Fuente: Banco de la República.

Tasa de interés (%)

	ACT.	ANT.		ACT.	ANT.
DTF EFECTIVO ANUAL	6,13	6,01	TCC EFECTIVO ANUAL	6,51	6,79
DTF TRIMESTRE ANTIC.	5,91	5,79	TCCT+TRIMESTRE ANTIC.	6,26	6,52
DTF TRIMESTRE VENC.	5,99	5,88	TCCTRIMESTRE VENC.	6,36	6,62
DTF SEMESTRE ANTIC.	5,86	5,75	TCC SEMETRE ANTIC.	6,21	6,46
DTF SEMESTRE VENC.	6,04	5,92	TCC SEMESTRE VENC.	6,41	6,68
INTERBANCARIA (EA)	6,30	6,25	INTERBANCARIA (nominal)	6,11	6,06

El lector debe comprobar la equivalencia entre la TEA y las nominales que aparecen en la tabla, tanto para el DTF como para la TCC, al mismo tiempo que complementar la tabla con las tasas nominales en otros períodos, es decir, calcular las tasas BV (bimestre vencido), BA (bimestre anticipado), MV (mes vencido) y MA (mes anticipado).

iv) TCC

La TCC es la tasa de captación de las corporaciones financieras y corresponde a la tasa que reconocen estas instituciones a los depositantes por los recursos captados. A esta tasa se le conoce también con el nombre de **tasa pasiva**, para indicar que los depósitos constituyen una deuda de la entidad con terceros que son los depositantes.

La **TCC** es una tasa promedio de captación por recursos obtenidos por las corporaciones financieras privadas por medio de CDT, por lo general a noventa días y expresada en diferentes modalidades, ya sea nominal o efectiva y anticipada o vencida.

En la tabla anterior se puede ver esta tasa en forma efectiva anual y algunas de sus equivalencias en tasas nominales.

TASA INTERBANCARIA

La tasa interbancaria se conoce con la sigla TIB y consiste en la tasa con la cual un banco realiza transacciones con otro. Esta tasa está estrechamente relacionada con la diferencia entre la tasa de colocación y la tasa de captación, y de alguna manera es un indicador de la liquidez inmediata del sistema financiero.

Esta tasa aparece diariamente publicada en los periódicos con la información dada por la Supervalores en puntos porcentuales efectivos anuales.

Para operaciones de endeudamiento externo se manejan algunas tasas especiales, como las siguientes:

a) Prime Rate (o tasa preferencial)

Hoy en día la mayoría de países operan bajo economías abiertas y, por lo tanto, es frecuente el endeudamiento en monedas extranjeras. La **Prime Rate** o tasa preferencial es la tasa que los bancos estadounidenses cobran sobre el préstamo a corto plazo que otorgan a corporaciones grandes con informes financieros de alta confiabilidad.

Es usual pactar algunos puntos por encima de esta tasa con el fin de cubrir riesgos dependiendo del país de origen del deudor.

b) Tasa de interés LIBOR

La tasa LIBOR (**London Interbank Offered Rate**) es la tasa en la cual se negocian los eurodólares y, más concretamente, es el promedio de la tasa para las 12 del mediodía de un día dado de cuatro o cinco bancos que se fijan como referencia.

Es el tipo de interés ofrecido sobre los depósitos en los bancos comerciales que operan en el mercado de eurodivisas en Londres, y que generalmente se encuentra medio punto por debajo de la **Prime Rate**. Esta tasa mundial varía constantemente en función de la demanda del crédito y de la oferta monetaria, y se utiliza como parámetro de las demás tasas mundiales.

3.8.10 TASAS COMPUESTAS

Una tasa se llama compuesta cuando es el resultado de la aplicación simultánea de dos tasas así estas operen en condiciones diferentes. Tales son los casos de las operaciones financieras en el sistema UPAC, donde operan simultáneamente la tasa de interés y la tasa de corrección monetaria; de las operaciones con monedas extranjeras, donde intervienen tanto la tasa de interés como la tasa de devaluación o los préstamos con comisiones, entre otros.

En cualquiera de los casos se trata de determinar una tasa equivalente a las dos que se aplican en la operación. Esta tasa así hallada es la que comúnmente recibe el nombre de **tasa real (i_r)**.

Consideremos en primer lugar el caso de un préstamo en moneda extranjera (por ejemplo, en dólares) en el que, además de pagar una tasa de interés i_1 en esa moneda, nuestro peso está perdiendo valor frente a esa moneda en un porcentaje del $i_2\%$ por período, lo que se conoce como devaluación. Se trata de estimar el costo real de ese préstamo.

Supongamos que esas tasas son anuales y tomemos un tiempo de un año para establecer la relación deseada.

Por una unidad monetaria extranjera U que nos presten hoy (cuyo cambio en pesos sea de $\$ X$ hoy), debemos pagar dentro de un año una unidad extranjera U más los intereses que son $i_1 U$, es decir, en total pagaremos $U(1 + i_1)$ unidades monetarias extranjeras. Pero si nuestro peso pierde poder frente a esa moneda extranjera a una tasa del $i_2\%$ por año, entonces al cabo del año por una unidad de esa moneda tendremos que pagar $\$ X (1 + i_2)$; así que por las $U(1 + i_1)$ unidades pagaremos $\$ X (1 + i_2) (1 + i_1)$; en conclusión, por haber recibido al principio del año $\$ X$, tendremos que pagar al final $\$ X (1 + i_1) (1 + i_2)$. La pregunta es: ¿cuál fue el costo real de ese préstamo?

Si denotamos por i_r la tasa real del préstamo, tendremos:

$$X(1 + i_1) (1 + i_2) = X(1 + i_r)$$

de donde:

$$i_r = (1 + i_1) (1 + i_2) - 1 \quad (3-12)$$

Esta tasa i_r se llama tasa compuesta y también puede expresarse como:

$$i_r = i_1 + i_2 + i_1 \times i_2 \quad (3-13)$$

Por ejemplo, si adquirimos un préstamo en dólares a un interés del 15% anual (el cambio hoy es de $\$ 1.044,54$ por dólar), se estima que el cambio dentro de un año sea de $\$ 1.159,44$ por dólar. ¿Cuál es el costo en pesos del préstamo?

En este caso, $i_1 = 15\%$ anual, $i_2 = 11\%$ anual, de tal manera que aplicando la relación (3-12) tenemos:

$$i_r = (1,15) (1,11) - 1 = 0,2765 = 27,65\% \text{ anual}$$

y no, como equivocadamente puede pensarse, que el costo del préstamo haya sido de $15\% + 11\% = 26\%$ anual.

Otro caso de tasa compuesta es el que se encuentra en el sistema UPAC, en el que por un préstamo se cobra una tasa de interés i_1 y una tasa de corrección monetaria i_{CM} , de tal manera que la tasa que realmente mide el costo del dinero estará dada por una expresión similar a la (3-12) o a la (3-13); es decir:

$$i_r = i_1 + i_{CM} + i_1 \times i_{CM}$$

Esta tasa y su aplicación se estudiarán con mayor detalle posteriormente, cuando se trate el tema del sistema UPAC.

3.8.11 TASA DE INFLACIÓN

La tasa de inflación se define como la medida del incremento continuo en los precios de los bienes y servicios a lo largo del tiempo.

La tasa de inflación se calcula sobre el precio inmediatamente anterior, y por esta razón opera como una tasa de interés compuesto. Así, por ejemplo, si decimos que la inflación promedio mensual durante los cinco primeros meses de cierto año fue del 2,5% mensual, entonces un artículo que al principio del primer mes valía \$ 100 tendrá un valor al final de cada uno de los cinco meses siguientes de \$ 102,5, \$ 105,06, \$ 107,69, \$ 110,38 y \$ 113,14 respectivamente.

Como puede verse, la tasa del 2,5% se aplica a partir del primer valor del artículo sobre el valor inmediatamente anterior, de tal manera que si queremos calcular el valor al final del quinto mes sin pasar por los anteriores, simplemente hacemos el siguiente cálculo: valor al final del quinto mes = $100(1,025)^5 = \$ 113,14$, igual al resultado anterior, pero aquí aplicando una expresión similar a la utilizada por el interés compuesto. De la misma manera, si el costo de la canasta familiar el 31 de diciembre de 1987 fue de \$ 36.500, el 31 de diciembre de 1988 fue de \$ 46.172,5 y un año más tarde de \$ 59.100,8; decimos que la inflación en 1988 fue del 26,5% anual y en 1989 fue del 28% anual.

A partir de este concepto podemos estimar el costo de un artículo hacia el futuro, suponiendo que el único factor que incide en su aumento será el de la inflación. Por ejemplo, con la hipótesis de que la inflación promedio anual sea del 27% para los dos años siguientes, un artículo que hoy tiene un costo de \$ 100 dentro de dos años costará $100(1,27)^2 = \$ 161,29$. A este último valor se le conoce como el valor del artículo en **pesos corrientes** o inflados; pero también existe la operación inversa: calcular el valor del artículo al cabo de dos años pero medido en pesos de hoy. Esta operación consiste en quitarle la inflación durante los dos años, es decir, tendremos $161,29/(1,27)^2 = \$ 100$. A este valor se le conoce como el valor del artículo dentro de dos años medido en **pesos constantes** o en pesos de hoy. A esta operación se le conoce con el nombre de **deflactación**.

Cuando el flujo de caja de una inversión está dado en pesos corrientes, su análisis de evaluación debe hacerse con una tasa de descuento que contenga la inflación, y esta se conoce con el nombre de **tasa inflada**; pero cuando el flujo de caja está dado en pesos constantes, su análisis de evaluación se debe hacer con una tasa que no contenga la inflación, y esta se conoce con el nombre de **tasa deflactada**.

Podemos establecer una relación entre tasa inflada, tasa deflactada y tasa de inflación. Denotemos con i_i la tasa con inflación, con i_d la tasa sin inflación o tasa deflactada y con i_f la tasa de inflación. Si hoy invertimos \$ 1 con una tasa comercial o inflada del i_i anual, al cabo de un año tendremos \$ $(1 + i_i)$, pero si el dinero durante ese año perdió poder adquisitivo a una tasa del i_f , entonces los \$ $(1 + i_i)$ que tendremos al final de año comprarán lo mismo que \$ $(1 + i_i)/(1 + i_f)$ de hoy, es decir, que \$ 1 de hoy con una tasa sin inflación o deflactada del i_d anual tendrá dentro de un año un poder de compra equivalente a $(1 + i_d)$ pesos de hoy; así que tenemos:

$$1 + i_d = \frac{1 + i_f}{1 + i_i}$$

o sea:

$$i_d = \frac{i_f + i_i}{1 + i_i} \quad (3-14)$$

O, lo que es lo mismo:

$$i_f = i_i + i_d + i_i \times i_d \quad (3-15)$$

La interpretación de estas tasas es la siguiente: el i_f % representa la pérdida porcentual anual de poder adquisitivo del dinero; el i_i % representa la tasa comercial que encontramos en el mercado y que contiene la inflación; finalmente, el i_d % representa la tasa de rendimiento real, libre de inflación, de nuestra inversión.

Así, por ejemplo, si invertimos una suma de dinero cualquiera que aumente durante un año a una tasa de interés del 38% anual, y durante ese año la inflación fue del 30%, se pide determinar la rentabilidad real o libre de inflación de nuestra inversión.

Tenemos que la tasa real o sin inflación para nuestro caso estará dada por:

$$i_d = \frac{0,38 - 0,3}{1 + 0,3} = 0,0615 = 6,15\% \text{ anual}$$

y no del 8%, como equivocadamente puede pensarse.

VALORES CORRIENTES Y CONSTANTES

Se dice que un valor está representado en **pesos corrientes** o simplemente que es un valor corriente si contiene la inflación. En caso contrario, se dice que es un valor en **pesos constantes** o un valor constante. Así, por ejemplo, un artículo el 1 de enero de 1990 tenía un costo de \$ 4.700 y durante ese año el costo se incrementó solamente por la inflación, que fue del 32,3% anual, de tal manera que el 31 de diciembre del mismo año el artículo tenía un costo de \$ 4.700(1,323) = \$ 6.218,1. Esta última cantidad representa el valor del artículo medido en pesos corrientes; si deseamos representar el valor del artículo el 31 de diciembre pero medido en pesos constantes, simplemente tomamos su valor corriente y le quitamos o descontamos la inflación.

Y así tenemos:

$$\frac{6218,1}{1,323} = \$4.700$$

que representa el valor del artículo el 31 de diciembre medido en pesos constantes. Esta operación es la que se conoce en finanzas con el nombre de **deflactación**. De aquí que una serie de valores pueden estar dados en pesos corrientes o en pesos constantes. Por tanto, el flujo de caja de una actividad financiera puede presentarse para su evaluación en valores o pesos corrientes o en constantes.

Supongamos, por ejemplo, que el costo de mantenimiento de un activo durante los próximos cinco años consiste en egresos por año anticipado, que aumentarán cada año solo en la inflación, que se considerará en un valor del 25% promedio anual. Estimemos que el primer costo asciende a \$ 800.000 y que la tasa de descuento o de oportunidad de quien realiza los gastos es del 35% anual. Se pide registrar el flujo de caja tanto en valores corrientes como en constantes y calcular los respectivos valores presentes de cada flujo de caja.

En la tabla 3.2 registramos el año y el costo de mantenimiento para ese año en pesos corrientes y en pesos constantes, por anticipado.

Tabla 3.2

Año	I		II	
	Flujo de caja (\$ corrientes)	Flujo de caja (\$ constantes)	Valor presente de I	Valor presente de II
0	800.000	800.000	800.000	800.000
1	1.000.000	800.000	740.470,74	740.740,74
2	1.250.000	800.000	685.871,06	685.871,06
3	1.562.500	800.000	635.065,79	635.065,79
4	1.953.125	800.000	588.023,88	588.023,88
Valor presente total			3.449.701,47	3.449.701,47

Para calcular el valor presente del flujo en pesos corrientes debe utilizarse la tasa con inflación, esto es, la tasa del 35% anual. Para calcular el valor presente del flujo de caja en pesos constantes debe usarse la tasa deflactada, es decir, la tasa que no contiene inflación, que en nuestro caso es:

$$i_d = \frac{0,35 - 0,25}{1 + 0,25} = 0,08 = 8\% \text{ anual}$$

Cuando se trate de proyectar un valor en pesos corrientes por más de un período o de deflactar una cantidad también por más de un período, simplemente se utilizarán las expresiones similares a

las de interés compuesto para calcular valor futuro y presente respectivamente. Así, si denotamos con **C** la cantidad base y queremos proyectar **n** períodos en pesos corrientes con una tasa de inflación por período del $i_i\%$, este valor estará dado por:

$$F = C(1 + i_i)^n$$

y viceversa: si tenemos un valor **F** al cabo de **n** períodos y queremos deflactarlos con una tasa de inflación promedio por períodos del $i_i\%$, este valor estará dado por:

$$C = \frac{F}{(1 + i_i)^n}$$

con la diferencia de que esta cantidad estará ubicada en el período **n** pero medida en pesos constantes, o, como también se le llama, en **pesos de hoy**. Si la tasa de inflación no es la misma para todos los períodos, simplemente se va cargando o “inflando” la cantidad cada período con la tasa correspondiente, y lo mismo se hace si la operación es deflactación.

La tabla 3.3 fue suministrada por el Banco de la República y el DANE, y muestra la inflación o índice nacional de precios al consumidor en las diferentes formas en que suele encontrarse y aplicarse este índice (mensual).

Utilizando la tabla 3.3 podemos resolver los ejemplos siguientes:

EJEMPLO 3.21

Dado el siguiente flujo de caja en pesos corrientes o pesos de cada año, escribirlo:

- a) En pesos de hoy (31-12-90)
- b) En pesos de 1992 (31-12-92)

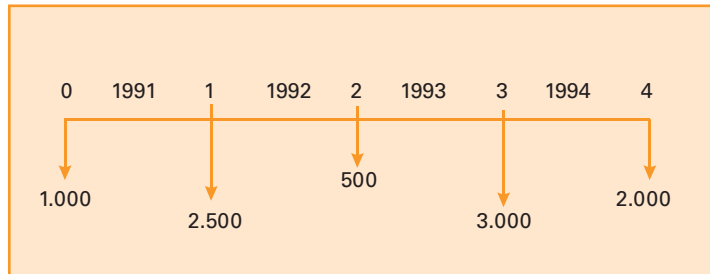


FIGURA 3.18

Solución

Para hallar el flujo caja en pesos de hoy, punto 0 (31-12-90), debemos deflactar cada uno de los valores futuros así:

\$ 1.000 de hoy equivalen a \$ 1.000 de hoy

\$ 2.500 del año uno (1991) equivalen a:

$$\frac{2.500}{1 + 0,2682} = \$ 1971,3$$

de hoy, porque la inflación del año 1991 fue del 26,82%, según la tabla 3.3.

\$ 500 del año dos (1992) equivalen a:

$$\frac{500}{(1,2513)(1,2682)} = \$ 315,1$$

porque los \$ 500 se deben deflactar o descontar de la inflación de 1992 y de la de 1991.

\$ 3.000 del año tres (1993) equivalen a:

$$\frac{3.000}{(1,2260)(1,2513)(1,2682)} = \$ 1.542 \text{ de hoy}$$

\$ 2.000 del año cuatro (1994) equivalen a:

$$\frac{2.000}{(1,2259)(1,2260)(1,2513)(1,2682)} = \$ 838,6 \text{ de hoy}$$

Así que el flujo de caja anterior, medido en pesos de hoy, es el siguiente:

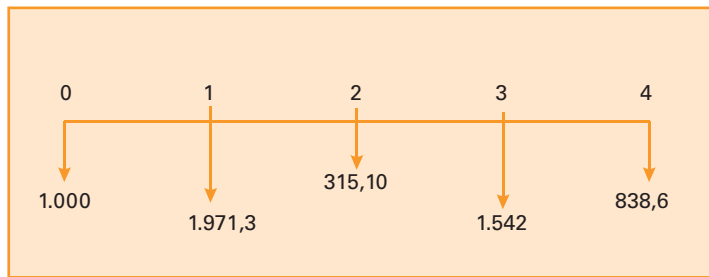


FIGURA 3.19

Tabla 3.3
Índice nacional de precios al consumidor. Total ponderado

	Mensuales									
	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Enero	3,30	3,00	2,80	3,30	3,00	3,49	3,24	3,15	1,84	2,51
Febrero	2,00	4,00	3,30	3,66	3,41	3,34	3,25	3,68	3,52	4,01
Marzo	2,70	2,90	2,50	2,89	2,52	2,31	1,87	2,21	2,61	2,10
Abril	2,30	3,90	2,50	2,81	2,80	2,85	1,94	2,37	2,23	1,97
Mayo	1,70	1,70	1,80	1,95	2,20	2,32	1,60	1,54	1,65	1,55
Junio	1,00	2,40	1,40	1,95	1,58	2,24	1,54	0,87	1,20	1,14
Julio	1,50	1,40	1,50	1,35	1,82	1,99	1,23	0,91	0,77	1,51
Agosto	0,30	0,20	1,40	1,58	1,27	0,75	1,25	0,97	0,63	1,10
Setiembre	1,20	1,70	1,40	2,37	1,45	0,83	1,12	1,09	0,84	1,19
Octubre	1,90	1,60	1,60	1,92	1,32	0,85	1,06	1,11	0,88	1,15
Noviembre	2,10	1,40	1,80	2,03	1,22	0,72	1,29	1,11	0,79	0,80
Diciembre	1,90	2,20	1,44	2,52	1,40	0,94	1,13	1,49	0,92	0,72
En año corrido	24,00	28,10	26,12	32,56	26,82	25,13	22,60	22,59	19,46	21,63

Fuente: DANE.

Índice nacional de precios al consumidor. Total ponderado

	Mensuales									
	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Enero	1,65	1,79	2,21	1,29	1,05	0,80	1,17	0,89	0,82	0,54
Febrero	3,11	3,28	1,70	2,30	1,89	1,26	1,11	1,20	1,02	0,66
Marzo	1,55	2,60	0,94	1,71	1,48	0,71	1,05	0,98	0,77	0,70
Abril	1,62	2,90	0,78	1,00	1,15	0,92	1,15	0,46	0,44	0,45
Mayo	1,62	1,56	0,48	0,52	0,42	0,60	0,49	0,38	0,41	0,33
Junio	1,20	1,22	0,28	-0,02	0,04	0,43	-0,05	0,60	0,40	0,30
Julio	0,83	0,47	0,31	-0,04	0,11	0,02	-0,14	-0,03	0,05	0,41
Agosto	1,14	0,03	0,50	0,32	0,26	0,09	0,31	0,03	0,00	0,39
Setiembre	1,26	0,29	0,33	0,43	0,37	0,36	0,22	0,30	0,43	0,29
Octubre	0,96	0,35	0,35	0,15	0,19	0,56	0,06	-0,01	0,23	-0,14
Noviembre	0,81	0,17	0,48	0,33	0,12	0,78	0,35	0,28	0,11	0,24
Diciembre	0,61	0,91	0,53	0,46	0,34	0,27	0,61	0,30	0,07	0,23
En año corrido	17,68	16,70	9,23	8,75	7,65	6,99	6,49	5,50	4,85	4,49

Fuente: DANE.

EJEMPLO 3.22

Tomando como referencia la inflación de 1988 hasta 1995 incluso, hallar la inflación promedio de esos ocho años.

Solución

Como se anotó, la inflación es un índice que opera sobre el valor inmediatamente anterior; por tanto, es una tasa que funciona de manera parecida al interés compuesto (sin ser un interés compuesto), y el promedio no es aritmético sino geométrico. Para nuestro ejemplo, supongamos que el 1-1-88 un artículo costaba \$ 100; entonces su valor al 31-12-95 estará dado por:

$$100(1,2810)(1,2612)(1,3236)(1,2682)(1,2513)(1,2260)(1,2259)(1,1942) = 609,06$$

Se trata de hallar la tasa anual que convirtió a \$ 100 en \$ 609,06 al cabo de ocho años. Entonces tenemos:

$$609,06 = 100(1 + i)^8$$

Luego: $i = 25,34\%$ anual.

Quiere decir que la inflación promedio para los ocho años considerados fue del 25,34% anual. Este valor es el que se utiliza para hacer proyecciones para los años siguientes. Así, por ejemplo, si queremos estimar cuánto costará el mismo artículo del ejemplo el 31 de diciembre del año 2000, lo que hacemos es ajustar su valor original de \$ 100 el 1-1-88 en el 25,34% anual de inflación hasta el año 2000 y obtendremos:

$$\text{\$ } 100(1,2534)^{13} = \text{\$ } 1.884,36$$

Este será el valor de ese artículo el 31 de diciembre del año 2000.

Otro ejercicio que el estudiante debe desarrollar en este momento es la interpretación y la construcción de las tablas de inflación de año corrido e inflación de año completo, a partir de la primera tabla de inflación mensual.

3.8.12 TASA DE DEVALUACIÓN

Es la medida de la pérdida de valor de la unidad monetaria nacional frente a otra moneda extranjera.

En nuestro caso, la moneda extranjera frente a la cual tiene mayor aplicación este concepto es el dólar de los Estados Unidos. Esta tasa se determina tomando los cambios de dólares por pesos colombianos en dos fechas diferentes. Si el 1 de enero de un año un dólar valía \$ 479 y el 31 de diciembre del mismo año el cambio estaba a \$ 637,07, quiere decir que la devaluación de ese año fue del 33% anual.

Cuando estudiamos las tasas compuestas se trató el caso de la relación entre la tasa de interés del $i_1\%$ de un préstamo en moneda extranjera, la tasa de pérdida de valor de nuestra moneda frente a aquella, o sea la devaluación del $i_2\%$, y la tasa real del crédito, y llegamos a la expresión (3-13), de tal manera que si denotamos por:

i_c : la tasa comercial del crédito en dólares

i_d : la tasa de devaluación

y por

i_r : la tasa real del crédito

obtenemos la expresión siguiente:

$$i_r = i_d + i_c + i_d \times i_c$$

Hoy obtenemos un crédito por valor de \$ 5.000 a un año. El cambio hoy es de \$ 590, y se prevé que dentro de un año el cambio será de 772,9. Si la tasa de interés en dólares es del 12% anual, determinar el verdadero costo del crédito.

Tenemos que la tasa comercial o acordada del crédito es $i_c = 12\%$ anual y la tasa de devaluación es $772,9/590 - 1 = 31\%$ anual, de tal manera que el costo del crédito, o tasa real que se paga, es:

$$i_r = 0,31 + 0,12 + 0,31 \times 0,12 = 0,4672 = 46,72\% \text{ anual}$$

También se presenta el caso de calcular la rentabilidad de una inversión en dólares que se haga en Colombia. El análisis es similar al que se hizo con la tasa de inflación, y aquí simplemente se trata de cambiar el término de inflación por el de devaluación y obtenemos:

$$i_r = \frac{i_c - i_d}{1 + i_d}$$

donde i_c es la tasa de interés comercial acordada en pesos colombianos, i_d la tasa de devaluación e i la tasa en dólares sin devaluación.

Por ejemplo, si disponemos de algunos dólares y los invertimos en Colombia sabiendo que el dólar aumenta su valor respecto del peso colombiano en el 27% anual y nuestra inversión en Colombia rinde el 34% anual, entonces el rendimiento en dólares será de:

$$i_r = \frac{0,34 - 0,27}{1 + 0,27} = 0,0551 = 5,5\% \text{ anual}$$

De manera similar, se maneja esta tasa cuando se trata de cualquier otra moneda extranjera.

En este momento el estudiante debe hallar la información de la devaluación del peso colombiano (o del de otra moneda) frente al dólar de los Estados Unidos en los cinco años anteriores y hacer una estimación promedio de la devaluación en esos años.

3.8.13 TASA DE OPORTUNIDAD

Por lo general, no todas las personas tienen las mismas oportunidades en la vida; un caso específico es el que hace referencia a las inversiones que pueden hacer ellas o las entidades. En este sentido, cada persona puede tener diferentes oportunidades de realizar sus inversiones. Por ejemplo, una determinada persona puede tener acceso a las siguientes tasas en el mercado: el 25% anual, el 28% anual, el 33% anual y hasta el 35% anual, sin incurrir en mayores riesgos o gastos adicionales. Dentro de esta gama de oportunidades que tiene la persona, a la mayor se la conoce generalmente como la **tasa de oportunidad** (TO) de esta persona y que en nuestro caso es la tasa del 35% anual.

A la menor, en este caso el 25% anual, se la conoce con el nombre de **tasa mínima atractiva de rentabilidad** (TMAR).

Como puede deducirse, la tasa de oportunidad es una tasa netamente personal o individual: depende exclusivamente de la persona o entidad inversionista y no del flujo de caja de la inversión, como sí sucede con la llamada tasa interna de retorno, que se estudiará más adelante.

Cuando se van a evaluar alternativas de inversión, la tasa de descuento que se utiliza es precisamente la tasa de oportunidad del inversionista, porque esto quiere decir que es la tasa de interés que deja de recibir por hacer la inversión en estudio.

En el caso que hemos puesto como ejemplo, es posible que la persona tome como su tasa de oportunidad no la del 35% anual sino, por ejemplo, la del 28% anual. Quiere decir esto que la elección de la tasa de oportunidad por un inversionista no es absoluta sino relativa, y depende de otros factores tales como seguridad o mínimo riesgo u otros beneficios no financieros en la inversión.

El sentido financiero de descontar el flujo de caja de un proyecto con la tasa de oportunidad es el de **cobrarle** al proyecto o inversión la tasa que el inversionista se priva de devengar en otras actividades por hacer la inversión en el proyecto que está evaluando.

AÑO FINANCIERO O DE 360 DÍAS

Las instituciones financieras han definido un año llamado **año financiero de 360 días** con el fin de disponer de un mayor número de períodos de capitalización y así poder tener una mayor gama de tasas para la captación de dinero.

La razón principal de la definición de este año obedece al número de submúltiplos que tiene (veinticinco en total), muchos de los cuales no son submúltiplos del año calendario o de 365 días.

El estudiante debe hacer el ejercicio, en este momento, de escribir todos los submúltiplos de 360.

Sea, por ejemplo, el caso en que la entidad estatal correspondiente autorice a las instituciones financieras captadoras de dinero que para tal fin pueden utilizar una tasa del 18,32% EA o sus equivalentes en cualquier otro período de tiempo.

Si una de estas instituciones desea captar dinero y ofrecer una tasa con capitalización:

- a) Cada 24 días
- b) Cada 72 días

La pregunta aquí es: ¿qué tasa nominal capitalizable, a) cada 24 días, b) cada 72 días, debe ofrecer de tal manera que sean equivalentes a la autorizada por el Gobierno?

Lo primero es pasar la tasa del 18,32% EA (año de 365 días) a su equivalente anual en el año de 360 días, y esto se logra a partir de la siguiente expresión, donde i^* es la tasa efectiva en el año de 360 días:

$$1 + i^* = (1,1832)^{360/365}$$

de donde $i^* = 18,0476\%$ es la tasa efectiva anual en el año de 360 días.

A partir de esta tasa del 18,0476% efectiva se halla la tasa nominal capitalizable cada 24 días, es decir, una tasa que capitalice 15 al año (360/24). Este resultado se puede hallar directamente con la calculadora financiera o a partir de la expresión:

$$1 + 0,180476 = \left(1 + \frac{j}{15}\right)^{15}$$

donde j es la tasa nominal capitalizable cada 24 días, y que en este caso es igual a $j = 16,6838\%$ nominal liquidable cada 24 días y corresponde a la tasa que la institución financiera debe ofrecer para el caso a).

De forma similar se obtiene la tasa nominal liquidable cada 72 días, es decir, la tasa que capitalice cinco veces al año (360/72), o sea, a partir de la expresión:

$$1,180476 = \left(1 + \frac{j}{15}\right)^5$$

donde j es la tasa nominal capitalizable cada 72 días y equivalente al 18,0476% efectiva en el año de 360 días. De esta expresión se obtiene que $j = 16,87\%$ es la tasa nominal liquidable cada 72 días.

El estudiante debe, en este momento, hacer como ejercicio el cálculo de tasas nominales en otros períodos submúltiplos de 360.

Ahora bien: suponga que una persona invierte en esta institución financiera la suma de \$ 10.000.000 a 24 días; entonces se debe determinar el monto de los intereses que esa persona recibirá al cabo de ese tiempo. Como la tasa de 16,6838 es nominal liquidable cada 24 días, entonces la tasa efectiva en ese período estará dada por:

$$i = \frac{16,6838\%}{15} = 1,1122\% \text{ efectiva cada 24 días}$$

por lo tanto, el monto de los intereses al final de ese período será de:

$$10.000.000(0,01122) = \$ 111.220$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Una persona necesita cancelar la suma de \$ 8.500.000 dentro de veinte meses. Para tal fin abre hoy tres cuentas de ahorros, A, B y C, con igual cantidad de dinero cada una. En la cuenta A, el dinero rinde el 21% capitalizable continuamente; en la B, el 22% TV; y en la C, el 25,82% MV. Hallar la cantidad de dinero con que debe abrir cada cuenta para que al cabo de los veinte meses, reuniendo los tres saldos, tenga la suma necesaria.

Solución

Sea **X** la cantidad de dinero con que abre cada cuenta.



FIGURA 3.20

Cuenta A:

$i = 29\%$ capitalizable continuamente

Entonces:

$$F_A = xe^{\left(\frac{0,29}{12}\right)^{20}} = x(1,62147)$$



FIGURA 3.21

Cuenta B:

$i = 22\%$ TV \Leftrightarrow 5,5% trimestral \Leftrightarrow 1,8% mensual

Entonces:

$$F_B = X(1,018)^{20} = X(1,42874)$$

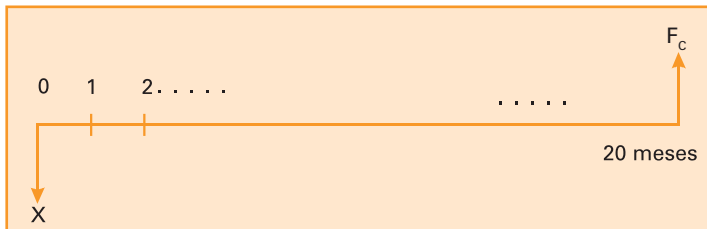


FIGURA 3.22

Cuenta C:

$i = 25,8\%$ MV \Leftrightarrow 2,15% mensual

Entonces:

$$F_C = X(1,0215)^{20} = X(1,53027)$$

Reuniendo los tres saldos, se debe obtener la suma necesaria de \$ 8.500.000, o sea que:

$$F_A + F_B + F_C = \$ 8.500.000$$

Es decir:

$$X(1,62147) + X(1,42874) + X(1,53027) = \$ 8.500.000$$

Despejando la variable X, se obtiene que:

$$X = \$ 1.855.700$$

Quiere decir esto que debe abrir cada una de las cuentas de ahorros con \$ 1.855.700, y así obtendrá la suma de \$ 8.500.000 al cabo de veinte meses.

2. Determinar qué tasa nominal trimestre anticipada equivale a las tasas siguientes:

- a) La tasa que equilibra la siguiente operación: invertir \$ 2.000.000 hoy, retirar \$ 1.700.000 dentro de un año y obtener un saldo a favor del inversionista de \$ 850.000 dentro de dos años.
- b) La tasa nominal semestral que transformará \$ 1.800.000 de hace ocho meses en \$ 2.750.000 dentro de seis meses.

Solución

a) El diagrama de flujo de caja de la operación financiera es:

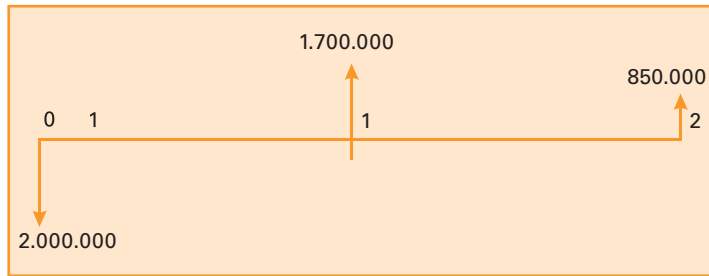


FIGURA 3.23

Equilibrando el diagrama en el punto 0 y tomando el $i\%$ como la tasa efectiva anual, se tiene que:

$$1.700.000(1 + i)^{-1} + 850.000(1 + i)^{-2} = 2.000.000$$

o sea:

$$170(1 + i)^{-1} + 85(1 + i)^{-2} - 200 = 0$$

Tomando $X = 1 + i$ y simplificando en la ecuación se llega a:

$$\frac{34}{x} + \frac{17}{x^2} - 40 = 0$$

o sea:

$$40X^2 - 34X - 17 = 0$$

Cuyas raíces son $X_1 = 1,20322$ y $X_2 = -0,35322$

De $X_1 = 1,20322 = 1 + i$ se concluye que $i = 0,20322$, o sea, el 20,322% efectivo anual equivalente al $1,20322^{1/4} - 1 = 4,733\%$ trimestral.

Equivalente al: $\frac{0,04733}{1 + 0,04733} = 4,52\%$ trimestral anticipado, o sea, el $4,52 \times 4 = 18,8\%$ nominal trimestre anticipado.

Lo que significa que la tasa nominal trimestre anticipada equivalente a la tasa que equilibra la operación dada es la tasa del 18,08 TA.

b) El diagrama del flujo de caja de la operación financiera correspondiente es:

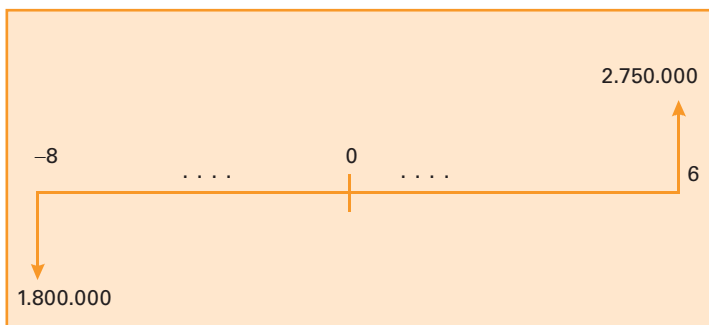


FIGURA 3.24

Sea el $i\%$ la tasa mensual que equilibra la operación, así que en el punto -8 se cumple:

$$1.800.000 = 2.750.000(1 + i)^{-14}$$

o sea $i = 3,07\%$ mensual equivalente a: $(1,0307)^6 - 1 = 19,89\%$ semestral

o también, $19,89\% \times 2 = 39,78\%$ nominal semestral es la tasa que equilibra la operación dada.

Ahora, del 19,89% semestral se obtiene:

$$(1,1989)^{1/2} - 1 = 9,494\% \text{ trimestral}$$

y esta equivale a:

$$\frac{0,09494}{1 + 0,09494} = 8,67\% \text{ trimestral anticipada}$$

y esta equivale a:

$$8,67\% \times 4 = 34,68\% \text{ trimestre anticipada}$$

Esto significa que la tasa nominal trimestre anticipada equivalente a la tasa nominal semestral (el 39,8% SV) que equilibra la operación dada es del 34,68TA.

3. ¿Al cabo de cuántos meses se tendrá en una cuenta de ahorros un saldo de \$ 1.810.000, sabiendo que hoy se hace un depósito de \$ 3.653.000 y luego retiros así: \$ 830.000 dentro de cinco meses y \$ 2.263.000 dentro de once meses, si la cuenta de ahorros paga un interés del 2% mensual?

Solución

El diagrama del flujo de la operación es el siguiente:

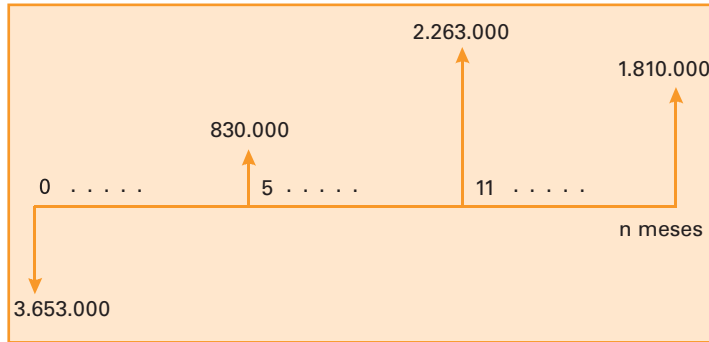


FIGURA 3.25

Equilibrando el diagrama en el punto 0, se tiene:

$$3.653.000 = 830.000(1,02)^{-5} + 2.263.000(1,02)^{-11} + 1.810.000 (1,02)^{-n}$$

De lo anterior se obtiene que:

$$(1,02)^{-n} = 0,59734595$$

Despejando **n** se llega a:

$$n = 26 \text{ meses}$$

Lo que significa que, bajo las condiciones del problema, dentro de 26 meses se tendrá en la cuenta de ahorros un saldo de \$ 1.810.000.

4. Sustituir una obligación de dos pagarés así: uno de \$ 450.000 en tres meses y otro de \$ 300.000 en ocho meses y con una tasa de interés del 2,5% mensual, por su equivalente en tres pagos a dos, seis y diez meses, tales que cada uno sea la quinta parte del anterior, si para este caso la tasa de interés será del 28% nominal mensual.

Solución

Los diagramas de flujo de caja de las dos operaciones son los siguientes:

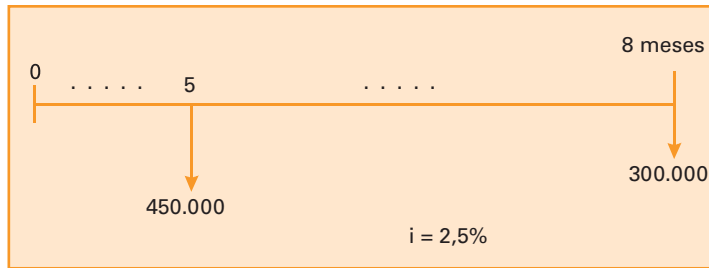


FIGURA 3.26

$i = 2,5\%$ mensual

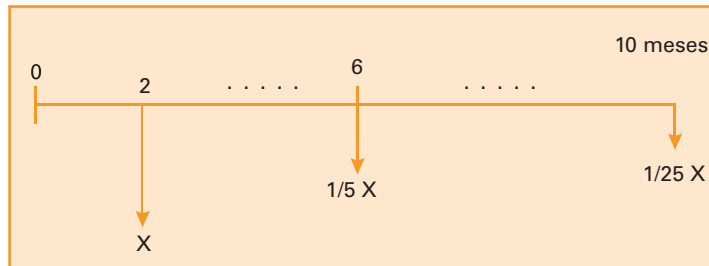


FIGURA 3.27

$i = 28\%$ MV $\Leftrightarrow 2,33\%$ mensual

donde X es el valor del primer pago de la segunda operación. Equilibrando los dos diagramas en el punto 0 e igualando los resultados, se tiene:

$$x(1,0233)^{-2} + \frac{1}{5} x(1,0233)^{-6} + \frac{1}{25} x(1,0233)^{-10} = \$450.000 (1,025)^{-3} + 300.000 (1,025)^{-8}$$

Lo anterior es una ecuación con una incógnita, de manera que despejando su valor se llega a que:

$$X = \$ 572.033$$

que corresponde al primer pago, o sea, el que se debe hacer dentro de dos meses. El segundo pago será de: $\frac{1}{5} X = \$ 114.406$, y el tercero de: $\frac{1}{25} X = \$ 22.881$.

- ¿Cuándo se debió depositar la suma de \$ 1.952.454 para poder retirar \$ 100.000 hoy, \$ 2.000.000 dentro de doce meses, y que aún se tenga un saldo a favor del inversionista de \$ 1.500.000 dentro de quince meses, si el dinero gana el 3,5% mensual?

Solución

El diagrama de flujo de caja es el siguiente:

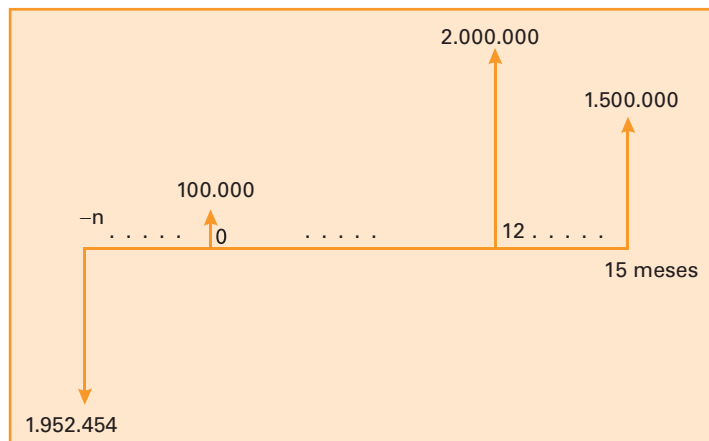


FIGURA 3.28

Equilibrando el flujo de caja en el punto 0 (hoy), se tiene que:

$$1.952.454(1,035)^n = 100.000 + 2.000.000(1,035)^{-12} + 1.500.000(1,035)^{-15}$$

De aquí se llega a:

$$(1,035)^n = 1,187686$$

Luego:

$$n = 5$$

Lo que significa que el depósito de \$ 1.952.454 ha debido realizarse hace cinco meses para que se cumplan las condiciones del problema.

6. Una obligación consta de tres pagarés; así: \$ 100.000 en cuatro meses, \$ 250.000 en ocho meses y \$ 600.000 en diez meses. Usted la debe sustituir por dos pagos iguales de a seis y doce meses. Si la tasa de interés es del 29,5% EA, hallar el valor de estos pagos iguales.

Solución

El diagrama del flujo de caja de la operación financiera donde X representa el valor de cada uno de los dos pagos iguales es el siguiente:

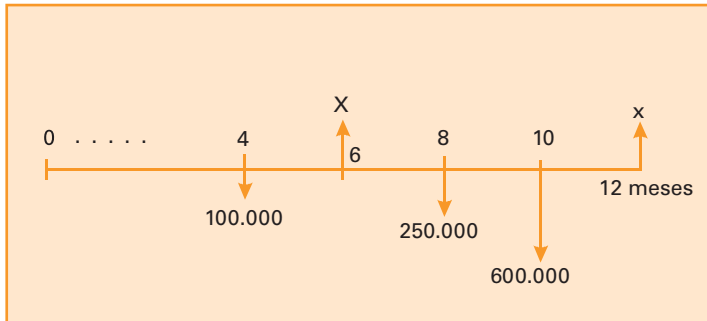


FIGURA 3.29

Equilibrando el diagrama en el punto 0, se tiene que:

$$X(1,0218)^{-6} + X(1,0218)^{-12} = \$ 100.000(1,0218)^{-4} + \$ 250.000(1,0218)^{-8} + \$ 600.000(1,0218)^{-10}$$

Despejando el valor de X se obtiene:

$$X = \$ 476.020$$

Lo que significa que la obligación original se puede sustituir por dos pagos iguales de \$ 476.020 cada uno, para las fechas dadas en el problema.

7. Cuando usted adquirió un artículo a crédito, convino el siguiente plan: una cuota inicial de \$ 125.000 y tres pagos de \$ 320.000, \$ 480.000 y \$ 260.000 a tres, seis y diez meses respectivamente, y un interés del 28,5% MV. Transcurridos cinco meses usted cancela la mitad del saldo en ese momento y el resto cuatro meses más tarde. Determinar el valor de cada uno de estos dos pagos.

Solución

Denotando con 5 el saldo a los cinco meses y con X el valor cancelado a los nueve meses, el diagrama del flujo de caja es:

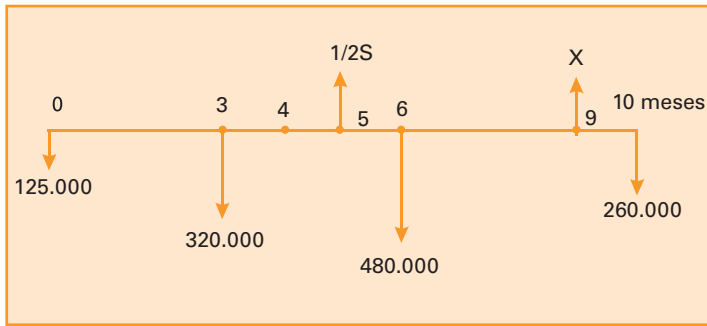


FIGURA 3.30

La tasa de interés del 28,5% MV \Leftrightarrow 2,375% mensual. El saldo al cabo de cinco meses se puede calcular de varias formas, pero una de ellas es hallando el valor presente de los pagos que aún no se han cancelado, es decir:

$$S = \$ 480.000(1,02375)^{-1} + \$ 260.000(1,02375)^{-5} = \$ 700.072$$

De manera que el primer pago (mitad del saldo) es de \$ 350.036. El saldo restante (\$ 350.036) junto con sus intereses se cancelará cuatro meses más tarde, y el valor de este pago estará dado por:

$$\$ 350.036(1,02375)^4 = \$ 384.493$$

Lo que significa que el valor de los dos pagos que se pide en el problema es:

Primer pago (a los cinco meses): \$ 350.036

Segundo pago (cuatro meses después del anterior): 384.493

8. Usted invierte hoy la suma de \$ 3.200.000 en una institución que paga un interés del 34,5% nominal mensual. Cada mes le hacen una retención del 0,85% sobre los intereses devengados en ese mes. Se pregunta: a) ¿Cuánto tendrá acumulado al cabo de dos años? b) ¿En qué momento tendrá un total de \$ 10.300.000?

Solución

Como la retención se hace mensual, entonces se debe manejar por meses.

Tasa de interés: 34,5% MV \Leftrightarrow 2,875% mensual.

Como la pregunta de la parte a) es el saldo o acumulado en un determinado momento, se denotará con:

S_t : El saldo al final del mes t después de la retención

S_{t+1} : El saldo al final del t + 1 después de la retención

Y el flujo de caja tendrá la forma:

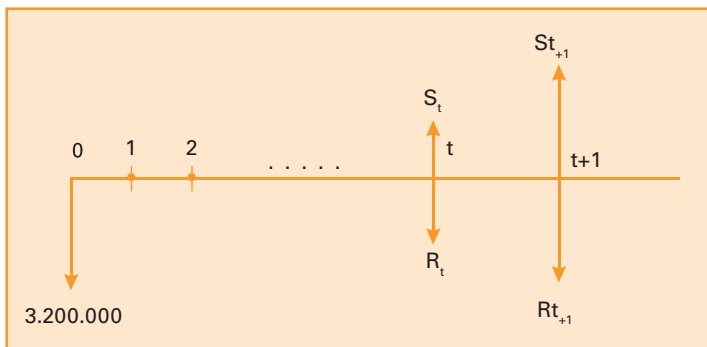


FIGURA 3.31

Donde R_t y R_{t+1} representan las retenciones en los meses t y $t + 1$ respectivamente. Se plantea entonces la ecuación siguiente:

$$S_{t+1} = S_t + 0,02875S_t - R_{t+1}$$

o sea:

$$S_{t+1} = S_t + 0,02875S_t - 0,0085(0,02875S_t)$$

Equivalente a:

$$S_{t+1} = 1,028505625S_t \text{ con } S_0 = \$ 3.200.000$$

y corresponde a una ecuación de diferencia finita de primer orden cuya solución es:

$$S_t = (1,028505625)^t(3.200.000)$$

La parte a) del problema pide el saldo al cabo de 24 meses, o sea, el valor de S_{24} , que está dado por:

$$S_{24} = (1,028505625)^{24}(3.200.000) = \$ 6.282.176$$

La parte b) del problema pide calcular el momento en el que se tenga un determinado saldo; allí se debe cumplir la ecuación:

$$10.300.000 = 3.200.000(1,028505625)^t$$

De donde:

$$t = 41,6 \text{ meses}$$

Lo que significa que, bajo las condiciones del problema, al cabo de 41,6 meses se tendrá el saldo deseado.

Sin embargo, esta es la solución matemática del problema, porque en un caso práctico si los intereses no se liquidan por fracciones de meses sino cada mes, así como la retención, la solución práctica será la de 42 meses, que sobrepasa el saldo, o la de 41 meses, cuando aún no se alcanza el saldo deseado.

9. Una obligación consta de tres pagarés, así: \$ 1.000.000, \$ 2.500.000 y \$ 3.000.000, para los meses cuatro, doce y quince respectivamente. Sustituirla por un solo pagaré para dentro de diez meses con una tasa del 3% mensual para el primer año y del 2,5% mensual de allí en adelante.

Solución

Sea X el valor del pagaré que sustituye la obligación original; entonces el diagrama del flujo en caja es:

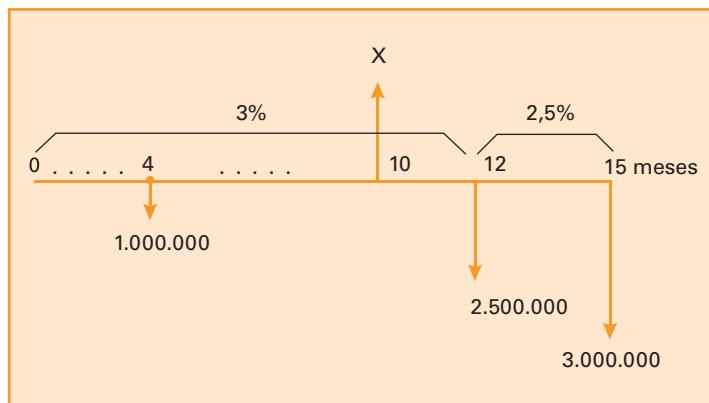


FIGURA 3.32

Equilibrando el diagrama en el punto 10, se tiene:

$$X = 1.000.000 (1,03)^6 + 2.500.000(1,03)^{-2} + 3.000.000(1,025)^{-3}(1,03)^{-2} = 6.176.424$$

Lo que significa que con un pago de \$ 6.176.424 en el mes 10, se sustituye la obligación original bajo las condiciones dadas en las tasas de interés.

10. Usted tiene una obligación que consta de tres pagarés, así: \$ 1.600.000 a cuatro meses, \$ 1.200.000 a ocho meses y \$ 2.000.000 a quince meses, con una tasa de interés del 34% EA. Una vez cancelado el primer pagaré, usted solicita que los dos restantes le sean sustituidos por dos pagos iguales de \$ 1.735.590 cada uno; si el primero es para cinco meses más tarde de esa fecha, ¿cuándo se debe cancelar el segundo, si para la refinanciación se pactó una tasa del 35% TV?

Solución

Las tasas de interés son: para la primera obligación, del $(1,34)^{1/12} - 1 = 2,47\%$ mensual, y para la segunda del $\left(1 + \frac{0,35}{4}\right)^{1/3} - 1 = 2,84\%$ mensual.

Los diagramas del flujo de caja para las dos operaciones son:

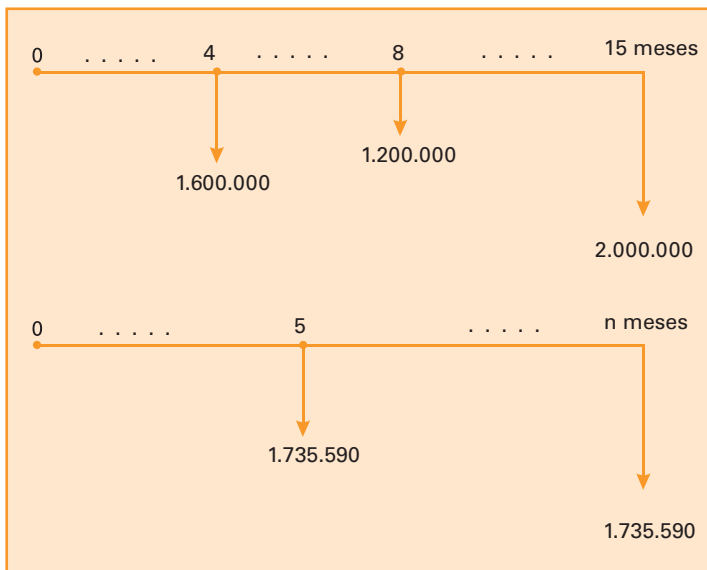


FIGURA 3.33

Como el primer pagaré (1.600.000) ya se canceló, entonces el saldo en ese momento será de:

$$1.200.000(1,0247)^{-4} + 2.000.000 (1,0247)^{-11} = \$ 2.617.620$$

Este saldo se deberá autorizar en los dos pagos iguales, así que equilibrando en el punto 0 del segundo diagrama (mes cuatro a partir de hoy), se tiene:

$$2.617.620 = 1.735.590 (1,0284)^{-5} + 1.735.590 (1,0284)^{-n}$$

de donde

$$n = 16 \text{ meses}$$

Este valor de $n = 16$ es contado a partir del mes cuartos, así que el segundo pagaré de \$ 1.735.590 se deberá cancelar dentro de veinte meses.

11. Financiar \$ 3.500.000 a 24 meses con pagos iguales en los meses 6, 10 y 20, y un último pago al cabo de dos años igual a la mitad de la deuda original, sabiendo que la tasa de interés de la financiación es del 28% anual durante el primer año y del 31% TV de ahí en adelante.

Solución

Denotando con X el valor de los pagos iguales, el diagrama del flujo de caja es el siguiente:

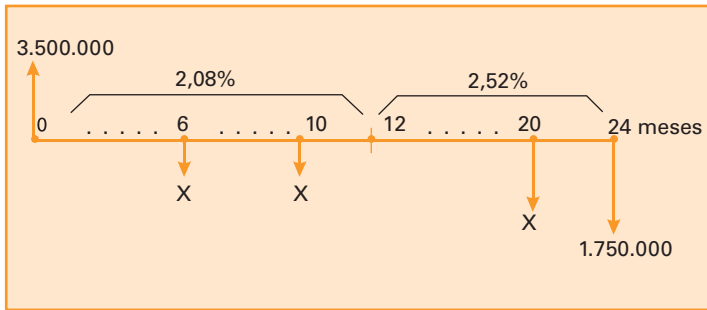


FIGURA 3.34

Equilibrando el diagrama en el punto 0, se llega a:

$$3.500.000 = X(1,0208)^{-6} + X(1,0208)^{-10} + X(1,0252)^{-8}(1,0208)^{-12} + 1.750.000(1,0252)^{-12}(1,0208)^{-12}$$

Despejando la variable X se obtiene:

$$X = \$ 1.063.366$$

12. Determinar el valor de precio al contado de un artículo que financiado se adquiere así: cuota inicial del 20% del valor de precio al contado, tres pagos de \$ 750.000, \$ 850.000 y \$ 1.050.000, a 5, 12 y 15 meses respectivamente, y un último pago dentro de veinte meses del 30% del valor de precio al contado del artículo. La tasa de interés será del 30% TV durante los ocho primeros meses y del 35% EA de ahí en adelante.

Solución

Las tasas de interés son:

- 30% TV \Leftrightarrow 2,44 mensual
- 35% EA \Leftrightarrow 2,53% mensual

El diagrama del flujo de caja del problema, donde X representa el valor de contado del artículo, es el siguiente:

Equilibrando el diagrama en el punto 0 se obtiene:

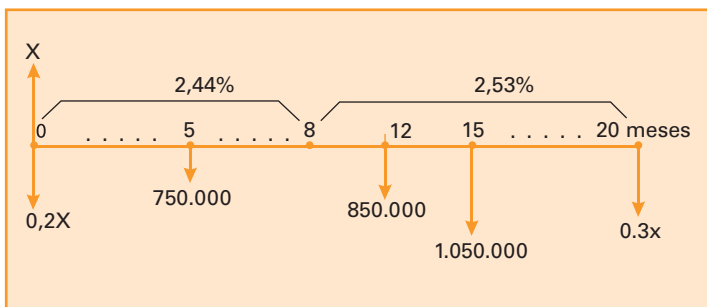


FIGURA 3.35

$$X = 0,2X + 750.000(1,0244)^{-5} + 850.000(1,0253)^{-4}(1,0244)^{-8} + 1.050.000(1,0253)^{-7}(1,0244)^{-8} + 0,3X(1,0253)^{-12}(1,0244)^{-8}$$

Despejando la variable X se llega a que:

$$X = \$ 3.285.180$$

que corresponde al valor al contado del artículo.

13. Financiar \$ 4.500.000 de hoy a dos años y medio en cuatro pagos en los meses 15, 24, 28 y 30, tales que cada pago sea la mitad del anterior. Tasa de interés del 32% anual para el primer año y del 34% ATV de ahí en adelante.

Solución

Tasas de interés:

- 32% anual para el primer año
- 34% ATV \Leftrightarrow 2,756% mensual para el resto de tiempo

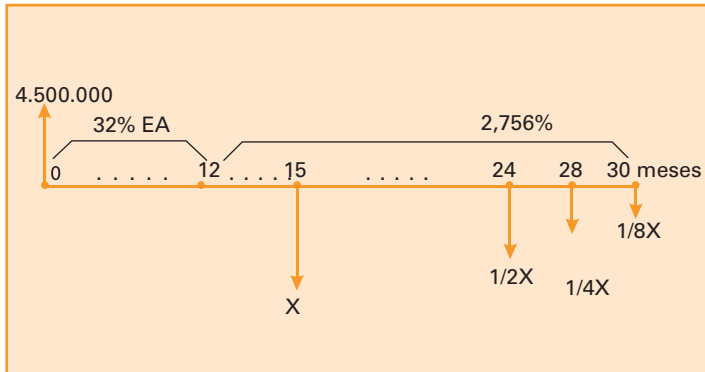


FIGURA 3.36

Denotando con X el valor del primer pago, el diagrama del flujo de caja es:

Equilibrando el diagrama en el punto 0, se obtiene:

$$4.500.000 = X \left[(1,02756)^{-3} + \frac{1}{2} (1,02756)^{-12} + \frac{1}{4} (1,02756)^{-16} + \frac{1}{8} (1,02756)^{-18} \right] (1,32)^{-1}$$

Despejando la variable X se llega a que $X = \$ 3.905.493$ es el primer pago; entonces el segundo será de \$ 1.952.746, el tercero de \$ 976.373 y el cuarto de \$ 488.186.

AUTOEVALUACIÓN

1. Una tasa del 20% anual liquidable por mes vencido es:
 - a) Una tasa de interés efectiva anual
 - b) Una tasa de interés nominal anual
 - c) Una tasa de interés efectiva mensual
 - d) Una tasa de interés nominal mensual

2. Una tasa de interés del 2% mensual es equivalente a:
 - a) Una tasa efectiva del 24% anual
 - b) Una tasa del 6% trimestral
 - c) Una tasa del 24% nominal mensual
 - d) Una tasa del 2% mensual anticipada

3. ¿Existe diferencia entre interés y tasa de interés?

4. Dos tasas de interés son equivalentes cuando:
 - a) Son iguales
 - b) Son efectivas
 - c) Producen el mismo resultado
 - d) Son nominales

5. Una tasa anticipada:
 - a) Nunca es efectiva
 - b) Siempre es nominal
 - c) Nunca se puede dividir por un número de períodos
 - d) Puede ser nominal o efectiva

6. Si dos tasas son equivalentes, entonces siempre:
 - a) Ambas deben ser efectivas
 - b) Ambas deben ser nominales
 - c) Deben ser la una nominal y la otra efectiva
 - d) Ninguna de las anteriores

7. Si una tasa de interés compuesto duplica una inversión al cabo de dos años, ¿entonces la triplicará al cabo de tres años? Explique.

8. ¿En qué casos una tasa de interés compuesta no se puede dividir por un número de períodos? Explique.

9. ¿Por qué no se deben sumar, restar, igualar o comprar cantidades de dinero que estén en tiempos diferentes? Explique.
10. ¿El punto focal, o punto para equilibrar un diagrama de flujo de caja o varios diagramas, siempre puede ser cualquiera? Explique.
11. ¿Cuál es la razón financiera por la cual la tasa del 2,5% mensual de interés compuesto no es equivalente al 7,5% trimestral?
12. ¿Qué significa financieramente que un valor presente sea equivalente a un valor futuro?
13. ¿Cuáles de las siguientes son tasas de interés?
 - a) Una inflación del 1,3% mensual
 - b) Un crecimiento de la población del 14% anual
 - c) Un aumento salarial del 6% anual
 - d) Ninguna de las anteriores
14. Explique la razón financiera por la cual una tasa de interés compuesta y una efectiva no se deben dividir para obtener la tasa equivalente en un período menor.
15. Explique lo que usted entiende por financiar una deuda.
16. ¿Cuál es la diferencia central entre una tasa de interés continua y una tasa de interés discreta?
17. ¿Qué es un factor de capitalización y un factor de descuento y cómo se llama la tasa que interviene en cada uno de esos factores?
18. Establezca la diferencia entre: tasa de interés simple, tasa de interés compuesta y tasa de interés continua en una operación financiera de inversión.

PROBLEMAS I

- 1.1** Determinar cuáles de los factores siguientes están bien calculados y cuáles no:
- a) $(FIP, 3\%, 18) = 1,70243306$
 - b) $(FIP, 2,5\%, 12) = 2,34488882$
 - c) $(PIF, 3\%, 18) = 0,587394687$
 - d) $(PF, 3,6\%, 12) = 0,65415841$
 - e) $(FIP, 2,6\%, 10) = 1,292628145$
- 1.2** Un título de participación se adquiere por el 89,75% de su valor nominal, que es de \$ 1.550.000, y se redime a los ocho meses por el 100%. Determinar el descuento simple y la tasa de interés mensual simple equivalente a este descuento.
- 1.3** Determine cuánto tiempo será necesario para que:
- a) Una inversión de \$ 1.200.000 se convierta en \$ 1.950.750, con una tasa de interés del 27,5% anual.
 - b) Una inversión de \$ 1.000.000 se convierta en \$ 2.409.845 con una tasa de interés del 7% trimestral.
- 1.4** ¿Qué tasa de interés mensual convierte, al cabo de dos años, el valor presente P en el valor futuro F, en cada uno de los siguientes casos?
- a) $P = \$ 470.000, F = 950.000$
 - b) $P = \$ 2.320.000, F = \$ 5.232.000$
 - c) $P = \$ 755.000, F = \$ 2.485.000?$
 - d) $P = \$ 1.205.000, F = \$ 2.109.180$
- 1.5** Un artículo tiene un valor de precio al contado de \$ 158.500. Se adquiere a crédito con una cuota inicial del 30% del valor de contado y un pago de \$ 140.397 dentro de nueve meses. Hallar la tasa mensual de interés que se cobra por la financiación.
- 1.6** ¿Qué es mejor: invertir en una empresa que garantiza triplicar la inversión al cabo de dos años y medio, o invertir en una cuenta de ahorros que paga el 3,5% mensual?
- 1.7** Representar en un diagrama de tiempo-valor los siguientes flujos de caja:

a)

Período	Ingreso	Egreso
0		100.000
1	20.000	
2		50.000
3	40.000	
4	40.000	
5	25.000	
6		35.000
7	40.000	60.000

b)

Período	Ingreso	Egreso
0		850.000
1	35.000	
2	25.000	
3--8	70.000	
9		50.000
10		
11		
12--15	45.000	

1.8 Financiar \$ 3.500.000 a 24 meses con pagos iguales en los meses sexto, décimo, vigésimo y un último pago al cabo de dos años igual a la mitad de la deuda original, sabiendo que el acreedor cobra una tasa del 28% EA durante el primer año del crédito y del 31% TV de ahí en adelante.

1.9 Una empresa deposita hoy \$ 700.000 en una entidad que paga una tasa anual del $i\%$ variable que depende del tiempo medido en años; así:

$$i_t = \begin{cases} 0,28 + 0,005 t, & \text{si } t = 1,2,\dots,6 \\ 0,32 & \text{si } t = 7,8,9,10 \end{cases}$$

La persona retira \$ 250.000 dentro de dos años y deposita \$ 180.000 tres años más tarde del retiro. Calcular el saldo que tendrá al cabo de diez años.

1.10 Usted deberá cancelar hoy la suma de \$ 820.000. Sin embargo, su acreedor le propone la siguiente operación: incrementar este saldo en el 15% y que usted pague esta nueva suma de dinero dentro de cinco meses. Hallar la tasa de interés mensual real cargada.

1.11 ¿Cuánto debe depositar hoy una persona en una cuenta de ahorro que paga el 28,5% MV para poder retirar \$ 650.000 dentro de cinco meses, \$ 460.000 dentro de ocho meses, la mitad de lo depositado dentro de un año, y para que dentro de un año y medio aún tenga en la cuenta de ahorro una cantidad igual a la mitad de lo depositado originalmente?

1.12 La sección de ahorros de un banco comercial ofrece una tasa de interés del 2,15% mensual a sus ahorristas. ¿Al cabo de cuánto tiempo el total de los intereses devengados por una inversión será igual a la mitad de la suma invertida inicialmente?

1.13 El 5 de enero de 1991 usted recibe en calidad de préstamo \$ 385.000 y firma un pagaré por \$ 645.000. Si la tasa de interés del préstamo es del 3,5% mensual, ¿cuál será la fecha en que se redime el pagaré?

1.14 Un pagaré cuyo valor dentro de dos años será de \$ 700.000, se adquiere hoy por \$ 362.486. Si el comprador gana en otras inversiones el 32% anual, ¿cuánto ganó o perdió el inversionista el día de la compra del pagaré?

1.15 Usted, como director de una empresa, debe establecer un fondo para la liquidación de un empleado al cumplir este veinte años de trabajo. La liquidación equivale a veinte salarios mensuales iguales a los devengados en el último año de trabajo. Si el empleado empezó ganando \$ 85.000 mensuales y el salario se lo reajustan en el 20% anual, ¿cuánto debe depositar la empresa el día en que inicia labores el empleado, en una institución que paga un interés del 28% anual, para obtener al cabo de veinte años la suma necesaria para cubrir la liquidación?

1.16 Resolver el problema anterior sabiendo que el salario se reajustará en el 20% anual durante los diez primeros años, y en el 25% anual de ahí en adelante, y que la institución pagará el 28% anual durante los cinco primeros años y el 30% anual de ahí en adelante.

1.17 En el problema 3.16, suponer que la empresa no hace un solo depósito sino dos depósitos iguales: el primero el día en que el trabajador inicia labores y el segundo al cabo de diez años. Hallar el valor de estos depósitos.

- 1.18** Un señor tiene hoy una deuda por valor de \$ 650.000 y le cobran un interés del 3% mensual. A su vez, el señor dispone hoy de \$ 450.000, que deposita en una cuenta al 4% mensual. ¿Dentro de cuánto tiempo el monto que tenga en la cuenta le será suficiente para pagar la deuda existente en ese momento?
- 1.19** Un televisor tiene un valor de precio al contado de \$ 295.000 y se debe financiar en tres pagos; así: \$ 100.000 dentro de tres meses y los otros dos pagos iguales a ocho y doce meses. Hallar el valor de estos pagos si la tasa de interés que se paga por la financiación es del 4% mensual.
- 1.20** Usted tiene dos alternativas para pagar una deuda:
- Mediante dos pagos iguales de \$ 130.000 a tres y ocho meses con una tasa de interés del 3,75% mensual; o,
 - Mediante dos pagos, uno por \$ 150.000 dentro de cuatro meses y otro por \$ 110.000 dentro de ocho meses, con una tasa de interés del 3,8% mensual.
- ¿Cuál de estas dos alternativas escogería usted?
- 1.21** ¿Dentro de cuántos trimestres se tendrá en una cuenta de ahorros un saldo de \$ 910.660 sabiendo que hoy se hace un depósito de \$ 400.000 y luego retiros así: \$ 80.000 dentro de nueve meses y \$ 120.000 dentro de doce meses, si la cuenta de ahorros abona un interés del 9,5% trimestral?
- 1.22** Una máquina de coser tiene un valor de precio al contado de \$ 410.000. Se desea financiar en tres pagos a seis, diez y quince meses, de tal manera que cada pago sea igual a los $\frac{3}{4}$ del pago anterior. Hallar el valor de cada pago sabiendo que se cobra un interés del 2,8% mensual sobre el saldo.
- 1.23** Sustituir dos pagarés, uno de \$ 380.000 y otro de \$ 220.000, con vencimientos a tres y cinco meses respectivamente, por dos pagos iguales para los meses cuatro y seis, suponiendo una tasa de interés del 30% nominal mensual.
- 1.24** Se ha pactado cubrir una obligación con tres pagos así: \$ 155.000 hoy, \$ 210.000 dentro de seis meses y \$ 180.000 dentro de quince meses, con un interés del 36% nominal mensual; se desea sustituir por tres pagos así: \$ 200.000 dentro de tres meses, \$ 150.000 dentro de un año y un último pago dentro de un año y medio. Determinar el valor de este último pago si para este caso la tasa de interés es del 3,2% mensual. Utilice el valor presente.
- 1.25** Resolver el problema anterior utilizando el valor futuro. ¿Se obtiene el mismo resultado? En caso contrario, explicar el porqué de la diferencia. ¿Qué resultado debe aceptarse como respuesta al problema anterior?
- 1.26** Sustituir una obligación de dos pagarés así: uno de \$ 450.000 a tres meses y otro de \$ 300.000 a ocho meses y con una tasa de interés del 2,5% mensual por su equivalente en tres pagos a dos, seis y diez meses, tales que cada pago sea la quinta parte del inmediatamente anterior, si para este caso la tasa de interés es del 28% nominal mensual. Utilice el valor presente.
- 1.27** ¿Cuánto tiempo tardará un depósito en duplicar su valor si se ha colocado en una institución financiera que paga una tasa de interés del 32% nominal trimestral?

- 1.28** Se pactó cancelar una deuda con un pago de \$ 3.000.000 dentro de tres años, pero se acepta cambiar por dos pagos, uno de \$ 2.200.000 dentro de dos años y el otro de \$ 1.300.000 dentro de cuatro años. Analizar la tasa de interés ($i\% \geq 0$) determinando cuándo hay equilibrio en la operación y cuándo hay pérdida, ya sea del acreedor o del deudor, y para qué valor de la tasa el deudor tiene su mayor pérdida.
- 1.29** Hallar la tasa efectiva mensual equivalente a:
- a) El 24% anual
 - b) El 31% nominal mensual
 - c) El 30% nominal semestral
 - d) El 32% nominal trimestral
 - e) El 10,2% trimestral
 - f) El 18% semestral
- 1.30** Hallar la tasa nominal mensual equivalente a:
- a) El 3% mensual
 - b) El 30% anual
 - c) El 36% nominal semestral
 - d) El 9% trimestral
- 1.31** Financiar \$ 4.500.000 de hoy a dos años y medio en cuatro pagos, en los meses 15, 24, 28 y 30, de tal manera que cada uno de ellos, a partir del segundo, sea igual a la mitad del inmediatamente anterior. La tasa de interés será del 32% anual para el primer año y del 34% TV de ahí en adelante.
- 1.32** Por una inversión de \$ 1.250.000 hace 26 meses se tiene hoy una suma equivalente al 320% de la cantidad invertida. Determinar la tasa nominal trimestral de rendimiento del dinero.
- 1.33** Se dispone hoy de una suma de dinero para invertir y se presentan dos alternativas: la primera es invertir al 29% nominal mensual y la segunda es invertir al 30,5% nominal semestral. ¿Cuál debe aceptarse?
- 1.34** Una persona hace hoy un depósito de \$ 400.000 en una cuenta de ahorros que paga el 27,5% nominal trimestral. Dos años más tarde deposita \$ 120.000; un año después de este depósito hace otro por valor de \$ 180.000; tres años más tarde de este último depósito, la tercera parte del total acumulado se transfiere a otra cuenta que paga un interés del 29,5% nominal trimestral. ¿Cuánto dinero se tendrá en cada una de las cuentas cuatro años después de la transferencia?
- 1.35** En este momento se tiene \$ 1.500.000 disponible para invertir por dos años y pueden depositarse en una cuenta de ahorros o en una corporación. La primera paga el 2,4% mensual y la segunda el 31% nominal trimestral. En la cuenta de ahorros no se pagan impuestos y en la corporación se deben pagar unos impuestos del 5% de los intereses devengados ese año; este pago debe hacerse cada año. Determinar la mejor alternativa para invertir el dinero.

- 1.36** La señora M. M. deposita \$ 100.000 en una cuenta de ahorros que paga un interés del 28% capitalizable trimestralmente; dentro de tres años retira la tercera parte del total acumulado en su cuenta, dos años más tarde hace un depósito igual a la mitad del saldo existente en ese momento y dos años después retira la totalidad del dinero existente en esa fecha. Hallar el valor de este último retiro.
- 1.37** Determine la tasa nominal mensual correspondiente a cada uno de los siguientes casos:
- Una inversión de \$ 1.300.000 que produce un ingreso de \$ 2.205.000 dos años y medio más tarde.
 - Una inversión de \$ 680.000 hace dos años convertida hoy en \$ 1.420.000.
 - Una inversión de \$ 970.000 hace ocho meses convertida hoy en \$ 1.455.000
- 1.38** Determine el número de meses que se requieren para que:
- Una inversión hoy de \$ 450.000 se convierta en \$ 594.610 si el dinero rinde el 26% capitalizable mensualmente.
 - Una inversión hoy de \$ 620.000 se convierta en \$ 917.485, sabiendo que el dinero rinde el 27% capitalizable trimestralmente.
- 1.39** Sustituir una obligación que consta de tres pagarés de \$ 100.000, \$ 260.000 y \$ 560.000 para dentro de dos, seis y diez meses, respectivamente, por su equivalente en dos pagos iguales uno para dentro de diez meses y el otro a veinte meses, sabiendo que la tasa de interés acordada en todos los casos es del 32,22% capitalizable mensualmente.
- 1.40** Resolver el problema anterior para una tasa de interés del 32,22% capitalizable mensualmente durante los diez primeros meses y del 34% capitalizable mensualmente de ahí en adelante.
- 1.41** Una persona abre una cuenta de ahorros con un depósito inicial de \$ 220.000; hace un nuevo depósito seis meses más tarde por valor de \$ 95.000 y otro depósito por \$ 125.000 quince meses después del anterior. Mantiene la cuenta de ahorros durante dos años y medio, y al final de este tiempo retira el total acumulado. Hallar el valor de este retiro, suponiendo que la cuenta de ahorros abona un interés sobre el saldo del 5% trimestral durante el primer año y del 7% trimestral de ahí en adelante.
- 1.42** Usted como deudor, ¿cuál de las dos alternativas siguientes prefiere para pagar la misma deuda? La primera alternativa es pagar hoy \$ 150.000, dentro de siete meses pagar \$ 83.000 y dentro de un año pagar \$ 115.000, con una tasa de interés del 7% trimestral. La segunda alternativa es hacer tres pagos iguales de \$ 95.000 en los meses seis, nueve y catorce con una tasa del 2,5% mensual.
- 1.43** Una entidad financiera ofrece dos planes de inversión a sus clientes: el Plan A, que paga un interés del 30% nominal trimestral sin ningún recargo adicional, y el Plan B, que paga un interés del 32% nominal trimestral, pero descuenta el 3% sobre la inversión inicial; este descuento se hace al final de cada año. Si usted tiene \$ 1.200.000 para invertir en esta entidad y durante tres años, ¿qué plan escogería?
- 1.44** ¿Cuánto se debe depositar hoy en una cuenta de ahorros que paga un interés del 29,5% nominal trimestral para poder retirar \$ 75.000 dentro de seis meses, \$ 42.000 dentro de diez meses, la mitad de lo depositado dentro de un año, y que aún se tenga un saldo de \$ 320.000 en la cuenta dentro de quince meses?

- 1.45** Se adquiere una máquina financiada y se pacta cubrir en tres pagos de \$ 60.000, \$ 80.000 y \$ 100.000 en los meses seis, ocho y doce respectivamente. Hallar el valor del precio al contado sabiendo que la financiación contempla una tasa de interés sobre el saldo del 2,5% mensual para los seis primeros meses y del 9% trimestral de entonces en adelante.
- 1.46** Una persona depositó, el 1 de marzo de 1990, \$ 350.000 en una cuenta de ahorros que le paga el 28,5% nominal trimestral; el 1 de agosto del mismo año depositó \$ 120.000; el 1 de diciembre del mismo año retiró de la cuenta la cuarta parte del total acumulado hasta ese momento. ¿Cuál será el saldo en esa cuenta el 1 de setiembre de 1992?
- 1.47** Un deudor debe pagar \$ 725.000 dentro de diez meses por una deuda contraída hace seis meses. El acreedor acepta que hoy se le pague una cantidad igual al 118% de la suma prestada hace seis meses y de esta forma quedan a salvo y en paz. Sabiendo que en esta operación se había pactado un interés del 30% nominal trimestral, averiguar si existe equilibrio en esta operación; en caso contrario, determinar quién perdió y de cuánto es esta pérdida hoy.
- 1.48** Una persona debía pagar una deuda mediante tres pagos; así: \$ 850.000 dentro de tres meses, \$ 1.100.000 dentro de ocho meses y \$ 1.400.000 dentro de un año, con un interés del 28,5% MV. El deudor solicita pagar la deuda con dos pagos iguales de \$ 2.200.000 cada uno. Si para esta refinanciación el interés es del 8% trimestral y uno de los pagos se hace dentro de diez meses, ¿cuánto deberá pagarse por el segundo?
- 1.49** Un cliente debería pagar una deuda mediante tres pagos; así: \$ 55.000 dentro de tres meses, \$ 70.000 dentro de ocho meses y \$ 128.000 dentro de un año, con una tasa de interés sobre el saldo del 3,3% mensual. El acreedor acepta que la deuda de hoy se cubra con un único pago dentro de quince meses y con una tasa de interés del 11% trimestral. Hallar el valor de este pago único.
- 1.50** Un comerciante compró un pagaré por un valor de \$ 345.000 para dentro de un año y con un interés del 28% nominal mensual; hace cinco meses, por un valor de \$ 237.500. Determinar si hay equilibrio en esta operación y, en caso contrario, quién perdió y de cuánto fue la pérdida el día del endoso del pagaré.
- 1.51** Una institución bancaria le hace un préstamo a uno de sus clientes por valor de \$ 1.540.000 cobrándole una tasa de interés del 39% nominal mensual y capitalizando los intereses. La deuda se debe cancelar con dos pagos iguales de \$ 1.148.314 cada uno; si uno de ellos se hace al cabo de un año, ¿cuándo deberá cancelarse el otro?
- 1.52** En el problema 3.51, ¿para qué valor de la tasa de interés los dos pagos deben hacerse en seis y doce meses?
- 1.53** Sustituir una obligación que consta de tres pagarés; así: uno por \$ 100.000 para hoy, otro por \$ 150.000 para dentro de cinco meses y otro por \$ 180.000 para dentro de un año y medio, todos con un interés del 29% nominal trimestral, por su equivalente en cuatro pagarés a 8, 12, 15 y 20 meses, y tales que cada uno, a partir del segundo, sea igual a la tercera parte del inmediatamente anterior, sabiendo que para este caso la tasa de interés es del 34% nominal semestral. Hallar el valor de cada uno de estos cuatro pagarés.

- 1.54** Determinar el valor del precio al contado de un artículo sabiendo que financiado se adquiere con el siguiente plan: una cuota inicial de \$ 50.000, tres pagos de \$ 60.000, \$ 80.000 y \$ 90.000 a 5, 10 y 12 meses respectivamente, y un último pago dentro de 15 meses equivalente al 30% del valor de contado del artículo. La tasa de interés que se carga es del 30% nominal trimestral durante los ocho primeros meses y del 33% anual de ahí en adelante.
- 1.55** Una obligación financiera consta de tres pagarés; así: \$ 100.000 para dentro de cuatro meses, \$ 250.000 para dentro de un año y \$ 300.000 para dentro de 15 meses. Debe sustituirse por un solo pagaré para dentro de diez meses. Si el interés es del 3% mensual durante el primer año y del 2,5% mensual de ahí en adelante, hallar el valor de este nuevo pagaré.
- 1.56** A usted como deudor le presenta su acreedor tres alternativas para cancelar una obligación en la que le están cobrando un interés del 3% mensual sobre el saldo. Determinar la mejor alternativa:
- Un pago único de \$ 850 000 dentro de ocho meses.
 - Dos pagos de \$ 400.000 cada uno a tres y seis meses respectivamente.
 - Tres pagos así: \$ 300.000, \$ 400.000 y \$ 200.000 a dos, cuatro y doce meses respectivamente.
- 1.57** Una persona deposita hoy \$ 450.000 en una corporación de ahorro que paga el 28% nominal trimestral. Tres años después deposita \$ 620.000, un año más tarde deposita \$ 500.000, y dos años después decide retirar la cuarta parte del total acumulado hasta ese momento. Hallar el saldo en la cuenta de ahorros cinco meses después del retiro.
- 1.58** Cuando usted adquirió un artículo a crédito, se convino el siguiente plan: una cuota inicial de \$ 125.000 y tres pagos de \$ 85.000, \$ 100.000 y \$ 150.000 a tres, cinco y ocho meses respectivamente, con una tasa de interés del 3,3% mensual. Transcurridos cuatro meses, el deudor paga la mitad del saldo en esa fecha y el resto dos meses más tarde. Determinar el valor de cada uno de estos pagos.
- 1.59** Cuando se hace una inversión de \$ X a una tasa del 2,8% mensual, ¿al cabo de cuánto tiempo el monto de los intereses capitalizados asciende al 35% de la inversión inicial?
- 1.60** Una persona depositó el 1 de febrero de 1988 la suma de \$ 400.000 en una cuenta de ahorros. El 1 de abril de 1989 depositó \$ 150.000 y el 1 de octubre de 1989 retiró la tercera parte del saldo existente en ese momento. ¿Cuál fue el saldo en la cuenta de ahorros el 1 de julio de 1990, sabiendo que el dinero rendía el 28% nominal trimestral durante el primer año de tener la cuenta abierta y el 31% anual de ahí en adelante?
- 1.61** ¿Al cabo de cuántos meses se tendrá en una cuenta de ahorros un saldo de \$ 1.810.000, sabiendo que hoy se hace un depósito de \$ 3.653.000 y luego retiros así: \$ 830.000 dentro de cinco meses y \$ 2.263.000 dentro de once meses, si la cuenta de ahorros paga un interés del 2% mensual?
- 1.62** Una persona debía cancelar una deuda mediante tres pagos; así: \$ 150.000 dentro de tres meses, \$ 210.000 dentro de ocho meses y \$ 255.000 dentro de un año, todos con un interés del 2,4% mensual. El deudor solicita cubrir la deuda mediante dos pagos iguales a diez y quince meses respectivamente, y estos pagos con un interés del 8,2% trimestral. Hallar el valor de estos pagos.
- 1.63** Una obligación consta de tres pagos; así: \$ 100.000 para hoy, \$ 250.000 para dentro de cinco meses y \$ 300.000 para dentro de un año. Debe sustituirse por su equivalente en tres pagos iguales

a dos, ocho y diez meses. Si la tasa de interés es del 32% nominal trimestral, hallar el valor de estos pagos iguales.

- 1.64** ¿Qué tasa de interés capitalizable continuamente es equivalente a la tasa de interés nominal semestral que convierte a \$ 310.000 de hoy en \$ 787.580 dentro de veinticinco meses?
- 1.65** Determinar el valor del precio al contado de un artículo si financiado se adquiere así: una cuota inicial del 20% del valor de contado, tres pagos de \$ 1.420.000, \$ 1.640.000, \$ 2.100.000 a ocho, quince y veinte meses respectivamente y un último pago dentro de dos años equivalente al 10% del valor del precio al contado. Tasa de interés: 18,6% MV para el primer año y del 21% EA para el segundo año.
- 1.66** Financiar \$ 6.000.000 de hoy a dos años en cuatro pagos iguales en los meses 5, 8, 15 y 24, con un tasa de interés del 34,5% AMV para el primer año y del 3% mensual de ahí en adelante.
- 1.67** ¿Al cabo de cuántos meses, al hacer una inversión de \$ 100.000 hoy y un retiro de \$ 100.000 dentro de dos años, se tiene un saldo a favor del inversionista de \$ 100.000, sabiendo que el dinero rinde el 28,55% capitalizable continuamente?
- 1.68** Una institución financiera le otorga un préstamo a uno de sus clientes por el valor de \$ 4.867.404 y a un interés del 22,2% MV. La deuda se debe cancelar con tres pagos de \$ 2.186.000 cada uno; si uno de estos pagos se hace dentro de ocho meses y otro dentro de dos años, determinar la fecha para el otro pago.
- 1.69** Un ahorrador deposita hoy \$ 350.000 en una institución que paga un interés del 29% capitalizable continuamente. Si retira \$ 135.900 al cabo de un año y \$ 181.600 un año más tarde, ¿qué saldo tendrá en la cuenta de ahorros un año después del último retiro?
- 1.70** Supongamos que se invierte una cantidad de dinero que produce interés compuesto continuamente.
- Si la cantidad original se triplica en tres años, ¿cuál es la tasa de interés continuo?
 - Si la cantidad original aumenta en un 40% en cuatro meses, ¿cuánto tardará en duplicarse la cantidad original?
- 1.71** Una persona debe amortizar una deuda y el acreedor le propone los tres planes siguientes:
- Plan A:** cuatro cuotas mensuales de \$ 45.000 cada una, debiendo pagar la primera dentro de tres meses y un interés del 28% nominal trimestral.
- Plan B:** tres pagos así: \$ 50.000 dentro de dos meses, \$ 60.000 dentro de cuatro meses y \$ 70.000 dentro de seis meses. Tasa de interés del 30% nominal semestral.
- Plan C:** cuatro pagos así: \$ 50.000 en los meses tercero y cuarto y \$ 40.000 en los meses quinto y sexto. Tasa de interés del 27,5% capitalizable continuamente.
- Usted debe asesorar al deudor sobre el plan que más le conviene.
- 1.72** Sustituir una obligación que consta de tres pagos de \$ 1.230.000 cada uno, en los meses 6, 10 y 12, por su equivalente en cuatro pagos así: \$ 850.000 dentro de cuatro meses, \$ 350.000 dentro de ocho meses, \$ 1.000.000 dentro de un año y el resto dentro de quince meses. La tasa de interés para ambas obligaciones es del 3,3% mensual.

- 1.73** Se tiene una obligación con una institución que consta de cuatro pagarés; así: \$ 3.450.000 para tres meses, \$ 2.650.000 para ocho meses, \$ 1.680.000 para diez meses y \$ 2.460.000 para quince meses y con una tasa de interés del 25,2% MV. Una vez cancelado el segundo pagaré, se solicita refinanciar el saldo en dos pagos iguales para dos y cinco meses más tarde de esa fecha. Si la tasa de interés para la refinanciación es del 2,8% mensual, hallar el valor de estos pagos iguales.
- 1.74** Financiar \$ 4.650.000 de hoy a dos años en cuotas trimestrales, de tal manera que cada cuota sea el doble de la anterior, sabiendo además que el primer pago se hace dentro de un año. La tasa de interés para la financiación es del 30% anual para el primer año y del 34% anual de ahí en adelante.
- 1.75** Cuando usted adquirió una obligación se comprometió a pagarla mediante el siguiente plan: cuota inicial de \$ 860.000, tres pagos de \$ 950.000, \$ 730.000 y \$ 1.250.000 a 6, 10 y 15 meses respectivamente, y un interés del 33% ATV. Transcurridos ocho meses usted paga la mitad del saldo en ese momento y el resto cuatro meses más tarde. Hallar el valor de cada uno de esos dos pagos.
- 1.76** A usted como asesor financiero le plantea el siguiente problema una persona: ¿Cuánto debo depositar hoy en una cuenta que paga el 28,5% AMV para poder retirar \$ 650.000 dentro de cinco meses, \$ 460.000 dentro de ocho meses, la mitad de lo depositado al cabo de un año, y que en un año y medio aún tenga en la cuenta un saldo igual a la cantidad depositada? Resolver e interpretar la respuesta.
- 1.77** Una persona necesita cubrir una deuda de \$ 2.500.000 dentro de veinte meses. Con tal fin, abre dos cuentas de ahorros A y B, con igual suma de dinero cada una. Si en la cuenta A le pagan el 29% capitalizable continuamente y en la B el 32% ATV, hallar la suma de dinero con la que debe abrir cada cuenta para que al cabo de los veinte meses, reuniendo los dos saldos, tenga la suma deseada para cubrir la deuda.
- 1.78** Financiar \$ 5.000.000 de hoy a dos años en cuotas así: \$ 1.300.000 dentro de cuatro meses, \$ 2.000.000 dentro de ocho meses y el resto de ahí en adelante en cuatro cuotas iguales en los meses 12, 15, 18 y 24. La tasa de interés para la financiación es del 30% anual para el primer año y del 33% anual de ahí en adelante. Hallar el valor de las cuotas iguales.
- 1.79** Si la tasa de captación autorizada por el Gobierno es del 22,6% EA, determine la tasa nominal equivalente capitalizable cada: a) ciento ochenta días; y, b) nueve días.
- 1.80** Si una institución financiera está captando dinero al 19,43% capitalizable cada 45 días (en el año de 360 días), se pide hallar la tasa nominal trimestral (año de 365 días) equivalente.
- 1.81** A un ahorrador le pagan la suma de \$ 183.560 por la inversión de \$ 8.500.000 a 72 días; se pide hallar la tasa nominal (año de 360 días) capitalizable cada 72 días que le reconocieron al ahorrador.
- 1.82** ¿Qué cantidad invertida al 21,8% efectiva en el año de 360 días producirá unos intereses de \$ 281.360 al cabo de veinte días?
- 1.83** ¿Qué tasa será más rentable para un inversionista: el 17,42% TV o el 19,6% nominal (año de 360 días) capitalizable cada 120 días?

- 1.84** Hallar los intereses que producirá al cabo de 45 días una inversión de \$ 12.750.000, sabiendo que la tasa de interés que se reconoce para esta inversión es del 19,72% efectiva en el año de 360 días.
- 1.85** Usted invierte hoy la suma de \$ 6.300.000, dentro de 72 días la suma de \$ 4.800.000 y dentro de 180 días la suma de \$ 3.500.000. Se pregunta: ¿cuánto tendrá usted acumulado dentro de 360 días, sabiendo que la tasa de interés que le reconocen por sus inversiones es del 18,43% efectiva anual (año de 365 días)?
- 1.86** Una institución financiera que capta recursos monetarios ofrece a un inversionista una tasa de interés del 20,3% liquidable cada 36 días o su equivalente según el caso. Este inversionista deposita en esa institución la suma de \$ 5.500.000 hoy, \$ 8.600.000 dentro de 90 días y \$ 3.820.000 dentro de 120 días.
- La institución financiera le cancela al inversionista un total de \$ 18.755.000 al cabo de un año (365 días). Usted debe asesorar al inversionista determinando si la liquidación hecha por la institución es la correcta o no.
- 1.87** Una corporación de ahorro y vivienda ofrece a un inversionista el 17,4% capitalizable cada 40 días, un banco le ofrece el 18,1% capitalizable cada 180 días y una corporación financiera le ofrece el 19,8% EA (365 días). Usted debe asesorar al inversionista determinando cuál de las tres instituciones le conviene mejor al inversionista con el fin de obtener los mayores intereses al cabo de 360 días.
- 1.88** Desde el punto de vista financiero, qué es más rentable: invertir en una institución A que ofrece el 22,4% capitalizable cada 120 días, o invertir en una entidad B que ofrece el 26% TV, sabiendo que en B cada trimestre hacen una retención del 3% sobre los intereses devengados en ese trimestre, y que la inversión tanto en A como en B es por un tiempo de un año (365 días).
- 1.89** Suponga que la entidad reguladora de las tasas de interés, para captar dinero de las instituciones financieras, les autoriza a estas ofrecer una tasa de interés del 18,6% EA o sus equivalentes. Usted como asesor de una de estas entidades debe determinar las siguientes tasas para ofrecer al público y que sean equivalentes a la autorizada:
- Tasa capitalizable cada 20 días
 - Tasa capitalizable cada 36 días
 - Tasa capitalizable cada 4 días
 - Tasa capitalizable cada 90 días
 - Tasa capitalizable cada 180 días
- 1.90** Si la tasa máxima permitida para créditos bancarios es del 28,48% y una entidad financiera le prestó a uno de sus clientes la suma de \$ 23.600.000 a 72 días y le cobró unos intereses de \$ 1.438.725, usted debe: a) establecer si la entidad financiera incurrió o no en usura; y, b) determinar la tasa efectiva anual (año de 365 días) que cobró la entidad.
- 1.91** Respecto del ejercicio 3.89, suponga que dos personas A y B invirtieron dinero en una de esas instituciones así: la persona A invirtió \$ 8.300.000 a 36 días y la persona B invirtió \$ 12.450.000 a 180 días. Usted debe determinar el monto de los intereses devengados por cada una de esas personas al cabo del período de inversión.

- 1.92** Determinar cuál deberá ser la tasa máxima permitida efectiva anual, para que un crédito de \$ 45.059.000 genere unos intereses de \$ 261.660 por 40 días, sabiendo que estos intereses corresponden a la tasa máxima permitida para esa suma de dinero del crédito.
- 1.93** Suponga que un acreedor le cobró un total de intereses de \$ 2.643.160 a un deudor, por un crédito de \$ 38.870.000 a un trimestre. Si en esta operación se comprobó que la tasa efectiva anual cobrada está tres puntos por encima de la máxima permitida para créditos, determinar el valor de esta tasa máxima permitida.
- 1.94** Por un crédito de \$ 48.350.000, se han cobrado los siguientes intereses, para una tasa máxima permitida del 26,42% EA. Usted debe determinar en qué casos hay usura y en cuáles no.
- \$ 751.099 por 24 días
 - \$ 1.427.006 por 36 días
 - \$ 702.821 por 20 días
 - \$ 5.032.408 por 180 días

PROBLEMAS II

- 2.1** Usted invierte hoy \$ 3.800.000 en una cuenta que paga el 31,5% AMV y retira \$ 1.300.000 un año más tarde. Un año y medio después del retiro, la mitad del saldo lo transfiere a otra cuenta que paga el 32% ATA; estos intereses los deposita en otra cuenta que paga el 3% mensual. ¿Cuánto tendrá en cada una de las tres cuentas, 15 meses después de la transferencia?
- 2.2** Una institución financiera capta dinero ofreciendo pagar el 30% nominal trimestral, pero a su vez descuenta el 1,5% por trimestre anticipado sobre el total acumulado hasta ese momento, por concepto de seguro de la inversión. Hallar el total acumulado al cabo de nueve años, por una inversión hecha en esa institución por valor de \$ 4.200.000.
- 2.3** Una obligación que consta de tres pagarés; así: \$ 1.200.000 para hoy, \$ 2.000.000 para dentro de ocho meses y \$ 2.350.000 para dentro de un año y con una tasa de interés del 33% TV, debe sustituirse por su equivalente en cuatro pagos iguales para los meses siete, diez, quince y veinte a partir de hoy, sabiendo que para este caso la tasa de interés será del 38% SV.
- 2.4** Usted invierte hoy \$ 3.200.000 en una institución que paga un interés del 34,5% nominal mensual; cada mes, la institución le hace una retención del 0,85% sobre los intereses devengados en ese mes. A. ¿Cuánto tendrá usted acumulado al cabo de dos años? b). ¿En qué momento tendrá un total de \$10.300.000?
- 2.5** Una institución financiera capta dinero y ofrece una tasa de interés del 31,5% TV; pero cuando el monto total de una inversión supere la suma de \$ 5.000.000, la institución descontará cada trimestre el 4% sobre los intereses devengados en ese trimestre. Si una persona invierte en esa institución \$ 3.950.000, determinar el saldo que tendrá cuatro años más tarde.
- 2.6** Usted invierte hoy la suma de \$ 5.000.000 en una entidad que paga el 32% AMV. Cada mes le descuentan el 1% sobre los intereses devengados en ese mes; si además usted deposita \$ 30.000 cada mes comenzando dentro de un mes. ¿cuánto tendrá al cabo de tres años antes del depósito respectivo?

2.7 Supongamos que el valor de un activo dentro de t años esté dado por:

$$V(t) = 60.000e^{\sqrt{t}/2}$$

Si la tasa de descuento es constante e igual al 27% capitalizable continuamente, ¿cuándo se deberá vender el activo de tal manera que el valor presente del precio de venta sea máximo?

2.8 Una empresa ha establecido un sistema de ahorro obligatorio para sus empleados. Este plan contempla que cada empleado ahorre el 8% de su salario mensual y la empresa aporta el equivalente al 10% del salario mensual para cada empleado. Estos ahorros se hacen en una entidad financiera que paga un interés del 28% compuesto continuamente. Los depósitos se hacen al final del mes y durante el tiempo de trabajo. Además se sabe que el salario se aumenta cada año el 20%. Si un empleado inicia con un salario de \$ 350.000 mensuales el primer año, ¿cuánto tendrá acumulado por concepto de este ahorro al cabo de 8 años, fecha en que decide retirarse de la empresa?

2.9 Si la tasa de inflación en los seis primeros meses de un año fue así:

Enero, 1,3%; febrero, 0,98%, marzo, 0,62%, abril, 0,86%, mayo, 0,55% y junio, 0,48%, estimar la inflación para cada uno de los seis meses restantes del año, a partir de una función exponencial.

2.10 Consultar en revistas, periódicos o en Internet sobre: a) qué es, y, b) cómo funciona cada una de las siguientes tasas: i) Dow-Jones, ii) Nikkei, iii) Financia! Times, iv) Nasdaq.

2.11 Teniendo en cuenta el ejercicio (9) anterior, suponga que el gasto mensual de operación de un proyecto varía según la inflación de cada mes. Si el gasto de enero fue de \$ 6.500.000, registrar los gastos de cada uno de los once meses siguientes, teniendo en cuenta que los últimos seis gastos son estimados.

2.12 Usted invierte hoy la suma de \$ 35.000.000 en una institución que le ofrece un interés del 14,4% MV. Sin embargo, cada mes la institución debe descontar el porcentaje de inflación de los intereses devengados en ese mes. Si la inflación de los siete meses anteriores fue: 1,2%, 1%, 0,6%, 0,9%, 0,41%, 0,25% y 0,32% respectivamente, determinar el total acumulado al cabo de un año de inversión si la tasa de inflación mensual para ese año es la tasa promedio a partir de los datos conocidos de inflación

2.13 Según la tasa de cambio el valor del dólar en los cinco meses anteriores fue de \$ 2.200, \$ 2.260, \$ 2.280, \$ 2.350, \$ 2.290 respectivamente. Estimar el valor del cambio para los siete meses siguientes a partir de:

- Una función lineal estimada con los valores en pesos.
- Una función lineal estimada con las tasas mensuales de variación del valor del dólar.

2.14 Una persona invierte las siguientes cantidades de dinero en una institución financiera: \$ 32.000.000 el 2 de enero de un año, \$ 15.600.000 el 1 de marzo y \$ 8.400.000 el 1 de mayo del mismo año. La tasa de interés que la institución reconocerá mensualmente será del 1,8%, 1,95%, 2,1%, 1,85% y 1,9% para los cinco primeros meses del año. Usted debe estimar el total que el inversionista tendrá al final de ese año, utilizando una tasa estimada para los siete meses siguientes, a partir de un ajuste lineal de los valores de las tasas anteriores.

- 2.15** Si la tasa DTF para los seis primeros meses de un año fue del 6,45%, 6,32%, 6,01%, 5,94%, 6,2% y 6,15% efectiva anual. Estimar, a partir de una función exponencial, la tasa efectiva anual que registrará para cada uno de los meses restantes de ese año.
- 2.16** Si la tasa de devaluación anual para los seis años anteriores fue del 18%, 16%, 20%, 22%, 21%, 24%, estimar, a partir de una función exponencial, la tasa de devaluación para los seis años siguientes, y con estos valores de la tasa de devaluación, estimar el valor en pesos del 31 de diciembre del quinto año después de los anteriores, de \$ 42.000.000 del 31 de diciembre del año en el que la devaluación fue del 24% anual.
- 2.17** Un inversionista tiene como información que la tasa de interés que ha recibido por sus inversiones, en los seis trimestres anteriores, han sido del DTF más tres puntos; si para esos trimestres el DTF fue del 7,14%, 7,1%, 6,8%, 6,5%, 6,3% y 6% EA, y desea invertir \$ 5.000.000 dentro de tres meses, \$ 8.200.000 dentro de nueve meses y \$ 10.400.000 dentro de un año, ¿cuánto esperará tener dentro de un año y medio, suponiendo que el DTF continúa el comportamiento anterior? Utilizar una función exponencial para estimar los valores futuros del DTF.
- 2.18** El valor de una acción en la Bolsa de Valores ha tenido el siguiente comportamiento en los seis meses anteriores: \$ 2.540, \$ 2.820, \$ 2.610, \$ 2.490, \$ 2.560, \$ 2.600 respectivamente. Estimar el valor de esa acción dentro de dos meses, utilizando:
- variación lineal; y,
 - variación exponencial. Consultar o averiguar cuál de los dos valores obtenidos es el más representativo.
- 2.19** Si la tasa de rendimiento del dinero, en un determinado certificado de inversión, ha sido del 9,4%TV, 9,2%TV, 9%TV, 9,1%TV y 8,6%TV para los cinco meses anteriores, y la tasa de inflación en los mismos meses fue del 1,2%, 1%, 1,3%, 0,93% y 0,9% mensual, se pide: estimar la tasa de rendimiento real (sin inflación) mensual para los seis meses siguientes, suponiendo que las tasas continúan con una variación similar y utilizando variación exponencial en cada caso de los siguientes: a) proyectando la tasa de rendimiento, así como la inflación, y determinando la tasa real por mes; y, b) calculando la tasa real en los meses anteriores y proyectándola. Compare los resultados y discútalos.
- 2.20** Una institución de ahorro ha estado ofreciendo dos planes para invertir el dinero durante los cuatro trimestres anteriores.
- En el Plan A las tasas han sido del 15%TV, 16,6%TV, 14,8%TV y 16%TV.
- En el Plan B las tasas han sido del 13,06%TA, 14,46%TA, 15%TA y 16,2%TA.
- Usted debe asesorar a un inversionista sobre el plan que le genere mayores rendimientos para el próximo año, suponiendo que las variaciones de las tasas en cada plan continúan con ese comportamiento. Utilizar variación exponencial.
- 2.21** El valor de mercado de un activo en los cinco años anteriores fue de: 6,8; 6,5; 6; 5,2 y 4,8 millones de pesos. Utilizando una variación exponencial, estimar la tasa de variación anual en el valor de mercado y, según esa tasa, determinar cuál será el valor de mercado del activo dentro de tres años.
- 2.22** Se debe invertir hoy la suma de \$ 12.600.000, en una institución financiera, \$ 4.500.000 dentro de cinco meses y \$ 6.400.000 dentro de siete meses. Si la tasa de interés que ha estado pagando esa institución por el dinero captado ha sido del 2%, 1,8%, 2,1%, 1,6%, 1,7% y 2,2% mensual durante los seis meses anteriores, estimar la tasa mensual para el año que se inicia hoy, a partir de una función lineal, y calcular el total que se tendrá acumulado al final del año por las inversiones anteriores.

- 2.23** Supongamos que la tasa de interés de captación ofrecida por una institución financiera ha sido en los ocho meses anteriores la siguiente: 9,8% TV, 8% MA, 10% SV, 7,4% TA, 8,3% SA, 8,8% MA, 9,2% MV y 10,1% TV. A partir de la función exponencial, estimar la tasa nominal mensual para cada uno de los seis meses siguientes, y con esas tasas estimar el total que se tendrá dentro de seis meses, por una inversión hoy de \$ 10.300.000 y de \$ 4.500.000 dentro de un mes en esa institución financiera, con el supuesto de que las tasas de interés continúen con el comportamiento que tenían hasta ahora.

Series uniformes o anualidades

El objetivo de este capítulo es que el lector aprenda a reconocer, definir y clasificar las diferentes clases de anualidades y su aplicación en la solución de problemas de matemáticas financieras que involucren una serie uniforme de pagos.

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

Al terminar el capítulo el lector estará en capacidad de:

- *Calcular valores futuros y valores presentes de cualquier clase de anualidad.*
- *Calcular el valor del pago uniforme conociendo los demás factores.*
- *Calcular el número de pagos conociendo la tasa de interés, el valor presente y el valor futuro de la anualidad.*
- *Financiar deudas con flujos de caja que contengan anualidades de cualquier clase.*
- *Financiar obligaciones en cuotas uniformes y con varias tasas de interés a lo largo del tiempo de la operación financiera.*
- *Establecer y resolver ecuaciones de equivalencias financieras en las que figure una o varias anualidades.*

4.1 Introducción

En el capítulo 3 estudiamos los casos en los cuales un flujo de caja constaba de un pago único o de varios pagos diferentes en tiempos también diferentes. Para esta clase de problemas, calculamos tanto el valor presente como el valor futuro y, para algunos pocos, el tiempo y la tasa de interés. Sin embargo, en la práctica también se presentan flujos de caja que están formados por pagos que tienen la característica de ser todos iguales y ocurrir en intervalos iguales de tiempo. Tales flujos de caja o conjuntos de pagos reciben los nombres de **series uniformes**, **anualidades** o **rentas uniformes**. Son los casos, por ejemplo, de las cuotas de un seguro, las cuotas de arrendamientos, el sueldo de un empleado, entre otros, en los que no cambia el valor del pago durante algunos períodos.

En este capítulo estudiaremos las series uniformes o anualidades más comunes y, por tanto, de mayor aplicación en los problemas prácticos de matemáticas financieras. Como en el capítulo anterior, en este calcularemos valor presente, valor futuro, valor de los pagos y el tiempo para la mayoría de anualidades; sin embargo, el problema general de cálculo de la tasa de interés se tratará en el capítulo 9.

4.2 Series uniformes o anualidades

DEFINICIÓN 4.1

Se llama serie uniforme o anualidad a un conjunto de pagos iguales y periódicos. Aquí el término pago hace referencia tanto a ingreso como a egreso. De la misma manera, el término anualidad se utiliza para indicar que los pagos son periódicos y no necesariamente cada año. Los períodos pueden ser el día, la semana, la quincena, el mes, el trimestre, el semestre o el año, entre otros.

Sin embargo, esta clase de flujos de caja también permite manejar series de pagos en cualquier otro período distinto de los tradicionales, como los enumerados anteriormente; así ocurre, por ejemplo, cuando un deudor propone pagar una deuda en cuotas iguales cada 35 días; entonces decimos que la forma de pago es mediante una anualidad cada 35 días, y otro tanto si se trata de cualquier otro intervalo de tiempo.

Utilizaremos la siguiente notación para el tratamiento de las anualidades:

P = valor presente

F = valor futuro

A = valor de cada pago periódico

n = número de pagos periódicos

i = tasa de interés por período

Para una anualidad puede suceder que el período de capitalización de la tasa de interés sea conocida o no con el período de pago. En caso negativo, se establece una conversión de equivalencia, ya sea del período de capitalización al período de pago o viceversa; de todas maneras, utilizando las equivalencias entre tasas estudiadas en el capítulo 3, es posible obtener una tasa cuyo período de capitalización coincida con el período de pago.

Las principales **clases de anualidades** son las siguientes:

- a) Vencida
- b) Anticipada
- c) Diferida
- d) Perpetua

También pueden presentarse los casos de combinación de algunas de las anteriores, como una anualidad diferida perpetua, entre otros. Para el estudio de las clases enumeradas anteriormente tomaremos como base el estudio que hagamos de la anualidad vencida; así, adaptaremos las expresiones o fórmulas que obtengamos para esta primera clase de anualidad a los demás casos, en cuanto sea posible.

4.3 Anualidad vencida

DEFINICIÓN 4.2

Se llama anualidad vencida a aquella en la que el pago se hace al final del período.

El salario mensual de un empleado, las cuotas mensuales iguales y vencidas de adquisición de vehículos o de electrodomésticos por el sistema de financiación, son casos de anualidades vencidas.

Vamos a obtener ahora las expresiones que nos determinan el valor presente y futuro de una anualidad. Empezaremos por hallar el valor futuro.

VALOR FUTURO

Sea una anualidad vencida de n pagos de valor \$ A cada uno, con una tasa de interés del i % por período. Se trata de hallar una expresión que nos mida el valor futuro de esta serie uniforme. El diagrama del flujo de caja para este caso se muestra en la figura 4.1.

El valor futuro o total acumulado en cualquier momento es una función que depende del tiempo t ; por tanto, denotaremos por:

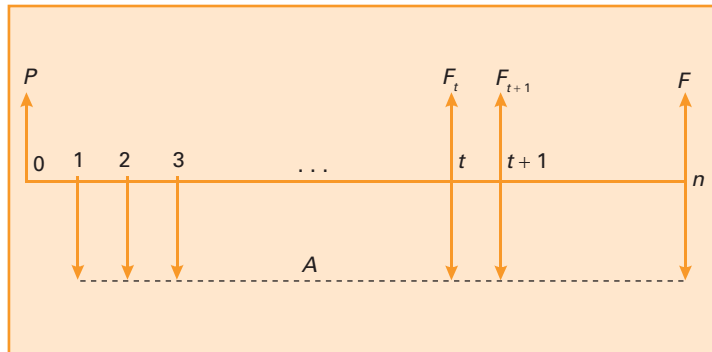


FIGURA 4.1 Diagrama de flujo de caja y del valor futuro y presente de una anualidad vencida

F_t : el valor futuro o acumulado al final del período t después del pago

F_{t+1} : el valor futuro o acumulado al final del período $t + 1$ después del pago

Entre estos valores, y según el diagrama de la figura 4.1, tenemos la siguiente relación:

$$F_{t+1} = F_t + iF_t + A$$

que se interpreta en términos de que el valor total acumulado al final del período $t + 1$, después de realizado el pago correspondiente, es igual a la suma acumulada al final del período anterior (F_t) más los intereses devengados por esta suma durante el período (iF_t) más el pago realizado al final del período ($t + 1$), o sea, A .

La expresión anterior puede escribirse como:

$$F_{t+1} = (1 + i) F_t + A; \text{ con } F_0 = 0$$

que corresponde a una ecuación en diferencia finita cuya solución se obtiene aplicando los métodos vistos en el capítulo 2. Llegamos, entonces, a:

$$F_t = A \left[\frac{(1 + i)^t - 1}{i} \right]$$

para cualquier valor de $t = 0, 1, 2, 3, \dots, n$.

Entonces, para $t = n$, obtenemos:

$$F = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \quad (4-1)$$

El factor $[(1+i)^n - 1]/i$ se denota por $(F/A, i\%, n)$, y se encuentra calculado en las tablas financieras para algunos valores de n y de i , o en la calculadora financiera. De este modo, la expresión o fórmula (4-1) puede escribirse también como:

$$F = A(F/A, i\%, n) \quad (4-2)$$

Por tanto, las fórmulas (4-1) y (4-2) nos permiten calcular el valor futuro de la anualidad vencida representada en la figura 4.1, y este valor futuro estará ubicado en el momento en que se realice el enésimo pago.

EJEMPLO 4.1

Durante un año y medio se hacen depósitos por mes vencido de \$ 12.000 cada uno en una institución de ahorro que paga un interés del 3% mensual. Calcular la suma total acumulada en la cuenta de ahorros al final de este tiempo.

Solución

El diagrama de flujo de caja del ejemplo es el siguiente:

En el ejemplo, la pregunta hace referencia al valor futuro de la anualidad de 18 depósitos mensuales de valor $A = \$ 12.000$ cada uno. Los datos del problema son:

$A = \$ 12.000$; $n = 18$ meses; $i = 3\%$ mensual; $F = ?$

Aplicando la fórmula (4-2), obtenemos:

$$F = 12.000(F/A, 3\%, 18) = \$ 280.973$$

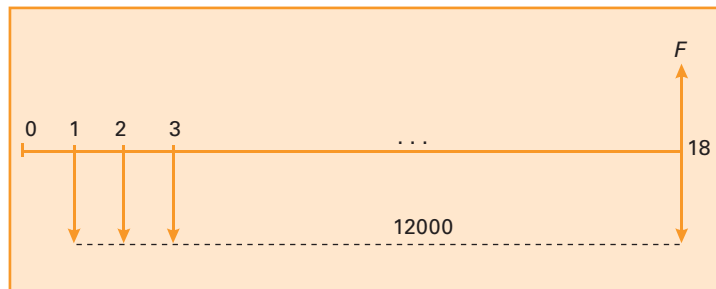


FIGURA 4.2

VALOR PRESENTE

El valor presente de la serie representada en la figura 4.1 puede hallarse aplicando el procedimiento utilizado en el aparte anterior para pagos únicos, es decir, tomar el valor futuro calculado anteriormente y traerlo a valor presente, en este caso al punto 0. De esta manera obtenemos:

$$P = F(P/F, i\%, n) = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] (1+i)^{-n}$$

O sea:

$$P = A \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] \quad (4-3)$$

El factor $[1 - (1+i)^{-n}]/i$ se denota por $(P/A, i\%, n)$, y también se encuentra calculado en las tablas financieras, para algunos valores de n y de i . Así que la expresión o fórmula (4-3) puede escribirse también como:

$$P = A(P/A, i\%, n) \quad (4-4)$$

Por tanto, las fórmulas (4-3) y (4-4) nos permiten calcular el valor presente de la anualidad vencida representada en la figura 4.1, ubicado en el punto 0 o en un período antes del primer pago.

Podemos resumir diciendo que con la expresión (4-1) hallamos el valor futuro de una anualidad y representa el equivalente financiero donde se haga el último pago de los n pagos de valor A cada

uno; y con la expresión (4-3) hallamos el valor presente de una anualidad y representa el equivalente financiero de los n pagos en el lugar donde este se encuentre. Con esto se afirma que son equivalentes a una tasa del $i\%$ por período, los n pagos representados en la figura, el valor presente (P) y el valor futuro (F) en sus correspondientes momentos.

EJEMPLO 4.2

Hallar el valor de contado de un artículo que a crédito se adquiere con 18 cuotas de \$ 20.000 cada una por mes vencido, sabiendo que se cobra un interés del 2,5% mensual.

Solución

El diagrama de flujo de caja correspondiente al ejemplo es el siguiente:

En este caso, el valor de contado corresponde al valor presente de las cuotas que se pagarían si se adquiriera a crédito. Los datos del problema son:

$A = \$ 20.000$; $n = 18$ pagos; $i = 2,5\%$ mensual; $P = ?$

Aplicando la fórmula (4-4) obtenemos:

$$P = 20.000(P/A, 2,5\%, 18) = 287.067$$

O sea que el valor de contado del artículo es de \$ 287.067.

Debemos tener en cuenta que, de acuerdo con la ecuación de diferencia finita planteada para hallar el valor futuro de la anualidad vencida, el factor $(P/A, i\%, n)$, al tiempo que acumula los pagos realizados, también acumula intereses compuestos producidos tanto por el capital como por los intereses ya devengados. De manera similar, el factor $(P/A, i\%, n)$, al aplicarlo a una serie de pagos iguales, les descuenta los intereses compuestos. Por eso son de gran aplicación estos factores, pues en los casos prácticos los intereses deben cargarse sobre el saldo existente en un momento determinado, y otro tanto sucede si se descuentan.

Con base en las expresiones (4-2) y (4-4), podemos calcular nuevos términos tales como A, n o i .

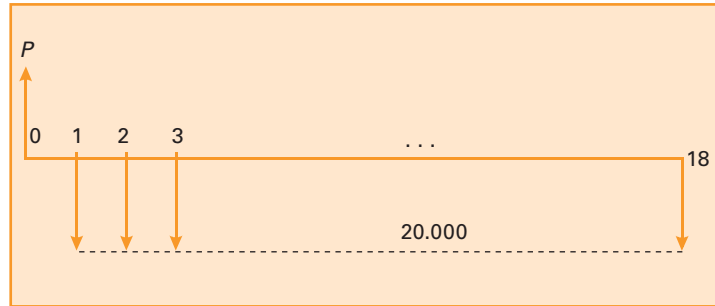


FIGURA 4.3

CÁLCULO DE LA ANUALIDAD

Con base en la expresión (4-2) obtenemos:

$$A = F \left[\frac{1}{F / A, i\%, n} \right]$$

El factor $1/(F/A, i\%, n)$ se denota por $(A/F, i\%, n)$, y así tenemos:

$$A = F(A/F, i\%, n) \tag{4-5}$$

Esta expresión nos sirve para hallar el valor de la anualidad cuando se conocen el valor futuro, la tasa de interés por período y el número de pagos periódicos, o, lo que es lo mismo, el factor $(A/F, i\%, n)$ sirve para distribuir un valor futuro, según lo representado en la figura 4.1.

Aun cuando el factor $(A/F, i\%, n)$ también se encuentra en las tablas financieras para algunos valores de n y de i , para hallar su valor basta tener en cuenta su relación con $(F/A, i\%, n)$; con el uso de la calculadora, el resultado es inmediato.

En resumen, el factor $(A/F, i\%, n)$ aplicado a un valor futuro F lo distribuye financieramente de derecha a izquierda en n pagos iguales de valor A cada uno, dejando el primero donde esté F y los demás hacia la izquierda.

Este factor se utiliza cuando se va a sustituir un valor por su equivalente en n pagos iguales y anteriores a F .

EJEMPLO 4.3

Se deben reunir \$ 850.000 para dentro de dos años. Con tal fin se decide hacer depósitos iguales por mes vencido en una institución que paga el 2,65% mensual. Hallar el valor de los depósitos.

Solución

El diagrama de flujo de caja correspondiente es el siguiente:

Los datos del problema son:

$F = \$ 850.000$; $n = 24$ pagos; $i = 2,65\%$ mensual; $A = ?$

Aplicando la fórmula (4-5) tenemos:

$$A = 850.000(A/F, 2,65\%, 24) = \$ 25.792$$

El resultado anterior puede interpretarse como que \$ 850.000 dentro de dos años (24 meses) son equivalentes financieramente a los 24 depósitos de \$ 25.792 de la figura, siempre y cuando el dinero rinda el 2,65% mensual.

Con base en la expresión (4-4), obtenemos:

$$A = P \left[\frac{1}{P/A, i\% \quad n} \right]$$

El factor $1/(P/A, i\%, n)$ se denota $(A/P, i\%, n)$, y así tenemos:

$$A = P(A/P, i\%, n) \quad (4-6)$$

Con esta expresión o fórmula podemos hallar el valor de la anualidad cuando se conocen el valor presente, la tasa de interés por período y el número de pagos, o sea que con el factor $(A/P, i\%, n)$ podemos distribuir financieramente un valor presente hacia la derecha en n cuotas iguales. Es la expresión que se utiliza para financiar una deuda de hoy en n cuotas periódicas e iguales y con una tasa fija por período.

EJEMPLO 4.4

Un televisor tiene un precio al contado de \$ 63.500. Se desea adquirir a crédito así: una cuota inicial de \$ 15.000 y el resto financiado en 18 meses o cuotas mensuales iguales. Si la tasa de interés que se cobra por la financiación es del 3% mensual, hallar el valor de las cuotas.

Solución

Como se paga una cuota inicial de \$ 15.000, entonces el saldo por financiar es de $\$ 63.500 - \$ 15.000 = \$ 48.500$. De tal manera que el diagrama del flujo de caja correspondiente es:

Los datos del problema son:

$P = \$ 48.500$; $n = 18$ cuotas; $i = 3\%$ mensual; $A = ?$

Aplicando la fórmula (4-6) tenemos:

$$A = 48.500(A/P, 3\%, 18) = \$ 3.526,4$$

Es decir que el saldo financiado puede pagarse con 18 cuotas mensuales de \$ 3.526,4 cada una.

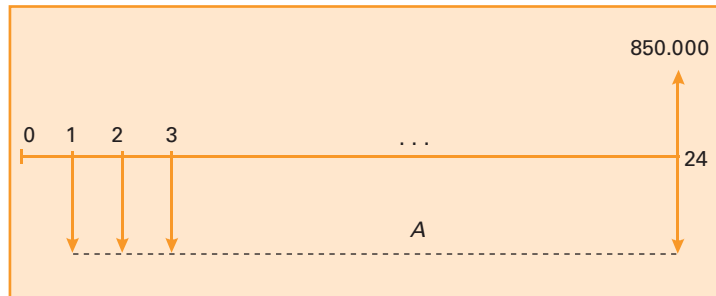


FIGURA 4.4

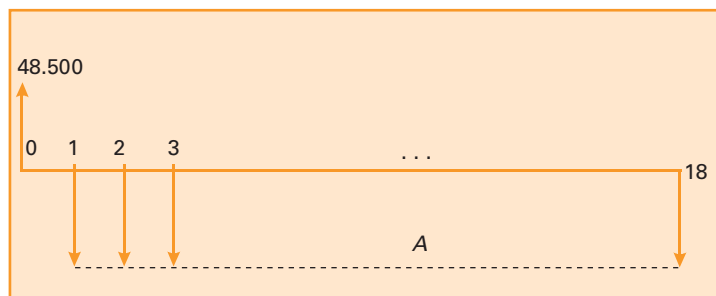


FIGURA 4.5

CÁLCULO DEL TIEMPO

Para esta clase de anualidades, o sea las vencidas, el tiempo de la operación medido en períodos coincide con el número de pagos, lo que no siempre se cumple para otras clases de anualidades. En nuestro caso, hallar el valor de n equivale tanto a hallar el número de períodos como el número de pagos.

Esta variable puede calcularse a partir de cualquiera de las fórmulas (4-2) o (4-4), utilizando la función logarítmica y la calculadora. Veamos con un ejemplo la ventaja que para estos casos tienen el manejo de la calculadora y las funciones logarítmica y exponencial.

EJEMPLO 4.5

Se tiene una deuda hoy de \$ 42.000 y debe cubrirse en cuotas mensuales de \$ 2.000 cada una; si la tasa de interés que se cobra es del 3% mensual, ¿al cabo de cuánto tiempo se habrá pagado la deuda?

Solución

El diagrama de flujo de caja es el siguiente:

Los datos del problema son:

$P = \$ 42.000$; $A = \$ 2.000$; $i = 3\%$ mensual; $n = ?$

Como los pagos y la tasa están dados mensualmente, entonces n también vendrá dada en meses.

Aplicando la fórmula (4-3) tenemos:

$$42.000 = 2.000 \left[\frac{1 - (1,03)^{-n}}{0,03} \right]$$

Después de algunas operaciones llegamos a:

$$(1,03)^{-n} = 0,37$$

Aplicando el logaritmo en ambos miembros tenemos:

$$-n/n(1,03) = \ln(0,37)$$

$$n = 33,6364$$

Este resultado puede interpretarse diciendo que al cabo de 33,6364 meses la deuda quedará pagada. Sin embargo, en la práctica no puede aplicarse este resultado textualmente debido a que el manejo de la fracción del mes es un poco difícil, y, por el contrario, se utiliza un número entero de pagos, que en nuestro caso pueden ser 33 o 34 cuotas mensuales.

Cuando en un problema como el anterior el valor del tiempo es un número con parte decimal, esta representa la parte de la cuota que, al final del último período entero, quedaría pendiente para cancelar en el período siguiente. En nuestro ejemplo, quiere decir que pueden pagarse 32 cuotas de \$ 2.000 cada una y queda un saldo del 63,64% de la cuota, o sea, $0,6364(2.000) = \$ 1.272,8$ para cancelar al final del mes 34.

Si deseamos pagar solo 33 cuotas podemos tomar como base el análisis anterior y tendremos 32 cuotas de \$ 2.000 cada una y una última, en el mes 33, por el valor de:

$$2.000 + 1.272,8(1,03)^{-1} = \$ 3.235,7$$

El desarrollo del ejemplo 4.5 no significa que sea la única forma de adelantar esta clase de problemas. Hoy en día, con la ayuda de la calculadora financiera, nos evitamos los pasos anteriores y solamente utilizamos el programa de anualidades al que le suministramos los valores correspondientes a P o a F , el valor del $i\%$ y el valor del pago uniforme A y le pedimos que calcule el valor de n , y obtenemos así el mismo resultado anterior.

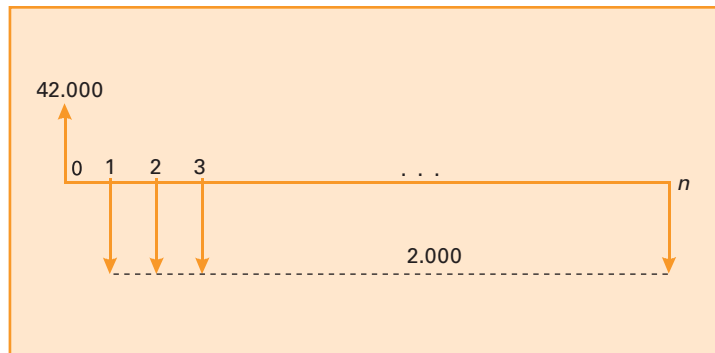


FIGURA 4.6

CÁLCULO DE LA TASA DE INTERÉS

Para hallar la tasa de interés con base en las expresiones (4-2) o (4-4) debe utilizarse el método de interpolación lineal visto en el capítulo anterior, o recurrir a una calculadora financiera, caso en el cual el resultado se obtiene más rápidamente.

EJEMPLO 4.6

Un activo que tiene un precio al contado de \$ 32.000 puede adquirirse financiado a 20 cuotas mensuales de \$ 2.100 cada una. ¿Cuál es la tasa de interés mensual que se cobra?

Solución

El diagrama de flujo de caja correspondiente es:

Los datos del problema son:

$P = \$ 32.000$, $A = \$ 2.100$; $n = 20$ cuotas; $i\% = ?$

Aplicando la fórmula (4-4) tenemos:

$$32.000 = 2.100(P/A, i\%, 20)$$

O sea:

$$(P/A, i\% 20) = \frac{32.000}{2.100} = 15,2381$$

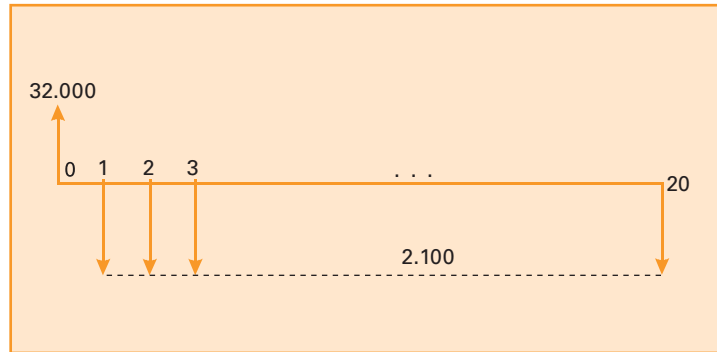


FIGURA 4.7

Por interpolación lineal llegamos a $i = 2,74\%$ mensual.

Del mismo modo puede hallarse la tasa de interés si se trata de una expresión como la (4-2). Sin embargo, dada la importancia que tiene el determinar la tasa de interés en una operación financiera donde la incógnita es precisamente la tasa, dedicaremos el capítulo 9 exclusivamente a este fin.

Por último, debe advertirse que en la práctica, y por tanto en el resto de este libro, cuando no se especifica el momento de realizar el pago en una anualidad se sobreentiende que es vencido, y así se habla de cuotas uniformes mensuales o trimestrales, semestrales, etcétera, para indicar que la cuota se paga al final del mes, del trimestre o del semestre respectivamente.

También es importante tener en cuenta que cuando se financia una deuda en cuotas iguales y periódicas vencidas, los intereses que se calculan sobre el saldo deben amortizarse en la cuota de ese período, lo que no necesariamente sucede con otras clases de anualidades.

EJEMPLO 4.7

Financiar \$ 5.400.000 a un año y medio en cuotas trimestrales iguales y con un interés del 32% ATV.

Solución

Financiar una deuda es determinar **cuándo** y **cuánto** debe pagarse. En nuestro ejemplo sabemos que los pagos deben efectuarse cada trimestre durante un año y medio, de tal manera que solo queda pendiente determinar el valor de los pagos trimestrales iguales. El diagrama de flujo de caja del deudor es el siguiente:

Como la tasa de interés que cobra el acreedor es del 8% trimestral, tenemos la expresión (4-3):

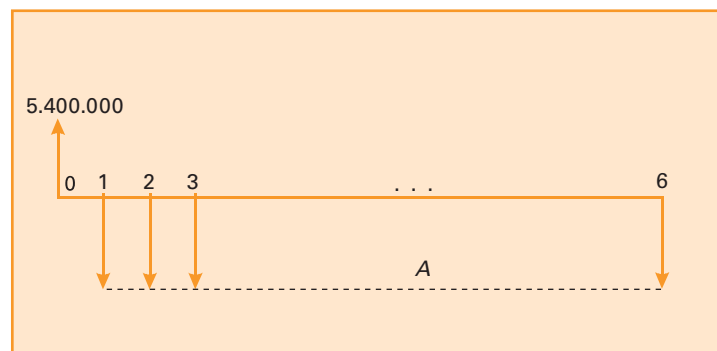


FIGURA 4.8

$$5.400.000 = A \left[\frac{1 - (1,08)^{-6}}{0,08} \right]$$

De donde:

$$A = \$ 1.168.103$$

Lo que significa que el deudor deberá cancelar cada trimestre la suma de \$ 1.168.103. De nuevo, esta clase de ejercicio puede desarrollarse con mayor rapidez apoyados en la calculadora financiera, a la que debe dársele \$ 5.400.000 con signo negativo como valor presente, seis como valor de n , el 8% como valor de la tasa del $i\%$, y se le pide el valor del pago $-A$ en nuestro caso-.

La tabla 4.1 muestra la amortización de la deuda expresada en el ejemplo, de acuerdo con la tasa estipulada y por el tiempo acordado

Trimestre	Intereses	Cuota	Abono a capital	Saldo
0	0	0	0	5.400.000
1	432.000	1.168.103	736.103	4.663.897
2	373.111,8	1.168.103	794.991,24	3.868.905,7
3	309.512,5	1.168.103	858.590,5	3.010.315,2
4	240.852,2	1.168.103	927.277,8	2.083.037,4
5	166.643	1.168.103	1.001.460	1.081.577
6	86.526,2	1.168.130	1.081.577	0

Según esta tabla de amortización de una deuda en cuotas uniformes y periódicas, el monto que se paga por intereses en cada período va disminuyendo a medida que avanza el tiempo, en tanto que el abono a capital va aumentando en cada período y el saldo va disminuyendo hasta llegar a cero (0) en el último período.

4.4 Anualidad anticipada

DEFINICIÓN 4.3

Se llama anualidad anticipada a aquella en la que los pagos se realizan al principio del período.

Las cuotas mensuales por concepto de arrendamiento y las cuotas periódicas de seguros son casos de anualidades anticipadas, siempre y cuando no varíen.

Para el cálculo del valor presente y del valor futuro de una anualidad anticipada no necesitamos establecer nuevas fórmulas, sino que podemos utilizar las expresiones (4-3) y (4-1) y adecuarlas a la situación que esté analizándose, con algunas modificaciones, y así poder resolver el mayor número de situaciones o problemas con el mínimo de fórmulas. Por esta razón, las calculadoras financieras no tienen incorporadas expresiones específicas para cada clase de anualidades, sino que ahí solamente encontraremos las correspondientes a nuestras expresiones (4-1) y (4-3), y ellas, como ya se anotó, pueden ser aplicadas a diferentes casos o problemas.

VALOR PRESENTE

Para hallar el valor presente de una anualidad anticipada, supongamos que tenemos una de tales anualidades con n pagos por períodos anticipados de valor \$ A cada uno, y con una tasa de interés del $i\%$ por período.

El diagrama de flujo de caja para una anualidad anticipada es el siguiente:

El valor presente que se muestra en la figura 4.9 puede calcularse de dos formas diferentes:

- a) Consideramos el pago del punto 0 y por separado los $n - 1$ pagos restantes y hallamos el valor presente total en el punto 0. De esta manera, los $n - 1$ pagos anteriores constituyen una anualidad vencida; por tanto, obtenemos la expresión siguiente:

$$P = A + A(P/A, i\%, n - 1) = A[1 + (P/A, i\%, n - 1)] \quad (4-7)$$

- b) Podemos considerar la anualidad total de los n pagos y aplicarle el factor $(P/A, i\%, n)$. Este valor presente así obtenido quedará ubicado un período antes del primer pago, es decir, en el punto -1; por tanto, para calcularlo en el punto 0 debemos aplicar el factor $(F/P, i\%, 1)$, es decir, mover este valor de izquierda a derecha un período; de esta forma obtenemos la expresión siguiente:

$$P = A(P/A, i\%, n) (F/P, i\%, 1) \quad (4-8)$$

Debe tenerse en cuenta que las expresiones (4-7) y (4-8) son equivalentes, y para fines prácticos puede utilizarse cualquiera de las dos.

EJEMPLO 4.8

Se tiene una obligación que en un primer momento se había pactado cubrir en 18 cuotas de \$ 15.000 por mes anticipado; se decide pagarla al contado. Si la tasa de interés acordada es del 3% mensual, hallar este valor de precio al contado.

Solución

El diagrama de flujo de caja correspondiente a este ejemplo es:

Los datos del problema son:

$A = 15.000$; $n = 18$ pagos; $i = 3\%$ mensual; $P = ?$

Aplicando la fórmula (4-8) tenemos:

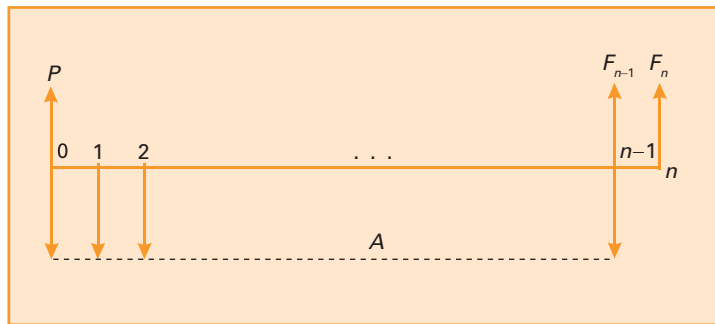


FIGURA 4.9 Diagrama de flujo de caja y valor futuro y presente de una anualidad anticipada

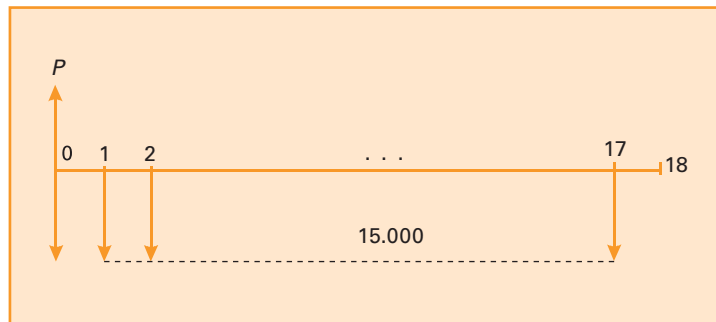


FIGURA 4.10

$$P = 15.000(P/A, 3\%, 18)(F/P, 3\%, 1) = \$ 212.491$$

O sea que el pago de contado de la obligación tiene un valor de \$ 212.491.

Obtenemos el mismo resultado si aplicamos la fórmula (4-7):

$$P = 15.000 + 15.000(P/A, 3\%, 17) = \$ 212.491$$

Una vez más, un mismo problema puede resolverse de diferentes maneras si aplicamos correctamente los principios de las matemáticas financieras.

VALOR FUTURO

Cuando se trata de una anualidad anticipada, debe especificarse el punto en el cual se desea hallar el valor futuro, debido a que en la práctica se presentan básicamente los dos casos siguientes: (a) calcular el valor futuro en el momento de efectuar el último pago; o, (b) calcular el valor futuro al final del último período de la operación financiera, es decir, un período después de efectuar el último pago.

Para estos casos debemos tomar como referencia la figura 4.9.

Si el valor futuro corresponde al caso (a), aplicamos simplemente la fórmula (4-2) para n pagos y obtenemos:

$$F_{n-1} = A(F/A, i\%, n)$$

Si el valor futuro corresponde al caso (b), aplicamos en un primer momento la fórmula (4-2) y este valor quedará acumulado en el punto $n - 1$, y luego con el factor $(F/P, i\%, 1)$ obtendremos el valor futuro en el punto n . Es decir:

$$F_n = A(F/A, i\%, n)(F/P, i\%, 1) \quad (4-9)$$

EJEMPLO 4.9

El propietario de una casa recibe por concepto de arriendo de ella \$ 350.000 mensuales, de los cuales deposita el 40% cada mes en una corporación de ahorro que paga el 2,5 % de interés mensual. Realiza cada depósito el mismo día que recibe la renta. Si la casa estuvo arrendada por espacio de dos años, hallar la cantidad total acumulada en la cuenta de ahorros al final de los dos años.

Solución

Con el supuesto de que el valor del arriendo de un inmueble debe pagarse por mes anticipado, y de que en nuestro caso la cantidad depositada cada mes es de $0,4 (350.000) = \$ 140.000$, el respectivo diagrama de flujo de caja es:

Los datos del problema son:

$A = \$ 140.000$; $n = 24$ pagos; $i\% = 2,5\%$ mensual; $F = ?$

Aplicando la fórmula (4-9), pues la pregunta hace referencia al caso (b) anterior, tenemos:

$$F = 140.000(F/A, 2,5\%, 24) (F/P, 2,5\%, 1) = \$ 4.642.087$$

Es decir, al cabo de dos años de tener arrendada la casa, su propietario tendrá ahorrados \$ 4.642.087.

En el ejemplo anterior, ¿cuál será la cantidad total acumulada en el momento de efectuar el último depósito en la cuenta de ahorros?

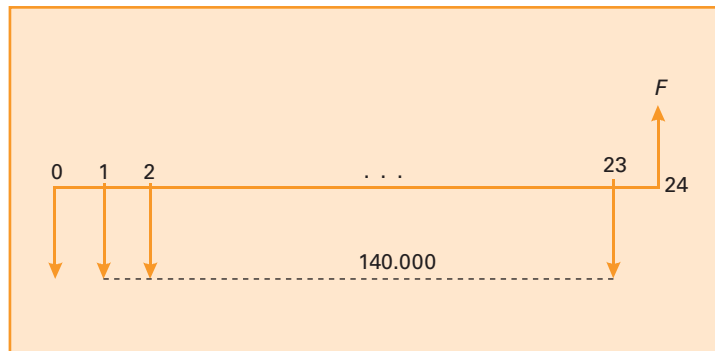


FIGURA 4.11

4.5 Anualidad diferida

DEFINICIÓN 4.4

Se llama anualidad diferida a aquella en la que el primer pago se realiza algunos períodos después de iniciada la operación financiera.

Por ejemplo, se conviene amortizar una deuda adquirida hoy en cierto número de pagos mensuales iguales, y el primer pago debe realizarse en tres meses.

El caso general puede plantearse de la siguiente manera: una anualidad de n pagos iguales de valor \$ A cada uno, debiendo efectuar el primero dentro de k períodos y con una tasa de interés del $i\%$ por período, corresponderá a una anualidad diferida k períodos. Vamos a calcular tanto el valor presente como el valor futuro de esta anualidad. El diagrama del flujo de caja correspondiente es el que se muestra en la figura 4.12.

VALOR PRESENTE

Para hallar el valor presente en el punto indicado en el diagrama que sigue simplemente utilizaremos los factores de anualidad y pago único respectivamente, y obtenemos:

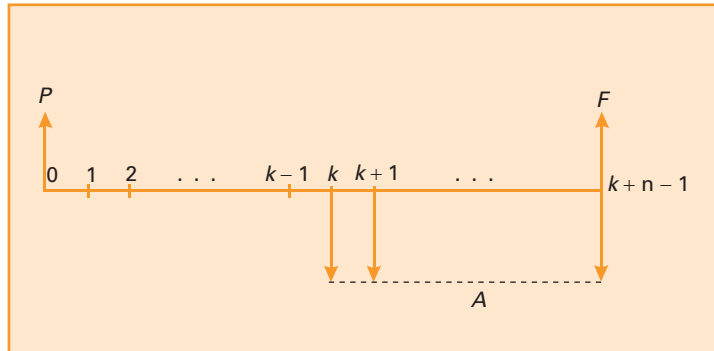


FIGURA 4.12 Diagrama de flujo de caja de una anualidad diferida en k períodos

$$P = A(P/A, i\%, n)(P/F, i\%, k - 1) \quad (4-10)$$

VALOR FUTURO

Para hallar el valor futuro en el punto indicado en el diagrama solo aplicamos la fórmula (4-2), y tenemos:

$$F = A(F/A, i\%, n)$$

En esta clase de anualidades, al período comprendido entre el inicio de la operación financiera y el primer pago de la anualidad se le conoce con el nombre de **período muerto** o **período de gracia**. Existen diferentes modalidades en la práctica. Algunas veces, en ese período de gracia se pagan solo los intereses y en otros casos no se paga nada sino que los intereses van acumulándose hasta cuando se inicie la anualidad. En el caso colombiano, los llamados créditos de ley quinta para el sector agropecuario son un ejemplo de esta clase de anualidades diferidas.

EJEMPLO 4.10

Se adquiere hoy un electrodoméstico financiado de la siguiente manera: 18 cuotas mensuales de \$ 26.000 cada una, para cancelar la primera dentro de cinco meses y una tasa de interés del 3% mensual. Transcurrido un mes, se opta por cubrir en un solo pago el valor de la deuda; hallar el valor de este pago único.

Solución

El diagrama de flujo de caja correspondiente al ejemplo es el siguiente:

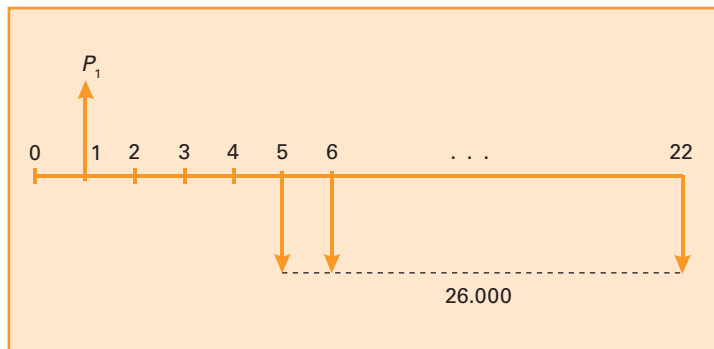


FIGURA 4.13

Los datos del problema son:

$A = \$ 26.000$; $n = 18$ pagos; $i = 3\%$ mensual; $P_1 = ?$

donde P_1 representa el valor del pago único dentro de un mes.

Aplicando la fórmula (4-10) tenemos:

$$P_1 = 26.000(P/A, 3\%, 18) (P/F, 3\%, 3) = \$ 327.247$$

Este será el pago único que debe hacerse en un mes, con el fin de cubrir la deuda.

En algunos casos, para estas anualidades el interés durante el tiempo diferido no es igual al interés durante el tiempo en que se pagan las cuotas. Para estos casos simplemente se aplican los factores correspondientes con sus tasas respectivas. En los problemas de final de capítulo encontraremos ejercicios que hacen referencia a esta situación.

4.6 Anualidad perpetua

DEFINICIÓN 4.5

Se llama anualidad perpetua a aquella en la cual no existe el último pago.

Una cuota fija anual que el Gobierno aporte a una institución de beneficencia o para el mantenimiento de una vía pública, y que estos aportes se hagan por tiempo indefinido, constituyen anualidades perpetuas.

Aun cuando en la práctica son muy escasos los problemas que se ajustan a una anualidad perpetua, el objetivo de estudiar esta clase de anualidades es facilitarnos el estudio de las series perpetuas de pagos variables, que veremos en el capítulo 5 y que son de mayor aplicación.

Tomemos el caso general de una anualidad perpetua cuyos pagos tienen un valor $\$ A$ y una tasa de interés del $i\%$ por período. Para esta clase de anualidad no existe el valor futuro sino solo el valor presente.

El diagrama de flujo de caja correspondiente se muestra en la figura 4.14:

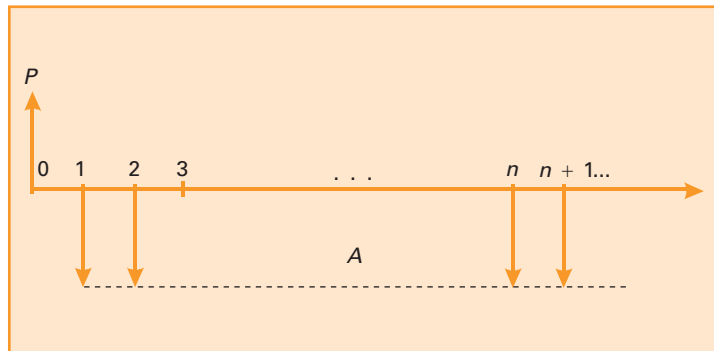


FIGURA 4.14 Diagrama de flujo de caja de una anualidad perpetua

Siempre que se trate de una serie perpetua de pagos, el método para hallar el valor presente es considerar los n primeros pagos de la serie y determinar el correspondiente valor presente.

Al crecer n se origina una sucesión $\{P_n\}$ que depende de n ; el valor presente de la serie será igual al límite (si existe) de esta sucesión.

Para nuestro caso tenemos que $P_n = A(P/A, i\%, n)$; entonces el valor presente P estará dado por:

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$$

O sea:

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} A(P/A, i\%, n) = \lim_{n \rightarrow \infty} A \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right] = \frac{A}{i}$$

Esto nos indica que para la anualidad perpetua representada en la figura 4.14, el valor presente está dado por la expresión:

$$P = \frac{A}{i} \quad (4-11)$$

Una anualidad perpetua también puede ser anticipada o diferida; el manejo de estas clases de anualidades se basa en el uso de la expresión (4-11) de una anualidad vencida al caso correspondiente, teniendo en cuenta lo que se hizo con la expresión (4-4) de una anualidad finita vencida, al tratar la anticipada y la diferida.

EJEMPLO 4.11

Supongamos que el mantenimiento de un activo de vida útil perpetua va a tener un costo anual de \$ 120.000. Se desea constituir un fondo con un depósito único hoy en una cuenta de ahorros que paga un interés del 30% anual, de tal manera que cada año puede retirarse de esta cuenta la suma necesaria para cubrir el costo de mantenimiento. Hallar el valor del depósito.

Solución

El diagrama del flujo de caja correspondiente al ejemplo es similar al de la figura 4.14. Los datos del problema son:

$$A = \$ 120.000; i = 30\% \text{ anual}; P = ?$$

Aplicando la fórmula (4-11) obtenemos:

$$P = \frac{120.000}{0,3} = 400.000$$

Esto quiere decir que con un depósito hoy de \$ 400.000 podremos retirar cada año, y a perpetuidad, la suma de \$ 120.000.

Esto se debe a que los \$ 400.000 que se depositan inicialmente devengan unos intereses anuales del $0,3\%(400.000) = 120.000$, que es precisamente el valor del retiro anual para cubrir el mantenimiento del activo; o, en otras palabras, con los solos intereses anuales se cubre el costo anual de mantenimiento del activo de vida útil perpetua. Todo lo anterior es válido siempre y cuando la tasa de interés anual se mantenga constante, porque si llega a bajar del 30% anual y los costos siguen siendo de \$ 120.000, entonces el capital se disminuye a causa del retiro, y de pronto algún día ese capital se agotará.

En muchos de los problemas prácticos de una operación financiera debe tenerse en cuenta que la tasa de interés con que se realiza esta operación no siempre es constante a lo largo del tiempo; por tanto, se necesita considerar los cambios que pueda sufrir la tasa de interés.

EJEMPLO 4.12

Usted tiene un contrato que estipula el pago de una deuda mediante 30 cuotas mensuales iguales de \$ 22.000 cada una y un interés sobre saldos del 30% anual durante el primer año y del 33% anual de ahí en adelante. Si usted desea saldar hoy este contrato con un pago único, ¿de cuánto es ese pago?

Solución

En primer lugar debe hallarse la tasa mensual equivalente a cada una de las

tasas anuales dadas en el problema. Estas son del 2,21% mensual para el primer año y del 2,4% mensual de ahí en adelante.

El diagrama de flujo de caja es el siguiente:

Donde **P** es el valor del pago único que va a realizarse hoy y que según el flujo de caja equivale al valor presente de la anualidad.

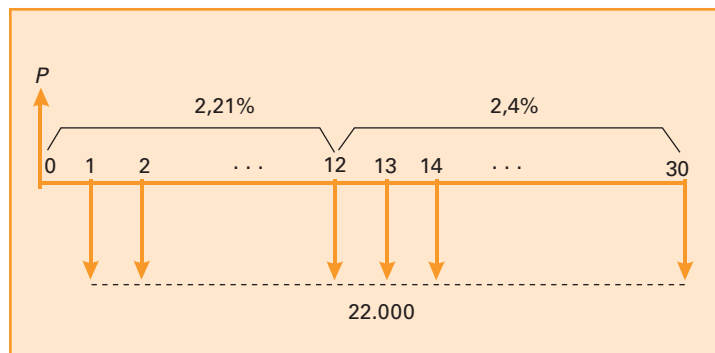


FIGURA 4.15

Dado que la tasa de interés no es la misma para los 30 meses, debe hallarse el valor presente por fracciones, es decir, calculando el valor presente de cada uno de los grupos de pagos iguales que solo están diferenciados por la tasa de interés.

Entonces:

$$P = 22.000(P/A, 2,21\%, 12) + 22.000(P/A, 2,4\%, 18)(1,0221)^{-12} = \$ 474.708$$

Igualmente, puede tratarse el caso de financiar una deuda de hoy mediante un determinado número de cuotas uniformes y periódicas, teniendo en cuenta que hay cambios en tasa de interés que cobra el acreedor.

Veamos, también con un ejemplo, cómo manejar estos casos.

EJEMPLO 4.13

Usted debe financiarle a una persona una deuda por el valor de \$ 3.000.000 de hoy a 20 meses con cuotas mensuales iguales y un interés del 29% nominal trimestral, durante el primer año y del 34,5% anual de ahí en adelante.

Solución

Como en el ejemplo anterior, debemos calcular la tasa efectiva mensual equi-

valente a cada una de las tasas dadas en el problema. Estas tasas son del 2,36% mensual para el primer año y del 2,5% mensual de ahí en adelante.

El diagrama de flujo de caja es el siguiente:

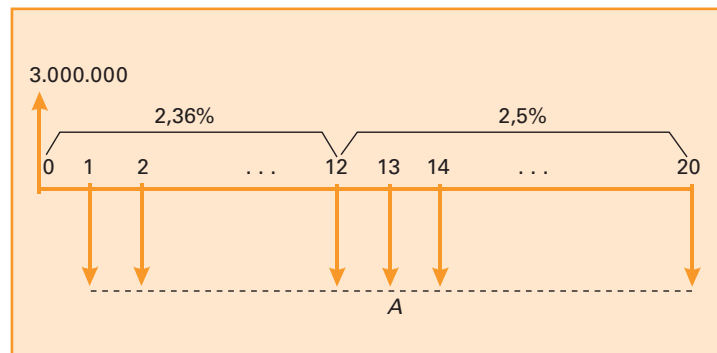


FIGURA 4.16

Los \$ 3.000.000 corresponden al valor presente de las cuotas que deben pagarse y, al igual que en el ejemplo anterior, este valor presente debe calcularse en forma parcial. Entonces tenemos:

$$3.000.000 = A(P/A, 2,36\%, 12) + A(P/A, 2,5\%, 8) (1,0236)^{-12}$$

De donde:

$$A = \$ 190.297$$

De esta manera, con 20 cuotas mensuales de \$ 190.297 cada una y con cambio en la tasa de interés puede pagarse la deuda de \$ 3.000.000 de hoy.

En forma similar se manejan los casos ya sea de cálculos del valor presente o de financiación de deudas, cuando se trata de cuotas uniformes y tasa de interés que cambie varias veces durante el tiempo de la operación financiera.

Otro caso que merece tomarse en cuenta es el de financiar una deuda de hoy a un determinado plazo con cuotas uniformes, cubriendo la primera algunos períodos después de iniciada la operación financiera, sabiendo además que se cobrará una determinada tasa durante los períodos de no pago de cuotas o períodos de gracia y otra tasa para el tiempo en que están pagándose cuotas.

EJEMPLO 4.14

Financiar \$ 1.000.000 a un año con cuotas mensuales iguales; la primera cuota debe pagarse en cuatro meses, sabiendo que la tasa de interés será del 3,5% mensual durante los cuatro primeros meses y del 4% mensual de ahí en adelante.

El diagrama de flujo de caja es el siguiente:

Vamos a equilibrar el diagrama en el punto 0. Para ello nos ubicamos primero en el punto 4 del diagrama debido a que ahí cambia la tasa de interés; esto nos enfrenta con una anualidad anticipada cuyo valor presente estará dada por $A(P/A, 4\%, 9)(1,04)$. Enseguida llevamos este valor al punto 0 con la tasa de interés mensual correspondiente y ahí equilibramos el diagrama. En resumen quedará:

$$1.000.000 = A(P/A, 4\%, 9)(1,04)(1,035)^{-4}$$

$$A = \$ 148.397,90$$

Es decir, según las condiciones del problema, la cuota mensual será de \$ 148.397,9.

Estos ejemplos relacionados con anualidades tienen como objetivo que el estudiante se familiarice con el tratamiento de las series uniformes antes de entrar a resolver las diferentes clases de ejercicios que encontrará más adelante en la sección de problemas al final del capítulo.

EJEMPLO 4.15

Financiar \$ 3.000.000 de hoy a tres años en cuotas mensuales iguales y con un interés del 24% MV durante el primer año y del 29% anual de ahí en adelante, sabiendo que la primera cuota se paga dentro de seis meses y que la última debe ser el doble de la cuota uniforme.

Solución

Es importante tener en cuenta que, como en el ejemplo, cuando se especifica el tiempo de financiación de la deuda este debe contarse a partir del punto inicial y no desde el momento en que se paga la primera cuota.

En nuestro caso el diagrama de flujo de caja del deudor es el siguiente:

Si tomamos el punto 0 como **punto focal** o punto para equilibrar el flujo de caja, tenemos:

$$3.000.000 = (P/A, 2\%, 7)(1,02)^{-5} + A(P/A, 2,14\%, 23)(1,02)^{-12} + 2A(1,0214)^{-24}(1,02)^{-12}$$

$$= A[(P/A, 2\%, 7)(1,02)^{-5} + (P/A, 2,14\%, 23)(1,02)^{-12} + 2(1,0214)^{-24}(1,02)^{-12}]$$

$$A = \$ 142.749$$

Esto quiere decir que el deudor deberá pagar 30 cuotas mensuales de \$ 142.749 comenzando dentro de seis meses y una última cuota en el mes 36 por valor de:

$$2(142.749) = \$ 285.498$$

EJEMPLO 4.16

El Gerente de una empresa solicita un préstamo por \$ 45.000.000 a un banco, y se compromete a pagar esta deuda en dos años y medio con cuotas mensuales iguales y con un interés del 3% mensual para el primer año y del 3,5% mensual de ahí en adelante. Para cumplir esta obligación, el Gerente

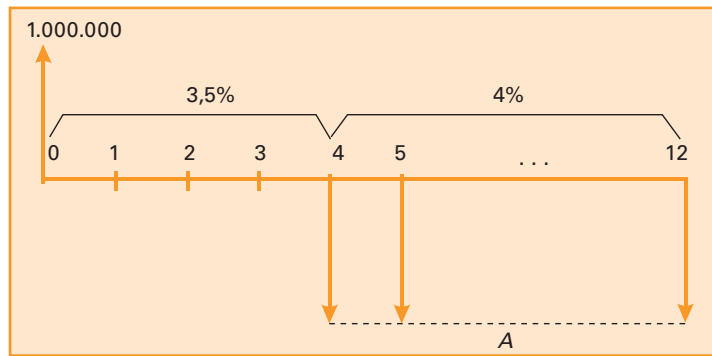


FIGURA 4.17

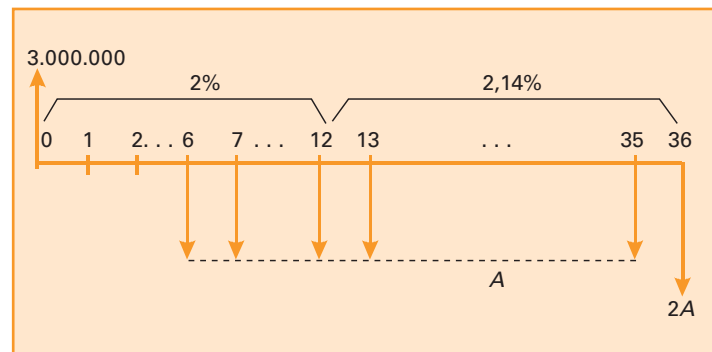


FIGURA 4.18

autoriza hacer depósitos iguales por mes anticipado en una cuenta de ahorros que paga un interés del 2,5% mensual. El valor del depósito debe ser tal que al final del mes se tenga la suma exacta para pagar la cuota del banco. Al cabo de diez meses la cuenta de ahorros aumenta la tasa de interés al 3,4% mensual, y la empresa continúa haciendo los mismos depósitos. Hallar el saldo que tendrá la empresa en la cuenta de ahorros una vez saldada la deuda con el banco.

Solución

Lo primero que debe hacerse es financiar la deuda de la empresa con el banco. El siguiente es el diagrama de flujo de caja del deudor, que en este caso es la empresa.

De tal manera que si equilibramos el diagrama en el punto 0, tenemos:

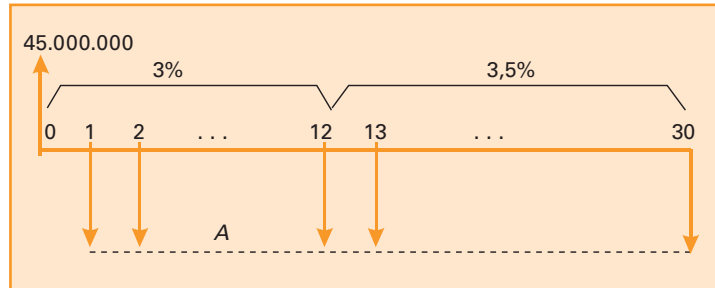


FIGURA 4.19

$$45.000.000 = A(P/A, 3\%, 12) + A(P/A, 3,5\%, 18)(1,03)^{-12}$$

$$A = \$ 2.343.142$$

Lo que quiere decir que la empresa deberá pagarle al banco, durante 30 meses, cuotas uniformes de \$ 2.343.142 cada una.

A su vez, la empresa deberá depositar, al principio de cada mes, una cantidad uniforme de \$ **X**, de tal manera que si este depósito gana 2,5% mensual, al final del mes la empresa tendrá la suma de \$ 2.343.142. Entonces tenemos:

$$2.343.142 = X(1,025)$$

$$X = 2.285.99$$

Este valor de \$ 2.285.992 se depositará al principio de cada mes y así la empresa podrá disponer de \$ 2.343.142 al final del mes para cubrir la cuota del banco.

El depósito que se haga en el décimo mes ya ganará el 3,4%, y se convertirá al fin de mes en:

$$2.285.992(1,034) = \$ 2.363.716$$

de los cuales deberá retirar solamente \$ 2.343.142, y quedará un saldo de \$ 20.574. Lo mismo para los siguientes depósitos hasta el último, que se realizará en el mes 29. El saldo que tenga la empresa al final del mes 30 serán los excedentes de cada mes, y el flujo de caja que nos permita calcular ese saldo será el siguiente:

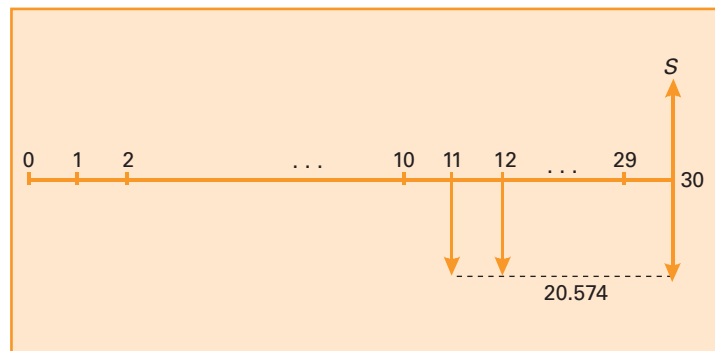


FIGURA 4.20

Donde **S** es el saldo que la empresa tendrá en la cuenta de ahorros una vez pagada la deuda al banco. Este saldo estará dado por:

$$S = 20.574(P/A, 3,4\%, 20) = \$ 575.884$$

Como podemos darnos cuenta, es posible que en un mismo problema se necesite representar gráficamente varios flujos de caja, siempre y cuando esto nos ayude a clarificar y precisar mejor las distintas operaciones financieras que puedan presentarse en un mismo problema.

Otro caso de series uniformes que se presenta comúnmente es aquel que consiste en financiar una deuda en cuotas periódicas iguales bajo una tasa de interés conocida inicialmente, pero con la condición de que cuando la tasa de interés varíe, entonces varían las cuotas a otra cantidad también

uniforme. Esto corresponde a una de las condiciones acordadas entre las partes cuando el acreedor le financia al deudor una suma de dinero bajo el sistema de cuotas uniformes y que generalmente aparece en una de las cláusulas del contrato de la forma de amortización de la deuda.

En resumen, lo que se hace es financiar la deuda original con la tasa acordada en el momento del crédito, y cuando la tasa de interés del mercado cambie se determina entonces el saldo en ese momento y se vuelve a financiar por el tiempo que falte, y así sucesivamente hasta el final del tiempo de amortización.

De esta manera, por ejemplo, para una deuda de \$ 45.000.000 de hoy se acuerda entre las partes un plazo de tres años para amortizar la deuda en cuotas mensuales iguales y una tasa del 18,6% MV, pero con la condición de que cuando la tasa en el mercado varíe (aumente o disminuya) también variará el valor de la cuota, pero seguirá siendo uniforme.

El lector debe elaborar el diagrama del flujo de caja, y con la tasa de interés del 18,6% MV equivalente al 1,55% mensual se tiene que:

$$45.000.000 = A_1(P/A, 1,55\%, 36)$$

Luego:

$$A_1 = \$ 1.640.434,35$$

Sería la cuota mensual durante los tres años.

Sin embargo, al cabo de un año la tasa de interés en el mercado bajó al 17,04% MV; por lo tanto, de ahí en adelante las cuotas deben disminuir respecto de la cuota del primer año.

El saldo al cabo de un año es igual al valor en ese punto de las cuotas que aún faltan por pagar. Es decir:

$$\text{Saldo} = 1.640.434,35(P/A, 1,55\%, 24) = \$ 32.668.545,3$$

Así que de ahí en adelante las cuotas mensuales iguales se obtienen financiando este saldo.

O sea que:

$$32.668.545,3 = A_2(P/A, 1,42\%, 24)$$

$$A_2 = \$ 1.615.834,8$$

Y estas serían las cuotas mensuales durante los dos años restantes.

Pero suponga que a los 15 meses de estar pagando esta cuota, la tasa en el mercado disminuye al 13,92% MV, o sea, al 1,16% mensual.

De nuevo se debe calcular el saldo en esa fecha, que estará dado por:

$$S = 1.615.834,8(P/A, 1,42\%, 9) = \$ 13.561.546,22$$

Y de nuevo financiar este saldo a los nueve meses restantes y con una tasa de interés del 1,16% mensual.

O sea que:

$$13.561.546,22 = A_3(P/A, 1,16\%, 9)$$

$$A_3 = \$ 1.595.578,8$$

Y este sería el valor de la cuota uniforme para los últimos nueve meses del tiempo del crédito.

El lector debe construir, en este momento, el diagrama del flujo de caja del crédito original con las cuotas que realmente se cancelaron a lo largo de los tres años.

A continuación damos un ejemplo en el cual, a pesar de contener pagos periódicos e iguales, las fórmulas vistas para anualidades no son suficientes para dar solución al problema; aun así, gracias al apoyo que podemos encontrar en las ecuaciones de diferencia finita, es posible hallar la solución sin necesidad de acudir al proceso interactivo de uno a uno de los pagos.

EJEMPLO 4.17

Supongamos que una ley exige que toda inversión que se haga en una institución financiera pague un impuesto del 12% anual sobre los intereses devengados en ese año. Usted invierte allí la suma de \$ 3.000.000, y la institución promete pagarle el 36% anual de interés. Hallar el total acumulado al cabo de diez años, si además cada trimestre usted deposita \$ 50.000 durante los diez años.

Solución

Como ya se anotó, a pesar de hacer un depósito uniforme cada trimestre de \$ 50.000, no es posible tratarlo en su conjunto como una anualidad, sino que tendremos que analizar lo que sucede en un año cualquiera. Podemos tratar el problema a partir del siguiente diagrama de flujo de caja en períodos anuales, debido a que el descuento se hace cada año.

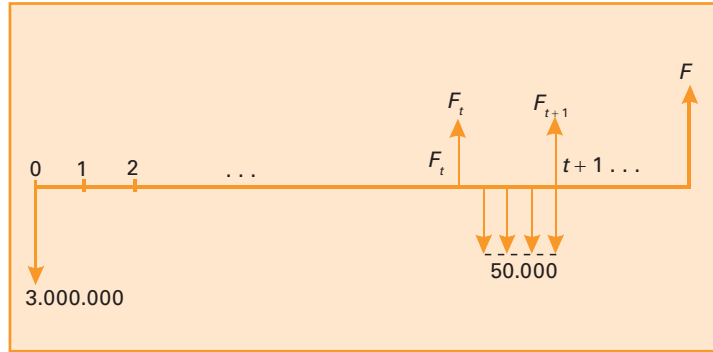


FIGURA 4.21

Como la tasa de rendimiento del dinero es del 36% EA, pero los depósitos se hacen cada trimestre, es obvio que necesitamos la tasa trimestral equivalente, y que para nuestro caso es del 7,99% trimestral.

De tal manera que si llamamos F_t al valor futuro o acumulado al final del año t después del depósito y del descuento del 12% sobre los intereses de ese año, similar interpretación tendría F_{t+1} , y así la relación entre estos dos valores será:

$$F_{t+1} = F_t + 0,36 F_t + 225.272 - 0,12[0,36 F_t + 25.272]$$

Donde:

$$225.272 = 50.000(F/A, 7,99\%, 4)$$

representa el acumulado al final del año como resultado de los cuatro depósitos trimestrales de \$ 50.000. De esta suma, \$ 200.000 corresponden a capital y \$ 25.272 a intereses anuales sobre los cuales también debe pagarse el impuesto del 12% anual.

La ecuación anterior es equivalente a:

$$F_{t+1} = 1,3168 F_t + 222.239 \text{ con } F_0 = \$ 3.000.00$$

Esta es una ecuación de diferencia finita cuya solución es de la forma:

$$F_t = (1,3168)^t (3.000.000) + 222.239 \left[\frac{1 - (1,3168)^t}{1 - 1,3168} \right]$$

Finalmente, el saldo al cabo de diez años será:

$$F_{10} = \$ 57.318.437$$

Otro caso común es aquel en el que se amortiza una deuda con cuotas uniformes periódicas y además cuotas extraordinarias que en algunos casos también son iguales y periódicas, pero diferentes de las primeras tanto en el valor como en el período.

EJEMPLO 4.18

Se invierte hoy la suma de \$ 9.000.000 en una entidad financiera que paga un interés del 1,5% mensual. Cada mes se deposita allí la suma de \$ 30.000. Hallar el total que se tendrá acumulado al cabo de cinco años.

Solución

El diagrama de flujo de caja es el siguiente:

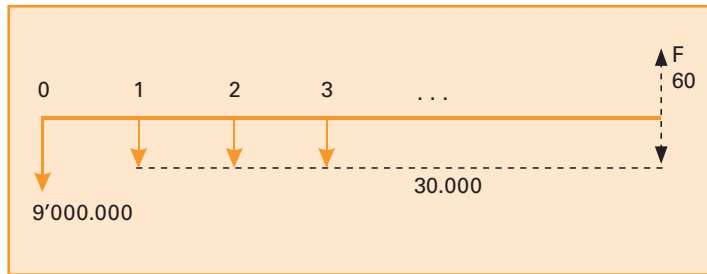


FIGURA 4.22

El valor futuro al cabo de 60 meses estará dado por:

$$F = 9.000.000(1,015)^{60} + 30.000(F/A, 1,5\%, 60) = \$ 24.875.417$$

EJEMPLO 4.19

Resolver el ejemplo anterior para el caso en el que la institución haga un descuento o retención cada mes del 1% sobre los intereses devengados en ese mes.

Solución

El diagrama de flujo de caja para este caso es el siguiente:

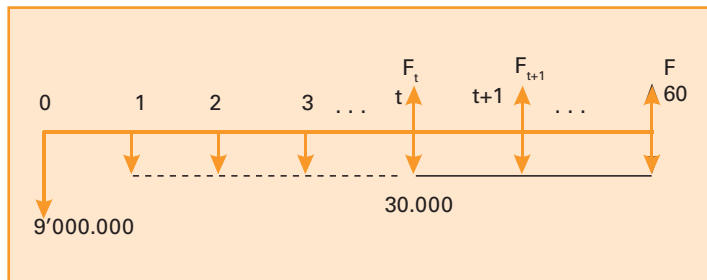


FIGURA 4.23

La relación que hay entre F_{t+1} y F_t es:

$$F_{t+1} = F_t + 0,015 F_t - 0,01(0,015 F_t) + 30.000$$

Es decir:

$$F_{t+1} = 1,01485 F_t + 30.000; \text{ con } F_0 = 9.000.000$$

y la solución de esta ecuación es:

$$F_t = (1,01485)^t (9.000.000) + 30.000 \left[\frac{1 - (1,01485)^t}{1 - 1,01485} \right]$$

Y así:

$$F_{60} = \$ 24.666.869$$

representa el valor total acumulado al cabo de cinco años.

Se puede observar la diferencia tanto en el planteamiento de los dos ejemplos anteriores como en el resultado final debido a lo diferente de las condiciones en el enunciado de cada uno de los problemas.

Cuando, como en el ejemplo 4.19, se presenta una retención o descuento sobre los intereses devengados en el período, el problema también se puede plantear de la siguiente forma:

Si la tasa de interés es del 1,5% mensual y el descuento sobre los intereses es del 1% mensual, entonces la tasa real mensual en este caso será:

$$\text{Tasa real} = \text{tasa de interés} - (\text{tasa de retención})(\text{tasa de interés})$$

Es decir, si i_r es la tasa real mensual, entonces:

$$i_r = 0,015 - 0,01(0,015) = 0,015(1 - 0,01) = 0,01485$$

O sea que bajo las condiciones del ejemplo 4.19, la tasa real devengada es del 1,485% mensual, y así el valor futuro de las inversiones es:

$$F = 9.000.000(1,01485)^{60} + 30.000(F/A, 1,485\%, 60) = \$ 24.666.869$$

y corresponde al resultado obtenido en el ejemplo 4.19.

EJEMPLO 4.20

Financiar una deuda de \$ 3.000.000 a dos años en cuotas mensuales iguales y cuotas extraordinarias semestrales que sean el doble de las cuotas mensuales, sabiendo que la tasa de interés es del 34,49% EA.

Solución

El diagrama de flujo de caja es el siguiente:

Como tenemos cuotas tanto mensuales, de valor **A** cada una, como cuotas semestrales de valor **2A** cada una, necesitamos convertir la tasa efectiva anual del 34,94% a sus equivalentes mensual y semestral; así, tenemos:

El 34,94% tasa efectiva anual es equivalente al 16,16% semestral. La tasa equivalente mensual del 34,94% es 2,5286, y la semestral es del 16,16%.

Por tanto, equilibrando el diagrama en el punto 0 tenemos:

$$3.000.000 = A(P/A, 2,5286\%, 24) + 2A(P/A, 16,16\%, 4)$$

Dejando el valor de **A** en la ecuación anterior, llegamos a que $A = 128.168,34$. Por consiguiente, la financiación consistirá en pagar 24 cuotas mensuales de \$ 128.168,34 cada una y cuatro cuotas semestrales de \$ 256.336,67.

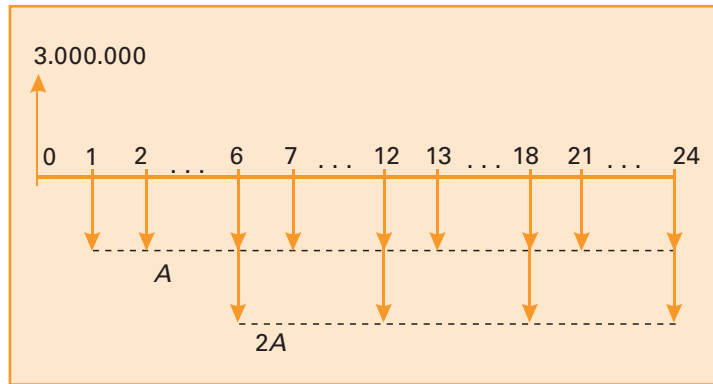


FIGURA 4.24

4.7 Anualidad con tasa anticipada

Otro de los casos utilizados para la amortización de una deuda es aquel en el que se pacta una tasa anticipada pero el deudor paga en total cada período, excepto en el punto inicial, cantidades iguales que constan del abono a capital más los intereses anticipados por el saldo pendiente en ese momento.

A continuación se deducirá la expresión que permita determinar el valor del pago periódico, en las condiciones expuestas anteriormente.

Sean:

D_0 : deuda original para autorizar en n períodos

n: número de pagos uniformes

i: tasa de interés por período anticipado

A: valor total por pagar en cada período

El diagrama de flujo de caja, en el que la parte del pago dibujado en forma aritmética corresponde al abono a capital y lo discontinuo representa los intereses pagados en ese momento, es el siguiente:

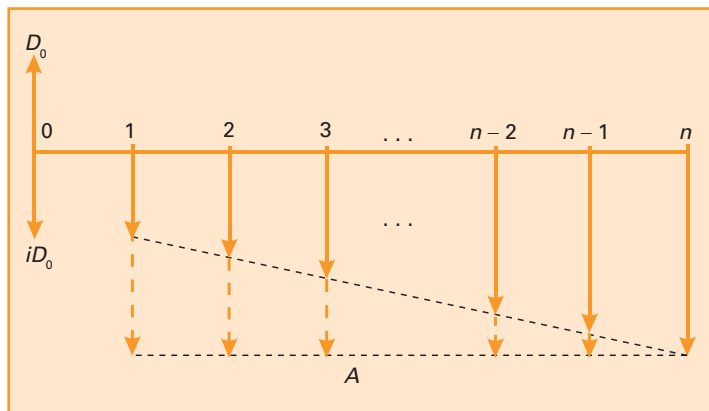


FIGURA 4.25

El abono a capital se hará en los siguientes pagos:

Con el pago n : A

Con el pago $n - 1$: $A - iA = A(1 - i)$

Con el pago $n - 2$: $A - i\{A(1 - i) + A\} = A(1 - i)^2$

Con el pago tres: $A(1 - i)^{n-3}$

Con el pago dos: $A(1 - i)^{n-2}$

Con el pago uno: $A(1 - i)^{n-1}$

Así que la deuda original será igual a la suma de estos abonos; o sea:

$$D_0 = A + A(1 - i) + A(1 - i)^2 + \dots + A(1 - i)^{n-3} + A(1 - i)^{n-2} + A(1 - i)^{n-1}$$

que corresponde a la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica de razón $r = 1 - i$ y primer valor A .

Aplicando la expresión (1-5) para $r \neq 1$ tenemos:

$$D_0 = A \left[\frac{1 - (1 - i)^n}{1 - (1 - i)} \right] = A \left[\frac{1 - (1 - i)^n}{i} \right]$$

De donde:

$$A = D_0 \left[\frac{i}{1 - (1 - i)^n} \right] \quad (4-12)$$

Con esta expresión puede calcularse la cuota total uniforme que se pagará a partir del primer período para el caso descrito inicialmente.

EJEMPLO 4.21

Un banco comercial le otorga un crédito a una persona por valor de \$ 2.000.000 en las siguientes condiciones: tiempo, un año; tasa de interés, 32% TA; intereses pagados por trimestre anticipado, abono a capital por trimestre vencido y cuotas uniformes a partir del primer trimestre.

Solución

El diagrama de flujo de caja es el siguiente: \$ 2.000.000

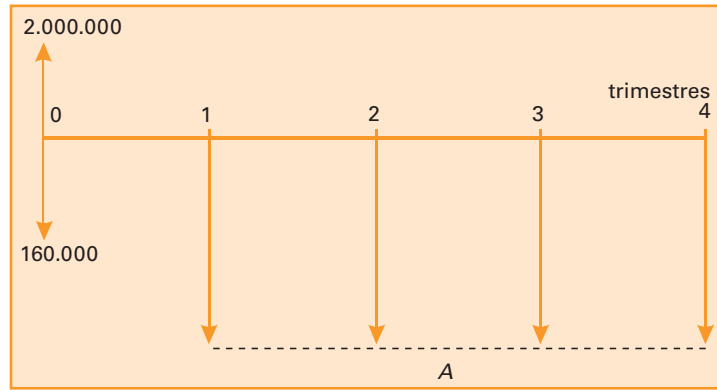


FIGURA 4.26

Donde la tasa de interés es el 8% trimestral anticipada. A partir de la expresión (4-11) tenemos:

$$A = 2.000.000 \left[\frac{0,08}{1 - (1 - 0,08)^4} \right] = \$ 564.160,89$$

Por tanto, los abonos al capital en cada trimestre serán los siguientes:

En el primero: $A(1 - i)^3 = \$ 439.305,32$

En el segundo: $A(1 - i)^2 = \$ 477.505,78$

En el tercero: $A(1 - i) = \$ 519.028,01$

En el cuarto: $A = \$ 564.160,89$

Como ejercicio, el estudiante deberá calcular el valor de los intereses pagados al principio de cada trimestre y, luego, adicionar a los respectivos abonos al capital para comprobar que efectivamente la cuota total es uniforme desde el primer trimestre.

PROBLEMAS RESUELTOS

- Una ciudad debe hacer el mantenimiento de una vía durante 15 años. El costo promedio anual del mantenimiento asciende a \$ 45.000.000. La ciudad tiene 830.000 habitantes y ha determinado que para cubrir el costo anual cada habitante deberá pagar un impuesto trimestral uniforme; estos impuestos se depositarán en una institución que paga el 2,7% mensual de intereses, de tal manera que al final del año se tenga la suma necesaria para el mantenimiento. Hallar el valor del impuesto que cada ciudadano deberá pagar trimestralmente.

Solución

Es suficiente analizar el problema para un año, porque en los demás se tiene la misma situación.

El diagrama es el siguiente:

Sea **X** el total depositado cada trimestre por todos los habitantes.

Tasa de interés: 2,7% mensual y 8,32% trimestral.

Entonces:

$$45.000.000 = X(F/A, 8,32\%, 4)$$

$$X = \$ 9.939.337$$

$$\text{Impuesto trimestral/habitante} = 9.939.337/830.000 = \$ 11.975$$

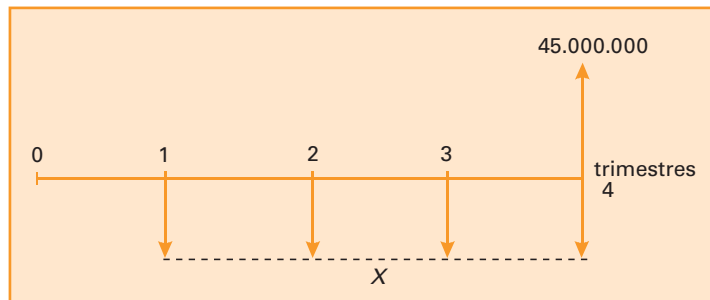


FIGURA 4.27

2. Financiar \$ 10.000.000 a tres años en cuotas mensuales iguales debiendo cancelar la primera dentro de 8 meses y dos pagos adicionales por valor de \$ 1.500.000 cada uno en los meses 15 y 26, sabiendo que la tasa de interés es del 30% anual durante el primer año y del 35% anual de ahí en adelante.

Solución

Sea X el valor de la cuota mensual.

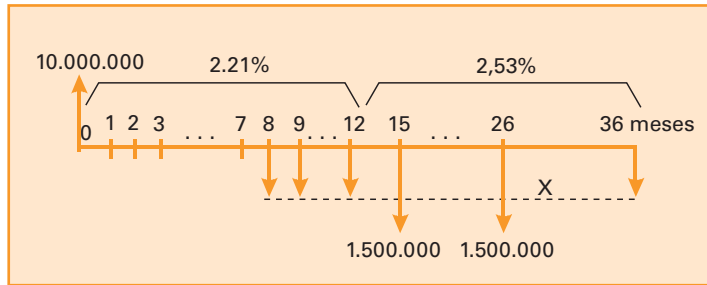


FIGURA 4.28

$$10.000.000 = 1.500.000 [(1,0253)^{-3} (1,0221)^{-12} + (1,0253)^{-14} (1,0221)^{-12}]$$

$$X = \$ 457.682$$

$$+ x(P/A, 2.21\%, 5)(1,0211, 5)(1,0221)^{-7} + X(P/A, 2.53\%, 24)(1,0221)^{-12}$$

3. Con el fin de reunir \$ 15.000.000 para dentro de cinco años, usted abre una cuenta de ahorros con un depósito inicial de \$ 1.300.000 y luego depósitos mensuales iguales durante los cinco años. Si al cabo de dos años usted debe retirar de la cuenta la suma de \$ 2.000.000, hallar el valor de los depósitos mensuales para que a los cinco años tenga la cantidad deseada, sabiendo que la cuenta de ahorros paga el 3% mensual durante los dos primeros años y el 3,8% mensual en los tres años siguientes.

Solución

Sea X el valor de la cuota mensual:

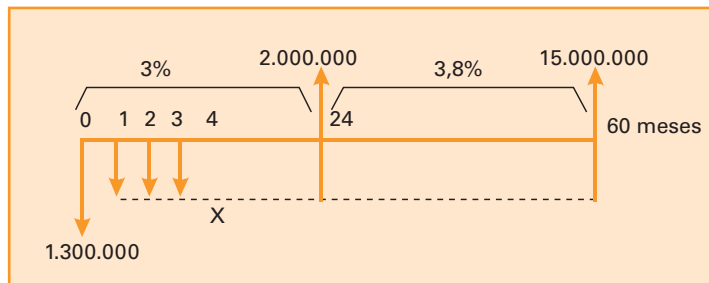


FIGURA 4.29

$$15.000.000 + 2.000.000 (1,038)^{36} = 1.300.000 (1,03)^{24} (1,038)^{36}$$

$$+ X [(F/A, 3\%, 24)(1,038)^{36} + (F/A, 3,8\%, 36)]$$

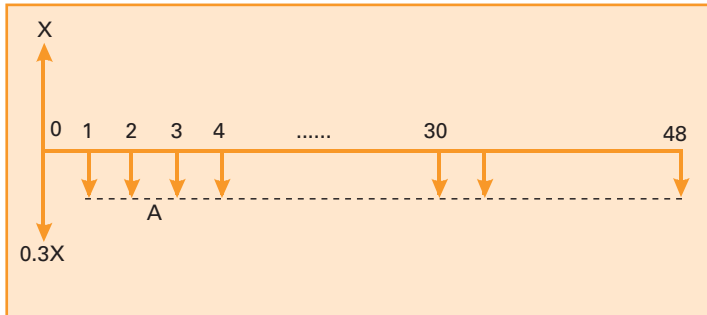
$$X = \$ 60.788$$

4. Un empleado que acaba de pensionarse decide comprar un automóvil para trabajar. Debe pagar una cuota inicial equivalente al 30% del valor del precio al contado del automóvil y el resto a cuatro años en cuotas mensuales iguales y un interés del 19,56% EA. Al cabo de dos años y medio de estar pagando cuotas, la compañía que financió la deuda le informa al propietario del carro que

las cuotas que aún faltan por pagar tienen en ese momento un valor de \$ 15.600.000. Determinar el valor del precio al contado del automóvil.

Solución

Sea **X** el valor al contado del automóvil:



$$15.600.000 = A(P/A, 1,5\%, 18)$$

$$A = \$ 995.370$$

$$0,7X = 995.370 (P/A, 1,5\%, 48)$$

$$X = \$ 48.407.052$$

FIGURA 4.30

- Una persona adquiere hoy un apartamento con el siguiente plan: cuota inicial financiada a seis meses con pagos mensuales de \$ 3.100.000 cada uno y a un interés del 18% MV y el resto a ocho años con cuotas mensuales iguales, debiendo cancelar la primera de esas cuotas dentro de cuatro meses y con un interés del 23% EA. Determinar el valor de las cuotas mensuales si el apartamento tiene un precio al contado de \$ 140.000.000.

Solución

X: valor de las cuotas mensuales

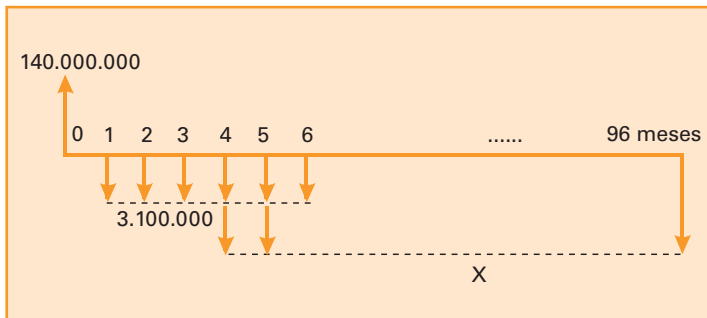


FIGURA 4.31

Tasas de interés: 23% EA \Leftrightarrow 1,74% mensual

18% MV \Leftrightarrow 1,5% mensual

$$140.000.000 = 3.100.000 (P/A, 1,5\%, 6) + X(P/A, 1,74\%, 93)(1,0174)^{-3}$$

$$X = \$ 2.805.820$$

- Financiar \$ 30.000.000 de hoy a dos años en cuotas mensuales iguales y cuotas adicionales trimestrales iguales al doble de la cuota mensual. Tasa de interés del 2% mensual para el primer año y del 7% trimestral de ahí en adelante.

Solución

A: Valor de la cuota mensual

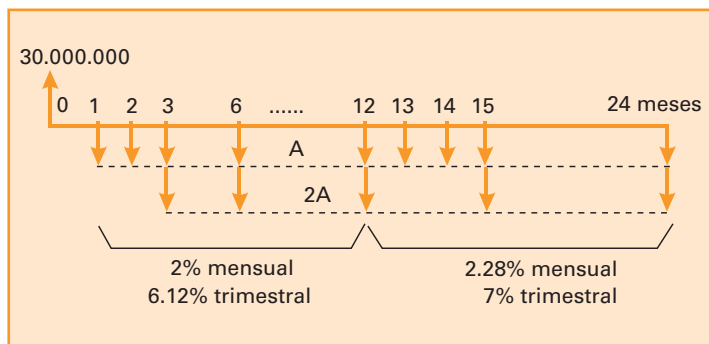


FIGURA 4.32

$$30.000.000 = A(P/A, 2\%, 12) + A(P/A, 2.28\%, 12)(1,02)^{-12} + 2A(P/A, 6,12\%, 4) \\ + 2A(P/A, 7\%, 4)(1,0612)^{-4} \\ = A[31,025278] \\ A = \$966.953$$

$$2A = \$1.933.906$$

7. Una empresa adquiere un crédito hoy por valor de \$ 120.000.000 de una institución financiera. La deuda debe pagarse en un tiempo de tres años con cuotas trimestrales iguales y un interés del 15,4% TV. Usted como Gerente de esa empresa ordena ahorrar cada mes la cuarta parte de las utilidades mensuales en una corporación que paga el 12,28% EA. ¿Cuáles deberán ser las utilidades mensuales de su empresa para que con este plan de ahorro la deuda quede saldada al cabo de los tres años?

Solución

Tasa de interés del crédito: 3,85% trimestral

Financiación del crédito:

$$120.000.000 = A(P/A, 3,85\%, 12)$$

$$A = \$12.675.224$$

Diagrama de flujo con la corporación:

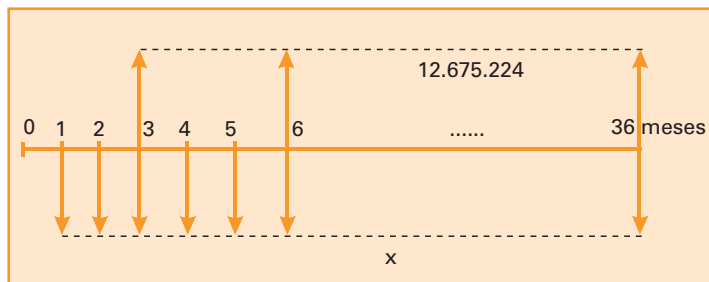


FIGURA 4.33

Tasa de interés: 2,94% trimestral

⇔ 0,97% mensual

X: Valor del ahorro mensual

$$X(P/A, 0,97\%, 36) = 12.675.224 (P/A, 2,94\%, 12)$$

$$X = \$4.183.934$$

$$\text{Utilidades mensuales} = 4X = \$16.735.736$$

8. Financiar \$ 20.000.000 en cuotas mensuales de \$ 1.230.000 cada una y un interés del 26,4% MV, determinando el número de cuotas y el valor de la última.

Solución

El diagrama de flujo de caja es el siguiente:

Equilibrando el diagrama en el punto 0 se tiene que:

$$20.000.000 = 1.230.000 (P/A, 26,4\%, n)$$

O sea:

$$n = 20,34 \text{ cuotas}$$

Como las cuotas son mensuales, entonces el problema puede tener dos soluciones: a) cancelar la deuda en 20 cuotas; o, b) cancelar la deuda en 21 cuotas.

Para el caso a) tenemos que 19 cuotas son uniformes de \$ 1.230.000, y la última diferente de un valor \$ **X**; por lo tanto, se cumple que:

$$20.000.000 = 1.230.000 (P/A, 26,4\%, 19) + X (1,022)^{-20}$$

O sea:

$$X = \$ 1.648.119,6$$

Para el caso b) tenemos que 20 cuotas son uniformes de \$ 1.230.000 y la última es diferente y de un valor \$ **X**; por lo tanto, se cumple que:

$$20.000.000 = 1.230.000 (P/A, 26,4\%, 20) + X (1,022)^{-21}$$

O sea:

$$X = \$ 427.318,2$$

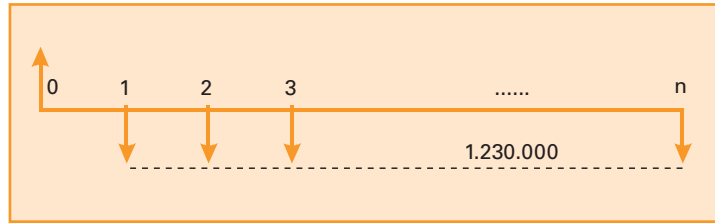


FIGURA 4.34

AUTOEVALUACIÓN

1. Una anualidad es:
 - a) Una serie de pagos anuales
 - b) Una serie de pagos periódicos
 - c) Una serie de pagos uniformes
 - d) Una serie de pagos periódicos e iguales

2. Para hallar el valor presente de una anualidad anticipada es necesario utilizar una tasa anticipada.
 - a) Sí
 - b) No

3. En una anualidad, el número de pagos es igual al número de períodos.
 - a) Siempre
 - b) Algunas veces
 - c) Nunca

4. Al aplicar el factor (**P/A, i%, n**) para hallar el valor presente de una anualidad, ese valor queda ubicado:
 - a) Donde está el primer pago
 - b) Un período después del primer pago
 - c) Un período antes del primer pago
 - d) Donde está el último pago

5. Cuando una deuda se financia con una anualidad, entonces:
 - a) En todos los pagos se amortiza la misma cantidad de capital.
 - b) En todos los pagos se cancela la misma cantidad de intereses.
 - c) En cada pago se amortiza al capital una cantidad menor que en el anterior.
 - d) En cada pago se cancela una cantidad de intereses menor que en el anterior.

6. Al aplicar el factor (**F/A, i%, n**) para hallar el valor futuro de una anualidad, este valor queda ubicado:
 - a) Un período antes del último pago
 - b) Un período después del último pago
 - c) Donde se haga el último pago
 - d) Ninguna de los anteriores

7. Dos anualidades son equivalentes cuando:
 - a) Tienen el mismo número de pago
 - b) Las tasas son equivalentes
 - c) Sus valores presentes son iguales
 - d) Ninguna de las anteriores

8. ¿Qué relación financiera existe entre una anualidad, su valor presente y su valor futuro?

9. Una anualidad perpetua se puede hacer equivalente a:
 - a) Una anualidad finita anticipada
 - b) Una anualidad finita vencida
 - c) Una anualidad finita diferida
 - d) Cualquiera de las anteriores

10. Describa el procedimiento para financiar una deuda en cuotas mensuales iguales cuando cambia la tasa de interés, para los siguientes casos:
 - a) Las cuotas se deben mantener iguales durante todo el tiempo de la amortización de la deuda.
 - b) Las cuotas son uniformes pero cambian de valor al cambiar la tasa de interés.

11. Si una anualidad es anticipada, entonces para hallar tanto su valor futuro como su valor presente se debe utilizar una tasa anticipada. Justifique su respuesta.

PROBLEMAS I

- 1.1** ¿Qué cantidad deberá invertir hoy una persona en una cuenta de ahorros que paga un interés del 30% capitalizable mensualmente para poder retirar \$ 25.000 mensuales durante tres años?
- 1.2** Señale qué series de pagos uniformes serán equivalentes a cada uno de los valores siguientes:
- a) \$ 1.600.000 en ocho años, pagos anuales y una tasa de interés del 8% trimestral.
 - b) \$ 3.100.000 en cinco años, pagos semestrales y una tasa de interés del 33% anual.
 - c) \$ 1.500.000 de hoy, pagos mensuales durante un año y una tasa de interés del 15% semestral.
- 1.3** En una universidad existe la costumbre de que cada promoción semestral hace una donación por concepto de \$ 500.000 diez años después de graduados. Esta costumbre se inició en junio de 1978 con el grupo que terminó en junio de 1968. Si la universidad invierte estas donaciones semestrales en una institución financiera que paga un interés del 34% anual, ¿cuánto tendrá acumulado la universidad por concepto de estas donaciones en diciembre de 1993?
- 1.4** Tres personas, A, B y C, deciden ahorrar dinero durante tres años; determinar cuál tiene la mayor cantidad al cabo de los tres años, sabiendo que A hace depósitos mensuales de \$ 30.000 y la tasa de interés es del 32,4% AMV; B deposita \$ 100.000 cada trimestre al 33% ATV; y C deposita \$ 205.000 cada semestre al 34% anual.
- 1.5** Un padre de familia debe reunir \$ 2.300.000 para dentro de cuatro años. Con este fin, abre hoy una cuenta de ahorros con \$ 220.000 en una entidad que paga un interés del 32% convertible mensualmente, y de aquí en adelante cada mes deposita \$ R. Hallar el valor de R de tal manera que el padre de familia cumpla su objetivo.
- 1.6** Una persona deposita \$ 50.000 mensuales durante cuatro años en una entidad que paga un interés del 30,5% nominal trimestral. Al cabo de ese tiempo, la persona empieza a retirar \$ 50.000 por mes vencido y durante cuatro años. Averiguar el saldo que le quedará en su cuenta al final de los ocho años.
- 1.7** Una compañía debe adquirir un terreno para ampliar sus instalaciones, con las condiciones siguientes: una cuota inicial del 30% del valor del precio al contado y el resto en ocho pagos trimestrales de \$ 10.000.000 cada uno; el primero de estos pagos debe hacerlo dentro de un año. Determinar el valor del precio al contado del terreno sabiendo que en la financiación se pactó un interés del 36% ATV.
- 1.8** Resolver el problema anterior sabiendo que la tasa de interés es del 30% nominal mensual durante el primer año del crédito y del 36% ATV de ahí en adelante.
- 1.9** El 1 de junio de 1988 se adquirió un negocio con \$ 4.000.000 de cuota inicial y diez pagos trimestrales de \$ 550.000 cada uno; el primero con vencimiento el 1 de julio de 1991. ¿Cuál es el valor del precio al contado del negocio para una tasa de interés del 29% convertible trimestralmente?
- 1.10** Se supone que una casa tiene un valor de contado de \$ 280.000.000. Se adquiere con una cuota inicial de \$ 10.000.000 y el resto en cuotas mensuales iguales durante un año y medio; si la tasa de interés de la financiación es del 35% anual, hallar el valor de las cuotas mensuales.

- 1.11** Usted como asesor de una empresa debe decidir entre comprar hoy una máquina cortadora que tiene un valor de \$ 18.600.000 o pagar el servicio de corte a otra empresa por valor de \$ 520.000 mensuales. ¿Cuántos meses como mínimo deberá prestar servicio la máquina para que usted se decida por la compra de esta, si la tasa de descuento de su empresa es del 30% anual?
- 1.12** Un artículo tiene un valor de contado de \$ 585.000 y puede adquirirse financiado con el siguiente plan: cuota inicial del 30% del valor del precio al contado y el resto a 18 cuotas mensuales iguales; la primera cuota debe pagarse dentro de ocho meses y un último pago por \$ 80.000 tres meses después de la última cuota mensual. Si la tasa de interés es del 31% AMV durante los siete primeros meses y del 9% trimestral de ahí en adelante, hallar el valor de las cuotas uniformes mensuales.
- 1.13** Usted deposita \$ 10.000 cada mes durante dos años en una entidad que paga un interés del 28% nominal mensual. A partir del segundo año empieza a retirar \$ 10.000 por mes vencido y durante un año y medio, y desde esta fecha deposita por trimestre vencido y durante dos años \$ 50.000. Hallar el total acumulado en la cuenta de ahorros un año más tarde del último depósito trimestral.
- 1.14** Un ahorrista deposita \$ 100.000 mensuales por mes vencido durante cuatro años en una cuenta de ahorros que abona un interés del 29,5% nominal trimestral. Si a partir de los cuatro años retira por trimestre vencido la misma suma depositada, ¿durante cuánto tiempo puede hacer retiros?
- 1.15** Está construyéndose un restaurante que entrará en servicio dentro de un año. Supongamos que las utilidades sean de \$ 650.000 mensuales y durante cuatro años de servicio. Si usted desea tomar en arriendo este restaurante, ¿cuál será el valor en pesos de hoy que debe ofrecer para que al cabo de los cinco años usted tenga una ganancia adicional de \$ 3.000.000, si la tasa de oportunidad es del 32% anual?
- 1.16** Hallar el número mínimo de depósitos de \$ 85.000 cada uno y por mes vencido para lograr sobrepasar los \$ 2.420.000 en el momento de hacer el último depósito, si el dinero rinde el 29% convertible trimestralmente.
- 1.17** Un artículo tiene un valor de contado de \$ 735.000; se adquiere financiado con una cuota inicial del 35% del valor del precio al contado y el resto en cuotas mensuales de \$ 28.500 cada una. Si el interés por la financiación es del 28% nominal trimestral, hallar el número de cuotas y el valor de la última (dos soluciones).
- 1.18** Un automóvil tiene un valor de contado de \$ 16.000.000; puede adquirirse con una cuota inicial del 30% del valor del precio al contado y el resto financiado a tres años en cuotas mensuales iguales. Si la tasa de interés que se cobra por la financiación es del 42% MV, hallar el valor de las cuotas sabiendo que la primera se paga dentro de tres meses.
- 1.19** Resolver el problema 4.18, suponiendo que la primera cuota se paga al cabo de ocho meses, pero durante este tiempo se cubren los intereses mensuales.
- 1.20** Resolver el problema 4.19 para una tasa de interés del 40% anual durante los cinco primeros meses y del 38% anual de ahí en adelante.

- 1.21** El dueño de un restaurante desea saber la diferencia, luego de un año, entre el valor futuro de los ingresos y el de los egresos para un año de funcionamiento de su restaurante, con los siguientes datos: paga un arriendo de \$ 250.000 por mes anticipado, un seguro al principio del año por un valor de \$ 550.000, por obra de mano y maquinarias \$ 150.000 mensuales, por materias primas para la preparación de los alimentos \$ 300.000 cada mes, por ingresos diarios (30 días al mes) \$ 40.000, y la tasa de oportunidad del dueño del restaurante es del 3% mensual.
- 1.22** Un padre de familia quiere depositar hoy una cantidad de dinero suficiente para cubrir los gastos de matrícula en bachillerato de su hijo que está cumpliendo hoy 5 años e ingresará en bachillerato a la edad de 12 años. Se prevé que para esa época el valor promedio de la matrícula por mes anticipado será \$ 300.000. Si el depósito lo hace en una entidad que paga el 29% anual, hallar el valor del depósito, sabiendo que los meses de estudio son los 12 del año.
- 1.23** Un señor deposita \$ 225.000 al principio de cada año comenzando en 1990 en una institución que paga un interés del 30% convertible trimestralmente; las fechas de capitalización son los últimos días de marzo, junio, setiembre y diciembre. ¿En qué fechas de estas y de qué año llegará a sobrepasar en la menor cantidad la suma de \$ 3.420.000?
- 1.24** Se desea reunir \$ 500.000 para dentro de un año y \$ 650.000 para dentro de un año y medio. Con tal fin se abre una cuenta de ahorros en la que se depositarán cantidades iguales cada mes, de manera que puedan tenerse las sumas deseadas en las fechas correspondientes. Si la cuenta de ahorros paga el 28% nominal mensual, hallar el valor de las cuotas.
- 1.25** Un activo que tiene un valor de contado de \$ 850.000 puede adquirirse financiado con el siguiente plan: cuota inicial de \$ 350.000 y 12 cuotas mensuales iguales; la primera cuota debe pagarse dentro de seis meses y un pago adicional por valor de \$ 220.000 dentro de 18 meses. Hallar el valor de las cuotas uniformes sabiendo que el interés para la financiación es del 33% nominal trimestral.
- 1.26** ¿Qué cantidades iguales en los años 1 y 2 son equivalentes a una serie de 18 pagos uniformes de \$ 45.000 mensuales, si el primero se realiza hoy y la tasa de descuentos es del 28% anual?
- 1.27** ¿Qué depósito único debe hacer el Gobierno hoy en una corporación que paga el 29% nominal trimestral para que este fondo sea suficiente para cubrir los gastos de mantenimiento de una vía pública de vida útil perpetua, que se estiman en un promedio de \$ 400.000 mensuales?
- 1.28** ¿Cuál será el valor de cada pago de una anualidad de 32 pagos mensuales, si debe realizarse el primero dentro de ocho meses, equivalente a una serie perpetua de \$ 300.000 cada tres años, para una tasa de descuento del 8% trimestral?
- 1.29** Una suma de \$ 11.750.000 para dentro de tres años debe distribuirse en una serie uniforme perpetua por mes anticipado, sabiendo que el dinero rinde el 2,5% mensual durante los tres primeros años, el 3% mensual durante los cinco años siguientes y el 30% nominal trimestral de ahí en adelante. Hallar el valor de la serie uniforme.
- 1.30** Un puente de una ciudad tiene unos costos de mantenimiento cada tres años por valor de \$ 1.250.000. ¿Cuál será el aporte en cuotas uniformes que el gobierno de la ciudad deberá depositar anualmente

en una corporación que pagará un interés del 28% nominal trimestral durante los diez primeros años y el 32% nominal trimestral de ahí en adelante, de tal manera que este fondo sea suficiente para sufragar los gastos de mantenimiento del puente, suponiendo que este tendrá vida útil perpetua?

- 1.31** Una serie uniforme perpetua de \$ 48.000 por trimestre, que realiza el primer pago dentro de un año con un interés del 28,5% nominal mensual, debe sustituirse por otra serie uniforme perpetua con pagos cada dos años, realizando el primero dentro de tres años y con una tasa de interés del 27% nominal mensual. Hallar el valor de esta nueva serie.
- 1.32** ¿Cuánto debió depositar usted en una cuenta hace tres años para que haciendo depósitos uniformes cada dos meses de \$ 100.000 y retiros de \$ 160.000 cada tres meses el fondo se agote dentro de cuatro años, sabiendo que tanto los depósitos como los retiros se iniciarán dentro de seis meses?
- 1.33** Una cuenta de ahorros se inicia hoy con cuotas mensuales iguales; la última cuota debe hacerse dentro de 18 meses a una tasa de interés del 3% mensual, y se harán retiros iguales cada mes de cantidades que sean el doble de la depositada. Si el primer retiro se hace dentro de 19 meses, ¿durante cuánto tiempo se podrá retirar dinero antes de que se agote el fondo?
- 1.34** Una casa tiene un valor de precio al contado de \$ 210.000.000 y puede adquirirse financiada con una cuota inicial de \$ 8.000.000 y el resto a 15 años con cuotas mensuales iguales. Si la tasa de interés sobre saldos que se cobra es del 3% mensual durante los cinco primeros años, del 3,5% mensual para los cinco años siguientes y del 4% mensual de ahí en adelante, ¿a cuánto equivale en pesos de hoy el total pagado entre cuota inicial y cuotas uniformes a una persona que tiene una tasa de oportunidad del 3,1% mensual y adquiere esta casa?
- 1.35** Se deposita cada mes una cantidad \$ A durante dos años; un año más tarde de esta fecha se empieza a retirar mensualmente la cantidad \$ $(2/3)A$. Si el dinero rinde el 2,5% mensual, averiguar si el fondo se agota o no. En caso afirmativo, determinar ese tiempo.
- 1.36** ¿Cuántos trimestres debe diferirse una serie de 12 pagos de \$ 12.500 por trimestre para que con ella pueda pagarse una obligación que inicialmente estaba pactada a ocho pagos de \$ 9.564.80 por trimestre vencido, sabiendo que la tasa de interés es del 32% nominal trimestral?
- 1.37** Resolver el problema 4.36 si los 12 pagos tienen un valor de \$ 60.000 cada uno y ocho pagos de \$ 43.200 cada uno.
- 1.38** Resolver el problema 4.37 si la tasa de interés es del 32% nominal trimestral durante el tiempo diferido y del 30% nominal trimestral de ahí en adelante.
- 1.39** Una persona debe cubrir un pagaré por \$ 4.000.000 dentro de tres años. Con tal fin debe realizar algunas operaciones financieras que le permitan reunir esa suma en la fecha indicada. Invierte hoy la suma de \$ X en un papel financiero que le paga un interés del 32% nominal por trimestre anticipado; estos intereses los retira al principio de cada trimestre y los deposita en una cuenta de ahorros que paga el 33% nominal trimestral (vencido). Hallar el valor de X para que al final de los tres años, liquidando las dos cuentas, la persona tenga la suma de dinero deseada, sabiendo además que en la cuenta de ahorros hizo un retiro de \$ 200.000 un año y medio después del depósito inicial.

- 1.40** Resolver el problema 4.39 sabiendo que en la primera cuenta se hacen dos retiros de \$ 350.000 cada uno a los 18 y 24 meses después del depósito inicial, y en la cuenta de ahorros dos retiros de \$ 300.000 en los meses 8 y 10 después del depósito inicial.
- 1.41** Una familia compra una casa cuyo precio al contado es \$ 128.600.000. La adquiere financiada con una cuota inicial equivalente al 35% del valor del precio al contado y el resto a 15 años con cuotas mensuales iguales. El interés de la financiación es del 30,12% nominal mensual. La familia puede arrendar parte de la casa para ayudar a pagar la cuota mensual. ¿Cuánto debe recibir por concepto de arriendo mensual anticipado para que, colocado este dinero en una cuenta de ahorros que paga el 27,5% nominal mensual, la familia solo tenga que aportar al final del mes el 30% de la cuota de amortización?
- 1.42** Una empresa requiere \$ 10.000.000 para ampliar su producción. Debido a que no cuenta con esta cantidad de dinero, decide emitir bonos por este valor y se compromete a cancelar a los beneficiarios un 28% nominal semestral pagaderos al final de cada semestre. Los bonos vencen en siete años y la empresa debe hacer depósitos trimestrales iguales en una institución bancaria para poder cancelar tantos intereses semestrales como el valor final de los bonos a los beneficiarios. Esta institución bancaria paga un interés del 26,5% nominal mensual durante los dos primeros años y del 27,5% nominal mensual de ahí en adelante. Hallar el valor de los depósitos trimestrales.
- 1.43** Un ahorrista deposita \$ 100.000 en una cuenta que paga el 28,5% nominal trimestral. Cuatro años más tarde retira la mitad de su saldo en la cuenta y luego hace depósitos mensuales de \$ 50.000 cada uno y durante dos años; retira el total seis meses después del último de estos depósitos. Determinar el valor de cada uno de los dos retiros.
- 1.44** Resolver el problema 4.43 si la cuenta de ahorros paga un interés del 28,5% nominal trimestral durante los cinco primeros años y el 31% nominal trimestral de ahí en adelante.
- 1.45** Financiar \$ 5.000.000 de hoy a cinco años con cuotas mensuales iguales, sabiendo que la primera se paga dentro de seis meses y la tasa de interés que se cobra sobre saldo es del 3% mensual durante los seis primeros meses, del 3,5% mensual en los dos años siguientes y del 4% mensual para el resto del tiempo.
- 1.46** Un estudiante universitario desea costearse por sí solo su carrera, que dura diez semestres académicos, y cuenta para ello con unos ahorros que depositará al principio de enero del año en que comienza la carrera. Hace este depósito en una corporación de ahorros que paga el 29% nominal trimestral. El valor de la matrícula es de \$ 1.200.000 por semestre anticipado y los gastos en libros y otros materiales de estudio ascienden a \$ 140.000 por mes de estudio anticipado. Si los meses de estudio son febrero, marzo, abril y mayo para el primer semestre y agosto, setiembre, octubre y noviembre para el segundo semestre, y la matrícula debe pagarse al principio de febrero y agosto, ¿cuál será la cantidad que el estudiante deberá depositar para que ese fondo sea suficiente y poder sufragar sus gastos de estudio?
- 1.47** Resolver el problema 4.46 suponiendo que la corporación de ahorro paga el 29% nominal trimestral durante los dos primeros años y el 33% nominal trimestral de ahí en adelante.
- 1.48** Se hace un depósito hoy por el valor de \$ 1.500.000 y luego 20 depósitos mensuales de \$ 250.000 cada uno en una institución que paga un interés del 24% nominal trimestral. Si dentro de dos años se empiezan a hacer retiros de \$ 500.000 por trimestre anticipado, ¿durante cuánto tiempo se podrá retirar dinero?

- 1.49** Existe un instituto que financia estudios universitarios. Un estudiante recibe \$ 1.300.000 al principio de cada semestre académico para pagar la matrícula y \$ 145.000 al final de cada mes de estudio para libros (véase problema 4.46) durante los diez semestres de carrera. Durante los cinco años de estudio el instituto le cobra un interés del 1% mensual, y tan pronto como el estudiante finaliza la carrera debe empezar a pagar la deuda en cuotas mensuales iguales vencidas durante cinco años y con una tasa de interés del 2,6% mensual. Hallar el valor de las cuotas uniformes.
- 1.50** Una ciudad que acaba de ampliar el sistema de suministro de agua se compromete a prestar este servicio a una industria durante diez años en las condiciones siguientes: el industrial debe pagar a la ciudad \$ 25.000.000 al principio de cada año durante los cuatro primeros años, y \$ 30.000.000 por año anticipado para los seis años restantes. Tres años después de estar en funcionamiento el sistema, la ciudad se encontró ante una necesidad de fondos y le solicitó al industrial que le pagase la totalidad del contrato restante. El industrial acepta la propuesta y descuenta los flujos de caja a su tasa de oportunidad, que es del 38% anual. Determinar la suma total que la ciudad recibe en esa fecha.
- 1.51** ¿Cuántos meses debe diferirse una serie uniforme de 12 pagos trimestrales de \$ 450.000 cada uno para que con ella pueda pagarse una obligación que inicialmente estaba pactada a ocho pagos trimestrales de \$ 276.167, sabiendo que está cobrándose una tasa de interés del 32,31% anual?
- 1.52** La asociación de ex alumnos de una universidad necesita una casa para sus oficinas y para hacer sus reuniones. Se presentan dos alternativas: la primera es tomar una casa en arriendo por \$ 750.000 por mes anticipado; la segunda, comprar una casa por el valor de \$ 238.500.000. Los ex alumnos se preguntan: ¿al cabo de cuánto tiempo el valor futuro de lo pagado en arriendo será igual al valor futuro de lo invertido en la compra de la casa para una tasa de oportunidad del 31% anual?
- 1.53** El dueño de una mina de arena estima las reservas actuales de esta en 2.000.000 de toneladas; la arena se extrae a razón de 100.000 toneladas por año y el precio actual es \$ 55.000 por tonelada. Dentro de tres años otra persona desea tomar en arriendo la mina. ¿Cuánto deberá ofrecer esta persona por el arriendo anual anticipado si desea obtener una ganancia al final de la vida útil de la mina de \$ 10.000.000 para una tasa de oportunidad del 32% anual?
- 1.54** Una persona tiene hoy una deuda de \$ 250.000, que debe cancelar en cuotas mensuales iguales durante dos años con una tasa de interés del 2% mensual durante el primer año y del 2,5% mensual durante el segundo año. Para amortizar esta deuda la persona hace depósitos iguales por trimestre anticipado durante dos años en una corporación de ahorros donde gana un interés del 29% nominal trimestral durante el primer año y del 30% nominal trimestral durante el segundo año. De estos ahorros, la persona retira cada mes el valor de la cuota para cubrir la obligación, y en caso de tener un saldo en contra la corporación le cobrará un interés igual al que esta le paga por sus ahorros. Se pide hallar el valor de los depósitos trimestrales.
- 1.55** Un matrimonio ha decidido establecer un fondo para financiar la educación universitaria de su hijo que hoy cumple 3 años de edad e ingresará en la universidad cuando cumpla 17 años. El fondo consiste en depósitos iguales en la fecha de los cumpleaños incluyendo el de hoy y el último a los 17 años. Si los depósitos se hacen en una corporación que paga un interés del 29,5% anual y la matrícula es de \$ 1.350.000 por semestre anticipado durante los diez semestres de carrera, determinar el valor de los depósitos.

- 1.56** Resolver el problema anterior si el dinero rinde el 29,5% anual durante los cinco primeros años y el 32% anual de ahí en adelante, y la matrícula tendrá un costo de \$ 1.350.000 por semestre anticipado los dos primeros años de estudio y de \$ 1.430.000 de ahí en adelante.
- 1.57** Se hacen depósitos mensuales iguales de valor \$ A durante dos años en una cuenta de ahorros que paga un interés del 2,5% mensual. Un año más tarde del último depósito retira $(5/3)A$, y se sigue haciendo este mismo retiro de ahí en adelante. Averiguar si el fondo se agota o no. En caso afirmativo, determinar ese tiempo.
- 1.58** Pedro le solicita a un amigo en calidad de préstamo \$ 3.000.000 y se compromete a pagar la deuda en 15 pagos mensuales iguales y con una tasa de interés del 2,5% mensual sobre el saldo. Con tal fin, Pedro empieza desde hoy a depositar cantidades uniformes al principio de mes en una cuenta de ahorros que paga el 3% mensual, de modo que al final de cada mes se tenga la suma necesaria para pagar la cuota del crédito. Al cabo de ocho meses, la cuenta de ahorros aumenta la tasa al 3,5% mensual. Sin embargo, Pedro continúa haciendo los mismos depósitos. Determinar el saldo en la cuenta de ahorros una vez pagada la deuda original.
- 1.59** Una persona tiene hoy una deuda de \$ 2.500.000 y debe cancelarla con cuotas mensuales iguales durante tres años y a un interés del 2,8% mensual durante el primer año y del 3,4% mensual de ahí en adelante. Para amortizar esta obligación el deudor hace depósitos iguales por trimestre anticipado y durante dos años en una cuenta que abona el 10,5% trimestral durante el primer año y el 11% trimestral de ahí en adelante. Hallar el valor de cada depósito trimestral.
- 1.60** Una institución financiera otorga un crédito a un usuario por \$ 30.000.000, en las condiciones siguientes: tiempo, tres años; período de gracia, ocho meses; cuotas mensuales iguales, tasa de interés del 38,4% AMV, durante el período de gracia se pagarán solo los intereses. Determinar el valor de las cuotas uniformes.
- 1.61** Una obligación que constaba de 15 pagos por mes anticipado con una tasa de interés del 2,5% mensual debe sustituirse por una serie equivalente de 22 pagos por mes vencido de \$ 18.500 cada uno; el primer pago debe hacerse dentro de cinco meses y con una tasa de interés del 2,8% mensual durante los seis primeros meses y del 3% mensual de ahí en adelante. Hallar el valor de la primera anualidad.
- 1.62** Sustituir una deuda que consta de cuatro pagarés de \$ 1.300.000 cada uno para pagar cada año y con un interés del 33% nominal trimestral por su equivalente en una serie uniforme de pagos mensuales durante los cuatro años y con una tasa de interés del 30% nominal trimestral durante los dos primeros años y del 31% nominal trimestral de ahí en adelante. Hallar el valor de estos pagos uniformes. ¿Es equivalente, para este caso, utilizar el valor presente o el valor futuro?
- 1.63** Una persona debe cubrir dos pagarés en sus fechas correspondientes: uno por valor de \$ 2.000.000 para dentro de un año y el otro por valor de \$ 2.500.000 para dentro de dos años. Con tal fin, la persona decide ahorrar cantidades mensuales iguales durante 15 meses en una cuenta de ahorros que paga un interés del 36% anual. Determinar el valor de los depósitos mensuales.
- 1.64** Financiar dos obligaciones: una por \$ 2.300.000 de hoy y otra de \$ 1.700.000 para después de 15 meses, ambas con un interés del 29% anual, por su equivalente en 20 cuotas mensuales iguales y un interés del 2,3% mensual para el primer año y del 30,5% anual de ahí en adelante, sabiendo que la primera de estas cuotas uniformes se pagará dentro de tres meses.

- 1.65** Una persona adquiere una casa financiada así: cuota inicial financiada a seis pagos mensuales de \$ 800.000 cada uno y el resto a un plazo de cinco años con cuotas mensuales iguales y un interés sobre el saldo del 30% nominal mensual. Si la primera cuota se cancela dentro de seis meses, hallar el valor de las cuotas mensuales sabiendo que la casa tiene un valor de contado de \$ 135.000.000.
- 1.66** Una señora adquiere una casa financiada así: cuota inicial de \$ 40.000.000 y el resto a dos años con cuotas mensuales iguales y un interés del 34% nominal mensual. Si la primera cuota se paga dentro de ocho meses, hallar el valor de las cuotas uniformes sabiendo que la casa tiene un valor de contado de \$ 115.000.000.
- 1.67** Un industrial desea establecer en una universidad una beca que lleve el nombre de su empresa. Los aportes del industrial serán de \$ 2.500.000 anuales durante los próximos 10 años y de \$ 2.000.000 dentro de 12 años. La universidad depositará estos aportes en una entidad financiera que pagará un interés del 33% anual durante los 10 primeros años y del 38% anual de ahí en adelante. Si los estudiantes favorecidos son dos cada año y por término indefinido, ¿cuánto deberá recibir anualmente cada estudiante becado, sabiendo que las becas son iguales y empezarán dentro de un año?
- 1.68** ¿Cuál es el mínimo de meses (entero) durante los cuales una persona debe depositar \$ 120.000 por mes anticipado a un interés del 3,5% mensual para que dos meses después de haber realizado el último depósito tenga la suma necesaria para comprar al contado en esa fecha un artículo que financiado se cancelaría con ocho cuotas por trimestre vencido de \$ 860.000 cada una y un interés del 32% nominal trimestral?
- 1.69** Un electrodoméstico tiene un valor de contado de \$ 385.000 y puede adquirirse financiado con el siguiente plan: una cuota inicial por valor de \$ 65.000, 12 cuotas mensuales iguales; la primera cuota debe pagarse dentro de 6 meses y un último pago dentro de 20 meses por \$ 80.000. Determinar el valor de las cuotas uniformes sabiendo que el almacén que ofrece el artículo cobra un interés del 3,8% mensual durante los 6 primeros meses y del 3,5% mensual de ahí en adelante.
- 1.70** ¿Qué cantidad uniforme debe depositarse por mes anticipado a partir de hoy y durante dos años y medio en una cuenta que abona un interés del 3% mensual para poder pagar al contado dentro de 3 años una deuda que contraída en esa fecha se amortizaría con 18 pagos iguales por trimestre vencido y un interés del 3,3% mensual? Expresar el valor de la primera anualidad en función de la segunda.
- 1.71** Un señor deposita \$ 1.250.000 al principio de cada año, comenzando en 1990, en una corporación financiera que paga un interés del 32% nominal trimestral; las fechas de capitalización son los últimos días de marzo, junio, setiembre y diciembre de cada año. ¿En qué fecha de estas? y de qué año llegará a sobrepasar en el mínimo la cifra de \$ 26.500.000?
- 1.72** Un ahorrista deposita hoy \$ 100.000 en una cuenta de ahorros que paga un interés del 24% nominal trimestral. Cuatro años más tarde retira la mitad del saldo existente en su cuenta de ahorros y empieza a depositar por mes vencido la suma de \$ 20.000 durante tres años más. Dos años después del último de estos depósitos retira todo el saldo de la cuenta de ahorros. Hallar el valor de los retiros.
- 1.73** Resolver el problema 4.63 si la tasa de interés es del 36% anual durante el primer año y del 38% anual de ahí en adelante.

- 1.74** Una deuda que debería amortizarse con \$ 300.000 hoy y 20 cuotas mensuales iguales de \$ 20.000 cada una, pagando la primera dentro de tres meses, debe sustituirse por dos pagos iguales, el primero dentro de un año y el segundo dentro de dos años. Si la tasa de interés acordada para esta deuda es del 35% anual, determinar el valor de cada uno de estos pagos.
- 1.7** Un activo puede adquirirse con el siguiente plan: cuota inicial del 30% del valor de contado y el resto a 24 cuotas mensuales iguales de \$ 56.850 cada una; la primera debe pagarse dentro de ocho meses. Determinar el valor del precio al contado si el interés que se cobra es del 28% nominal mensual durante los ocho primeros meses y del 30% nominal trimestral de ahí en adelante.
- 1.76** Una persona debe reunir \$ 11.200.000 para dentro de tres años. Para tal finalidad hace los siguientes depósitos en una cuenta que abona un interés del 34% anual: \$ 2.250.000 hoy, \$ 1.150.000 en un año y una cantidad \$ X cada mes durante el tercer año. Se pide calcular el valor de X.
- 1.77** Un industrial adquiere un crédito por \$ 20.000.000 para invertirlo en su industria y le cobran un interés del 36% nominal trimestral. En el contrato del crédito se estipula que la deuda total de capital e intereses se cubra al cabo de cinco años con un solo pago. Para cubrir esta obligación el industrial debe depositar la mitad de sus utilidades mensuales en una institución financiera que paga un interés del 31,5% nominal mensual. ¿Cuál será la utilidad mensual que el industrial deberá obtener en su empresa para poder cumplir su obligación?
- 1.78** Una obligación que consta de 15 pagos iguales por mes anticipado con tasa de interés del 2% mensual debe sustituirse por una serie equivalente de 22 pagos por mes vencido de \$ 27.000 cada uno; el primero debe hacerse dentro de cinco meses, con una tasa de interés del 2% mensual durante los cinco primeros meses y del 2,5% mensual de ahí en adelante. Hallar el valor de la primera anualidad.
- 1.79** Un empleado se propone hacer depósitos iguales al final de cada año por el valor de \$ 3.100.000 cada uno, en una cuenta de ahorros que paga un interés del 29% nominal trimestral, durante los 20 años de trabajo en una empresa, con el fin de poder retirar cantidades iguales mensuales durante los 10 años siguientes a su retiro de la empresa. Determinar el valor que podrá retirar mensualmente.
- 1.80** Se abre una cuenta de ahorros hoy con un depósito de \$ 150.000 y luego se efectúan depósitos mensuales de \$ 25.000 cada uno durante los próximos 20 meses. A los dos años se empieza a retirar la suma de \$ 40.000 mensuales; si la cuenta de ahorros paga un interés del 28% nominal mensual durante los dos primeros años y del 32% nominal mensual de ahí en adelante, ¿cuántos retiros pueden realizarse? Determinar el valor del último retiro.
- 1.81** Una deuda de \$ 10.000.000 de hoy debe financiarse a cinco años con cuotas mensuales iguales y con un interés del 28% nominal mensual durante el primer año, del 32% nominal trimestral durante los dos años siguientes y del 36% anual de ahí en adelante. Hallar el valor de las cuotas sabiendo que la primera debe pagarse dentro de cinco meses.
- 1.82** Se necesita reunir la suma de \$ 6.000.000 en tres años; con este fin se harán depósitos mensuales iguales durante los tres años, en una entidad que pagará un interés del 2,8% mensual durante el primer año, del 3% mensual durante el segundo año y del 3,3% durante el tercero. Determinar el valor de cada depósito.

- 1.83** Se tiene una obligación que consta de 18 cuotas mensuales iguales de \$ 212.500 cada una; la primera debe pagarse dentro de cuatro meses. Se desea sustituir esta obligación por otra equivalente que conste de dos pagos, uno por valor de \$ 2.120.000 dentro de un año y el otro para finales del segundo año. Si el tipo de interés convenido es del 30% anual durante el primer año y del 33% anual de ahí en adelante, determinar el valor del último de los pagos de la sustitución.
- 1.84** Usted necesita reunir \$ 1.000.000 en dos años. Por lo tanto, decide depositar hoy una cantidad \$ X en una institución bancaria que paga un interés del 2,8% por mes anticipado; usted retira estos intereses al principio de cada mes y los deposita en una cuenta de ahorros que promete pagar un interés del 38,4% nominal mensual vencido. Hallar el valor de X para que al final de los dos años, reunidos los saldos de las dos cuentas, usted tenga la suma de dinero deseada.
- 1.85** Una empresa adquiere un crédito por el valor de \$ 70.000.000 de una institución bancaria con el fin de ampliar su producción. La deuda debe pagarse en tres años con cuotas trimestrales iguales y un interés del 38% ATV. El Gerente de la empresa ordena ahorrar cada mes la cuarta parte de las utilidades mensuales en una corporación que paga el 30% anual. ¿Cuáles deberán ser las utilidades mensuales de la empresa para que con este plan de ahorro la deuda quede saldada al cabo de los tres años?
- 1.86** Una familia adquiere hoy un electrodoméstico que al contado costaría \$ 485.500. Sin embargo, lo compra a crédito, así: cuota inicial del 22% del valor del precio al contado y el resto para amortizar en seis cuotas mensuales iguales; la primera cuota debe pagarse dentro de cuatro meses. Si el interés que cobra la casa comercial es del 3,5% mensual durante los cinco primeros meses y del 3,9% mensual de ahí en adelante, hallar el valor de las cuotas mensuales.
- 1.87** Una obligación que consta de 18 pagos iguales por mes anticipado y con una tasa de interés del 2,6% mensual debe sustituirse por una serie equivalente de 24 pagos iguales por mes vencido de \$ 3.500 cada uno; el primero debe pagarse dentro de cuatro meses y con una tasa de interés del 2,6% mensual durante los tres primeros meses y del 36% nominal mensual de ahí en adelante. Hallar el valor de cada pago de la primera anualidad.
- 1.88** Un señor que acaba de ser pensionado por una empresa decide comprar un taxi para seguir trabajando. Debe pagar de cuota inicial el equivalente al 35% del valor del auto y el resto a cuatro años con cuotas mensuales iguales y un interés del 2,7% mensual. Al cabo de dos años y medio de estar pagando cuotas, la compañía que financió la deuda le informa al propietario del taxi que las cuotas que aún faltan por pagar tienen un valor en esa fecha de \$ 11.850.000. Determinar el precio al contado del taxi.
- 1.89** Resolver el problema 4.88 si la tasa de interés es del 2,7% mensual durante los dos primeros años y del 3,2% mensual de ahí en adelante.
- 1.90** Un artículo tiene un valor al contado de \$ 365.000 pero puede adquirirse financiado con el siguiente plan: cuota inicial del 35% del valor del precio al contado y el resto en 11 cuotas mensuales iguales; la primera cuota debe pagarse dentro de cinco meses y un último pago de \$ 45.000 dentro de dos años. Si la tasa de interés es del 31% nominal mensual durante los cinco primeros meses y del 9% trimestral de ahí en adelante, hallar el valor de las cuotas mensuales iguales.
- 1.91** Un pequeño proyecto requiere hoy \$ 80.000.000, que se obtienen de una entidad financiera que cobra un interés del 36% ATV y deben cubrirse con dos pagos iguales a dos y tres años. Para cubrir esta obligación, el administrador del proyecto deberá depositar mensualmente cantidades iguales en una corporación que paga el 28,5% AMV. Determinar el valor de los depósitos mensuales.

PROBLEMAS II

- 2.1** Un ahorrista deposita \$ 70.000 por mes anticipado en una cuenta que paga el 29,4% AMV, pero también retiene el 0,6% cada mes sobre el total acumulado en ese momento antes del depósito. Determinar en qué momento el saldo en la cuenta alcanzará a sobrepasar, en lo mínimo, la suma de \$ 4.300.000, sabiendo que la retención se hace solamente al final del mes.
- 2.2** Resolver el problema anterior suponiendo que el primer día deposita, además de los \$ 70.000, la suma de \$ 465.000, y que hace un retiro de la cuenta por valor de \$ 1.260.000 un año después de iniciada la cuenta de ahorros.
- 2.3** Una persona compra un automóvil que al contado tiene un valor de \$ 16.000.000. Lo adquiere con una cuota inicial del 40% del valor del precio al contado y el resto en 36 cuotas mensuales iguales; la primera cuota debe pagarla tres meses después de la cuota inicial y a un interés del 3,5% mensual. Cada mes, incluyendo el de gracia, debe pagar un seguro del 0,15% del crédito. Si el dueño del automóvil tiene una tasa de oportunidad del 29% ATV, determinar el valor del automóvil el día de la compra.
- 2.4** Usted inicia hoy una cuenta de ahorros con \$ 1.850.000 y gana un interés del 26% ATV. Cada trimestre usted retira la quinta parte del saldo que tenía al final del trimestre anterior y, al mismo tiempo, deposita cantidades iguales cada trimestre de \$ 60.000 cada una. Hallar el saldo al cabo de cuatro años y medio antes del depósito y retiro respectivos.
- 2.5** Un ahorrista abre una cuenta de ahorros hoy con \$ 860.000 y luego efectúa depósitos mensuales iguales de \$ 75.000 cada uno. La institución le paga un interés del 2,35% mensual, pero cuando el saldo sea igual o superior a \$ 3.500.000 se hará un descuento cada mes del 1,2% mensual sobre los intereses devengados en ese mes. ¿Dentro de cuántos meses tendrá un acumulado de \$ 4.250.000?
- 2.6** Una ciudad debe hacer el mantenimiento de una vía durante 12 años. El costo promedio anual del mantenimiento asciende a \$ 30.000.000. La ciudad tiene 1.325.000 habitantes y determina que para cubrir el mantenimiento anual de la vía cada habitante deberá pagar un impuesto trimestral uniforme. Estos impuestos se depositarán en una institución que pagará el 2,7% mensual. Hallar el impuesto que cada persona deberá pagar trimestralmente.
- 2.7** El dueño de una mina de carbón está sacando un promedio de 60 toneladas mensuales, que puede vender a razón de \$ 150.000 la tonelada durante los dos primeros años, a \$ 185.000 la tonelada durante los tres años siguientes y a \$ 200.000 la tonelada de ahí en adelante. Se estima que la mina produzca carbón por espacio de 10 años y el propietario desea vender la mina 15 meses después de iniciada la explotación. ¿En cuánto deberá vender estos derechos si su objetivo es obtener en esa fecha una ganancia del 10% sobre el valor real para una tasa de oportunidad del 3% mensual en los cinco primeros años y del 3,5% mensual de ahí en adelante?
- 2.8** El Gerente de una empresa pide un préstamo de \$ 20.000.000 a un banco y se compromete a cubrir esta deuda en 15 pagos mensuales iguales y con un interés del 3% mensual. Para poder cumplir esta obligación, el Gerente hace depósitos iguales por mes anticipado en una cuenta de ahorros que paga un interés del 2,8% mensual. El valor de cada depósito debe ser tal que al final del mes se tenga la suma exacta para pagar la cuota del banco. Al cabo de ocho meses, la cuenta de ahorros aumenta la tasa de interés al 3,3% mensual y desde ese momento el Gerente duplica el valor de cada depósito. Hallar el saldo que tendrá en la cuenta de ahorros una vez amortizada la deuda con el banco, sabiendo que en ese momento no se hace depósito alguno.

- 2.9** Una persona adquiere hoy un apartamento con el siguiente plan: cuota inicial financiada a seis pagos mensuales de \$ 2.100.000 cada uno y con un interés del 3% mensual, y el resto a cinco años con cuotas mensuales iguales; debe pagar la primera dentro de cuatro meses y el interés es del 37,5% MV. Determinar el valor de las cuotas mensuales, si el apartamento tiene un precio al contado de \$ 85.000.000.
- 2.10** Una fábrica construyó una gran bodega en la cual sobra un espacio considerable. La empresa puede arrendar parte de la bodega y depositar ese dinero al 31% anual. Si el metro cúbico de bodega puede arrendarse por \$ 6.500 por mes, ¿cuántos metros cúbicos deberá arrendar la empresa para que logre tener, por este concepto, un total acumulado en la cuenta de \$ 12.000.000 al cabo de cuatro años?
- 2.11** Resolver el problema 9 si la tasa para la financiación de la cuota inicial es del 2,8% mensual y para el resto la tasa de interés es del 34% MV para los dos primeros años, del 32% MV para los dos años siguientes y del 35% EA para el último año.
- 2.12** Una inversión se inicia hoy con \$ 3.000.000; además, cada mes el inversionista deposita \$ 60.000, pero también cada mes le hacen una retención del 2% sobre intereses devengados en ese mes. Si la tasa de interés es del 32,3% MV, determinar el monto total que tendrá el inversionista al cabo de dos años, antes del depósito de esa fecha.
- 2.13** Un joven estudiante desea disponer de \$ 2.300.000 mensuales desde febrero hasta noviembre de cada año de la carrera universitaria durante los cinco años de estudio. ¿Qué cantidad uniforme debió haberle depositado anualmente el padre del estudiante, desde que el hijo cumplió 5 años de edad, en una cuenta que pagaba el 28% TV durante los ocho años y el 32% MV de ahí en adelante, sabiendo que el hijo ingresaría a la universidad cuando cumpla 17 años de edad y que los depósitos se harán hasta la fecha de tal ingreso?
- 2.14** Una persona invierte la suma de \$ 40.000.000 en un proyecto que genera unas utilidades mensuales de \$ 740.000. Estas utilidades se reinvierten en una entidad que paga una tasa del 19,8% MV, pero, a su vez, esta entidad abona a la cuenta, cada seis meses, el 3% sobre el total acumulado hasta ese momento y hace una retención cada mes del 0,8% sobre los intereses devengados en ese mes. Se pide determinar el total que tendrá acumulado el inversionista al cabo de cinco años, entre el saldo en la entidad donde invierte las utilidades y el proyecto, sabiendo que en este la inversión inicial se ha aumentado en el 25% al cabo de los cinco años.
- 2.15** Se invierte hoy la suma de \$ 19.000.000 en una entidad financiera que paga un interés del 18% MV cada mes. Se deposita allí la suma de \$ 30.000 y, además, cada mes hacen un descuento del 1% sobre los intereses devengados en ese mes. Hallar el total que se tendrá acumulado al cabo de seis años.
- 2.16** Resolver el problema 15 sabiendo que además se retiran \$ 10.000 el primer mes y que estos retiros aumentarán en el 3% cada mes.
- 2.17** Una inversión se inicia hoy con una suma de \$ 3.000.000 y de \$ 5.000.000 en cuatro meses. Además, cada mes el inversionista deposita \$ 100.000; haciendo el primer depósito en cinco meses, el dinero rinde el 2,69% mensual, pero además cada mes descuentan el 2% sobre los intereses devengados en ese mes. Determinar el monto total que tendrá el inversionista al cabo de dos años y medio antes del depósito respectivo.

- 2.18** Un pequeño proyecto requiere hoy la cantidad de \$ 60.000.000 para su funcionamiento, cantidad que obtiene de un crédito en una institución financiera bajo las condiciones siguientes: tasa de interés del 36% MV y se cancelará con dos pagos iguales a dos y tres años. Para cubrir esta obligación, el Director del proyecto deberá depositar mensualmente y durante los próximos dos años y medio cantidades iguales en una corporación que paga el 31% TV. Determinar el valor de los depósitos mensuales.
- 2.19** Se abre una cuenta hoy en una institución bancaria con la suma de \$ 4.500.000, y además cada mes se deposita la suma de \$ 50.000 empezando en dos meses. Hallar el total acumulado al cabo de tres años, sabiendo que la institución bancaria paga una tasa de interés del 14% EA durante los dos primeros años y del 10% EA de ahí en adelante, y que además hace un descuento o retención del 1% sobre los intereses de cada mes el primer año, del 1,3% el segundo año y del 1,5% el tercer año.
- 2.20** En el problema anterior, suponga que cada año se debe pagar un impuesto al Estado equivalente al 8% del total acumulado en ese momento después de la retención pero antes del depósito.
- 2.21** El acreedor financia al deudor la suma de \$ 36.000.000 a dos años en cuotas mensuales iguales y con un interés del 22,2% MV. Sin embargo, al cabo de 15 meses las partes acuerdan disminuir la tasa de interés para el tiempo que falta de amortización del crédito al 19,8% MV, pero que las cuotas restantes también sean mensuales uniformes. Se pide determinar el valor de las primeras 15 cuotas uniformes y el de las últimas 9 cuotas uniformes.
- 2.22** Con el fin de incentivar el ahorro, una institución financiera ofrece una tasa de interés del 13,8% MV y, además, cada año abona a la cuenta de ahorros el equivalente al 5% de los intereses devengados en ese año. Usted debe determinar el total que tendrá acumulado un ahorrista al cabo de ocho años, sabiendo que inició la cuenta de ahorros con \$ 3.500.000 y además cada mes depositó la suma de \$ 60.000.
- 2.23** Una deuda por valor de \$ 40.800.000 de hoy se debe cancelar en cuatro años con cuotas mensuales iguales mientras se mantenga la misma tasa, pero tan pronto la tasa de interés cambie las cuotas serán también uniformes aunque de valor diferente de las anteriores. Si la tasa de interés pactada inicialmente fue del 13,2% MV, pero al cabo de un año aumentó al 1,5% mensual y corridos los dos años y medio al 1,35% mensual, determinar el valor de las cuotas mensuales con que se terminó de cancelar la deuda.

Series variables

El objetivo de este capítulo es que el lector aprenda a reconocer, en los flujos de caja variables, un gradiente aritmético o lineal creciente o decreciente y otro gradiente geométrico y su aplicación en los problemas de matemáticas financieras; y, además, que pueda resolver otra clase de problemas con ecuaciones de diferencia finita.

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

Al terminar el capítulo el lector estará en capacidad de:

- Manejar un gradiente aritmético o lineal, ya sea creciente o decreciente, vencido, anticipado o diferido, calculando valor futuro, valor presente, primer pago y número de pagos.
- El objetivo anterior para gradiente geométrico o exponencial.
- Plantear y resolver problemas de matemáticas financieras para los cuales no existe una fórmula preestablecida, sino que debe utilizar una ecuación de diferencia finita.
- Manejar los flujos de caja anteriores cuando hay cambios en la tasa de interés durante el tiempo de la operación financiera.

5.1. Introducción

Las circunstancias que rodean una operación financiera (la disponibilidad de efectivo para realizar los pagos, la exigencia del acreedor de captar lo antes posible el capital, la comodidad para que el deudor amortice una deuda, entre otras) hacen que los flujos de caja de tales operaciones financieras no siempre sean valores iguales a intervalos iguales de tiempo, sino que, por el contrario, se presenten o no, con frecuencia, series de pagos periódicos, pero que van aumentando o disminuyendo con el paso del tiempo. Además, esta variación se da en forma progresiva, sea esta aritmética o geométrica, creciente o decreciente.

En esta clase de series, llamadas **series variables**, se cuentan también aquellas que no varían en forma aritmética ni geométrica, pero que se pueden ajustar a una ecuación de diferencia finita y obtener con esta la solución propia del problema. En este momento se logra resolver una serie de problemas, propios de las matemáticas financieras, cuyo comportamiento no se ajusta a ninguno de los modelos clásicos existentes, ya sea en los formularios o en las máquinas y programas financieros. Resolveremos estos problemas al final del capítulo, cuando tengamos ya la suficiente habilidad en el manejo de las series aritméticas y geométricas.

Encontramos series de pagos variables en casos como los costos de combustibles, el costo de la canasta familiar, los costos de materiales de construcción, los costos de la educación, los costos de transporte, la amortización de créditos en el sistema UPAC, entre otros, cuya importancia en la vida real exige que quien haya cursado matemáticas financieras pueda darle una solución adecuada a esta clase de problemas.

Para lograr nuestro objetivo dividiremos las series variables en gradientes aritméticos, gradientes geométricos y otras series diferentes de las anteriores.

5.2 Gradiente aritmético

DEFINICIÓN 5.1

Se llama gradiente aritmético a una serie de pagos periódicos en la cual cada pago es igual al del período inmediatamente anterior incrementado en la misma cantidad de dinero.

Por ejemplo, pagar una deuda en cuotas mensuales de \$ 3.000, \$ 3.200, \$ 3.400, \$ 3.600 y así sucesivamente durante un año, o depositar en una cuenta de ahorros mensualmente las cantidades de \$ 5.000, \$ 4.900, \$ 4.800, \$ 4.700 y así sucesivamente durante dos años.

Si el incremento es positivo, como en el primer ejemplo, se llama **gradiente aritmético creciente**, y si el incremento es negativo se llama **gradiente aritmético decreciente**, como en el segundo.

El gradiente aritmético creciente puede ser vencido, anticipado, diferido y perpetuo, esto es, de las mismas clases de series que hemos visto en las anualidades. Asimismo, el gradiente aritmético decreciente puede ser vencido, anticipado, diferido y perpetuo; sin embargo, el estudio y manejo de estas ocho clases de series variables puede simplificarse haciendo énfasis en el gradiente aritmético creciente vencido, en el que, al igual que en las anualidades, las fórmulas de valor presente y futuro de la vencida pueden adaptarse al cálculo de los demás casos; esto es, si conocemos y manejamos con propiedad el gradiente creciente vencido, no tendremos problemas con los demás casos, incluso los decrecientes.

Para esta clase de series de pagos se utiliza por lo general la siguiente notación:

F: valor futuro

P: valor presente

A: valor del primer pago

- G: valor del incremento
- n: número de pagos
- i: tasa de interés por período

5.3 Gradiente aritmético creciente

A continuación se plantea el gradiente aritmético creciente vencido.

Sea una serie de **n** pagos por período vencido, en la que el primer pago tiene un valor **A** y a partir de este cada uno de los siguientes es igual al del período inmediatamente anterior aumentado en una cantidad positiva **G** y con una tasa de interés del **i**% por período. Esto corresponde al caso general de un gradiente aritmético creciente y cuyo diagrama de flujo de caja se muestra en la figura 5.1.

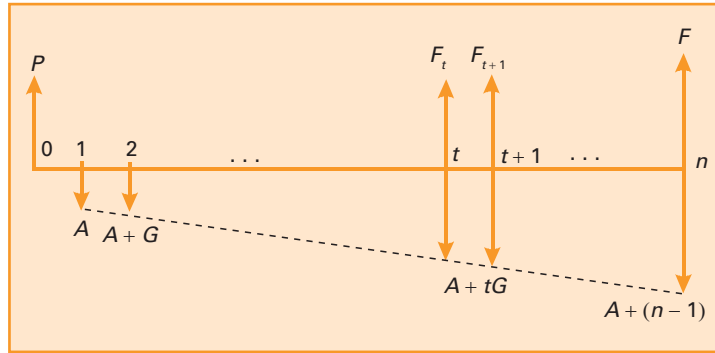


FIGURA 5.1 Diagrama de flujo de caja de un gradiente aritmético creciente

Como en el caso de las series uniformes, vamos a determinar los factores para hallar tanto el valor futuro como el valor presente del gradiente aritmético creciente representado en la figura 5.1. Aun cuando el método que utilizamos aquí para la obtención de estos factores consiste en una ecuación de diferencia finita, este también puede obtenerse mediante series aritméticas.

EL VALOR FUTURO

Para hallar el valor futuro consideramos el diagrama general presentado en la figura 5.1, donde el análisis se desarrolla en un intervalo arbitrario **[t, t + 1]** y donde **F_t** representa el valor futuro de la serie al final del período **t** incluyendo el pago de ese período; entonces tendremos que **F_{t+1}** será el valor futuro o acumulado al final del período **t + 1**. La relación existente entre estas cantidades es la siguiente:

$$F_{t+1} = F_t + iF_t + (A + tG)$$

Y se interpreta como que el valor acumulado al final del período **t + 1** (o sea, **F_{t+1}**) es igual al total acumulado al final del anterior (**F_t**), más los intereses devengados por esta suma durante este (**iF_t**), más el pago realizado al final del período **t + 1** (o sea, **A + tG**).

La expresión anterior equivale a:

$$F_{t+1} - (1 + i)F_t = Gt + A, \text{ con } F_0 = 0 \text{ y } t = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

que corresponde a una ecuación de diferencia finita similar a la ecuación (2-2) del capítulo 2, con **g(t) = Gt + A**, una función polinomial de primer grado en la cual **G** y **A** son constantes. Aplicando el procedimiento allí desarrollado, la solución de la homogénea es:

$$F_h(t) = C(1 + i)^t$$

Y la solución particular es:

$$F_p(t) = -\frac{G}{i} \left[t + \frac{1}{i} \right] - \frac{A}{i}$$

Sumando las dos soluciones y utilizando la condición **F₀ = 0** llegamos a:

$$F_t = \left[\frac{(1 + i)^t - 1}{i} \right] + \frac{G}{i} \left[\frac{(1 + i)^t - 1}{i} - t \right] \tag{5-1}$$

La fórmula (5-1) representa el valor total acumulado o futuro al final del período t . De manera que al final del período n tendremos que el valor futuro estará dado por:

$$F = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] + \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right] \quad (5-2)$$

El factor

$$\frac{1}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right]$$

se denota con $(F/G, i\%, n)$, y así la fórmula (5-2) puede escribirse como:

$$F = A(F/A, i\%, n) + G(F/G, i\%, n) \quad (5-3)$$

Esta expresión mide el valor futuro de un gradiente aritmético creciente de n pagos, siendo el primero de valor A y un aumento de G por período a una tasa de interés del $i\%$ por período.

Respecto de la fórmula (5-3) debemos tener en cuenta las siguientes observaciones:

- La fórmula contiene dos factores, que son $(F/A, i\%, n)$ y $(F/G, i\%, n)$. El primero, visto en el capítulo 4, es el correspondiente al valor futuro de la anualidad de valor A , y el segundo corresponde al valor futuro del gradiente aritmético formado por los $(n - 1)$ aumentos, como se muestra en la figura 5.1.
- Aun cuando solo existen $(n - 1)$ aumentos, el segundo de los factores debe calcularse en el valor de n .
- Para efectos puramente mecánicos de cálculo, debe tenerse en cuenta que el primer factor forma parte del segundo. Esto agiliza los cálculos.
- Esta fórmula acumula en el punto donde se haga el último pago.

EJEMPLO 5.1

Se conviene en sustituir por un pago único dentro de dos años una obligación que consta de veinte pagos por mes vencido, en la que el primero tiene un valor de \$ 15.000 y de aquí en adelante cada pago se aumenta en \$ 1.000 al del mes inmediatamente anterior. Si el interés es del 3% mensual, hallar el valor de este pago único.

Solución

El diagrama de flujo de caja correspondiente al problema se representa en la figura 5.2.

Los factores son: $A = \$ 15.000$;
 $G = \$ 1.000$; $n = 20$ pagos mensuales;
 $i = 3\%$ mensual; $F = ?$

Para equilibrar el diagrama en el punto 24, primero debemos hallar el valor acumulado futuro en el punto 20. Para esto aplicamos la fórmula (5-3) y tenemos:

$$F_{20} = 15.000(F/A, 3\%, 20) + 1.000(F/G, 3\%, 20) = \$ 632.068$$

Como el problema pide el valor en el punto 24, entonces simplemente proyectamos el valor anterior a ese punto, y tenemos:

$$F_{24} = 632.068(F/P, 3\%, 4) = \$ 711.398$$

Esto quiere decir que el pago único dentro de dos años, que sustituye a la obligación, debe ser \$ 711.398.

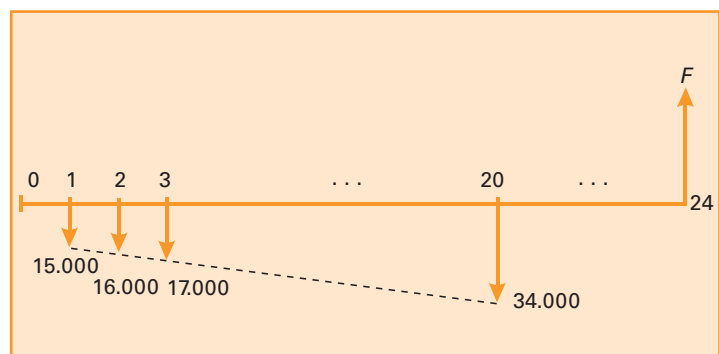


FIGURA 5.2

EL VALOR PRESENTE

Tomando como referencia la figura 5.1 y un procedimiento similar al utilizado en las series uniformes para hallar el valor presente, tenemos:

$$P = F(P/F, i\%, n) = F(1 + i)^{-n}$$

Sustituyendo el valor de **F** por el dado en la fórmula (5-2) y efectuando las simplificaciones necesarias, llegamos a:

$$P = A \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right] + \frac{G}{i} \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1 + i)^n} \right] \quad (5-4)$$

El factor

$$\frac{1}{i} \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1 + i)^n} \right] \quad (5-5)$$

se denota con **(P/G, i%, n)**, y de esta manera la fórmula (5-4) se transforma en:

$$P = A(P/A, i\%, n) + G(P/G, i\%, n)$$

Esta expresión mide el valor presente de un gradiente aritmético creciente vencido con **n** pagos, en el que el aumento tiene un valor **G** y cuyo primer pago es **A** y la tasa de interés del **i%** por período.

Respecto de la fórmula (5-5), también debemos tener en cuenta lo siguiente:

- a) El primer factor **(P/A, i%, n)** es el correspondiente al valor presente de la renta uniforme de valor **A**, y el segundo **(P/G, i%, n)** corresponde al valor presente del gradiente aritmético **G** que se muestra en la figura 5.1.
- b) Aun cuando solo existen **(n - 1)** aumentos, el segundo factor debe calcularse en el valor de **n**.
- c) El factor **(P/G, i%, n)** acumula los **(n - 1)** aumentos dos períodos antes del primer aumento, en tanto que **(P/A, i%, n)** acumula en un período antes del primer pago, como puede verse en la figura 5.1.
- d) La fórmula (5-5) acumula un período antes del primer pago.

EJEMPLO 5.2

Financiar \$ 2.000.000 de hoy a un tiempo de dos años con cuotas mensuales que aumenten cada mes en \$ 5.000 y con una tasa de interés del 32% nominal mensual.

Solución

El diagrama de flujo de caja corresponde a la figura 5.3.

Donde $P = \$ 2.000.000$; $G = \$ 5.000$; $n = 24$ pagos, $i = 2,667\%$ mensual; $A = ?$

Aplicando la expresión (5-4) para el valor presente de un gradiente aritmético creciente vencido, tenemos:

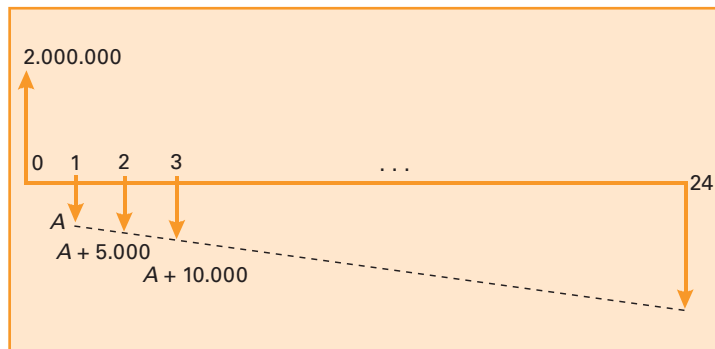


FIGURA 5.3

$$2.000.000 = A(P/A, 2,667\%, 24) + 5.000(P/G, 2,667\%, 24)$$

$$A = \$ 62.663,44$$

Lo que quiere decir que el deudor deberá iniciar pagando \$ 62.663,44 el primer mes y de ahí en adelante cada cuota se aumentará en \$ 5.000.

Veamos ahora de qué manera podemos manejar un gradiente aritmético creciente anticipado, utilizando solamente los factores o fórmulas ya conocidos.

El diagrama de flujo de caja para esta clase de serie variable es el siguiente:

El estudiante deberá comparar este diagrama con el de la figura 5.1 y establecer la relación entre ambos. Esto es fácil teniendo en cuenta las expresiones (5-3) y (5-5) para poder deducir las fórmulas que nos permitan calcular los valores futuro y presente del diagrama anterior. Así obtenemos las siguientes expresiones:

- $F_{n-1} = A(F/A, i\%, n) + G(F/G, i\%, n)$
- $F_n = [A(F/A, i\%, n) + G(F/G, i\%, n)](1 + i)$ (5-6)
- $P = [A(P/A, i\%, n) + G(F/G, i\%, n)](1 + i)$

EJEMPLO 5.3

Una fábrica se comprometió a entregar doscientas unidades de su producto al principio de cada mes, durante un año. El precio por unidad del artículo es \$ 3.000 el primer mes y este aumentará \$ 50 cada mes. Si deposita la mitad de estos ingresos en una cuenta que paga el 30% MV, ¿cuánto tendrá ahorrado la empresa por este concepto al final del año?

Solución

El ingreso al principio del primer mes es: $200 \times 3.000 = \$ 600.000$. El ingreso al principio del segundo mes es: $200 \times 3.050 = \$ 610.000$. El ingreso al principio del tercer mes es: $200 \times 3.100 = \$ 620.000$, y así sucesivamente. Por tanto, si la fábrica deposita la mitad de sus ingresos mensuales, el diagrama de flujo de caja es:

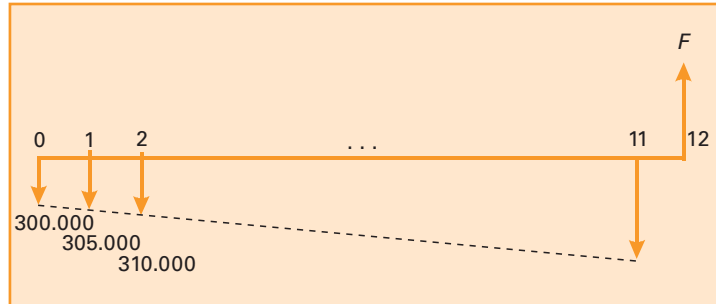


FIGURA 5.5

Como la cuenta le paga el 30% MV, esto quiere decir que le paga el 2,5% mensual. Aplicando la expresión (b) de (5-6), tenemos:

$$F = [300.000(F/A, 2,5\%, 12) + 5.000(F/G, 2,5\%, 12)](1,025) = \$ 4.610.221$$

En este ejemplo necesitamos calcular el valor futuro de un gradiente aritmético creciente anticipado, y este valor es el que se encuentra en la expresión anterior, dentro del paréntesis angular; pero como el problema pide que se calcule el acumulado al final del año, cuando la fábrica no hizo depósito alguno, entonces debemos proyectar el valor futuro anterior un mes más, para que su valor quede ubicado al final del mes 12, o sea, al final del año, como se propuso en el problema.

El mismo problema se encarga de especificarnos en qué momento requiere un determinado valor futuro o presente.

Por ejemplo, en el caso anterior, supongamos que el deudor le propone a la fábrica pagarle al principio del año la deuda total; entonces, ¿cuánto debería exigirle como pago único en esa fecha para que financieramente a la fábrica le sea indiferente cualquier forma de pago?

Como el diagrama del ejemplo 5.3 muestra el flujo de caja de los pagos mensuales, entonces la cantidad que la fábrica exigiría sería la correspondiente al valor presente de esa serie de pagos mensuales. Aplicando la expresión (c) de (5-6), tendremos:

$$P = [300.000(P/A, 2,5\%, 12) + 5.000(P/C, 2,5\%, 12)](1,025) = \$ 3.427.957$$

Como puede observarse, esta cantidad es la equivalente en pesos de hoy a \$ 4.610.221 de final de año, a una tasa de descuento del 2,5% mensual.

Para el caso de un gradiente aritmético creciente diferido, simplemente veamos con un ejemplo cómo, con la ayuda de las expresiones (5-3) y (5-5), los cálculos y manejos de esta clase de gradiente se facilitan de manera sustancial.

EJEMPLO 5.4

Hallar el valor de contado de un artículo que se adquiere financiado así: cuota inicial de \$ 320.000 y el resto a 18 cuotas mensuales que aumentan en \$ 4.000 cada mes; la primera cuota es de \$ 52.000 y se pagará dentro de tres meses, sabiendo que la tasa de interés es del 3,2% mensual.

Solución

El diagrama de flujo de caja correspondiente se representa en la figura 5.6.

Donde los valores son: $A = \$ 52.000$; $G = \$ 4.000$; $n = 18$ pagos; $i = 3,2\%$ mensual, y la pregunta es VC o valor de contado. Este corresponde al valor presente de todos los pagos incluyendo la cuota inicial, de tal manera que podemos equilibrar el diagrama en el punto 0 y así tener la siguiente igualdad:

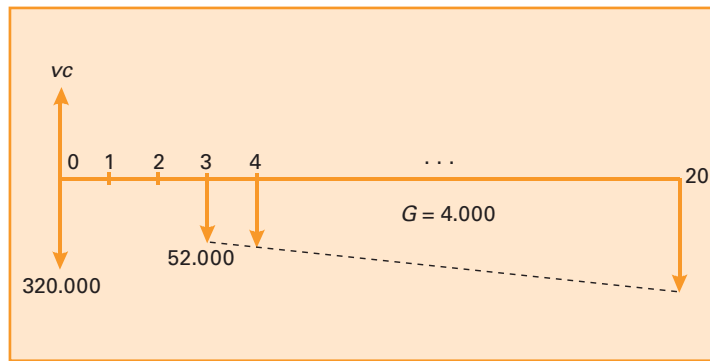


FIGURA 5.6

$$VC = 320.000 + [52.000(P/A, 3,2\%, 18) + 4.000(P/G, 3,2\% 18)](1,032^{-2} = \$ 1.369204,5$$

La expresión anterior, dentro del paréntesis angular, que corresponde a la (5-5), mide el valor presente de los 18 pagos y queda en el punto 2 del diagrama, es decir, un mes antes del primer pago. Por esa razón debemos descontar ese valor durante dos meses, para que de esta manera quede ubicado en el punto 0, que es nuestro punto focal o punto de equilibrio entre ingresos y egresos.

Por último, para el caso del gradiente aritmético creciente perpetuo debemos tener en cuenta que es aquel que no tiene último pago. Por ejemplo, cuando está evaluándose un proyecto a término indefinido y los valores, ya sean ingresos o egresos, aumentan cada período en la misma cantidad de dinero, el diagrama de flujo de caja corresponde al de un gradiente aritmético creciente perpetuo. Más adelante podremos ver, con algunos ejemplos, una buena aproximación a la aplicación real de esta clase de series de pagos.

Tomemos el caso general de una serie perpetua de pagos por período vencido, en la que el primer pago tiene un valor **A** y de ahí en adelante cada pago es igual al del período inmediatamente anterior aumentado en una cantidad fija **G**, y supongamos una tasa constante del **i**% por período como tasa de descuento. Esta clase de flujos de caja solo tiene valor presente, nunca valor futuro, y para calcularlo utilizaremos una metodología similar a la aplicada en la anualidad perpetua y que corresponde a la que se utilizará en cualquier otra serie de pagos perpetua o a término indefinido.

En primer lugar, el diagrama de flujo de caja para este caso es el siguiente:

Diagrama de flujo de caja de un gradiente aritmético creciente perpetuo vencido

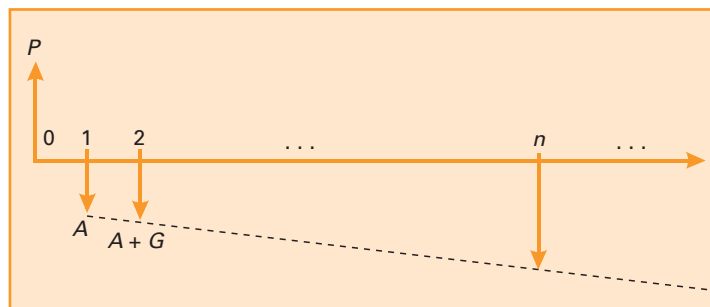


FIGURA 5.7

En segundo lugar, expresamos el valor presente P_n de los n primeros

pagos; este valor viene dado por la expresión representada en la fórmula (5-5). Sin embargo, esta expresión representa solo el valor presente de un número finito de pagos. Si queremos incluir el pago $n + 1$, simplemente sustituimos en la expresión (5-5) a n por $n + 1$ y así sucesivamente; pero si queremos que la expresión considere todos los pagos, debemos hacer crecer a n indefinidamente; es decir, llegamos a:

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [A(P/A, i\%, n) + G(P/G, i\%, n)]$$

El estudiante debe hacer uso de sus conocimientos del cálculo de límites, aplicarlos a la expresión anterior y así llegar a:

$$P = \frac{A}{i} + \frac{G}{i} \left[\frac{1}{i} - 0 \right] = \frac{1}{i} \left[A + \frac{G}{i} \right] \quad (5-7)$$

Esta expresión mide el gradiente aritmético perpetuo creciente vencido, y su valor quedará ubicado un período antes del primer pago. Con esta observación y utilizando la metodología de los casos anteriores, es fácil manejar esta serie perpetua anticipada y diferida.

EJEMPLO 5.5

Una pequeña ciudad desea saber cuánto debe depositar hoy en una institución que pagará un interés del 28% nominal trimestral (o ATV) para poder cubrir anualmente los gastos de mantenimiento de sus calles, que, se estima, tendrán un valor de \$ 8.000.000 el primer año y aumentarán en \$ 2.000.000 cada año.

Solución

El diagrama de flujo de caja para este problema es similar al de la figura 5.7, con los valores siguientes: $A = \$ 8.000.000$; $G = \$ 2.000.000$; $i = 28\%$ ATV equivalente al 31,08% anual.

Aplicando la fórmula correspondiente, o sea la (5-7), tenemos:

$$P = \frac{1}{0,3108} \left[8.000.000 + \frac{2.000.000}{0,3108} \right] = \$46.444.680$$

Esto quiere decir que la ciudad deberá depositar hoy \$ 46.444.680 y así dispondrá de los fondos suficientes para cubrir los gastos de mantenimiento de sus calles, siempre que se mantengan los demás supuestos del problema.

Con base en las expresiones (5-2) y (5-4), podemos calcular cualquiera de las variables **F**, **P**, **A** y **G**. Podremos calcular las variables **n** e **i** cuando veamos el capítulo 9.

EJEMPLO 5.6

Financiar \$ 4.000.000 de hoy a tres años en cuotas mensuales que aumentan cada mes en la misma cantidad de dinero, sabiendo que la primera cuota, que será de \$ 80.000, se pagará dentro de cuatro meses y que la tasa de interés sobre el saldo será del 3,3% mensual.

Solución

El diagrama de flujo de caja correspondiente es el que sigue:

Los valores son: $P = \$ 4.000.000$;
 $A = 80.000$; $n = 33$ pagos mensuales;
 $i = 3,3\%$ mensual; $G = ?$

Como podemos observar, la serie de pagos mensuales corresponde a un gradiente aritmético creciente diferido; por tanto, haciendo uso de las expresiones recién vistas y equilibrando el diagrama en el punto 0, tenemos:

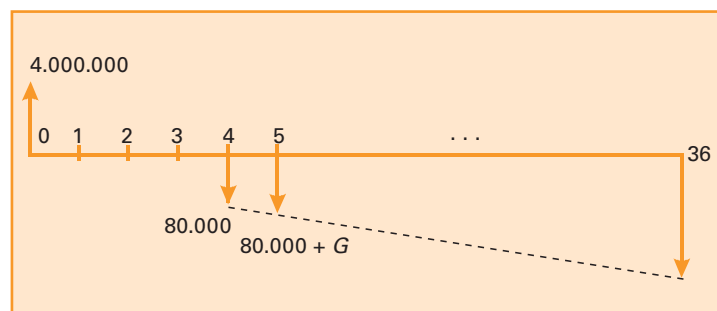


FIGURA 5.8

$$4.000.000 = [80.000(P/A, 3,3\%, 33) + G(P/G, 3,3\%, 33)](1,033)^{-3}$$

$$\therefore G = \$ 10.777,6$$

Lo que quiere decir que los \$ 4.000.000 se financiarán a tres años en cuotas mensuales que aumentarán en \$ 10.777,6, siendo de \$ 80.000 la primera cuota, y que esta se pagará en cuatro meses.

EJEMPLO 5.7

Un artículo al contado vale \$ 1.350.000 y financiado se adquiere con una cuota inicial de \$ 300.000 y el resto en 15 cuotas mensuales que aumenten cada mes en \$ 58.000; la primera cuota debe pagarse al cabo de cinco meses; el interés es del 3% mensual durante los cinco primeros meses y del 4% mensual de ahí en adelante. Hallar el valor de la primera de las cuotas mensuales.

Solución

El diagrama de flujo de caja del problema es el siguiente:

Equilibrando el diagrama en el punto 0, debemos tener en cuenta que la tasa de interés es una para el período de gracia y otra de ahí en adelante; por tanto, debemos calcular el valor presente del gradiente en el punto 5 y luego descontarlo con el 3% mensual durante cinco meses. Así obtenemos la igualdad siguiente:

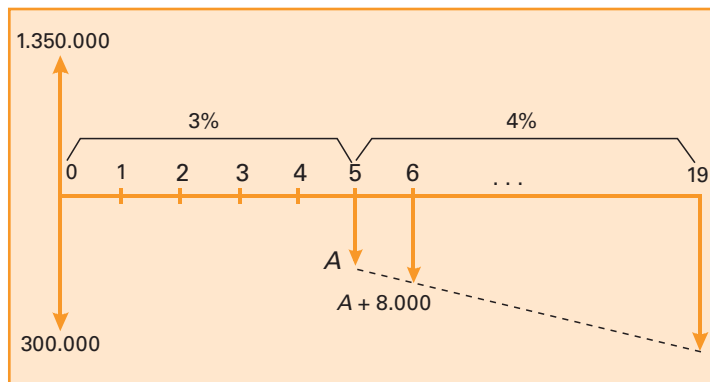


FIGURA 5.9

$$1.350.000 = 300.000 + [A(P/A, 4\%, 15) + 8.000(P/G, 4\%, 15)](1,04)(1,03)^{-5}$$

$$\therefore A = \$ 55.092$$

Lo que quiere decir que la primera cuota mensual que debe pagarse en el quinto mes será de \$ 55.092 y de ahí en adelante aumentarán cada mes en \$ 8.000 hasta completar las 15 cuotas mensuales.

También son frecuentes los casos en los que se efectúan pagos iguales, por ejemplo mensuales y por año, pero que aumentan cada año en la misma cantidad de dinero; en estos casos hay necesidad de agrupar los pagos en sus equivalentes financieros cada año y trabajar la nueva serie anual independiente.

EJEMPLO 5.8

Una empresa vende cada mes 500 unidades de su producto a un precio de \$ 1.000 por unidad durante el primer año, a \$ 1.200 por unidad durante el segundo año, a \$ 1.400 por unidad durante el tercer año y así sucesivamente. La empresa ahorra la décima parte de su ingreso mensual en una corporación financiera que paga el 2,5% mensual. Hallar el valor total que la empresa tendrá ahorrado al cabo de siete años.

Solución

El diagrama de flujo de caja para este problema es el siguiente:

Para el primer año: ingreso = \$ 500.000; depósito mensual = \$ 50.000

Para el segundo año: ingreso = \$ 600.000; depósito mensual = \$ 60.000

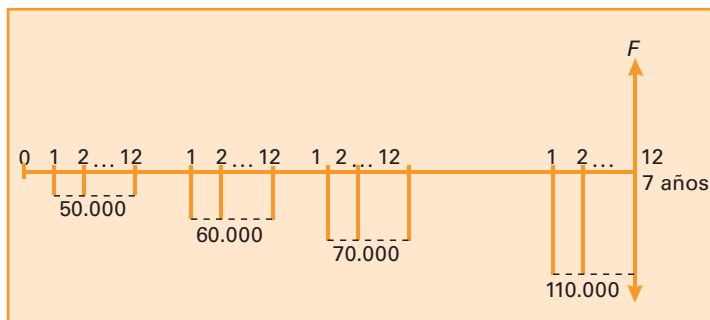


FIGURA 5.10

Para el tercer año: ingreso = \$ 700.000; depósito mensual = \$ 70.000

y así sucesivamente. Por tanto, debemos calcular el equivalente financiero al final de cada año:

$$F_1 = 50.000(F/A, 2,5\%, 12) = \$ 689.777$$

$$F_2 = 60.000(F/A, 2,5\%, 12) = \$ 827.733$$

$$F_3 = 70.000(F/A, 2,5\%, 12) = \$ 965.689$$

y así sucesivamente. Como podemos observar, la serie formada por los valores F_1, F_2, F_3, \dots constituye un gradiente aritmético creciente, en el que el primer valor es \$ 689.777 y aumenta cada año en \$ 137.956, de tal manera que el valor futuro al cabo de siete años de esta serie estará dado por:

$$F = 689.777(F/A, 34,49\%, 7) + 137.956(F/G, 34,49\%, 7) = \$ 19.186.475$$

Por tanto, al cabo de siete años la empresa tendrá un total acumulado en la cuenta de ahorros de \$ 19.186.475.

También es común encontrar casos en los que la tasa de interés cambie durante el tiempo de una operación financiera con una serie variable como las que estamos tratando. Estos casos se subdividen en partes según las veces de cambio de la tasa de interés.

EJEMPLO 5.9

Financiar \$ 23.600.000 a tres años en cuotas mensuales que aumenten en \$ 20.000 cada mes, si la tasa de interés sobre el saldo será del 33% AMV para el primer año y del 36,24% AMV de ahí en adelante.

Solución

Como no se especifica lo contrario, las cuotas se pagarán por mes vencido durante los tres años, de tal manera que el diagrama de flujo de caja es el siguiente:

Como la tasa cambia a partir del primer año, debemos expresar la primera de las cuotas para la segunda tasa de interés del 3,02% mensual, que es la cuota número 13 y cuyo valor está dado por la expresión para la n -ésima cuota de un gradiente aritmético creciente dado en la figura 5.1, y que para nuestro caso es:

$$A + (13 - 1)(20.000) = A + 240.000$$

Equilibrando el diagrama en el punto 0, tendremos:

$$23.600.000 = A(P/A, 2,75\%, 12) + 20.000(P/G, 2,75\%, 12) + [(A + 240.000)(P/A, 3,02\%, 24) + 20.000(P/G, 3,02\%, 24)](1,0275) - 12$$

$$\therefore A = \$ 769.386$$

Lo que quiere decir que la primera cuota será de \$ 769.386 y de ahí en adelante aumentarán en \$ 20.000 cada mes, hasta el final de los tres años.

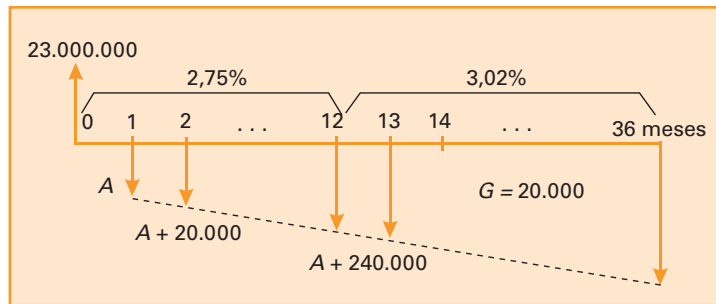


FIGURA 5.11

5.4 Gradiente aritmético decreciente

DEFINICIÓN 5.2

Se llama **gradiente aritmético decreciente** a una serie de pagos periódicos en la que cada pago es igual al del período inmediatamente anterior disminuido en la misma cantidad de dinero.

Así, por ejemplo, cada una de las siguientes series de pagos mensuales pertenece a los gradientes aritméticos decrecientes:

- a) 1.200, 1.150, 1.100, 1.050, 1.000,...
- b) 800, 790, 780, 770, 760,...

Estas series de pagos pueden ser vencidos, anticipados, diferidos y perpetuos; pero, dada su relación con los gradientes aritméticos crecientes, aquí solo desarrollaremos las fórmulas para valor futuro y presente del vencido. Siguiendo la misma metodología utilizada en el creciente, podremos manejar con sencillez los demás casos.

El diagrama general del flujo de caja de un gradiente aritmético decreciente vencido, cuya notación es la presentada en el numeral 5.2, es el siguiente:

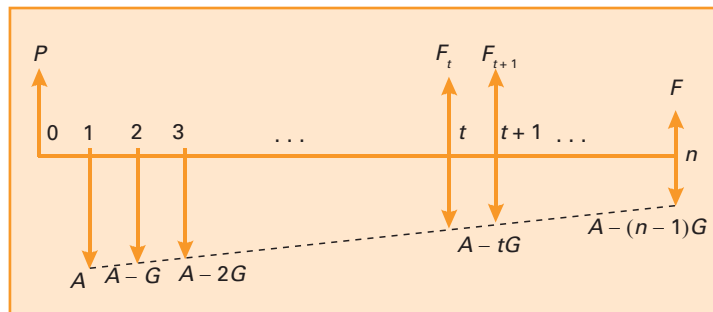


FIGURA 5.12

Diagrama de flujo de caja de un gradiente aritmético decreciente vencido

Para hallar el valor futuro simplemente relacionamos los valores F_t y F_{t+1} de valores futuros en los períodos t y $t + 1$ respectivamente, y llegamos a:

$$F_{t+1} = F_t + iF_t + A - tG$$

O sea:

$$F_{t+1} - (1 + i)F_t = Gt + A, \text{ con } F_0 = 0$$

Como podemos observar, se trata de una ecuación de diferencia finita tratada en el numeral 5.3; la diferencia radica solamente en el signo de G , que ahora es negativo. Por tanto, la solución será la que resulte de cambiar el signo a G en (5.2), y así llegar a una expresión de la forma:

$$F = A \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right] - \frac{G}{i} \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} - n \right] \tag{5-8}$$

cuya notación viene dada por:

$$F = A(F/A, i\%, n) - G(F/G, i\%, n) \tag{5-9}$$

El resto de propiedades son las mismas enunciadas para la expresión (5-3).

De igual modo, para el valor presente del flujo de caja de la figura 5.12 tendremos la expresión:

$$P = A \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right] - \frac{G}{i} \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1 + i)^n} \right] \tag{5-10}$$

cuya notación está dada por:

$$P = A(P/A, i\%, n) - G(P/G, i\%, n) \tag{5-11}$$

Sus propiedades son las mismas enunciadas para la expresión (5-5), cambiando el término aumento por disminución en la expresión (5-11).

De aquí en adelante, el método para manejar las demás clases de gradientes aritméticos decrecientes es similar al utilizado en los crecientes.

EJEMPLO 5.10

Financiar \$ 2.500.000 a un año en cuotas mensuales que disminuyan cada mes en \$ 15.000, para una tasa de interés del 3,5% mensual.

Solución

El diagrama de flujo de caja es similar al de la figura 5.12, con los valores siguientes:

$P = \$ 2.500.000$; $G = \$ 15.000$ de disminución; $n = 12$ pagos mensuales;

$i = 3,5\%$ mensual; $A = ?$

Utilizando la expresión (5-11) y equilibrando en el punto 0, tenemos:

$$2.500.000 = A(P/A, 3,5\%, 12) - 15.000(P/G, 3,5\%, 12)$$

$$\therefore A = \$ 335.078$$

Significa esto que los \$ 2.500.000 de hoy deberán pagarse en 12 cuotas mensuales de \$ 335.078 la primera y de ahí en adelante las cuotas disminuirán en \$ 15.000 cada mes.

En el siguiente ejemplo desarrollaremos una de las modalidades del crédito bancario y que genera un gradiente aritmético decreciente.

EJEMPLO 5.11

Usted es un inversionista que tiene una tasa de oportunidad del 33% anual y en este momento necesita \$ 15.000.000, que puede obtenerlos de una institución bancaria en las siguientes condiciones:

Tiempo de crédito: 3 años

Amortización del capital: en cuotas trimestrales iguales vencidas

Tasa de interés: 36% ATA; los intereses se pagarán al principio del trimestre.

- Hallar el diagrama de flujo de caja del deudor
- ¿A cuánto le equivale a usted hoy la obligación con el banco?

Solución

- La tasa de interés que cobra el banco, del 36% ATA, equivale al 9% trimestral anticipado.

Ahora bien: como el capital de \$ 15.000.000 debe pagarse en 12 cuotas trimestrales iguales, esto nos da un valor para pagar cada trimestre de $15.000.000/12 = \$ 1.250.000$.

Los primeros intereses de 0,09% ($15.000.000$) = \$ 1.350.000 deberán pagarse al principio del primer trimestre.

Al final del primer trimestre el deudor pagará: \$ 1.250.000 de capital y 0,09% ($13.750.000$) = \$ 1.237.500 de intereses, para un total de \$ 2.487.500.

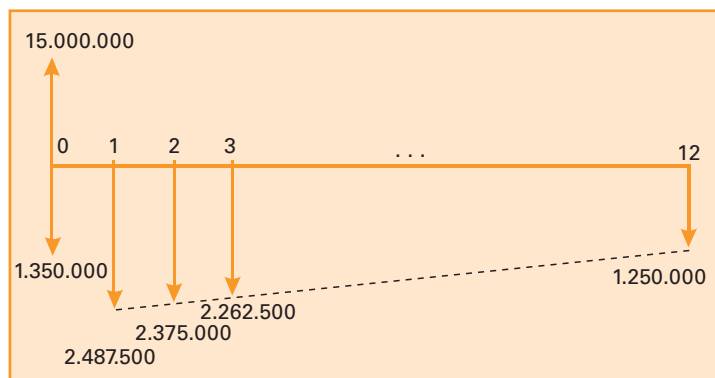


FIGURA 5.13

Al final del segundo trimestre la suma que debe pagarse será: \$ 1.250.000 de capital y 0,09% (12.500.000) = \$ 1.125.000 de intereses, para un total de \$ 2.375.000.

Al final del tercer trimestre el pago será: \$ 1.250.000 de capital y 0,09% (11.250.000) = \$ 1.012.500 de intereses, para un total de \$ 2.262.500, y así sucesivamente. El diagrama de flujo de caja del deudor será:

Como podemos observar, a partir del primer trimestre los pagos totales que hace el deudor constituyen un gradiente aritmético decreciente que disminuye en \$ 112.500 cada trimestre.

- b) Para averiguar a cuánto le equivale hoy (punto 0) la obligación con el banco, sencillamente calculamos el valor presente de todo lo que el deudor pagará descontado a la tasa de oportunidad del deudor que es del 33% anual, equivalente al 7,39% trimestral. Equilibrando el diagrama en el punto 0, tenemos:

$$P = 1.350.000 + 2.487.500(P/A, 7,39\%, 12) - 112.500(P/G, 7,39\%, 12) = \$ 16.623.900$$

Esto se interpreta como que al deudor, en el momento de firmar la obligación con el banco y recibir los \$ 15.000.000, le está representando una deuda en ese momento por un valor de \$ 16.623.900.

El lector debe tener en cuenta y recordar de su curso de matemáticas básicas que cuando una sucesión de valores aumenta (o disminuye) en la misma cantidad, el término enésimo está representado por una función lineal.

EJEMPLO

Hallar la expresión para el enésimo término de la sucesión siguiente:

142, 158, 174, 190, 206,...

Solución

Como puede observarse, los valores anteriores forman una progresión aritmética en la cual la **razón** es 16. El enésimo término será una expresión que depende de **n**; sea **T(n)** ese término, entonces como su expresión es lineal, basta con tomar dos puntos, que pueden ser (1, 142) y (2, 158), de tal manera que se tendrá, hallando la función lineal que pasa por esos dos puntos, la siguiente expresión:

$$T - 142 = \frac{158 - 142}{2 - 1} (n - 1)$$

O sea: $T(n) = 16n + 126$

y se puede comprobar, por ejemplo, que $T(5) = 16(5) + 126 = 206$

Lo anterior se utiliza para plantear problemas como el siguiente.

Una inversión se inicia con \$ 3.000.000 en una institución que paga un interés del 2,1% mensual; además, cada mes el inversionista deposita cantidades así: \$ 142.000 en el primer mes, \$ 158.000 en el segundo mes, \$ 174.000 en el tercer mes y así sucesivamente. Se pide plantear la ecuación que permita hallar el saldo en cualquier mes t . Ya sabemos que el depósito en el mes t (en miles de pesos) está dado por $16t + 126$, de tal manera que denotando por S_t el saldo al final del mes t y por S_{t+1} el saldo al final del mes $t + 1$, se tiene:

$$S_{t+1} = S_t + 0.021 S_t + 16t + 126 \text{ y } S_0 = 3.000$$

O sea que:

$$S_{t+1} - (1.021)S_t = 16t + 126 \text{ y } S_0 = 3.000$$

Resolviendo esta ecuación de diferencia finita se obtiene el valor de S_t , medido en miles de pesos.

El problema de expresar el enésimo término de la sucesión dada originalmente también se puede resolver a partir del concepto de gradiente aritmético creciente, donde el primer valor es $A = 142$ y $G = 16$. Entonces, teniendo en cuenta la expresión del pago enésimo de un gradiente aritmético creciente que es la dada por $A + (n - 1)(16)$, se tiene para este caso que el enésimo pago es:

$$142 + (n - 1)(16)$$

O sea: $126 + 16n$, que corresponde a la misma expresión obtenida anteriormente.

5.5 Gradiente geométrico

DEFINICIÓN 5.3

Se llama **gradiente geométrico** a una serie de pagos periódicos en la cual cada pago es igual al del período inmediatamente anterior incrementado en un mismo porcentaje.

Es evidente que esta variación porcentual de cada pago puede ser positiva o negativa, de manera que puede originar lo que se conoce con los nombres de **gradiente geométrico creciente** o **gradiente geométrico decreciente** respectivamente.

Por ejemplo, las series de valores:

- a) 5.000; 5.500; 6.050; 6.655; 7.320,5,...
- b) 8.000; 6.400; 5.120; 4.096; 3.276,8,...

corresponden, la primera, a una de gradiente geométrico creciente en la que la variación positiva o aumento porcentual es del 10%, y, la segunda, a una de gradiente geométrico decreciente en la que la variación porcentual negativa o disminución es del 20%.

Supongamos, por ejemplo, que la inflación promedio mensual en un determinado año fue del 2%; si un artículo tenía un precio de \$ 4.000 al principio del primer mes, al final de este mes tendrá un precio de \$ 4.080; al final del siguiente mes, de \$ 4.161,6; al final del siguiente, de \$ 4.244,83, y así sucesivamente.

Como podemos observar, la serie formada por los diferentes precios del artículo constituye un gradiente geométrico creciente cuyo aumento mensual es del 2%.

Tanto un gradiente geométrico creciente como uno decreciente pueden ser vencidos, anticipados, diferidos o perpetuos.

Como en las anualidades y en los gradientes aritméticos, aquí consideraremos el gradiente geométrico creciente vencido, y a partir de este deducimos las expresiones o fórmulas correspondientes a los anticipados, diferidos e incluso para los decrecientes.

Para esta clase de series se utiliza por lo general la siguiente notación:

F: valor futuro

P: valor presente

A: valor del primer pago

n: número de pagos

i: tasa de interés por período

k: tasa de incremento por período

5.6 Gradiente geométrico creciente vencido

Sea una serie de n pagos por período vencido, en la que el primero tiene un valor de A y cada uno de los siguientes es igual al del período inmediatamente anterior aumentado en un porcentaje del $k\%$, y en la que la tasa de interés es del $i\%$ por período. Se trata de hallar expresiones que midan el valor futuro y el presente en esta serie. El diagrama de flujo de caja para esta serie se muestra en la figura 5.14, en la que si el primer pago es A , el segundo será $A(1 + k)$, el tercero $A(1 + k)^2$, y así sucesivamente. En general, el pago enésimo será $A(1 + k)^{n-1}$.

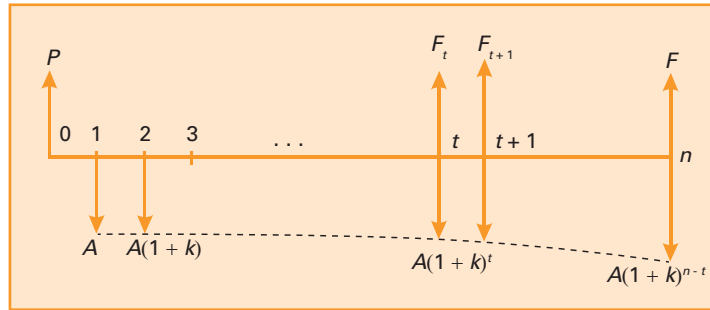


FIGURA 5.14 Diagrama de flujo de caja de un gradiente geométrico creciente vencido

VALOR FUTURO

Para determinar el valor futuro de la serie representada en la figura 5.14 podemos utilizar las ecuaciones de diferencia finita, como lo hemos venido haciendo.

Sean F_t = valor futuro al final del período t después del pago correspondiente, y F_{t+1} = valor futuro al final del período $t + 1$ después del pago correspondiente.

Entonces, analizando el intervalo $[t, t + 1]$ tenemos que allí se cumple la relación siguiente:

$$F_{t+1} = F_t + iF_t + A(1 + k)^t$$

La igualdad anterior puede transformarse en:

$$F_{t+1} - (1 + i) F_t = A(1 + k)^t, \text{ con } F_0 = 0 \text{ y } t = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

Esta expresión corresponde a una clase de ecuación de diferencia finita estudiada en el capítulo 2, con $g(t) = A(1 + k)^t$, que es una función exponencial en la base $(1 + k)$ y coeficiente A . Aplicando el procedimiento para resolver esta clase de ecuaciones, llegamos a una solución de la forma:

$$F_t = \frac{A}{i - k} [(1 + i)^t - (1 + k)^t] \tag{5-12}$$

para el valor futuro al final del período t , y para el valor futuro al final del período n tendremos:

$$F_n = \frac{A}{i - k} [(1 + i)^n - (1 + k)^n] \tag{5-13}$$

Aun cuando se podría establecer una notación para el factor del valor futuro de un gradiente geométrico, no se acostumbra hacerlo, y por esta razón se utiliza directamente la fórmula (5-13).

Debemos tener en cuenta que la fórmula (5-13) representa el valor futuro al cabo de n pagos de un gradiente geométrico creciente, siempre y cuando $i \neq k$.

Para el caso en que $i = k$, tenemos la ecuación de diferencia siguiente:

$$F_{t+1} - (1 + i) F_t = A(1 + i)^t, F_0 = 0$$

y

$$t = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

El estudiante debe resolver esta ecuación utilizando lo que hemos visto en el capítulo 2 como caso especial número 2 y llegar a la solución:

$$F_t = At(1 + i)^{t-1} \tag{5-14}$$

y calculada en el punto $t = n$ nos da:

$$F = nA (1 + i)^{n-1} \quad (5-15)$$

Las fórmulas (5-13) y (5-15) también pueden hallarse utilizando simplemente el álgebra de las progresiones geométricas.

EJEMPLO 5.12

Un empleado empieza a trabajar en una empresa el 1 de enero con un salario mensual de \$ 220.000 y decide depositar cada año el sueldo de diciembre en una cuenta de ahorros que paga un interés del 29% anual. Suponiendo que le reajustan el salario cada año en el 25%, averiguar cuánto tendrá acumulado en la cuenta de ahorros al cumplir 10 años de trabajo.

Solución

El diagrama de flujo de caja correspondiente se muestra en la figura 5.15.

Los depósitos forman un gradiente geométrico creciente vencido en el que: $A = \$ 220.000$; $n = 10$ depósitos; $i = 29\%$ anual; $k = 25\%$; $F = ?$

Aplicando la fórmula (5-13), para $i \neq k$ tenemos:

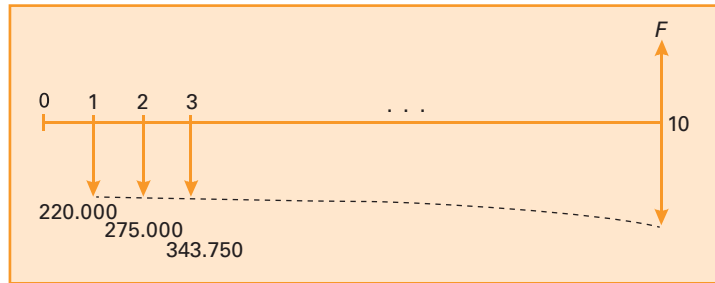


FIGURA 5.15

$$F = \frac{220.000}{0,29 - 0,25} [(1,29)^{10} - (1,25)^{10}] = \$18.964.761$$

Esta cifra representa la cantidad total acumulada por el ahorrador al cabo de 10 años.

EJEMPLO 5.13

Resolver el ejemplo 5.12, suponiendo que el salario lo reajustan cada año en el 29%.

Solución

El estudiante deberá hacer el diagrama de flujo de caja para este ejemplo con los siguientes datos:

$A = \$ 220.000$; $n = 10$ depósitos; $i = 29\%$ anual; $k = 29\%$ anual; $F = ?$

Como en este caso $i\% = k\%$, aplicamos la fórmula (5-15) y obtenemos:

$$F = 10(220.000)(1,29)^9 = \$ 21.763.567$$

que será el total acumulado en la cuenta de ahorros al cabo de diez años.

VALOR PRESENTE

El valor presente del gradiente geométrico creciente y vencido representado en la figura 5.14 puede hallarse mediante un procedimiento similar al utilizado en los casos anteriores. O sea que el valor P (en el punto 0) del diagrama de la figura 5.14 es igual a:

$$P = F(P/F, i\%, n) = \frac{A}{i - k} [(1 + i)^n - (1 + k)^n] (1 + i)^{-n}$$

es decir:

$$P = \frac{A}{i - k} \left[1 - \left(\frac{1 + k}{1 + i} \right)^n \right] \quad (5-16)$$

De nuevo, la fórmula (5-16) sirve para hallar el valor presente del gradiente geométrico dado en la figura 5.14, si $i \neq k$. Para el caso contrario (es decir, $i = k$), tendremos:

$$P = nA(1 + i)^{n-1} (1 + i)^n$$

O sea:

$$P = \frac{nA}{1 + i} \tag{5-17}$$

Esta es la expresión que mide el valor presente del gradiente geométrico creciente vencido para el caso en que $i = k$.

De acuerdo con el problema general planteado, debemos tener en cuenta que las fórmulas (5-13), (5-15), (5-16) y (5-17) corresponden a un gradiente geométrico creciente vencido y acumulan los valores correspondientes en los tiempos señalados en la figura 5.14. Por tanto, para los casos de series anticipadas o diferidas procedemos de la misma forma como lo hicimos para las series uniformes y en los gradientes aritméticos correspondientes.

EJEMPLO 5.14

Hallar el valor de contado (VC) de un artículo que, financiado, puede adquirirse así: una cuota inicial equivalente al 30% del valor de contado y el resto a 15 meses con cuotas que aumenten cada mes en el 2%, sabiendo que la primera será de \$ 23.000 y la tasa de interés será del 34% nominal mensual.

Solución

El diagrama de flujo de caja es el siguiente:

Las cuotas que se pagan a partir del primer mes forman un gradiente geométrico creciente vencido con $A = \$ 23.000$; $n = 15$ cuotas; $i = 2,83\%$ mensual; $k = 2\%$ mensual.

El valor al contado del artículo está representado por el valor presente de todas las cuotas pagadas (incluyendo la cuota inicial); es decir:

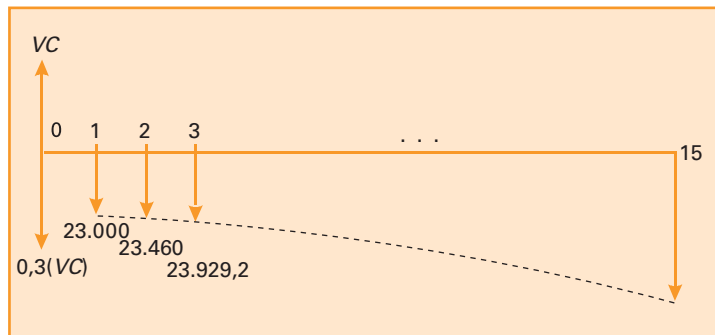


FIGURA 5.16

$$VC = 0,3(VC) + \frac{23.000}{0,0283 - 0,02} \left[1 - \left(\frac{1,02}{1,0283} \right)^{15} \right]$$

$$VC = \$ 453.137$$

El problema también puede plantearse diciendo que la suma financiada a 15 meses es el 70% del valor del precio al contado, puesto que se paga una cuota inicial equivalente al 30% del valor al contado. Por tanto:

$$0,7VC = \frac{23.000}{0,0283 - 0,02} \left[1 - \left(\frac{1,02}{1,0283} \right)^{15} \right]$$

$$\therefore VC = \$ 453.137$$

O sea, el mismo resultado que obtuvimos anteriormente.

EJEMPLO 5.15

Resolver el ejemplo 5.14 suponiendo que la primera cuota mensual de \$ 23.000 se cancela al cabo de cinco meses.

Solución

El diagrama de flujo de caja es el siguiente:

Las cuotas mensuales que se pagan forman un gradiente geométrico creciente diferido. Con la ayuda de la fórmula (5-16), tendremos:

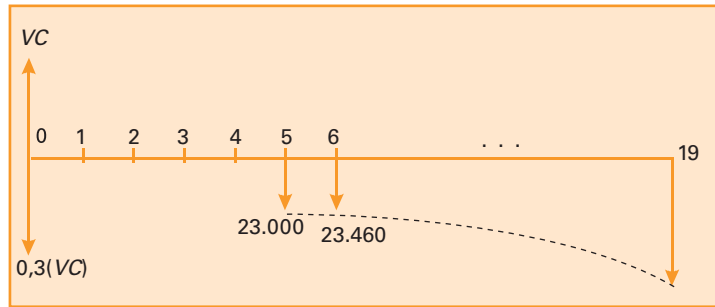


FIGURA 5.17

$$VC = 0,3(VC) + \frac{23.000}{0,0283 - 0,02} \left[1 - \left(\frac{1,02}{1,0283} \right)^{15} \right] (1,0283)^{-4}$$

Esto porque la fórmula (5-16) acumula un período antes del primer pago; en nuestro caso, aplicada al gradiente, acumula el valor presente en el punto 4.

A partir de la igualdad anterior tenemos:

$$VC = \$ 405 275$$

Debe tenerse en cuenta que los dos ejemplos anteriores, 5.14 y 5.15, no son equivalentes, es decir, no representan la misma operación financiera. Por esta razón, los resultados de los dos no son iguales.

EJEMPLO 5.16

Financiar una deuda de \$ 2.000.000 de hoy a dos años con cuotas por trimestre anticipado que aumenten en el 5% cada trimestre, y con una tasa de interés del 9% trimestral.

Solución

El diagrama de flujo de caja es el siguiente:

Donde: $P = 2.000.000$; $A = ?$; $n = 8$ pagos; $i = 9\%$ trimestral; $k = 5\%$ trimestral.

La serie de pagos corresponde a un gradiente geométrico creciente anticipado. De nuevo, con base en la fórmula (5-16), llegamos a:

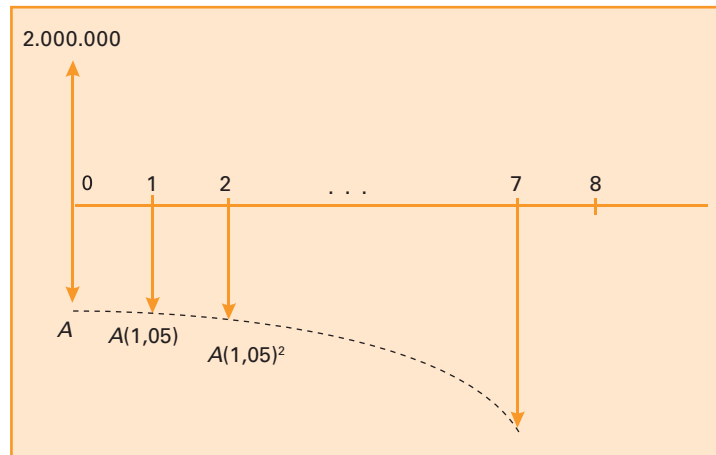


FIGURA 5.18

$$2.000.000 = \frac{A}{0,09 - 0,05} \left[1 - \left(\frac{1,05}{1,09} \right)^8 \right] (1,09)$$

$$A = \$ 283.908$$

Esto significa que para amortizar la deuda en las condiciones del problema deben iniciarse los pagos hoy con una cuota de \$ 283.908.

También son frecuentes los casos en los que una operación financiera contempla varias tasas de interés durante el tiempo en el que se realiza esa operación.

EJEMPLO 5.17

Usted deposita el primer mes \$ 15.000 en una cuenta de ahorros y cada mes siguiente aumenta el depósito en el 4%. Si hace los depósitos durante dos años y la cuenta de ahorros le paga el 2,5% mensual durante el primer año y el 3% mensual de ahí en adelante. ¿Cuánto tendrá acumulado al cabo de los dos años?

Solución

El diagrama de flujo de caja es el siguiente:

Como la tasa de interés cambia al cabo de un año, para hallar el valor futuro de los 24 depósitos estos deben manejarse en dos bloques diferentes: los que corresponden al primer año y los correspondientes al segundo año, con sus respectivas tasas de interés.

Por tanto, el valor futuro al cabo de los dos años estará dado por:

$$F = \frac{15.000}{0,025 - 0,04} [(1,025)^{12} - (1,04)^{12}] (1,03)^{12} + \frac{24.015,5}{0,03 - 0,04} [(1,03)^{12} - (1,04)^{12}]$$

$$= \$ 786.122$$

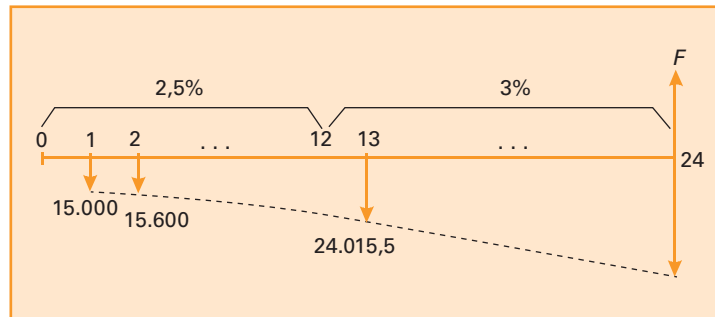


FIGURA 5.19

5.7 Gradiente geométrico decreciente vencido

DEFINICIÓN 4

Se llama gradiente geométrico decreciente a toda serie de valores periódicos en la que cada valor es igual al del período inmediatamente anterior disminuido en una misma tasa.

Esta clase de gradiente también puede ser vencido, anticipado, diferido y perpetuo.

El diagrama de flujo de caja general para un gradiente geométrico decreciente vencido será como seguidamente se lo grafica (véase la figura 5.20).

Las expresiones para calcular tanto el valor futuro como el valor presente las obtenemos a partir de la ecuación de diferencia:

$$F_{t+1} = F_t + iF_t + A(1 - k)^t; F_0 = 0$$

Diagrama de flujo de caja de un gradiente geométrico decreciente vencido

Y así se llega a:

$$F = \frac{A}{i + k} [(1 + i)^n - (1 - k)^n] \tag{5-18}$$

Y:

$$P = \frac{A}{i + k} \left[1 - \left(\frac{1 - k}{1 + i} \right)^n \right] \tag{5-19}$$

si $k \neq i$.

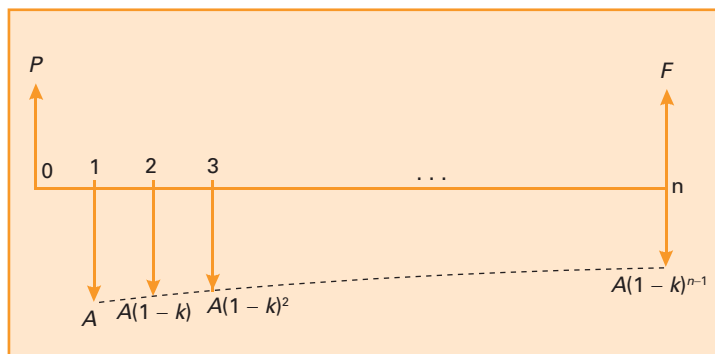


FIGURA 5.20

Para el caso de $i = k$, se reemplaza i por k , o viceversa, en las expresiones (5-18) y (5-19). De nuevo, la fórmula del valor presente anterior acumula un período antes del primer pago. Por tanto, a partir de esta podemos calcular también el valor presente de un gradiente geométrico decreciente anticipado y diferido.

EJEMPLO 5.18

Financiar \$ 2.500.000 a 18 meses con cuotas mensuales anticipadas que disminuyan cada mes en el 2,5%, sabiendo que la tasa de interés que se cobra es del 3,2% mensual.

Solución

El diagrama de flujo de caja es el siguiente:

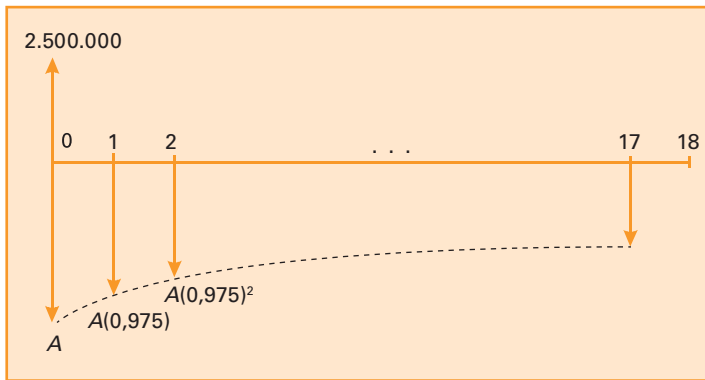


FIGURA 5.21

Buscamos determinar el valor de la primera cuota. Para esto equilibramos el diagrama en el punto 0.

$$2.500.000 = \frac{A}{0,032 + 0,025} \left[1 - \left(\frac{1 - 0,025}{1,032} \right)^{18} \right] (1,032)$$

$$\therefore A = \$ 215.625,5$$

Es decir, la deuda se pagará con 18 cuotas por mes anticipado, empezando hoy con una cuota de \$ 215.625,5, y de ahí en adelante disminuirá cada mes en el 2,5% respecto de la del mes inmediatamente anterior.

Resolver el ejercicio anterior si la primera cuota se paga dentro de cuatro meses.

El estudiante debe hacer el diagrama de flujo de caja, y según ese diagrama se tendrá la igualdad siguiente:

$$2.500.000 = \frac{A}{0,032 + 0,025} \left[1 - \left(\frac{1 - 0,025}{1,032} \right)^{18} \right] (1,032)^{-3}$$

$$\therefore A = \$ 244.578,8$$

En este ejemplo son equivalentes financieramente los dos sistemas de amortización de la deuda.

5.8 Gradiente geométrico perpetuo

Al igual que en las series uniformes y en los gradientes aritméticos, se presenta el caso de un gradiente geométrico a perpetuidad. Ejemplo de estos casos pueden ser aquellas situaciones prácticas tomadas en las series uniformes y gradientes aritméticos a perpetuidad, con la diferencia de que aquí los pagos varían porcentualmente respecto del inmediatamente anterior. Como en toda serie perpetua, solo puede hallarse el valor presente, y el método para encontrarlo es el mismo utilizado para los casos ya mencionados.

Tomemos en primer lugar un gradiente geométrico perpetuo creciente de características similares al tratado en la sección 5.6. De ahí sabemos que:

$$P_n = \frac{A}{1-k} \left[1 - \left(\frac{1+k}{1+i} \right)^n \right] \text{ si } i \neq k$$

Por tanto, el valor presente **P** del gradiente perpetuo será:

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A}{1-k} \left[1 - \left(\frac{1+k}{1+i} \right)^n \right]$$

Analizando el límite de la expresión $\left[\left(\frac{1+k}{1+i} \right)^n \right]$, se presentan los casos siguientes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+k}{1+i} \right)^n = \begin{cases} 0, & \text{si } i > k \\ \text{no existe,} & \text{si } i < k \end{cases}$$

Así que el valor presente **P** estará dado por:

$$P = \begin{cases} \frac{A}{i-k}, & \text{si } i > k \\ \text{no existe,} & \text{si } i < k \end{cases} \tag{5-20}$$

y para el caso en que **i = k**, tenemos que utilizar la fórmula (5-17) y llegamos a:

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nA}{1+i}$$

y este límite no existe. Para este caso, entonces, el valor presente no existe.

EJEMPLO 5.19

Una ciudad debe establecer un fondo para cubrir los gastos de mantenimiento de un parque que se supone tendrá vida útil perpetua. Los gastos se estiman en \$ 2.000.000 el primer año y luego aumentarán el 25% cada año. El fondo consiste en un único depósito hoy en una cuenta que pagará unos intereses del 33% anual durante los 10 primeros años y del 36% anual de ahí en adelante. Determinar el valor del depósito.

Solución

El diagrama de flujo de caja es el siguiente:

Donde **X** representa el valor del depósito hoy; los retiros de la cuenta de ahorros correspondientes al valor del gasto de mantenimiento de ese año estarán medidos en millones de pesos.

Equilibrando el diagrama en el punto 0 (hoy), tenemos:

$$X = \frac{2}{0,33 - 0,25} \left[1 - \left(\frac{1,25}{1,33} \right)^{10} \right] + \frac{18,626}{0,36 - 0,25} (1,33)^{-10} = \$21,33$$

Esto significa que con un único depósito hoy por un valor de \$ 21.330.000 en esa cuenta, la ciudad dispondrá del dinero necesario para cubrir esos gastos por término indefinido o, lo que es lo mismo, a perpetuidad.

El estudiante deberá analizar el caso del gradiente geométrico decreciente perpetuo y obtener la fórmula que permita calcular el valor presente.

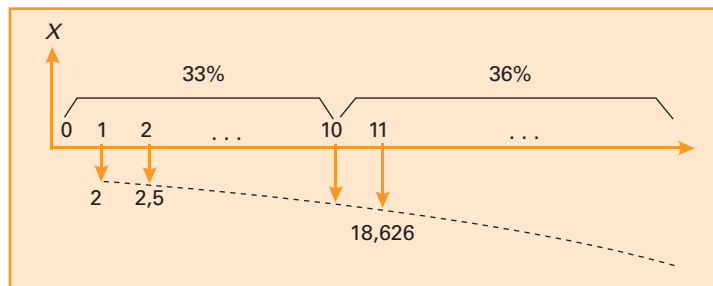


FIGURA 5.22

Cuando una sucesión de valores aumenta (o disminuye) de un valor al siguiente en un porcentaje constante, entonces genera una progresión geométrica, y la sucesión de valores origina un gradiente geométrico. Para el caso de gradientes geométricos crecientes se tiene que el n -ésimo término está dado por $A(1+k)^{n-1}$, donde A es el primer término y k la tasa de incremento, y por $A(1-k)^{n-1}$ si el gradiente geométrico es decreciente.

EJEMPLO

Hallar la expresión para el n -ésimo término de cada una de las siguientes sucesiones de valores:

- a) 12.000; 13.800; 15.870; 18.250,5; 20.988,075,...
- b) 15.000; 12.900; 11.094; 9.540,84; 8.205,1224,...

Para la sucesión de valores en a), se puede observar que si seleccionamos cualquiera de los valores y lo dividimos por el inmediatamente anterior obtendremos un factor igual a 1,15, que es igual a $1+k$, de donde se concluye que $k=15\%$; y como cada uno de los términos de la sucesión se obtiene multiplicando el inmediatamente anterior por 1,15, entonces concluimos que esa sucesión forma un gradiente geométrico creciente y que la tasa de aumento es del 15%, y así el n -ésimo término es $12.000(1,15)^{n-1}$.

Para la sucesión b), con un procedimiento similar al anterior se obtiene que el factor es igual a $0,86 = 1-k$, es decir que $k=14\%$, y, por lo tanto, la sucesión forma un gradiente geométrico que decrece en el 14% cada período, y así el n -ésimo término estará dado por $15.000(1-0,14)^{n-1}$.

Las expresiones anteriores se pueden utilizar en el planteamiento de problemas como el siguiente.

Suponga que se invierte hoy la suma de \$ 5.000.000 y, además, en los meses siguientes se depositan las cantidades que se muestran en la sucesión a). Se pide plantear la ecuación cuya solución muestre el saldo al cabo de t meses, sabiendo que el dinero rinde el 2,2% mensual.

Entonces, si S_t denota el saldo en el mes t después del depósito respectivo y similar para S_{t+1} , se tiene que:

$$S_{t+1} = S_t + 0,022S_t + D_{t+1}$$

Donde D_{t+1} es el depósito en el mes $t+1$, el cual está dado por $D_{t+1} = 12.000(1,15)^t$. Así que la ecuación anterior quedará:

$$S_{t+1} = S_t + 0,022S_t + 12.000(1,15)^t$$

Es decir:

$$S_{t+1} - (1,022)S_t = 12.000(1,15)^t \text{ y } S_0 = \$ 5$$

De manera similar, el problema se plantea si los depósitos mensuales son los dados por los valores de la sucesión b).

También podemos utilizar las fórmulas vistas hasta este momento para trabajar algunas clases de flujos de caja que a primera vista no se ajustarían directamente ni a una anualidad ni a un gradiente, pero algunas operaciones nos permitirán reducir esos flujos de caja a una de estas series. Son, entre otros, casos de valores constantes durante los meses de un año, pero que aumentan cada año ya sea en una cantidad fija de dinero o en una tasa constante.

EJEMPLO 5.20

Una persona que devenga un salario de \$ 150.000 mensuales el primer año decide depositar cada mes la décima parte de su salario mensual en una cuenta de ahorros que paga un interés del 2,5% mensual. Si le incrementan el salario cada año en el 24%, ¿cuánto tendrá ahorrado al cabo de doce años?

Solución

El diagrama de flujo de caja inicial de los depósitos es el siguiente:

Como podemos ver, el flujo de caja total no corresponde ni a una anualidad ni a un gradiente geométrico ni aritmético, pues existen algunos valores iguales. Sin embargo, si calculamos al final de cada año el equivalente financiero de los 12 depósitos correspondientes, tenemos:

$$F_1 = 15.000 (F/A, 2,5\%, 12) = \$ 206.933,3$$

$$F_2 = 18.600 (F/A, 2,5\%, 12) = \$ 256.597,3$$

$$F_3 = 23.064 (F/A, 2,5\%, 12) = \$ 318.180,6$$

y así sucesivamente. Estos valores futuros constituyen un gradiente geométrico en el que el incremento o aumento es del 24% cada año. Por consiguiente, el primer diagrama de flujo de caja de los depósitos es financieramente equivalente a la figura 5.24, donde, para hallar el valor futuro, tenemos: $A = \$ 206.933,3$; $n = 12$; $k = 24\%$ anual; $i = 34,49\%$ anual (equivalente a 2,5% mensual). Por tanto, el valor futuro total será:

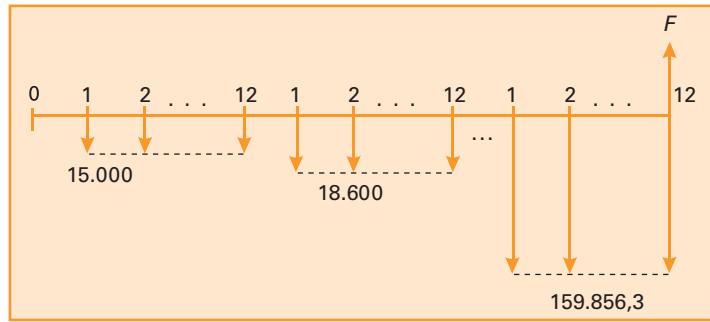


FIGURA 5.23

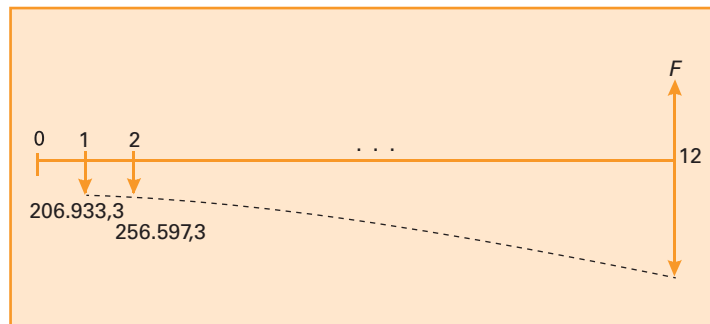


FIGURA 5.24

$$F = \frac{206.933,3}{0,3449 - 0,24} [(1,3449)^{12} - (1,24)^{12}] = \$ 43.008.770$$

Cantidad esta que corresponde al total que la persona tendrá ahorrado al cabo de 12 años en las condiciones expuestas en el problema.

EJEMPLO 5.21

Un pequeño proyecto requiere una inversión inicial de \$ 20.000.000. Este dinero se obtiene de una institución financiera que cobra un interés del 36% anual y exige que la deuda se amortice en un tiempo de cuatro años, en cuotas trimestrales que aumentan en el 5% cada trimestre, y la primera cuota debe pagarse dentro de seis meses. Para cubrir esta obligación, la empresa dueña del proyecto depositará la mitad de las utilidades mensuales del proyecto en una cuenta que pagará el 3% mensual durante los cuatro años, de tal manera que en cada trimestre se tenga la suma necesaria para pagarle al banco. ¿Cuáles deberán ser las utilidades promedio mensuales iguales para que la empresa pueda cubrir la obligación con el banco?

Solución

Lo primero que debemos hacer es financiar la deuda con el banco, para lo cual se utilizará una tasa trimestral del 7,99%, equivalente al 36% anual; aquí las cuotas trimestrales forman un gradiente geométrico diferido. Se sugiere que el estudiante haga el diagrama flujo de caja. Equilibrando en el punto 0, tendremos:

$$20.000.000 = \frac{A}{0,0799 - 0,05} \left[1 - \left(\frac{1,05}{1,0799} \right)^{15} \right] (1,0799)^{-1}$$

$$\therefore A = \$ 1.878.774$$

Esta es la primera cuota que debe pagársele al banco dentro de seis meses.

Ahora, el diagrama de flujo de caja con la cuenta en la que se hacen los depósitos mensuales y los retiros trimestrales para cancelarle al banco es el siguiente:

Los valores del problema son: depósitos mensuales = \$ X; retiros trimestrales de \$ 1.878.744 el primero y luego aumentarán en el 5% cada trimestre; 48 depósitos y 15 retiros; y tasa de interés del 3% mensual, equivalente al 9,27% trimestral. Equilibrando el diagrama en el punto 0, tendremos:

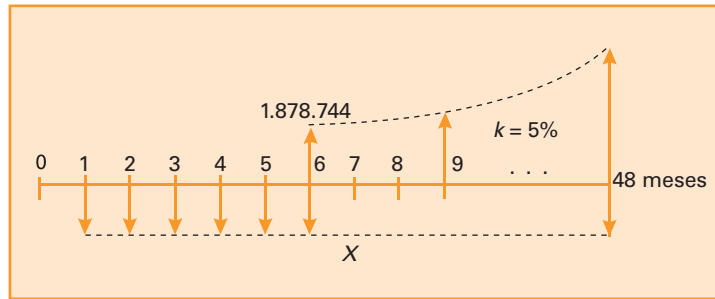


FIGURA 5.25

$$X(P/A, 3\%, 48) = \frac{1878.744}{0,0927 - 0,05} \left[1 - \left(\frac{1,05}{1,0927} \right)^{15} \right] (1,0927)^{-1}$$

$$\therefore X = \$ 717.224$$

Así que las utilidades promedio mensuales del proyecto deberán ser:

$$2(717.224) = \$ 1.434.448$$

El estudiante ya ha podido darse cuenta de las grandes ventajas que tiene representar con claridad el diagrama de flujo de caja de una operación financiera, pues así la parte mecánica es muy poca y más si se cuenta con una calculadora, ojalá financiera o programable.

5.9 Otros casos

En esta parte presentaremos algunos de aquellos problemas o casos que se anunciaron en la introducción de este capítulo y que corresponden a situaciones en las que el flujo de caja no se ajusta a ninguna de las series ni uniformes ni gradientes ya vistas, pero que podremos solucionar con la ayuda de una ecuación de diferencia finita.

EJEMPLO 5.22

Usted inicia hoy una cuenta de ahorros con \$ 100.000 en una corporación que paga un interés del 28% nominal trimestral (o el 28% anual liquidable trimestralmente). Usted retira cada trimestre la quinta parte del saldo que tenía en el trimestre inmediatamente anterior. Hallar el saldo en la cuenta de ahorros al cabo de tres años antes y después del retiro respectivo.

Solución

En primer lugar, el estudiante puede calcular manualmente los cuatro primeros valores del saldo; si no encuentra una relación entre ellos, podrá pensar que continuando con este procedimiento en algún momento se llegará a la solución del problema. Pero lo que aquí se propone es ver si con la ayuda de una ecuación de diferencia finita puede llegarse a la solución sin necesidad de recurrir al procedimiento iterativo.

Para esto, denotemos con:

S_t : saldo al final del trimestre t , después del retiro correspondiente

S_{t+1} : saldo final del trimestre siguiente (o sea el trimestre $t + 1$), después del retiro correspondiente

R_t y R_{t+1} : los retiros en los trimestres t y $t + 1$ respectivamente

Tendremos la relación siguiente:

$$S_{t+1} = S_t + iS_t - R_{t+1}$$

Donde i es la tasa de interés trimestral que se aplica al saldo, y $R_{t+1} = 1/5 S_t$; por tanto, la igualdad anterior se transforma en:

$$S_{t+1} = S_t + 0,07S_t - \frac{1}{5} S_t$$

O sea:

$$S_{t+1} = (0,87)S_t \text{ y } S_0 = \$ 100.000$$

Esta expresión corresponde a una ecuación de diferencia finita estudiada en el capítulo 2, cuya solución viene dada por:

$$S_t = 100.000(0,87)^t$$

En particular, el saldo al cabo de tres años después del retiro correspondiente estará dado por la expresión anterior calculado en $t = 12$; o sea:

$$S_t = 100.000(0,87)^{12} = \$ 18.803,1$$

y este será el saldo al cabo de tres años después del retiro correspondiente.

Ahora, el saldo en esa fecha antes del retiro vendrá dado por:

$$18.803,1 + 1/5[100.000 (0,87)^{11}] = \$ 23.125,7$$

O, lo que es lo mismo, por:

$$100.000(0,87)^{11}(1,07) = \$ 23.125,7$$

El estudiante deberá interpretar cada una de estas dos últimas expresiones.

EJEMPLO 5.23

En el ejemplo 5.22, suponer que cada trimestre usted deposita cantidades así: \$ 10.000 el primer trimestre, \$ 11.300 el segundo trimestre, \$ 12.600 el tercer trimestre, y así sucesivamente. Hallar el saldo al cabo de tres años después del retiro y el depósito respectivos.

Solución

Aquí denotamos con D_t el depósito en el trimestre t y con D_{t+1} el depósito en el trimestre siguiente.

La relación entre las variables que están analizándose es:

$$S_{t+1} = S_t + iS_t - R_{t+1} + D_{t+1}$$

En este caso los depósitos forman un gradiente aritmético creciente; por tanto:

$$D_t = 10.000 + (t - 1)1.300, \text{ y } D_{t+1} = 10.000 + 1.300t$$

Así que la igualdad anterior se transforma en:

$$S_{t+1} = S_t + 0,07S_t - 1/5S_t + 10.000 + 1.300t$$

O sea:

$$S_{t+1} - (0,87) S_t = 1.300t + 10.000; \text{ con } S_0 = \$100.000$$

De nuevo, esta relación pertenece a una de las clases de ecuaciones de diferencia finita vistas en el capítulo 2. Con base en la teoría estudiada, allí tenemos:

$$S_h(t) = (0,87)^t C$$

$$S_p = at + b = 10.000t$$

Por tanto:

$$S_t = (0,87)^t C + 10.000t$$

Como $S_0 = 100.000$, entonces:

$$C = 100.000$$

Así que:

$$S_t = 100.000 (0,87)^t + 10.000 t$$

y el saldo al cabo de tres años será:

$$S_{12} = 100.000 (0,87)^{12} + 10.000 (12) = \$138.803,1$$

Para este ejemplo el estudiante debe calcular los saldos en cada uno de los tres primeros trimestres, según las condiciones expresadas en el enunciado, y luego compararlos con los resultados que consiga al calcular S_1 , S_2 y S_3 , con la fórmula obtenida anteriormente.

EJEMPLO 5.24

Usted inicia hoy una cuenta de ahorros con \$ 1.850.000 ganando el 26% TV; además, cada trimestre retira la quinta parte del saldo que tenía al final del trimestre anterior, pero, al mismo tiempo, deposita cantidades que aumenten en el 4% cada trimestre; \$ 80.000 es el primer depósito. Hallar el saldo al cabo de cuatro años y medio antes del depósito y del retiro respectivos.

Solución

Sean:

S_t : el saldo al final del trimestre t después del retiro y depósito respectivos

S_{t+1} : el saldo al final del trimestre $t + 1$ después del retiro y depósito respectivos

De esta manera obtenemos la siguiente ecuación al relacionar los dos saldos anteriores:

$$S_{t+1} = S_t + 0,065 S_t - 1/5 S_t + 80.000 (1,04)^t$$

O sea:

$$S_{t+1} - 0,865 S_t = 80.000 (1,04)^t, \text{ con } S_0 = \$1.850.000.$$

Aplicando el método visto en el capítulo 2 para resolver esta clase de ecuaciones, llegamos a:

$$S_t = 1.392.858 (0,865)^t + 457.142 (1,04)^t$$

De tal manera que el saldo al cabo de cuatro años y medio, antes del depósito y del retiro respectivos, estará dado por el valor S_{53} (1,065), que es el saldo al cabo del mes 53, aumentando en los intereses del mes 54; es decir:

$$S_{53} (1,065) = [1.392.858 (0,865)^{53} + 457.142 (1,04)^{53}] (1,065) = \$3.892.635$$

Este es el saldo que pide el problema, según las condiciones allí expuestas.

Los ejemplos 5.22, 5.23 y 5.24 son apenas una pequeña muestra del conjunto de casos en los que el flujo de caja no se ajusta a ninguna de las series vistas anteriormente, pero los valores guardan una relación entre sí y dependen del tiempo. Esto nos permite utilizar otra herramienta matemática, las ecuaciones de diferencia finita, para hallar la solución correspondiente. Como parte de los problemas que se presentan al final del capítulo (problemas II), el estudiante encontrará algunos casos en los que necesariamente deberá utilizar estas ecuaciones para hallar la solución del problema.

5.10 Uso de la regresión en matemáticas financieras

En muchos casos prácticos de aplicación de las matemáticas financieras los valores (ingresos o egresos) de un flujo de caja no siempre guardan alguna relación entre ellos, como por ejemplo el que sean iguales para formar una anualidad o que aumenten o disminuyan ya sea en una cantidad fija de dinero o en un porcentaje para formar gradientes aritméticos o geométricos respectivamente.

Un caso real es aquel en el que, a partir de una información dada o conocida de valores, se estime una expresión que sea representativa del comportamiento hacia el futuro. En estadística se

estudia el tema de regresión lineal y no lineal, que se usan para resolver el problema anteriormente planteado. Por ello, no es el objetivo de esta sección hacer un estudio a fondo sobre el tema de la regresión, porque esto es propio de otra materia, sino ver que este tema es aplicable a problemas prácticos de las matemáticas financieras. De manera que el estudiante que en este momento no haya cursado Estadística debe utilizar uno de dos caminos para resolver estos problemas: o hacer uso de las materias vistas en álgebra lineal para hallar la función lineal o no lineal que más se ajuste a la información dada, o simplemente hacer uso de los programas que en la tecnología computacional sirven para ejecutar la regresión lineal o no lineal.

EJEMPLO 5.25

Una empresa que produce y vende un determinado artículo tiene el registro de los ingresos mensuales (en millones de pesos) para los cinco meses anteriores, y son los siguientes:

Mes	1	2	3	4	5
Ingreso	2,5	3	2	3,6	3,4

Bajo el supuesto de que los ingresos continúen con un comportamiento similar, estimar los ingresos para los siguientes siete meses.

Solución

- a) Utilizando una regresión lineal de la forma $y = \beta_0 + \beta_1 t$, donde t es el tiempo en meses e y el ingreso (en millones de pesos), y utilizando el programa de una calculadora o de una computadora para ejecutar la regresión, se llega a la expresión:

$$y = 2,18 + 0,24t$$

Con un coeficiente de correlación $r = 0,5787$.

Por lo tanto, para los siguientes siete meses se estiman unos ingresos así:

Mes	6	7	8	9	10	11	12
Ingreso	3,62	3,86	4,1	4,34	4,58	4,82	5,06

Como puede observarse, los valores estimados de los ingresos mensuales forman un gradiente aritmético con un valor de $G = 0,24$.

- b) Utilizando una regresión exponencial de la forma $y = ab^t$, donde t es el tiempo (en meses), Y es el ingreso (en millones de pesos), y, como en el caso anterior, utilizando un programa apropiado de la calculadora, se llega a la siguiente expresión:

$$Y = 2,233(1,083)^t$$

Con un coeficiente de correlación $r = 0,5247$.

A partir de la expresión anterior, los valores estimados de los ingresos para los siguientes siete meses serán los siguientes:

Mes	6	7	8	9	10	11	12
Ingreso	3.603	3.902	4.226	4.577	4.956	5.368	5.813

En este caso, como puede observarse, los valores estimados de los ingresos mensuales constituyen un gradiente geométrico con un valor de $k = 0,083$, o sea, $k\% = 8,3\%$.

Como en este momento el estudiante ya sabe manejar los gradientes, podrá calcular ya sea el valor futuro o el valor presente de los ingresos estimados para los siete meses siguientes a la información dada originalmente.

Cuando en un flujo de caja conocido la función lineal para estimar los valores futuros de la forma $y = \beta_0 + \beta_1 t$ es tal que $\beta_1 = 0$, se origina una anualidad con los valores estimados.

EJEMPLO 5.26

Respecto del ejemplo 5.25, suponga que los costos mensuales (en millones de pesos) para los mismos cinco meses anteriores hayan sido los siguientes:

Mes	1	2	3	4	5
Costos	1.250	1.600	1.300	1.400	1.350

Suponiendo que se mantenga ese comportamiento, estimar los costos mensuales para los siete meses siguientes.

Solución

Utilizando una regresión lineal de la forma $C = \beta_0 + \beta_1 t$, donde t represente el tiempo (en meses) y C el costo (en millones de pesos), y utilizando un programa de regresión lineal, se llega a que $\beta_0 = 1,38$ y $\beta_1 = 0$; por lo tanto, la función lineal que más se ajusta a la información dada es $C = 1,38$ para cualquier valor de t , así que los costos mensuales para los siguientes siete meses constituyen una anualidad de valor 1.380.000 pesos cada mes.

Ahora bien: suponga que el dueño de la empresa de los ejemplos 5.25 y 5.26 desea estimar el total que podrá tener acumulado dentro de siete meses, si invierte cada mes la mitad de las utilidades en una institución que paga el 14,4% MV.

Para este caso tenemos que las utilidades mensuales estimadas serán:

Mes	6	7	8	9	10	11	12
Ingreso	2.240	2.480	2.720	2.960	3.200	3.440	3.680

Como puede observarse, las utilidades mensuales estimadas constituyen un gradiente aritmético con $G = 0,24$; por lo tanto, se estima que al cabo de siete meses, ahorrando la mitad de las utilidades al 1,2% mensual, se tendrá un total acumulado en esa fecha de:

$$F = 1,12(F/A, 1,2\%, 7) + 0,12(F/G, 1,2\%, 7) = \$ 10.698.962$$

El estudiante encontrará problemas referentes al tema en la sección de problemas clase II del final del capítulo.

PROBLEMAS RESUELTOS

- Financiar \$ 50.000.000 de hoy a cuatro años en cuotas mensuales que aumenten cada mes en el 2%, sabiendo que la primera cuota se cancelará dentro de cuatro meses y que la tasa de interés que se cobra por el crédito es del 16% EA para los dos primeros años y del 7,5% TV de ahí en adelante.

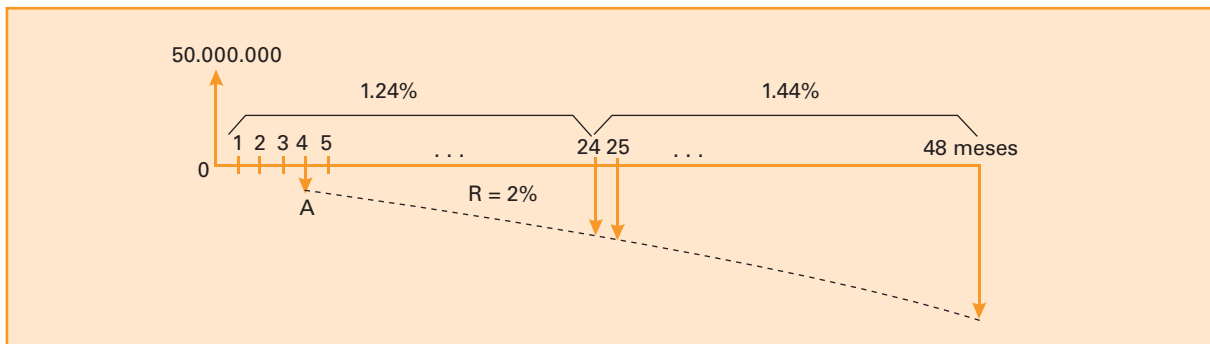
Solución

FIGURA 5.26

A: valor de la primera cuota

Equilibrando el diagrama en el punto 0:

$$50.000.000 = \frac{A}{0,0124 - 0,02} \left[1 - \left(\frac{1,02}{1,0124} \right)^{21} \right] (1,0124)^{-3} + \frac{A(1,02)^{21}}{0,0144 - 0,02} \left[1 - \left(\frac{1,02}{1,0144} \right)^{24} \right] (1,0124)^{-24}$$

$$\therefore A = \$999.866$$

- Financiar \$ 80.000.000 a cuatro años en cuotas mensuales, debiendo cancelar la primera dentro de cinco meses, y de tal manera que aumenten en el 1% hasta finales del segundo año y de ahí en adelante disminuyan en el 2% hasta finales del cuarto año. Tasa de interés del 22% EA para los dos primeros años y del 19% TV de ahí en adelante.

Solución

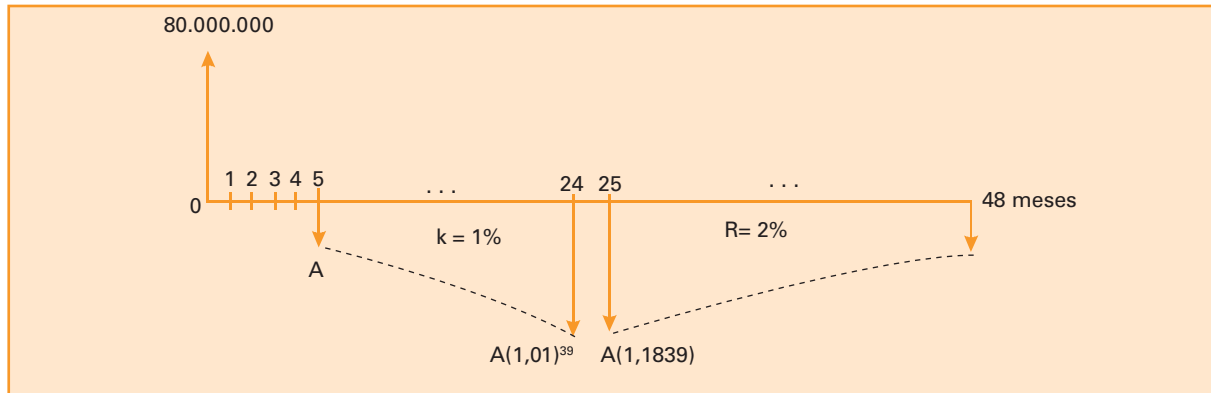


FIGURA 5.27

Tasas: 22% EA → 1,67% mensual

19% TV → 1,56% mensual

$$80.000.000 = \frac{A}{0,0167 - 0,01} \left[1 - \left(\frac{1,01}{1,0167} \right)^{20} \right] (1,0167)^{-4} + \frac{A(1,1839)}{0,0156 - 0,02} \left[1 - \left(\frac{1 - 0,02}{1,0156} \right)^{24} \right] (1,0167)^{-24}$$

$$\therefore A = \$2.652.604$$

- Un activo se financió de la siguiente manera: cuota inicial del 40% del valor del precio al contado, cuotas mensuales que disminuyan en \$ 15.000 hasta finales del segundo año y de ahí en adelante se mantengan constantes por un año más. Si la primera de las cuotas variables es de \$ 350.000 y se debe cancelar en el cuarto mes, hallar el valor de contado (VC) del activo si la tasa de interés es del 27,42% EA.

Solución

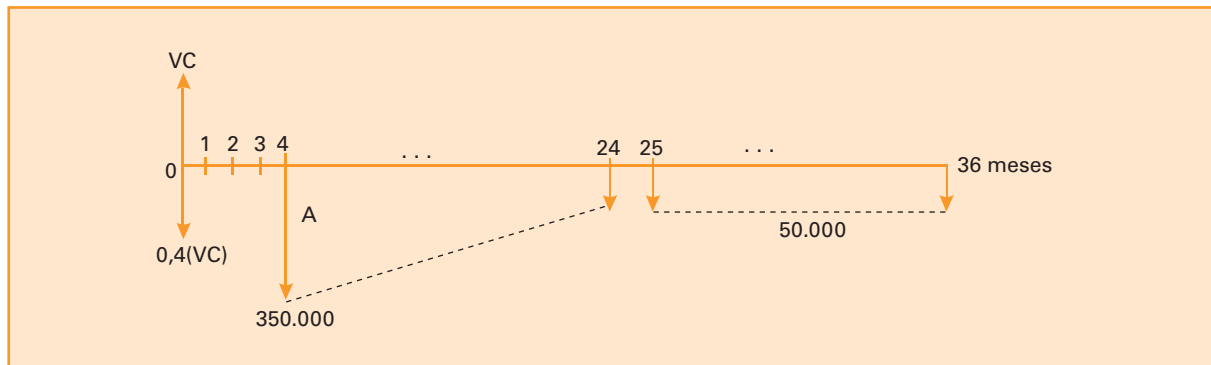


FIGURA 5.28

Tasas de interés: 27,42% EA \rightarrow 2,04% mensual

$$V.C = 0,4(V.C) + [350.000(P/A, 2,04\%, 21) - 15.000(P/G, 2,04, 21)](1,0204)^{-3} + 50.000(P/A, 2,04\%, 12)(1,0204)^{-24}$$

$$\therefore V.C = \$6.151.390$$

4. Una institución le otorga un crédito a una persona por un valor de \$ 60.000.000, bajo las siguientes condiciones:

Tiempo: 4 años; cuotas mensuales que aumenten en el 1,5% cada mes; primera cuota dentro de un mes por valor de \$ 1.820.000 y tasa de interés del 24% MV.

Al cabo de dos años usted debe revisar la financiación y determinar el valor de la cuota número 25 para que, continuando con el mismo incremento, la deuda quede cancelada a los cuatro años.

Solución

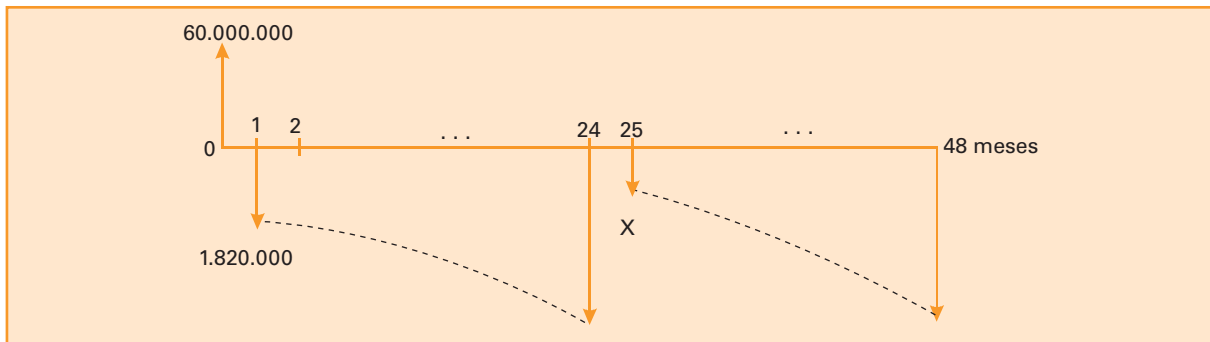


FIGURA 5.29

Tasas de interés: 24% MV \rightarrow 2% mensual

$$60.000.000 = \frac{1.820.000}{0,02 - 0,015} \left[1 - \left(\frac{1,015}{1,02} \right)^{24} \right] + \frac{X}{0,02 - 0,015} \left[1 - \left(\frac{1,015}{1,02} \right)^{24} \right] (1,02)^{-24}$$

$$\therefore X = \$1.410.105$$

Donde **X** es el valor de la cuota número 25.

5. Financiar \$ 40.000.000 a tres años en cuotas mensuales que aumenten en el 1,5% cada mes hasta la vigésima cuota y de ahí en adelante se mantengan constantes, sabiendo que la primera cuota se cancela dentro de cinco meses y que la tasa de interés es del 18% EA.

Solución

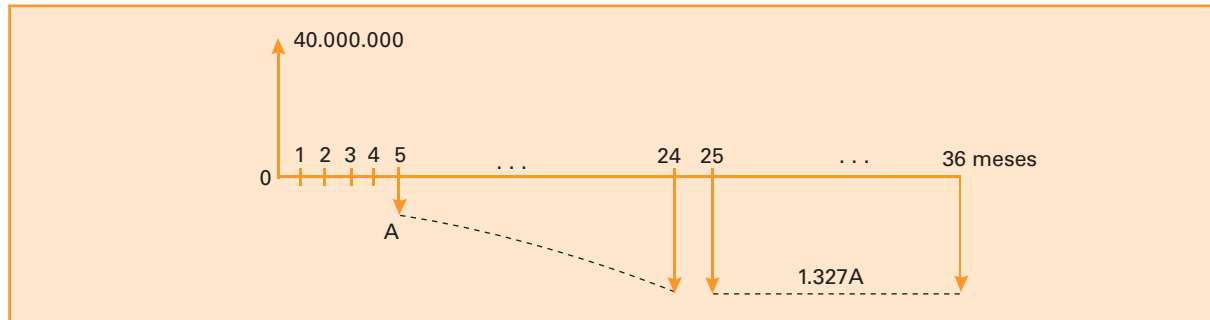


FIGURA 5.30

Tasas de interés: 18% EA → 1,39% mensual

$$40.000.000 = \frac{A}{0,0139 - 0,015} \left[1 - \left(\frac{1,015}{1,0139} \right)^{20} \right] (1,0139)^{-4} + 1,327A(P/A, 1,39\%, 12)(1,0167)^{-24}$$

$$\therefore A = \$1.364.085$$

$$1,327 A = \$ 1.810.140$$

6. Se invierte hoy la suma de \$ 9.000.000 en una entidad financiera que pacta un interés del 1,5% mensual. Cada mes se deposita allí la suma de \$ 30.000 y también cada mes hacen un descuento del 1% sobre los intereses devengados en ese mes. Hallar el total que se tendrá acumulado al cabo de cinco años.

Solución

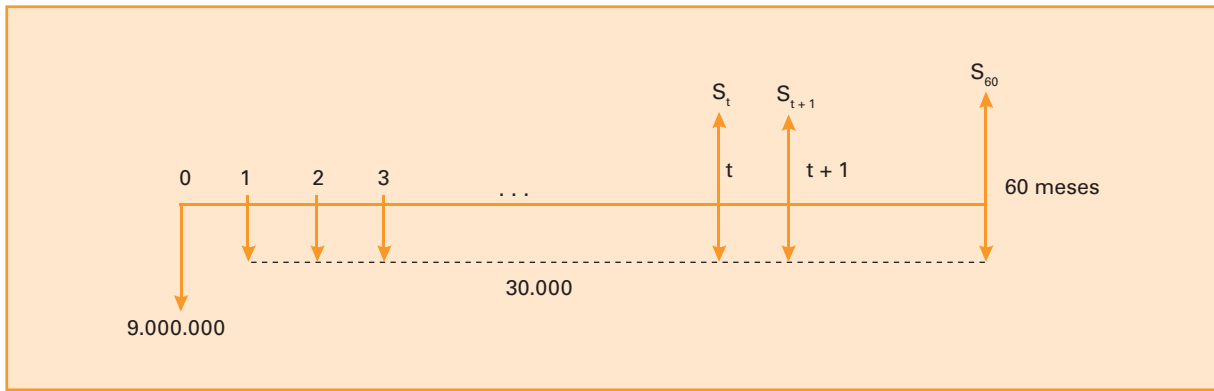


FIGURA 5.31

Tasas de interés: 1,5% mensual

Descuento: 1% sobre interés

S_t : Saldo en el mes t ; S_{t+1} saldo en el mes $t + 1$.

Entonces:

$$S_{t+1} = S_t + 0,015S_t - 0,01(0,015S_t) + 30.000$$

$$S_{t+1} = 1,01485 S_t + 30.000; S_0 = 9.000.000$$

$$S_t = (1,01485)^t (9.000.000) + 30.000 \left[\frac{1 - (1,01485)^t}{1 - 1,01485} \right]$$

$$S_{60} = \$24.666.869$$

7. Una inversión se inicia hoy con \$ 3.000.000 en una entidad financiera que paga un interés del 36% EA. Además, cada trimestre se deposita la suma de \$ 50.000, pero también cada año la entidad hace una retención del 12% sobre los intereses devengados en ese año. Se pide hallar el total que se tendrá acumulado al cabo de 10 años.

Solución

Tasas de interés: 36% EA ↔ 7,99% trimestral

Impuesto: 12% sobre intereses cada año

Cada año, por los cuatro depósitos trimestrales de 50.000, se tendrá:

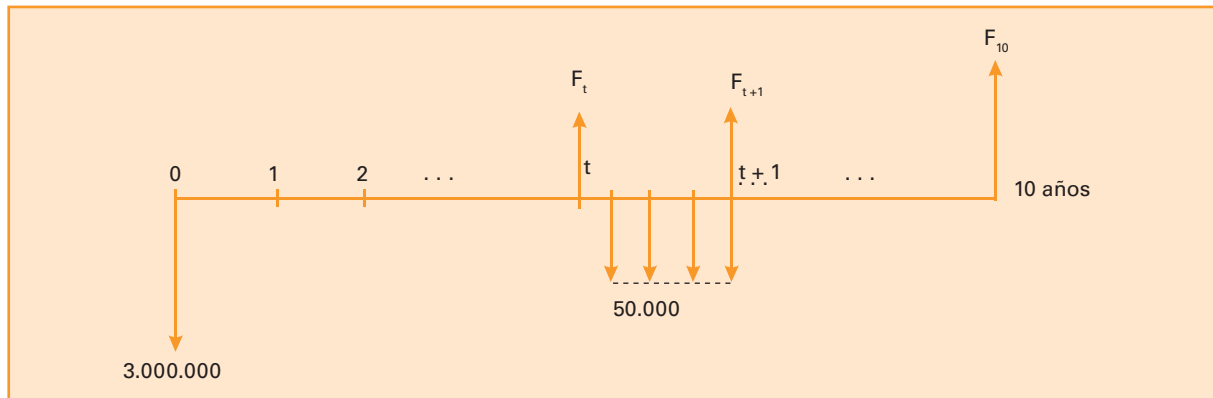


FIGURA 5.32

$$50.000 (F/A, 7,99\%, 4) = 225.272 = 200.000 + 25.272 = \text{Capital} + \text{intereses}$$

Entonces:

$$F_{t+1} = F_t + 0,36 F_t + 225.272 - 0,12(0,36 F_t + 25.272)$$

$$F_{t+1} = 1,3168 F_t + 222.239; F_0 = 3.000.000$$

$$F_t = (1,3168)^t (3.000.000) + 222.239 \left[\frac{1 - (1,3168)^t}{1 - 1,3168} \right]$$

$$F_{10} = \$57.318.437$$

8. Los ingresos mensuales de una compañía son en cualquier mes iguales a los $\frac{5}{3}$ de los costos en ese mes. Las utilidades mensuales se reinvierten en una institución financiera que paga el 36% EA, pero que, al mismo tiempo, descuenta por concepto de impuestos el 1,5% mensual sobre los intereses devengados en ese mes. Se pide hallar el total acumulado en la institución financiera al cabo de cuatro años, sabiendo que los costos del primer mes son de \$ 45.000, de \$ 50.000 el segundo mes, de \$ 55.000 el tercer mes y así sucesivamente.

Solución

Sean:

Y_t : ingresos en el mes t

C_t : costos en el mes t

U_t : utilidades en el mes t

Se tiene que:

$$C_t = 40.000 + 5.000t$$

$$U_t = Y_t - C_t = \frac{5}{3} C_t - C_t = \frac{2}{3} C_t = \frac{2}{3} (40.000 + 5.000t) = \frac{80.000}{3} + \frac{10.000}{3}t$$

$$U_{t+1} = \frac{80.000}{3} + \frac{10.000}{3}(t+1) = 30.000 + \frac{10.000}{3}t$$

Sean:

F_t : total acumulado en el mes t

F_{t+1} : total acumulado en el mes $t+1$

Entonces:

$$F_{t+1} = F_t + 0,026 F_t + 30.000 + \frac{10.000}{3} t - 0,015 (0,026 F_t)$$

$$F_{t+1} - 1,02561 F_t = \frac{10.000}{3} t + 30.000; F_0 = 0$$

Solución de la homogénea: $F_h(t) = (1,02561)^t C$

Solución particular: $F_p(t) = at + b$, entonces $= a(t + 1) + b$

Sustituyendo en el problema original se llega a que:

$$a = -130.157,5, \quad b = -6.253.709,5$$

Entonces: $F_p(t) = -130.157,5t - 6.253.709,5$

Por lo tanto: $F_t = (1,02561)^t C - 130.157,5t - 6.253.709,5$

A partir del valor de $F_0 = 0$ se obtiene que $C = 6.253.709,5$

Así que:

$$F_t = 6.253.709,5(1,02561)^t - 130.157,5t - 6.253.709,5$$

$$F_{48} = \$8.550.350$$

AUTOEVALUACIÓN

1. Establezca la relación entre una progresión aritmética y un gradiente aritmético, así como entre una progresión geométrica y un gradiente geométrico.
2. ¿Cuál es la razón fundamental por la cual a un gradiente aritmético se le llama lineal y a un gradiente geométrico se le llama exponencial?
3. El valor presente de un gradiente aritmético dado por la fórmula $P = A(P/A, i\%, n) + G(P/G, i\%, n)$, queda ubicado:
 - a) Un período antes del primer aumento
 - b) Donde se haga el primer pago
 - c) Dos períodos antes del primer aumento
 - d) Ninguno de los anteriores
4. Si un flujo de caja es un gradiente geométrico y la tasa de interés es igual a la tasa de incremento, entonces:
 - a) No existe el valor presente
 - b) No existe el valor futuro
 - c) Existen infinitos valores presentes
 - d) Ninguna de las anteriores
5. El valor presente en un gradiente aritmético creciente perpetuo:
 - a) Nunca existe
 - b) Algunas veces no existe
 - c) Siempre existe
 - d) Ninguna de las anteriores
6. El valor presente de un gradiente geométrico creciente perpetuo donde $i \neq k$:
 - a) Algunas veces no existe
 - b) Siempre existe
 - c) Nunca existe
 - d) Ninguna de las anteriores
7. Cuando los valores de los ingresos –por ejemplo, de un flujo de caja– se ajustan a una función lineal con pendiente diferente de cero, entonces los valores estimados forman:
 - a) Una anualidad
 - b) Un gradiente geométrico
 - c) Un gradiente aritmético
 - d) Ninguna de las anteriores

8. Explique por qué cuando el gradiente geométrico es decreciente, entonces la tasa de interés y la tasa de incremento de los pagos nunca son iguales.
9. Cuando de un gradiente aritmético se resta otro gradiente aritmético, el resultado es:
 - a) Una anualidad
 - b) Un gradiente geométrico
 - c) Un gradiente aritmético
 - d) Ninguna de los anteriores
10. Cuando de un gradiente geométrico se resta una anualidad, el resultado es:
 - a) Una anualidad
 - b) Un gradiente geométrico
 - c) Un gradiente aritmético
 - d) Ninguna de los anteriores

PROBLEMAS I

- 1.1 Hallar el valor futuro al final de tres años y medio de la siguiente serie de pagos: \$ 1.000 hoy, \$ 2.000 dentro de dos meses, \$ 3.000 dentro de cuatro meses y así sucesivamente, para una tasa de interés del 30% anual.
- 1.2 Sustituir una serie de 18 cuotas mensuales de \$ 16.000 cada una, por mes anticipado, por su equivalente en 15 cuotas mensuales empezando dentro de dos meses, de tal manera que cada una de estas cuotas disminuya en \$ 4.000 cada mes; tasa de interés del 28% MV.
- 1.3 Hallar el valor de contado de un artículo adquirido con el siguiente plan: cuota inicial de \$ 130.000 y 20 cuotas mensuales; \$ 15.500 es el valor de la primera, \$ 15.700 la segunda, \$ 15.900 la tercera y así sucesivamente, sabiendo que la tasa de intereses sobre el saldo es del 30% nominal mensual.
- 1.4 Una persona necesita reunir \$ 6.500.000 para dentro de cinco años; con tal fin abre una cuenta de ahorros hoy en una corporación de ahorro que abona el 30% nominal mensual. La cuenta de ahorros la inicia hoy con un depósito de \$ 350.000 y luego con depósitos así: \$ R dentro de cinco meses, \$ 2R dentro de seis meses, \$ 3R dentro de siete meses, y así sucesivamente. Hallar el valor de R para que dentro de cinco años se tenga la suma deseada.
- 1.5 Sustituir una serie de pagos de \$ 730.000 semestrales a perpetuidad o a término indefinido por su equivalente en una serie de pagos mensuales también a perpetuidad, de tal manera que estos pagos aumenten cada mes en \$ 9.300. Determinar la nueva serie de pagos si el dinero rinde el 2,4% mensual.
- 1.6 Para una serie de pagos mensuales de \$ 5.000 cada mes durante el primer año, de \$ 6.000 cada mes durante el segundo año, de \$ 7.000 cada mes durante el tercer año y así sucesivamente y por espacio de diez años, calcular el valor presente teniendo en cuenta un rendimiento del dinero del 3% mensual.
- 1.7 Resolver el problema 5.6 si la serie es a perpetuidad.
- 1.8 Resolver el problema 5.6 si la tasa de interés es del 3% mensual durante los cinco primeros años y del 3,5% mensual durante los cinco años siguientes.
- 1.9 Una serie de pagos mensuales se inicia hoy con un pago de \$ 5.000 y aumentará en una cantidad fija de dinero hasta llegar a \$ 11.000 dentro de 12 meses; a partir de ahí disminuirá en otra suma fija de dinero hasta llegar a \$ 7.400 diez meses más tarde. Para una tasa de interés del 32% anual, hallar el valor presente de esta serie.
- 1.10 Un artículo que de contado vale \$ 1.185.000 se adquiere financiado con una cuota inicial de \$ 540.000, 12 cuotas mensuales de \$ 8.500, la primera en cinco meses, \$ 9.000 en seis meses, \$ 9.500 en siete meses y así sucesivamente, y una última cuota de \$ X dentro de un año y medio. Si la tasa de interés que se cobra es del 2,6% mensual, hallar el valor de \$ X.
- 1.11 Una máquina fotocopidora tiene un costo inicial de \$ 11.455.000; se calcula que pueda sacar 25.000 fotocopias al mes a un precio de \$ 40 cada una durante los dos primeros años, de \$ 45 cada una durante los dos años siguientes, de \$ 50 cada una durante los dos años siguientes, y

así sucesivamente. Los costos de mantenimiento y operación se estiman en \$ 310.000 el primer mes y aumentarán en \$ 10.000 cada mes. Si la vida útil de la máquina es de 12 años con un valor de mercado de \$ 13.500.000, hallar el valor presente de los ingresos y el valor presente de los egresos para una tasa de oportunidad del 34% anual.

- 1.12** El mantenimiento mensual de una fuente de abastecimiento es cíclico y tiene los siguientes valores mensuales: \$ 120.000, \$ 122.000, \$ 124.000 y así sucesivamente para un año. Si estos valores se repiten en cada uno de los años siguientes a término indefinido, hallar el costo capitalizado o valor presente de esta serie perpetua, para una tasa del 34,5% anual.
- 1.13** En el problema 5.12, suponer que la tasa sea del 34,5% anual durante los 10 primeros años y del 39% anual de ahí en adelante.
- 1.14** La producción de un pozo de petróleo se estima en 600.000 barriles por año y aumentará a razón de 20.000 barriles por año hasta finales del sexto año; y a partir de esa fecha la producción disminuirá a razón de 30.000 barriles por año durante 10 años más. El precio del barril se estima en \$ 23.000 durante los 10 primeros años y en \$ 28.000 de ahí en adelante. Para una tasa de oportunidad del 33% anual, hallar el valor presente de los futuros ingresos.
- 1.15** Un pequeño proyecto requiere una inversión inicial de \$ 20.000.000. Este dinero se obtiene de una institución bancaria que cobra un interés del 36% anual y exige que la deuda se amortice en cinco años mediante cuotas trimestrales que aumenten en el 5% cada trimestre y cancelando la primera dentro de seis meses. Para cubrir esta obligación la empresa dueña del proyecto deposita la mitad de las utilidades mensuales del proyecto en una cuenta que pagará un interés del 3% mensual durante los cinco años, de tal manera que cada trimestre se pueda cubrir la cuota del banco. Se pregunta: ¿cuáles deberán ser las utilidades promedio mensuales (iguales) del proyecto, de tal manera que la empresa pueda cumplir la obligación con el banco?
- 1.16** Una empresa obtiene ingresos así: el primer mes recibe \$ 300.000 y de ahí en adelante los ingresos aumentan en el 3% cada mes; a su vez, la empresa tiene unos gastos de \$ 150.000 el primer mes, \$ 160.000 el segundo mes, \$ 170.000 el tercer mes y así sucesivamente. Si en estas condiciones la empresa operó durante cuatro años, hallar al final de este tiempo la diferencia entre el valor futuro de los ingresos y el valor futuro de los egresos, para una tasa del 3,5% mensual.
- 1.17** Resolver el problema 5.16 para una tasa de interés del 3% mensual durante los dos primeros años y del 3,5% mensual de ahí en adelante.
- 1.18** Resolver el problema 5.15 si la cuenta paga una tasa del 23% anual.
- 1.19** Resolver el problema 5.15 si la tasa que paga la cuenta es del 49,6% anual y explicar desde el punto de vista financiero las respuestas obtenidas en los problemas 5.15, 5.18 y 5.19.
- 1.20** En el problema 5.11, determinar el número de fotocopias promedio mensual que podrá sacarse en la fotocopidora para que el valor presente de los ingresos sea igual al valor presente de los egresos.
- 1.21** Un obrero está devengando un salario mensual de \$ 96.000 y decide ahorrar, en una corporación que paga un interés del 29% nominal trimestral, cantidades así: el primer mes la mitad del salario,

el segundo mes la cuarta parte del salario, el tercer mes la octava parte del salario y así sucesivamente por espacio de dos años. Hallar la cantidad que tendrá acumulada al final de este tiempo.

- 1.22** Una persona debería cancelar una deuda mediante cuotas mensuales iguales de \$ 12.500 cada una y durante cuatro años con una tasa de interés del 36% nominal mensual. Desea sustituir los pagos anteriores por cuotas mensuales variables que aumenten cada mes en el 2% durante el mismo tiempo, pero para este caso la tasa de interés será del 38% nominal mensual. Hallar el valor de las cuotas 18 y 47 de esta última serie. Utilice el valor presente.
- 1.23** Resolver el problema 5.22 suponiendo ambas series a término indefinido o a perpetuidad.
- 1.24** Financiar \$ 6.000.000 de hoy a tres años con cuotas mensuales que aumenten en el 3% cada mes hasta el final del segundo año y de ahí en adelante permanezcan constantes. La tasa de interés será del 2,5% mensual durante los dos primeros años y del 36% anual de ahí en adelante.
- 1.25** Una deuda que debería pagarse en 48 cuotas al contado por mes vencido de \$ 12.000, \$ 12.500, \$ 13.000 y así sucesivamente, debe sustituirse por una serie equivalente de pagos uniformes mensuales y durante el mismo tiempo de la primera. Hallar el valor de esta anualidad, sabiendo que para ambos casos se utiliza una tasa de interés del 3% mensual durante los tres primeros años y del 4% mensual para el último año.
- 1.26** Resolver el problema 5.24 si la tasa de interés es del 2.5% mensual para el primer año y del 36% anual de ahí en adelante.
- 1.27** Una serie a término indefinido de pagos por trimestre vencido de \$ 10.000, \$ 10.500, \$ 11.000 y así sucesivamente, desea sustituirse por otra equivalente y también a término indefinido de pagos mensuales que aumenten en el 1% cada mes. Hallar el valor de esta nueva serie de pagos, si para ambas series se utiliza una tasa del 8% trimestral.
- 1.28** ¿Qué sucede con el problema 5.27 si la tasa de interés es del 1% mensual?
- 1.29** El Director Financiero de una empresa debe establecer un fondo para amortizar las cesantías de un empleado al cabo de 20 años de trabajo de este. El fondo consiste en un depósito el día en que el trabajador inicia labores y se hace en una institución bancaria que paga un interés del 33% anual. Si las cesantías se liquidan con 20 salarios mensuales iguales a los devengados en el último año de trabajo, determinar el depósito que debe hacerse para un trabajador que empieza devengando un salario mensual de \$ 285.000 el primer año, sabiendo que gozará de un incremento del 24% cada año.
- 1.30** Determinar el valor de precio al contado de un activo si, financiado, se adquiere así: una cuota inicial de \$ 450.000, 18 cuotas mensuales iguales de \$ 40.000 cada una, y luego cuotas trimestrales de \$ 150.000 la primera, \$ 160.000 la segunda, \$ 170.000 la tercera y así sucesivamente hasta finales del cuarto año; finalmente, seis meses después de la última de estas cuotas trimestrales, un pago equivalente al 15% del valor de precio al contado. La tasa de interés es del 36% anual.
- 1.31** Resolver el ejercicio 5.29 si el salario mensual se reajusta en el 24% anual durante los 10 primeros años de trabajo y en el 27% anual de ahí en adelante, si además la institución bancaria paga un interés del 33% anual durante los ocho primeros años y del 38% anual de ahí en adelante.

- 1.32** En el problema 5.31 suponga que el fondo no consiste en un único depósito sino en depósitos mensuales que aumenten en el 0,1% cada mes. Determinar los depósitos mensuales.
- 1.33** Financiar una deuda de \$ 8.000.000 de hoy en 36 cuotas mensuales, sabiendo que la primera debe pagarse dentro de seis meses y de ahí en adelante las cuotas aumentarán en el 3% cada mes hasta la vigésima cuota, y a partir de ese momento las cuotas permanecerán constantes. La tasa de interés sobre el saldo será del 3% mensual durante los seis primeros meses y del 4% mensual de ahí en adelante.
- 1.34** Un artículo puede adquirirse con una cuota inicial de \$ 45.000 y 30 pagos mensuales de \$ 5.500, \$ 5.600, \$ 5.700 y así sucesivamente. Se desea obtener con 10 cuotas iguales por mes anticipado. Hallar el valor de estas nuevas cuotas sabiendo que el interés sobre el saldo es del 32% nominal mensual.
- 1.35** El productor de un artículo eléctrico paga bonificaciones por la patente que está explotando de este artículo. Debe pagar el valor de \$ 300 por unidad del artículo que fabrica. Estas bonificaciones deben pagarse al final de cada año; en el primer año se producen 80.000 unidades; en el segundo año, 82.000; en el tercer año, 84.000, y así sucesivamente. El productor está estudiando la posibilidad de solicitarle al dueño de la patente que, en vez de pagos anuales, se realice un único pago hoy o una serie de pagos por año anticipado, de tal manera que esta nueva serie de pagos aumente cada año en el 15% durante la vigencia de la patente. Si el productor del artículo tiene una tasa de oportunidad del 32% nominal mensual, determinar: (a) el valor del pago único; y, (b) el valor de la nueva serie de pagos para un período de cinco años.
- 1.36** Debe reunirse la suma de \$ 10.000.000 para dentro de cuatro años, y con tal fin se harán depósitos mensuales tales que cada uno sea igual a la mitad del anterior durante el primer año. Si estos mismos depósitos se repiten en cada uno de los tres años siguientes, determinar el valor del primer depósito de cada año, suponiendo una tasa de interés del 30% anual.
- 1.37** Un empleado que tiene en este momento un salario mensual de \$ 190.000 decide ahorrar, en una cuenta que paga un interés del 28% nominal trimestral, cantidades así: el primer mes la mitad del salario, el segundo mes la cuarta parte del salario, el tercer mes la octava parte del salario, y así sucesivamente durante tres años, y luego cantidades iguales de \$ 8.000 cada mes durante un año. Hallar la cantidad total que tendrá acumulada en la cuenta de ahorros al cabo de los cuatro años.
- 1.38** Se tiene hoy una deuda que debe pagarse en 24 cuotas por mes anticipado, así: \$ 10.000 la primera, \$ 11.000 la segunda, \$ 12.000 la tercera y así sucesivamente, y con un interés del 3% mensual. Se desea sustituir por el equivalente en 30 cuotas por mes vencido, empezando dentro de tres meses, de tal manera que estas cuotas disminuyan cada mes en \$ 1.000 y tengan un interés del 3,5% mensual. Determinar la nueva serie de pagos.
- 1.39** Sustituir una obligación, que consta de tres pagarés, así: \$ 2.000.000 para dentro de tres meses, \$ 2.850.000 para dentro de ocho meses y \$ 3.200.000 para dentro de un año y medio, todos con un interés del 32% MV, por su equivalente en cuotas mensuales que disminuyan en el 5% cada mes, debiendo pagarse la primera dentro de seis meses y la última dentro de 28 meses, sabiendo que para este caso se cobrará un interés del 3,3% mensual.

- 1.40** Una persona ahorra \$ 110.000 mensuales durante un año en una corporación. Cinco meses más tarde del último depósito, empieza a retirar cantidades mensuales que aumentan cada mes en el 5%. Si la corporación paga un interés del 28% nominal trimestral el primer año y el 29,5% nominal trimestral de ahí en adelante, y el primer retiro es de \$ 122.000, determinar el posible número de retiros y el valor del último retiro.
- 1.41** Un padre de familia necesita reunir \$ 4.000.000 al cabo de tres años y con este fin abre una cuenta de ahorros hoy depositando \$ 320.000. Los depósitos mensuales son iguales durante el primer año, y a partir de esa fecha aumentarán en el 2% cada mes hasta finales del tercer año. Se sabe que la cuenta de ahorros pagará un interés del 30% nominal mensual durante los dos primeros años y del 33% nominal mensual durante el tercer año. Hallar el valor de los depósitos mensuales iguales y los variables.
- 1.42** Un empleado decide ahorrar la quinta parte de su salario mensual en una cuenta de ahorros que paga un interés del 33% nominal trimestral. El empleado tiene en la actualidad un salario de \$ 335.000 mensuales y le será aumentado en el 22% cada año. Hallar la cantidad que tendrá ahorrada al cabo de 12 años.
- 1.43** Hallar el valor de la siguiente serie de pagos mensuales: el primer pago que es de \$ 50.000 se hace al cabo de un año y de ahí en adelante los pagos aumentarán en una cantidad de dinero constante durante tres años hasta llegar a un valor de \$ 96.000 el último pago, y a partir de este momento disminuirán en el 2% cada mes durante dos años. Si se toma una tasa de descuento del 3% mensual, calcular el valor presente.
- 1.44** Una obligación estaba pactada inicialmente para ser pagada en 20 cuotas mensuales de \$ 50.000 cada una. El deudor solicita que esta deuda le sea refinanciada a un mayor plazo; el acreedor acepta que el tiempo de pago sea de 30 meses, pero con cuotas mensuales anticipadas iniciando hoy, de tal manera que estas cuotas disminuyan cada mes en \$ 8.000. Hallar esta nueva serie de pagos sabiendo que se han acordado unas tasas de interés para los dos planes así: 2,8% mensual durante el primer año y 3,3% mensual de ahí en adelante.
- 1.45** ¿Cuánto vale al contado un artículo electrodoméstico sabiendo que el almacén distribuidor lo puede entregar financiado con el siguiente plan: cuota inicial equivalente al 30% del valor de contado, cuotas mensuales variables durante cuatro años empezando con \$ 1.000 la primera cuota y luego aumentarán en \$ 200 cada mes hasta finales del segundo año, y de ahí en adelante disminuirán en \$ 100 cada mes, y un último pago por valor de \$ 25.000 seis meses más tarde de la última de las cuotas mensuales? El almacén cobrará una tasa de interés del 26% nominal mensual durante el primer año y del 30% nominal mensual de ahí en adelante.
- 1.46** Una persona adquiere un crédito de \$ 5.000.000 para ser pagado en cuatro años con cuotas mensuales y un interés del 34% nominal mensual. La primera cuota será de \$ 155.000 y de ahí en adelante aumentarán en el 1,5% cada mes durante los dos primeros años. ¿Qué valor deberá tener la cuota 25 para que, aumentando de ahí en adelante cada mes en \$ 13.000, la deuda quede saldada en el tiempo estipulado?
- 1.47** Para cubrir una obligación por valor de \$ 4.000.000 dentro de tres años, el deudor decide hacer depósitos mensuales iguales durante el primer año y luego aumentarlos en el 18% cada año. Estos depósitos se hacen en una cuenta de ahorros que paga el 29,5% anual. Determinar el valor de los depósitos mensuales del primer año para que el deudor logre reunir los \$ 4.000.000 al cabo de los tres años.

- 1.48** Determinar el valor de contado de un electrodoméstico si, financiado, se adquiere con el siguiente plan: una cuota inicial equivalente al 40% del valor al contado y el resto en 24 cuotas mensuales de \$ 8.000, \$ 7.900, \$ 7.800 y así sucesivamente, sabiendo además que la primera cuota se debe pagar al cabo de dos meses; y por último, después de estas cuotas, 12 pagos mensuales de \$ 2.000 cada uno. La tasa de interés sobre saldo es del 30% nominal trimestral.
- 1.49** Un profesional que labora en una determinada empresa se fija la condición de depositar cada mes la sexta parte de su salario mensual en una institución que paga un interés del 32% anual. Actualmente este empleado tiene un salario mensual de \$ 750.000 y le será incrementado cada año en el 24%. ¿Cuál será el total acumulado al cabo de ocho años, sabiendo que en cada semestre de los últimos cinco años debió retirar \$ 1.200.000 por semestre anticipado para pagar la matrícula de uno de sus hijos?
- 1.50** Una corporación de crédito le otorga a usted un préstamo por valor de \$ 6.000.000 y le cobra un interés del 28% nominal mensual y un plazo de cinco años con cuotas mensuales variables. La primera cuota es de \$ 125.000 y las siguientes aumentarán en \$ 4.000 cada mes hasta finales del segundo año. ¿De cuánto deberá ser la cuota 25 para que si a partir de esa fecha las cuotas se aumentan en el 4% cada mes la deuda quede cancelada al final de los cinco años?
- 1.51** Financiar \$ 4.000.000 de hoy en cuotas mensuales que aumenten en el 3% cada mes, sabiendo que la primera cuota es de \$ 85.000 y el acreedor cobra una tasa interés del 3,2% mensual al cabo de los dos primeros años y del 3,6% mensual de ahí en adelante. Determinar el número de cuotas y el valor de la última cuota.
- 1.52** El mantenimiento de un edificio por término indefinido se espera que sea el siguiente: \$ 1.100.000 mensuales durante el primer año, \$ 1.125.000 mensuales durante el segundo año, \$ 1.150.000 mensuales durante el tercer año, y así sucesivamente. La empresa dueña del edificio desea establecer hoy un fondo que conste de un único depósito en una entidad bancaria que pagará un interés del 30% anual, de tal manera que cada mes se pueda retirar de allí el valor necesario para cubrir el costo de mantenimiento respectivo. Determinar el valor del depósito de hoy.
- 1.53** Resolver el problema 5.52 para el caso en que la entidad bancaria pague un interés del 30% anual durante los 10 primeros años y del 34% anual de ahí en adelante.
- 1.54** Un artículo se compraría a crédito mediante cuotas mensuales variables durante cinco años; \$ 2.500 es el valor de la primera y de ahí en adelante aumentaría en el 2% cada mes, hasta finales del tercer año, fecha a partir de la cual aumentaría en el 3% cada mes. Se desea pagar mediante dos pagos iguales, el primero hoy y el otro dentro de tres años. Determinar el valor de cada uno de estos pagos si la tasa de interés es del 3% mensual.
- 1.55** Resolver el problema 5.53 para el caso en el que cada año se haga un retiro adicional de \$ 2.600.000 y también por término indefinido.
- 1.56** Una institución financiera le otorga un crédito a usted por un valor de \$ 10.000.000, en las siguientes condiciones:
- Tiempo para amortizar la deuda: 4 años.
 - Tasa de interés: 29% nominal trimestral.

- c) Cuotas ordinarias mensuales iguales.
- d) Cuotas extras al final de cada trimestre calendario que aumentan en el 10% cada trimestre y la primera sea el doble de la cuota ordinaria uniforme.
- e) Cuotas adicionales al final de cada semestre calendario iguales al doble de la respectiva cuota trimestral extra.
- f) El crédito se otorga el 1 de febrero de 1990.

Hallar el valor de las cuotas mensuales uniformes y calcular el saldo existente el 1 de febrero de 1992.

- 1.57** Un empleado abre una cuenta de ahorros hoy con \$ 25.000 y dentro de un año empieza a hacer depósitos trimestrales de \$ 40, \$ 80, \$ 160, \$ 320 y así sucesivamente. Si la cuenta de ahorros paga el 28% nominal trimestral, hallar la cantidad acumulada que el empleado tendrá en su cuenta dentro de seis años, sabiendo además que durante los dos últimos años el empleado retiró \$ 40.000 cada trimestre.
- 1.58** Una deuda estaba pactada inicialmente de la siguiente manera: tiempo para amortizarla, 48 meses; pagos mensuales así: \$ 20.000 durante los seis primeros meses, \$ 25.000 durante los seis siguientes, \$ 30.000 durante los seis siguientes y así sucesivamente. Se trata de sustituirla por treinta pagos que aumenten en el 3% cada mes. Hallar el valor de estos nuevos pagos, si la tasa de interés pactada para cualquiera de los dos planes es del 2,5% mensual.
- 1.59** Presentar la tabla de amortización de un crédito de \$ 10.000.000 a tres años con cuotas trimestrales para cada uno de los siguientes planes y una tasa de interés del 8,5% trimestral:
- a) Inicialmente cuotas uniformes proyectadas a los tres años, pero al cabo de un año se hace un pago adicional equivalente al 20% del saldo existente en ese momento y el nuevo saldo refinanciado por el resto de tiempo en cuotas iguales.
 - b) Cuotas iguales durante el primer año y de ahí en adelante aumentarán en el 6% cada trimestre.
 - c) Cuotas iguales durante los dos primeros años y luego disminuirán en el 9% cada trimestre.
 - d) Cuotas que aumenten en el 6% cada trimestre durante el primer año y de ahí en adelante se mantendrán constantes.
 - e) Cuotas constantes durante los dos primeros años y luego aumentarán en \$ 100.000 cada trimestre.
 - f) Cuotas que disminuyan en \$ 200.000 durante el primer año y luego se mantengan constantes.
- 1.60** Un profesional recién egresado de la universidad se vincula a una empresa donde empieza devengando un salario de \$ 1.150.000 mensuales el primer año; la empresa le garantiza un aumento cada año del 24%, y este empleado decide ahorrar cada mes la décima parte de su salario mensual en una institución bancaria que promete pagarle el 2,5% mensual durante los cinco primeros años y el 3,2% mensual de ahí en adelante. ¿Cuánto tendrá ahorrado este profesional al cabo de 10 años?
- 1.61** Resolver el problema 5.60 con la condición de que el salario le sea aumentado en el 27,5% anual en los cinco últimos años y en el 24% anual en los cinco primeros años.
- 1.62** Una pequeña empresa produce y vende un determinado artículo. Los ingresos mensuales serán de \$ 930.000 el primer mes y después aumentarán en el 5% cada mes hasta finales del tercer año y de ahí en adelante permanecerán constantes. Los costos mensuales serán de \$ 620.000 durante los tres primeros años y de \$ 725.000 mensuales de ahí en adelante. La mitad de las utilidades

mensuales se depositarán en una cuenta de ahorros que pagará el 30% nominal trimestral durante los dos primeros años y el 33% nominal mensual de ahí en adelante. Si en estas condiciones la empresa operó durante seis años, hallar el total acumulado en la cuenta de ahorros al final de los seis años.

- 1.63** Una empresa produce 200 unidades de un artículo al mes. El precio por unidad es de \$ 12.500 el primer año, de \$ 13.000 en el segundo año, de \$ 13.500 en el tercer año y así sucesivamente. El costo por unidad del artículo es \$ 8.000, y la empresa invierte mensualmente la cuarta parte de las utilidades en una institución que paga el 30% anual durante los cuatro primeros años y el 31,5% AMV de ahí en adelante. ¿Cuánto tendrá ahorrado la empresa al cabo de nueve años?
- 1.64** Una entidad bancaria le hace un préstamo a un cliente por \$ 15.000.000 para adquirir una vivienda y le cobra un interés del 36,6% nominal trimestral sobre los saldos. El contrato inicial estipula un tiempo de 15 años para pagar la deuda con cuotas mensuales que aumenten cada mes en el 3%; además, se acepta que el deudor empiece pagando el primer mes una cuota de \$ 165.704. Al cabo de dos años, el deudor solicita que le sea revisado el sistema de financiación. Determinar el valor de la cuota 25 para que, continuamente con el mismo aumento mensual, la deuda quede saldada al cabo de los 15 años, como se había pactado inicialmente.
- 1.65** En el problema 5.64, si no se hace la revisión del crédito y el deudor continúa pagando las cuotas como lo venía haciendo y hasta completar el tiempo estipulado, ¿habría pagado el equivalente a qué deuda inicial?
- 1.66** Financiar una deuda de \$ 5.000.000 de hoy a cuatro años con cuotas que aumenten en el 3% cada mes durante los dos primeros años y luego disminuyan en el 2% cada mes, suponiendo una tasa de interés para el crédito del 33% nominal mensual.
- 1.67** Una serie de pagos mensuales a perpetuidad se inicia al cabo de diez meses con \$ 55.000 y de ahí en adelante se aumentarán cada mes en el 1,5%. Esta serie debe sustituirse por otra de pagos por trimestre anticipado, iniciando hoy con un pago de \$ 110.000, y de ahí en adelante aumentarán en una suma fija de dinero y también a perpetuidad. La tasa de descuento será del 2,8% mensual.
- 1.68** Se tiene hoy una deuda con una entidad bancaria por \$ 63.600.000. Inicialmente se pactó amortizar la deuda en 10 años con pagos mensuales que aumenten en el 2% cada mes. La entidad cobra una tasa del 30% nominal mensual. Trascurridos tres años, la entidad bancaria decide reajustar la tasa de interés cada año; sin embargo, la deuda puede seguir amortizándose con la misma tasa anterior, pero adicionándole a cada cuota de ahí en adelante una cantidad así: \$ 4.200 a la primera, \$ 4.400 a la segunda, \$ 4.600 a la tercera y así sucesivamente. Hallar el valor presente de las cuotas totales pagadas.
- 1.69** Financiar una deuda de \$ 5.000.000 de hoy a cinco años con cuotas mensuales que aumenten en \$ 10.000 cada mes durante los cuatro primeros años y luego se mantengan constantes. La tasa de interés es del 3% mensual durante los cuatro primeros años y del 4% mensual de ahí en adelante. Interpretar la respuesta.

PROBLEMAS II

- 2.1** Se deposita hoy la suma de \$ 1.600.000 en una corporación que paga un interés del 30% nominal trimestral. Cada mes se retira la tercera parte del saldo existente al final del mes anterior y simultáneamente se depositan \$ 210.000 cada mes, comenzando dentro de un mes. Hallar el saldo existente en la cuenta de ahorros al cabo de tres años.
- 2.2** Resolver el problema 1 si el primer retiro y el primer depósito se hacen ocho meses después del depósito inicial.
- 2.3** Hallar el valor presente de una serie de 15 pagos mensuales que se inician con \$ 5.000 al cabo de un mes y de ahí en adelante cada pago es igual a los $\frac{3}{4}$ del total acumulado hasta ese momento, antes del pago correspondiente. Descontar con una tasa del 30% nominal mensual.
- 2.4** Una persona está en capacidad de depositar cantidades mensuales variables a una entidad que paga el 2,8% mensual. Si D_t es el depósito en el mes t , se cumple: $D_t = \$ 100(1,028)^{t-1}$; para $t = 1, 2, \dots, 48$.
Hallar el total acumulado al cabo de cuatro años.
- 2.5** Resolver el problema 4 si:
- $D_t = \$ 100(1,3)^t$
 - $D_t = 100t + (1,04)^t$
- 2.6** Se inicia hoy un ahorro con un depósito de \$ 10.000 y luego depósitos mensuales de tal manera que cada uno de ellos sea igual a la quinta parte del total acumulado al final del mes inmediatamente anterior. Si el dinero rinde el 2,8% mensual, hallar el total acumulado al cabo de tres años.
- 2.7** Se dispone de la suma de \$ 800.000 hoy en una entidad que paga un interés del 28% nominal mensual. Cada mes se retira la cuarta parte del saldo existente en ese momento, empezando dentro de dos meses, y a su vez se depositan cada mes \$ 8.000; si el primero de estos depósitos es realizado al cabo de un mes, ¿en qué momento el saldo existente será de \$ 100.000, si los saldos se calculan después de hacer el depósito respectivo?
- 2.8** Resolver el problema 7 si los saldos se toman antes de hacer el depósito respectivo.
- 2.9** Las utilidades de una empresa son así: cada trimestre recibe las tres cuartas partes de las utilidades recibidas en el trimestre inmediatamente anterior. La mitad de las utilidades trimestrales la depositan en una cuenta que paga el 28% nominal trimestral, y la otra mitad en otra cuenta que paga el 30% anual. Hallar el total acumulado que la empresa tendrá en las dos cuentas al cabo de 10 años, sabiendo que las utilidades de la empresa en el segundo trimestre fueron de \$ 72.000.
- 2.10** Resolver el problema 9 sabiendo que la empresa paga al Gobierno cada año un impuesto del 9% sobre los intereses devengados ese año en cada una de las cuentas de ahorro.
- 2.11** Resolver el problema 9 si la empresa retira anualmente de cada cuenta de ahorros \$ 90.000.

- 2.12** Una persona hace un depósito hoy por valor de \$ 200.000 en una cuenta de ahorros y luego cada mes retira una cantidad igual a la mitad de los intereses devengados en ese mes. Si la cuenta de ahorros le paga un interés del 2,5% mensual, hallar la cantidad que tendrá acumulada al cabo de cuatro años.
- 2.13** Una corporación de ahorros ofrece los siguientes intereses durante el tiempo que se mantenga una cuenta de ahorros: el 2,4% mensual sobre los saldos y cada año el 5% adicional sobre el saldo existente en ese momento después de contabilizados los intereses correspondientes al 2,4%. Hallar el valor total acumulado al cabo de 18 años en una cuenta que se inicia hoy con \$ 2.100.000, si además cada año se paga un impuesto de \$ 45.600.
- 2.14** Resolver el problema 13 si, además del depósito inicial, cada mes se abonan \$ 55.000.
- 2.15** Debe reunirse \$ 2.700.000 para dentro de cinco años. Con tal fin se abren hoy dos cuentas de ahorros: la primera con un depósito único de \$ 250.000 y la segunda con 45 depósitos mensuales empezando dentro de un mes, de tal manera que cada depósito sea equivalente a la décima parte del total acumulado en ese momento en la cuenta antes del depósito respectivo. Si la primera cuenta paga un interés del 27% nominal mensual y la segunda el 28% nominal mensual, hallar el valor del primer depósito en la segunda cuenta de ahorros, de tal manera que dentro de cinco años se tenga la suma deseada al reunir los saldos de las dos cuentas.
- 2.16** Por disposición del Gobierno, toda inversión en una compañía debe pagar unos impuestos equivalentes al 10% de los intereses devengados en ese año. Si hoy invertimos \$ 2.350.000 en esa compañía que paga un interés del 36% anual, hallar el total acumulado por esta inversión al cabo de 10 años.
- 2.17** Resolver el problema 16 suponiendo que cada trimestre depositamos la suma de \$ 150.000.
- 2.18** Se sabe que los ingresos mensuales de una compañía A son, en cualquier mes, iguales a los 5/4 de los costos de ese mes. Las utilidades se reinvierten en otra compañía B, donde el dinero rinde el 34% anual, pero a su vez se descuentan unos impuestos para pagar al Gobierno equivalentes al 0,75% mensual sobre las utilidades obtenidas en la compañía A. Hallar el valor total acumulado en la compañía B al cabo de tres años, sabiendo que el costo en el primer mes en la compañía A fue de \$ 10.000, de \$ 11.000 el segundo mes, de \$ 12.000 el tercer mes y así sucesivamente.
- 2.19** Si Y_t representa el ingreso en miles de pesos de una determinada empresa al final del mes t , y C_t el consumo en miles de pesos al final del mes t , se cumple que:
- $$Y_t = 3C_t + 1.000; \text{ y}$$
- $$Y_{t+1} = 0,5Y_t; \text{ con } C_0 = \$ 100$$
- La mitad del ingreso mensual se deposita en una cuenta que paga un interés del 3% mensual. Hallar el total acumulado en la cuenta de ahorros al cabo de dos años.
- 2.20** Resolver el problema 19 suponiendo que la empresa le paga mensualmente al Estado un impuesto equivalente al 0,8% de los intereses devengados en la cuenta de ahorros.
- 2.21** Se deposita hoy la suma de \$ 2.000.000 en una institución financiera que paga un interés del 31% nominal trimestral. Cada mes se retira la mitad de los intereses devengados en ese mes y a su vez se deposita la suma de \$ 10.000 mensuales, empezando dentro de un mes. Hallar el total acumulado en la cuenta de ahorros al cabo de cuatro años y medio.

- 2.22** Resolver el problema 21 si los depósitos mensuales son de \$ 210.000 el primer mes y de ahí en adelante aumentan en el 3% cada mes.
- 2.23** Se tiene la siguiente serie de pagos mensuales:
- Primer mes: \$ 400
- Segundo mes: \$ 800 + \$ 100 = \$ 900
- Tercer mes: \$ 1.600 + \$ 200 = \$ 1.800
- Cuarto mes: \$ 3.200 + \$ 300 = \$ 3.500
- y así sucesivamente por espacio de un año y medio. Calcular el valor presente de esta serie para una tasa de descuento del 2,5% mensual.
- 2.24** La compañía W tiene establecido que cada dos años abona a la cuenta de cada inversionista la tercera parte del total a favor del inversionista en ese momento, como participación de los rendimientos de la compañía. Se sabe también que todo capital invertido en esta compañía gana el 2% mensual. Si usted invierte hoy la suma de \$ 10.000 en la compañía W y también los rendimientos mensuales y bianuales, ¿cuánto tendrá acumulado al cabo de 14 años?
- 2.25** Con el fin de captar más dinero, una institución financiera promete pagar un interés del 29% nominal trimestral y, además, abona anualmente a cada cuenta de ahorros una cantidad igual al 18% de los intereses devengados en ese año. Estos abonos se hacen después de contabilizados los intereses correspondientes a la tasa de interés. ¿Cuánto se tendrá al cabo de 10 años en una cuenta de ahorros en esa institución si el depósito inicial fue de \$ 720.000?
- 2.26** Resolver el problema 25 si, además del depósito inicial, cada trimestre se depositan \$ 120.000.
- 2.27** Una persona tiene hoy la suma de \$ 600.000 en su caja menor y gasta cada mes la tercera parte de lo que tenía en el mes anterior. ¿En qué momento le quedará una suma de \$ 2.000 aproximadamente?
- 2.28** Resolver el problema 27 suponiendo que los \$ 600.000 están depositados en una cuenta que paga un interés del 36% anual.
- 2.29** Si una empresa capta dinero como inversión ofreciendo pagar el 30% nominal trimestral, pero a su vez cobra el 1% por trimestre anticipado sobre el total acumulado hasta ese momento por concepto de administración, hallar el monto existente dentro de ocho años por una inversión hoy de \$ 1.450.000.
- 2.30** Usted tiene una deuda hoy con una institución financiera por valor de \$ 5.000.000, que debe pagarse en un plazo de cinco años con cuotas mensuales variables, tales que cada una a partir de la segunda sea igual a tres veces los intereses de ese mes, con excepción del último pago, que debe ser \$ 250.000. Si la institución cobra un interés del 29% nominal mensual, ¿cuál deberá ser el valor de la primera cuota?
- 2.31** Un padre de familia debe cubrir los siguientes gastos: educación de un hijo, gastos varios del hogar y acumular una suma para su futuro. Con tal fin inicia una cuenta de ahorros hoy en una corporación que paga el 28% nominal trimestral. Hace un depósito hoy y luego cada mes nuevos depósitos tales que cada uno de ellos sea equivalente a la mitad de los intereses devengados

en ese mes. La educación del hijo tiene un costo promedio de \$ 1.350.000 por semestre vencido durante cinco años, y el primero de estos gastos se realizará dentro de un semestre; los gastos del hogar son de \$ 1.200.000 mensuales y además desea tener acumulada para dentro de cinco años la suma de \$ 13.000.000. Hallar la cantidad que debe depositar hoy el padre de familia para lograr sus objetivos.

- 2.32** Un profesional que trabaja en una compañía desde hace algún tiempo dispone en este momento de \$ 3.000.000 para invertirlos, así como la quinta parte de su salario mensual. En este año su salario mensual es de \$ 1.180.000 y le será reajustado en el 21% cada año. La inversión se hace en una corporación financiera que le paga un interés del 29% nominal trimestral y además le abona cada año el equivalente al 5% del total acumulado en ese momento; este acumulado se toma después de cargados los intereses correspondientes. Si la inversión se hace por espacio de 10 años, hallar el total acumulado al final de este tiempo.
- 2.33** Si usted inicia hoy una cuenta de ahorros con \$ 100.000 en una corporación que paga un interés del 28% nominal trimestral, cada trimestre usted retira la quinta parte del saldo que tenía en el trimestre anterior y a su vez deposita cantidades así: \$ 5.000 el primer trimestre, \$ 6.000 el segundo trimestre, \$ 7.000 el tercer trimestre y así sucesivamente, hallar el saldo al cabo de tres años antes y después del retiro y del depósito respectivos.
- 2.34** En una empresa los ingresos serán de \$ 2.350.000 el primer mes y aumentarán en el 2% cada mes; los costos en cualquier mes serán los $\frac{3}{4}$ de los costos del mes anterior. Si los costos del tercer mes se estiman en \$ 890.000, determinar el valor presente de las utilidades a una tasa de descuento del 31,6% AMV y para un tiempo de seis años de funcionamiento de la empresa.
- 2.35** Los ingresos, en millones de pesos, de una compañía por concepto de la venta de su producto han sido los siguientes en los 10 meses anteriores: 4 en el primer mes, 6 en el segundo mes y siguen así: 8, 7, 7, 9, 10, 12, 9 y 13. Si los gastos en los mismos 10 meses anteriores se estiman en \$ 4.500.000, ajustando los ingresos a una función exponencial o gradiente geométrico, determinar el valor futuro de las utilidades para una tasa de oportunidad del 33% ATV.
- 2.36** Una institución financiera capta dinero como inversión ofreciendo pagar el 30% nominal trimestral, pero, a su vez cobra, el 1,5% por trimestre anticipado sobre el total acumulado hasta ese momento por concepto de administración del dinero. Hallar el total acumulado al cabo de nueve años por una inversión inicial en esa institución por valor de \$ 4.200.000.
- 2.37** La función de demanda mensual de un producto está dada por $Q(t) = 130 + 2t$ unidades, donde t es el tiempo medido en meses y el artículo se vende a \$ 40.000 la unidad durante todo el año. Los costos de producción son de \$ 30.000 por unidad por todo el año.
- Si la mitad de las utilidades se depositan en una institución que paga un interés del 14% EA pero, al mismo tiempo, descuenta el 2% cada mes sobre los intereses devengados en ese mes, se pide determinar el total acumulado en la cuenta al final del año, sabiendo además que al principio del año se deposita en esa institución la suma de \$ 4.000.000.
- 2.38** Resolver el problema anterior suponiendo que el descuento sea del 0,2% sobre el total acumulado al final del mes antes del depósito respectivo.

- 2.39** Financian \$ 70.000.000 de hoy a tres años con el siguiente plan: cuota inicial del 15% del valor de la deuda original, 20 cuotas mensuales iguales, cancelando la primera dentro de dos meses, cinco cuotas trimestrales iguales cancelando la primera dentro de dos años; y se sabe que cada una de estas cuotas es igual al doble de la cuota uniforme mensual. Tasa de interés del 19% EA para el primer año y del 22% SV de ahí en adelante.
- 2.40** Un inversionista deposita hoy la suma de \$ 10.000.000 en una corporación que paga un interés del 26% TV. Cada mes retira el doble de los intereses devengados en ese mes y, además, se hacen depósitos que aumentan en \$ 20.000 cada mes; al final del primer mes se depositan \$ 200.000. Hallar el saldo que tendrá el inversionista en la corporación al cabo de cuatro años.
- 2.41** Se abre una cuenta en un banco con una inversión de \$ 4.000.000 hoy, \$ 2.000.000 dentro de dos meses y \$ 3.000.000 al cabo de cuatro meses, y a partir del quinto mes se deposita cada mes la suma de \$ 120.000 hasta finales del tercer año. El banco reconoce un interés del 14% EA para el primer año y del 12% EA de ahí en adelante, y además cada mes retiene el 0,2% sobre el saldo en ese momento antes del depósito y desde el momento en que se realiza la primera inversión. Determinar el total acumulado al cabo de los tres años.
- 2.42** Un banco ofrece un interés del 31% MV durante el tiempo que se mantenga una cuenta de ahorros; además, cada trimestre abona a la cuenta el 3% sobre el saldo que se tenga en ese momento después de liquidados los Intereses correspondientes. Usted debe determinar el total que tendrá en esa cuenta de ahorros un inversionista que abrió la cuenta en ese banco con un valor de \$ 2.500.000 y cada trimestre depositó la suma de \$ 80.000, sabiendo que mantuvo la cuenta por cinco años.
- 2.43** Una inversión se inicia hoy con \$ 42.000.000. El dinero rinde el 18% MV y al principio de cada mes se hace un descuento del 0,25% sobre el saldo que se tenga en ese momento después de liquidados los intereses, pero antes del depósito. Si al final de cada mes el inversionista deposita la suma de \$ 100.000, se pide hallar el total acumulado que se tendrá al cabo de dos años antes del depósito, sabiendo que en esa fecha no se hace el descuento.
- 2.44** En una determinada institución financiera operan las siguientes condiciones para los inversionistas: se reconocerá un interés del 18,6% MV; cada mes se hará una retención del 1,5% sobre los intereses devengados en ese mes y se descontará cada mes el 0,05% sobre el saldo que se tenía en el mes inmediatamente anterior por concepto de administración del dinero.
- Si una persona invierte en esa institución la suma de \$ 45.000.000 inicialmente y además cada mes deposita \$ 80.000, empezando estos depósitos dentro de un mes, se pide determinar el monto que se tendrá acumulado dentro de dos años y medio.
- 2.45** En la siguiente tabla se muestran las utilidades mensuales de una empresa (en millones de pesos) para los seis meses anteriores:

Mes	1	2	3	4	5	6
Utilidad	2.300	1.500	2.800	2	2.600	3

- a) Utilizando una función exponencial, estimar las utilidades para los siguientes seis meses.
- b) Si la empresa invierte cada mes las utilidades estimadas más una cantidad adicional de \$ 150.000 cada mes, estimar si con esos seis ahorros mensuales la empresa podrá cancelar al final de los seis meses una deuda que en esa fecha tendrá un valor de \$ 20.000.000, sabiendo que el dinero invertido gana un interés del 14,88% MV.

- 2.46** Usted, como Gerente de un proyecto de inversión que produce y vende un cierto artículo, ha tenido que realizar un estudio de mercado y ha encontrado que cuando el artículo se vende a \$ 50.000 la unidad, se venden 82 unidades por mes, y que por cada disminución de \$ 2000 por unidad se venderán tres unidades más cada mes; se pide:
- Determinar la función de demanda dependiendo del precio por unidad.
 - Si el costo por unidad es de \$ 28.000 y el primer mes vende el artículo a \$ 38.000 y luego aumenta en \$ 500 cada mes, estimar el total que usted tendrá acumulado al cabo de 60 meses, sabiendo que las utilidades mensuales se reinvierten al 13,5% EA.

- 2.47** Resolver el problema anterior suponiendo que la tasa de interés a la cual se reinvierten las utilidades sea del 13,5% EA para los tres primeros años y del 16,4% EA de ahí en adelante, pero cada mes hay que pagar un impuesto al Gobierno del 2% sobre los intereses devengados en ese mes.

- 2.48** El estudio de mercado para la venta del producto en un determinado proyecto arrojó la siguiente información sobre la cantidad vendida Q en función del precio p , en los siete meses anteriores:

t (meses)	1	2	3	4	5	6	7
p (miles de \$)	20.300	22	21.600	23	23.800	24	25.200
Q (utilidad/mes)	1.800	1.750	1.820	1.710	1.780	1.770	1.640

Hallar la función exponencial de precio y de cantidad que más se ajuste a la información anterior y estimar:

- La demanda mensual para los próximos seis meses.
 - El ingreso mensual para esos seis meses y el valor futuro al final de ese tiempo suponiendo que se invierte cada mes la mitad de los ingresos de esos seis meses a una tasa del 18% MV.
- 2.49** Respecto del problema anterior, suponga que los costos mensuales del proyecto son del 60% de los ingresos y que el Gerente del proyecto invierte cada mes la mitad de las utilidades mensuales en una institución que paga unos intereses del 11,5% EA durante los cinco primeros meses y del 9,6% EA de ahí en adelante. Usted debe estimar el total que tendrá acumulado al cabo del año como fruto de la inversión de la mitad de las utilidades mensuales.
- 2.50** Una empresa que produce y vende un determinado producto tiene una función de demanda mensual dada por $Q(p) = 300 - 6p$ unidades, donde p es el precio por unidad en miles de pesos. Además, se ha establecido que el precio por unidad durante el primer semestre será de \$ 20.000 y aumentará en \$ 1.000 cada semestre. Si los costos totales semestrales son el 60% de los ingresos y la empresa invierte mensualmente la tercera parte de sus utilidades, se pide determinar el total que tendrá la empresa ahorrando por este concepto al cabo de ocho años, sabiendo que el dinero rinde el 18,24% MV durante los tres primeros años y el 21% EA de ahí en adelante.

- 2.51** Una persona invierte hoy la suma de \$ 11.000.000 en una institución que paga el 2,3% mensual de interés sobre el saldo. Por una disposición del Gobierno, a toda inversión en esta institución que sea igual o superior a \$ 15.000.000 se le hará una retención mensual del 2% sobre los intereses devengados en ese mes; se pide:

- Hallar el total acumulado dentro de seis años.
- ¿Dentro de cuánto tiempo el inversionista habrá triplicado su inversión inicial?

- 2.52** Una fábrica de zapatos de la ciudad de Bucaramanga ha obtenido ingresos (en millones de pesos) en los 12 meses anteriores de: 8.300 el primer mes, 9.400 el segundo mes y de 7.200, 8.500,

9.600, 10.400, 9.800, 10.200, 10.600, 11, 10.800 y 14.300 para los siguientes meses. Se sabe que con el 60% de los ingresos mensuales se cubren los costos de los respectivos meses.

- Utilice una función exponencial para estimar las utilidades mensuales del siguiente año y medio, suponiendo que el mercado tendrá un comportamiento similar al del año anterior.
- Si la empresa invirtiera el 80% de esas utilidades estimadas en una institución que ofrece el 10,6% EA para el primer año y el 9,3% EA de ahí en adelante, ¿cuánto tendría ahorrado la empresa al cabo de un año y medio?

2.53 En el ejercicio anterior, suponga que la empresa fabricante de calzado, además de invertir cada mes el 80% de las utilidades de la empresa, también invierte cada mes la suma de \$ 3.000.000, pero en este caso la institución le hace una retención cada mes del 1,2% sobre los intereses devengados en ese mes. Se pide hallar el total que tendrá acumulado la empresa en esa institución financiera al cabo de un año y medio.

2.54 En la siguiente tabla se muestra la cantidad (en cientos de unidades) vendidas mensualmente por una fábrica durante los siete meses anteriores:

t (meses)	1	2	3	4	5	6	7
q (unidades)	32	36	31	30	34	36	35

A partir de la función lineal que más se ajuste a la información anterior, determinar los ingresos mensuales de la fábrica para los próximos cuatro años, y suponiendo que el precio por unidad es de \$ 5.000, hallar el monto que se tendrá al cabo de cinco años al invertir la quinta parte de los ingresos mensuales en una entidad que pagará el 24% EA durante los tres primeros años y el 19,3% EA de ahí en adelante.

2.55 En cierto proyecto que produce y comercializa un determinado producto, se tiene la siguiente información sobre los ingresos y egresos mensuales durante el año inmediatamente anterior:

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ingresos (millones de \$)	4,8	5,2	4,1	5,6	6,1	5,3	6,7	7,1	6,4	7,8	6,9	7,4
Egresos (millones de \$)	2,7	3,1	2,8	3,6	4,3	3,9	4	4,3	3,7	4,4	5	5,2

Hallar la función exponencial que más se ajuste a los ingresos mensuales y la función lineal que más se ajuste a los egresos mensuales.

A partir de las funciones anteriores, usted debe estimar el total que se tendría al cabo del año y medio siguiente, suponiendo que el administrador del proyecto invierte las utilidades mensuales en una institución que pagará una tasa de interés del 2,1% mensual para el primer año y del 1,85% mensual de ahí en adelante.

2.56 Resolver el problema anterior suponiendo que cada mes la institución donde se invierten las utilidades hace una retención del 1,2% sobre los intereses devengados en ese mes y que el administrador del proyecto, además de invertir cada mes las utilidades, retira cada mes la suma de \$ 300.000.

2.57 Las utilidades (en millones de pesos) en una compañía fueron, para los ocho meses anteriores, como se muestran en la tabla siguiente:

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8
Utilidad	4,3	4	3,6	4,1	3,2	3	3,4	3,1

A partir de una función exponencial, estimar las utilidades mensuales futuras.

La compañía invertirá cada mes la mitad de sus utilidades más una suma fija de \$ 1.000.000 cada mes en una institución que abona el 1,8% mensual durante los dos primeros años y el 15,39% EA de ahí en adelante.

Se pregunta si la compañía logrará acumular por este ahorro, para dentro de cuatro años, la suma necesaria para cubrir en esa fecha una deuda por valor de \$ 54.000.000 de hoy y por la cual le cobrará el 19,6% EA.

- 2.58** Las utilidades mensuales de una empresa dedicada a la producción y venta de un cierto artículo fueron las siguientes para los seis meses anteriores:

Mes	1	2	3	4	5	6
Utilidad (miles de \$)	1.200	3.100	2.200	2.500	3.400	3.600

Se pide:

- Estimar, a partir de una función lineal, las utilidades en función del tiempo.
- Reinvertir las utilidades estimadas del próximo año en una institución que pagará un interés del 17% EA para los primeros cinco meses y del 19% EA de ahí en adelante, y determinar el total acumulado que se tendrá al cabo de un año.

- 2.59** Resolver el problema anterior para el caso en que la función de la parte a) sea exponencial.

- 2.60** Los valores de la tasa mensual de captación de una institución financiera han sido los siguientes en los seis meses anteriores:

Mes	1	2	3	4	5	6
Tasa (%)	1,8	2,1	2,2	1,9	1,8	2

Hallar la función lineal estimada que más se ajuste a los datos anteriores, y con esta tasa variable cada mes estimar el total que se tendrá acumulado al cabo de seis meses por una inversión hoy de \$ 10.500.000, otra de \$ 6.300.000 dentro de tres meses y una última de \$ 4.200.000 en cinco meses.

- 2.61** La función de demanda mensual de una empresa para la venta de su producto está dada por $Q(p) = 280 - 0,5p$ unidades, donde p es el precio por unidad en miles de pesos. El precio por unidad para el primer año fue de \$ 8.000 y aumentará en \$ 1.000 cada año.

Se estima que los costos mensuales para los próximos cinco meses sean de \$ 1.200.000, \$ 1.000.000, \$ 1.600.000, \$ 2.000.000 y \$ 1.900.000 a partir de una función lineal de costos que más se ajuste a los datos anteriores. Estimar los costos mensuales para los próximos cuatro años y determinar el ahorro que tendrá acumulado la empresa al cabo de los cuatro años, sabiendo que las utilidades mensuales se invirtieron en una institución que paga el 18,6% MV.

- 2.62** La producción semestral de naranja en una granja dedicada al cultivo de cítricos ha sido la siguiente en los años 2003, 2004 y 2005, medida en cientos de kilos:

Semestre	I-03	II-03	I-04	II-04	I-05	II-05
Producción	32	36	30	39	36	43

Si el kilo de naranja se vende a \$ 700 y se puede invertir la tercera parte del ingreso semestral en una institución que promete pagar el 19% EA, estimar el total acumulado por la inversión de los años 2006 hasta 2010 inclusive, utilizando una función lineal para estimar la producción semestral.

- 2.63** Un pequeño proyecto que funciona hace ya buen tiempo arroja los siguientes datos sobre los ingresos y los egresos mensuales para los ocho meses anteriores medidos en millones de pesos:

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8
Ingreso	3,2	4,1	3,8	3,5	3	4	4,1	3,9
Egreso	1,1	1,2	1,4	1,8	2	2,4	2,6	2,7

Utilizando la función lineal que más se ajuste a los ingresos y la función exponencial que mejor lo haga a los egresos, estimar el valor presente neto (hoy) para el próximo año de funcionamiento del proyecto y para una tasa de oportunidad del inversionista del 14,03% EA.

- 2.64** Las ventas mensuales en unidades de un artículo de enero a junio de 2005 fueron las siguientes:

Mes	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
Ventas	840	765	800	850	890	810

Se sabe, además, que la utilidad por unidad es de \$ 10,500. Estimar el total que se tendrá acumulado por la inversión de las utilidades mensuales del año comprendido entre julio de 2005 y junio de 2006, si la rentabilidad del dinero es del 13% EA para 2005 y del 11,6% EA para 2006. Utilizar la función lineal que más se ajuste a la información dada sobre las ventas mensuales.

- 2.65** Resolver el ejercicio anterior utilizando la función exponencial que más se ajuste a la información dada.

- 2.66** Un pequeño proyecto ha generado utilidades mensuales, en miles de pesos, en los ocho meses anteriores de 5.020, 4.830, 5.310, 5.400, 5.120, 5.805, 5.080 y 5.750. Suponiendo que el proyecto continúe con un comportamiento similar en cuanto a utilidades, estimar el total que se tendrá acumulado al final del año por la inversión de la mitad de las utilidades mensuales del siguiente año, sabiendo que el dinero rendirá el 2,15% mensual. Utilizar una función lineal para estimar las utilidades de los próximos 12 meses.

- 2.67** Resolver el problema anterior suponiendo que las utilidades se estiman con un crecimiento lineal hasta el quinto mes y que de ahí en adelante se mantengan constantes, es decir, que se establezcan en el valor del quinto mes.

- 2.68** La tasa de inflación mensual para los 10 meses anteriores fue la que se muestra en la tabla siguiente:

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Inflación	1,2	0,9	0,85	0,6	0,95	1,3	1,4	0,8	-0,3	0,7

Estimar la inflación mensual para los próximos 12 meses con una función exponencial y estimar el valor de la reserva que se debe hacer hoy en una cuenta que paga el 13% MV durante los cinco primeros meses y el 12,3% MV de ahí en adelante, para poder cubrir los costos de materia prima para la producción de un artículo, sabiendo que el primer mes el costo será de \$ 3.200.000 y que de ahí en adelante se incrementará en la inflación estimada para ese mes.

Amortización y saldos

El objetivo de este capítulo es capacitar al lector para calcular e interpretar el saldo en cualquier momento de la operación financiera, para cualquier sistema de financiación que se utilice.

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

Al terminar el capítulo el lector estará en capacidad de:

- *Financiar una deuda inicial en cualquiera de las clases de flujo de caja vistos en los capítulos anteriores.*
- *Calcular el saldo en cualquier momento del tiempo de la financiación de la deuda.*
- *Hallar la composición de cualquiera de los pagos en una financiación.*
- *Proyectar saldos en el antiguo sistema UPAC y en el actual sistema UVR.*
- *Refinanciar saldos pendientes.*

6.1. Introducción

Con base en los temas estudiados en los capítulos anteriores, el estudiante debe estar en capacidad de diseñar y aplicar una gran diversidad de flujos de caja para todas aquellas operaciones financieras que requieran estos elementos. Una de tales operaciones, muy frecuente, es el pago de créditos, que solo tiene dos formas de realizarse: al contado o financiado. En este último caso es necesario utilizar las diferentes clases de diagramas de flujo de caja estudiados anteriormente, y por eso a esta altura de la materia el estudiante ya puede comprometerse con el diseño de diferentes formas de pagar una obligación, según las condiciones específicas estipuladas por el acreedor y acordadas con el deudor. Es necesario, entonces, presentar temas como la amortización de obligaciones, saldos, refinanciaciones y algunos casos prácticos como el sistema UPAC, el actual sistema UVR y los créditos bancarios, entre otros.

6.2 Amortización

DEFINICIÓN 6.1

La amortización de una obligación o deuda se define como el proceso mediante el cual esta es pagada junto con sus intereses, en una serie de pagos y en un tiempo determinado.

Por ejemplo, el pago en cuotas mensuales cuando se adquiere una vivienda financiada, las cuotas que se pagan al adquirir un automóvil, un electrodoméstico, un crédito bancario, etcétera, cuando parte o toda la deuda original ha sido financiada a un plazo determinado.

Aun cuando muchos de estos casos ya han sido tratados en algunos ejemplos y problemas de capítulos anteriores, aquí estudiaremos por ahora otros aspectos complementarios, como los sistemas equivalentes de amortización, la selección del mejor sistema de amortización, el diseño de sistemas, entre otros, mientras se entra a tratar otros temas como la composición de las cuotas, los derechos sobre un activo, la refinanciación de saldos, las tablas de amortización, etcétera.

SISTEMAS DE AMORTIZACIÓN

Para la amortización de una misma obligación pueden presentarse varios sistemas, todos ellos equivalentes desde el punto de vista financiero.

EJEMPLO 6.1

Una deuda por \$ 1 millón de hoy debe amortizarse en un plazo de un año en cuotas mensuales y un interés del 2,6% mensual.

- a) Un sistema puede ser el de cuotas mensuales iguales; este caso corresponde a una anualidad de las vistas en el capítulo 4. Para este caso tendremos cuotas mensuales de:

$$A = \$ 98.078,3 \text{ cada una}$$

- b) Otro sistema puede ser el de cuotas mensuales que aumenten, por ejemplo, en \$ 2.000 cada mes. Este caso corresponde a un gradiente aritmético creciente, en el que la primera cuota será de: $A = \$ 87.689,1$, o cuotas que disminuyan cada mes en \$ 2.000, y corresponderá a un gradiente aritmético decreciente, cuya primera cuota será de:

$$A = \$ 108.467,6$$

- c) Otro sistema puede ser el de cuotas mensuales que aumenten en una tasa constante; por ejemplo, del 2% cada mes. Este corresponde a un gradiente geométrico creciente, cuya primera cuota será de:

$$A = \$ 88.285$$

Todos los casos anteriores corresponden a sistemas de cuotas mensuales vencidas en los que cada cuota amortiza tanto capital como intereses. Aplicando temas vistos en los dos capítulos inmediatamente anteriores, pueden establecerse los sistemas correspondientes a las series anticipadas y diferidas para los casos expuestos en los literales (a), (b) y (c) anteriores.

- d) También puede presentarse el caso de amortizar el capital, por ejemplo, en cuatro cuotas trimestrales iguales y los intereses del 8% por trimestre vencido; entonces las cuotas totales quedarán así:

$$\text{Primer trimestre} = 250.000 + 0,08(1 \text{ millón}) = \$ 330.000$$

$$\text{Segundo trimestre} = 250.000 + 0,08(750.000) = \$ 310.000$$

$$\text{Tercer trimestre} = 250.000 + 0,08(500.000) = \$ 290.000$$

$$\text{Cuarto trimestre} = 250.000 + 0,08(250.000) = \$ 270.000$$

También puede ocurrir el caso similar al anterior pero con un interés del 7,4% por trimestre anticipado; entonces las cuotas totales quedarán así:

$$\text{Principio primer trimestre} = 0,074(1 \text{ millón}) = \$ 74.000$$

$$\text{Principio segundo trimestre} = 250.000 + 0,074(750.000) = \$ 305.500$$

$$\text{Principio tercer trimestre} = 250.000 + 0,074(500.000) = \$ 287.000$$

$$\text{Principio cuarto trimestre} = 250.000 + 0,074(250.000) = \$ 268.500$$

$$\text{Final cuarto trimestre} = 250.000$$

Todos los sistemas expuestos anteriormente para la amortización de \$ 1 millón a un año, sean con cuotas mensuales o trimestrales, son equivalentes financieramente, puesto que las tasas de interés respectivas son equivalentes.

Sin embargo, en la práctica un deudor puede preferir un sistema a otro dependiendo, por ejemplo, de la disponibilidad de recursos o de otras ventajas externas a las puramente financieras que él pueda ver en un sistema.

Los casos expuestos anteriormente no son los únicos posibles sino, por lo general, los más comunes. Con la información recibida en los capítulos anteriores, el estudiante deberá diseñar nuevos sistemas de amortización de esta deuda y que sean equivalentes a los anteriores.

Como ejercicio práctico, en este momento el alumno debe visitar una entidad financiera o comercial y enterarse, por su cuenta, de algunos de los sistemas que esa institución esté utilizando para que los deudores amorticen sus obligaciones.

6.3 Saldos

DEFINICIÓN 6.2

Para una deuda determinada, se llama saldo al cabo de un tiempo a la cantidad o suma que en ese momento aún falta por amortizar.

Lo anterior equivale a decir que el saldo, en un determinado tiempo, es el valor que aún está debiéndose en ese momento.

Según la deuda original y el sistema y condiciones de amortización de ella, en la mayoría de casos, a medida que se hacen abonos o pagos el valor de la deuda disminuye, es decir, el saldo se reduce. Sin embargo, existen algunos sistemas en los que el saldo va creciendo en la primera parte del tiempo de amortización para luego disminuir hasta llegar a 0, como sucede con la mayoría de sistemas de amortización para créditos en corporaciones de ahorro y vivienda cuando los valores se miden en pesos y el crédito es a largo plazo. Conocer el saldo de una deuda u obligación, o proyectarlo, es de gran im-

portancia en las operaciones financieras, entre otras para efectos presupuestarios, fiscales, de abonos adicionales, patrimoniales y, en general, para proyecciones financieras de la empresa o la persona.

En términos generales y desde el punto de vista del cálculo, se dice que, según una deuda original, el tipo de interés que se cobra, el sistema de amortización y el tiempo para su cancelación, el saldo en cualquier momento es igual a:

- i) El valor futuro en ese momento de la deuda original (o proyección de la deuda original) menos el valor futuro de las cuotas canceladas hasta ese momento; o,
- ii) el valor presente, en ese momento, de las cuotas que aún faltan por pagar.

Los dos conceptos anteriores son equivalentes siempre y cuando no exista otra clase de interés involucrado en la operación, como intereses de mora, y que el deudor ya haya incurrido en estos intereses.

Veamos cómo llegar a expresiones que, independientemente del sistema de amortización de una deuda, nos lleven al cálculo del saldo en cualquier momento.

Sea una deuda original D_0 con un sistema de amortización en n pagos periódicos, donde P_t será el pago en el período t , y un interés del $i\%$ por período.

El diagrama de flujo de caja será:

Donde S_t y S_{t+1} representan los saldos en los períodos t y $t + 1$ respectivamente, después de los pagos correspondientes, P_t y P_{t+1} .

La relación entre estos saldos será:

$$S_{t+1} = S_t + iS_t - P_{t+1}$$

Es decir:

$$S_{t+1} = (1 + i)S_t - P_{t+1}, \text{ con } S_0 = D_0$$

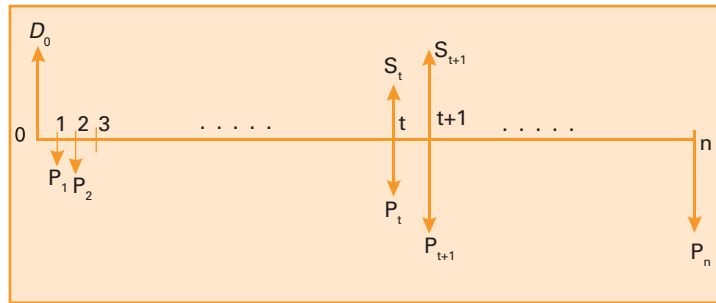


FIGURA 6.1

(6-1)

Con base en la ecuación (6-1), podemos determinar el saldo en cualquier momento (período) t , según sea el sistema de pagos:

- a) Si el sistema de amortización es de pagos iguales –es decir, $P_t = A$ –, entonces la ecuación (6-1) se transforma en:

$$S_{t+1} = (1 + i)S_t - A, \text{ con } S_0 = D_0$$

Y corresponde a una ecuación de diferencia finita estudiada en el capítulo 2, cuya solución es:

$$S_t = D_0(1+i)^t - A \left[\frac{(1+i)^t - 1}{i} \right] \quad (6-2)$$

O sea:

$$S_t = D_0(F/P, i\%, t) - A(F/A, i\%, t) \quad (6-3)$$

Según la expresión (6-2), si $t = 0$, entonces $S_0 = D_0$; y si $t = n$, entonces $S_n = 0$. Ahora, como $D_0 = A(P/A, i\%, n)$, al sustituirlo en la expresión (6-3) llegamos a:

$$S_t = A(P/A, i\%, n - t) \quad (6-4)$$

La expresión (6-4) corresponde a lo expuesto en el numeral (ii) anterior.

EJEMPLO 6.2

Un electrodoméstico tiene un precio al contado de \$ 475.000 y puede adquirirse con una cuota inicial de \$ 52.020 y el resto financiado a dos años con cuotas mensuales iguales y con un interés del 2,5 % mensual. Hallar el saldo al cabo de 15 meses.

Solución

Primero determinemos la cantidad financiada. Esta es:

$$\$ 475.000 - \$ 52.020 = \$ 422.980$$

El estudiante deberá dibujar el diagrama de flujo y entonces:

Si **A** es la cuota mensual, se cumple que:

$$422.980 = A(P/A, 2,5\%, 24)$$

Es decir:

$$A = \$ 23.650$$

De tal manera que el saldo al cabo de 15 meses estará dado por:

$$S_{15} = 422.980(1,025)^{15} - 23.650(F/A, 2,5\%, 15) = \$ 188.511$$

si aplicamos la expresión (6-3).

También lo podemos calcular aplicando la expresión (6-4), y tendremos:

$$S_{15} = 23.650(P/A, 2,5\%, 9) = \$ 188.511$$

porque nueve son las cuotas que aún faltan por pagar.

Obtenemos así el mismo resultado tanto con la fórmula (6-3) como con la fórmula (6-4). Sin embargo, esto no implica que en todo problema pueda usarse cualquiera de las dos fórmulas indistintamente, puesto que en algunos casos no se conocen todos los datos necesarios para aplicar una u otra. Por ejemplo, cuando no se conoce el número total de cuotas (**n**), la fórmula (6-4) no es aplicable.

- b)** Si el sistema de amortización es de pagos o cuotas variables, por ejemplo que aumenten en una cantidad **\$ G** cada período, tendremos que $P_{t+1} = Gt + A$, donde **A** es el valor de la primera cuota. Reemplazando esta expresión en la ecuación (6-1), tenemos:

$$S_{t+1} = (1 + i)S_t - (Gt + A), \text{ con } S_0 = D_0$$

Esta es otra ecuación de diferencia de las estudiadas en el capítulo 2. El alumno debe resolver esta ecuación y llegar a la solución siguiente:

$$S_t = D_0(1 + i)^t - [A(F/A, i\%, t) + G(F/G, i\%, t)] \quad (6-5)$$

Solución esta que hace referencia a lo expuesto en el numeral (i) para esta clase de cuotas. Por un razonamiento similar al utilizado en la parte a), llegamos también a:

$$S_t = (A + tG)(P/A, i\%, n - t) + G(P/G, i\%, n - t) \quad (6-6)$$

Y significa que el saldo en el período **t** es igual al valor presente de las cuotas que aún faltan por pagar.

EJEMPLO 6.3

Resolver el ejemplo 6.2 suponiendo que las cuotas aumentan cada mes en \$ 2.000.

Solución

En primer lugar debe cumplirse la relación:

$$422.980 = A(P/A, 2,5\%, 24) + 2.000(P/G, 2,5\%, 24)$$

Así que:

$$A = 3.002,6$$

Para calcular el saldo al cabo de 15 meses, podemos emplear la expresión (6-5) o (6-6). Aplicando la primera de ellas tendremos:

$$S_{15} = 422.980(1,025)^{15} - [3.002,6(F/A, 2,5\%, 15) + 2.000(F/G, 2,5\%, 15)]$$

$$= \$ 324.204,6$$

El estudiante deberá calcular el saldo utilizando la fórmula (6-6).

- c) Si el sistema de amortización consta de cuotas variables que aumenten cada mes en la tasa constante del $k\%$, es decir que los pagos correspondan a un gradiente geométrico creciente, entonces tendremos:

$$P_{t+1} = A(1 + k)^t$$

donde A es el valor de la primera cuota.

Reemplazando esta expresión en la ecuación (6-1), llegamos a:

$$S_{t+1} = (1 + i)S_t - A(1 + k)^t, \text{ con } S_0 = D_0.$$

Esta es también una de las ecuaciones de diferencia estudiadas en el capítulo 2. El alumno deberá resolver esta ecuación y llegar a la solución siguiente:

$$S_t = D_0(1 + i)^t - \frac{A}{i - k} [(1 + i)^t - (1 + k)^t] \quad (6-7)$$

De nuevo, esta solución hace referencia a lo expuesto en el numeral (i) para esta clase de cuotas. También con un razonamiento similar a los anteriores, llegamos a:

$$S_t = \frac{A(1 + k)^t}{i - k} \left[1 - \left(\frac{1 + k}{1 + i} \right)^{n-t} \right] \quad (6-8)$$

Y significa que el saldo en el momento t es igual al valor presente de las cuotas que aún falta pagar.

EJEMPLO 6.4

Resolver el ejemplo 6.2 suponiendo que las cuotas aumenten cada mes en el 3%.

Solución

En este caso debe cumplirse la relación siguiente:

$$422.980 = \frac{A}{0,025 - 0,03} \left[1 - \left(\frac{1,03}{1,025} \right)^{24} \right]$$

De donde:

$$A = \$ 17.071,9$$

Para calcular el saldo al cabo de 15 meses, podemos utilizar la fórmula (6-7) o la (6-8). Aplicando la primera tenemos:

$$S_{15} = 422.980(1,025)^{15} - \frac{17.071,9}{0,025 - 0,03} [(1,025)^{15} - (1,03)^{15}]$$

$$= \$ 238.148,7$$

De nuevo, el estudiante deberá calcular el saldo utilizando la fórmula (6-8).

Como ejercicio adicional, el alumno debe obtener las fórmulas correspondientes al cálculo del saldo cuando el sistema de amortización sea un gradiente aritmético decreciente o un gradiente geométrico decreciente.

A continuación se muestran algunos ejemplos de aplicación de estas fórmulas en los que podrá observarse que lo básico es tener claridad sobre los enunciados de saldos, dados en los puntos (i) y (ii) al principio de este numeral 6.3.

EJEMPLO 6.5

Una empresa compra hoy una maquinaria por valor de \$ 35 millones, que pagará así: el 24% del valor del precio al contado con recursos propios hoy y el resto con un préstamo de una corporación financiera que le cobra a la empresa una tasa del 38% anual. La obligación con la corporación tendrá que pagarse en cuotas mensuales que aumenten el 2% cada mes y durante dos años y medio. Al cabo de un año y medio de estar amortizando la deuda, la empresa solicita que el saldo en esa fecha le sea refinanciado a 20 meses en cuotas mensuales iguales. Si para la refinanciación se cobra una tasa del 3,3% mensual, hallar el valor de las cuotas uniformes.

Solución

El diagrama de flujo de caja para la deuda de la empresa es el siguiente:

Tasa de interés: 38% anual, equivalente al 2,72% mensual.

A partir de aquí, lo primero es financiar la deuda. Según las condiciones del ejemplo, tenemos:

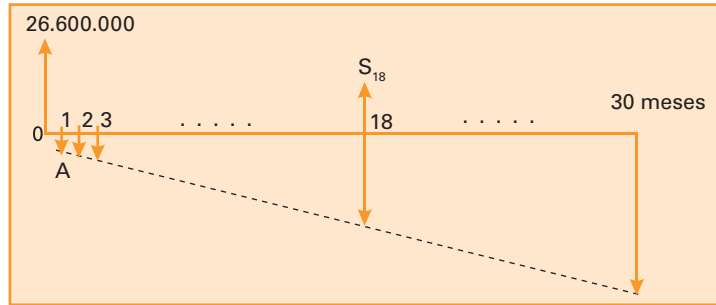


FIGURA 6.2

$$26.600.000 = \frac{A}{0,0272 - 0,02} \left[1 - \left(\frac{1,02}{1,0272} \right)^{30} \right]$$

$$\therefore A = \$ 1.006.713,6$$

Esta será la primera cuota.

El saldo, al cabo de un año y medio, estará dado por:

$$S_{18} = 26.600.000 (1,0272)^{18} - \frac{1.006.713,6}{0,0272 - 0,02} [(1,0272)^{18} - (1,02)^{18}]$$

$$= \$ 16.164.478$$

Luego, la refinanciación de este saldo en 20 cuotas mensuales iguales y un interés del 3,3% mensual estará dada por:

$$16.164.478 = X(P/A, 3,3\%, 20)$$

$$\therefore X = \$ 1.116.865$$

Y el valor de **X** será la cuota mensual uniforme.

EJEMPLO 6.6

Usted obtiene un crédito de un banco por valor de \$ 30 millones para ser pagado en 18 cuotas mensuales que disminuyan cada mes en \$ 20.000 y con un interés del 3,5% mensual. Al cabo de 10 meses usted hace un abono adicional de \$ 4 millones y solicita que el saldo le sea refinanciado en el tiempo que falta en cuotas mensuales iguales. Si para la refinanciación se mantiene la misma tasa, hallar el valor de estas cuotas uniformes.

Solución

El diagrama de flujo de caja para el deudor es el siguiente:

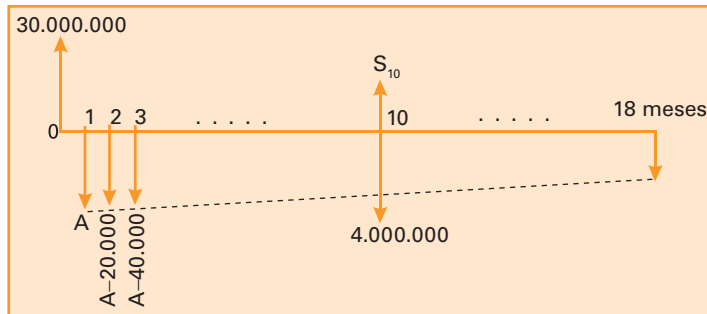


FIGURA 6.3

La financiación de la deuda es la siguiente:

$$30.000.000 = A(P/A, 3,5\%, 18) - 20.000(P/G, 3,5\%, 18)$$

$$\therefore A = \$ 2.426.103$$

A representa la primera cuota.

El saldo, al cabo de 10 meses, estará dado por:

$$\begin{aligned} S_{10} &= 30.000.000(1,035)^{10} - [2.426.103(F/A, 3,5\%, 10) - 20.000(F/G, 3,5\%, 10)] \\ &= \$ 14.845.762 \end{aligned}$$

En este momento se hace un abono adicional de \$ 4 millones, de tal manera que el nuevo saldo será de \$ 10.845.762, que debe refinanciarse en ocho cuotas mensuales iguales; el valor de estas cuotas lo obtendremos de la relación siguiente:

$$10.845.762 = X(P/A, 3,5\%, 8)$$

$$\therefore X = \$ 1.577.805$$

Este es el valor de cada una de las ocho cuotas uniformes que pide el problema.

EJEMPLO 6.7

Un crédito de \$ 20 millones debe amortizarse en dos años con cuotas mensuales que disminuyan en el 1% cada mes y con un interés del 3% mensual. Hallar el saldo al cabo de 15 meses, antes de pagar la cuota respectiva.

Solución

El diagrama de flujo de caja para el deudor será el siguiente:

Donde:

A es el valor de la primera cuota

$i = 3\%$ mensual es la tasa de interés

$k = 1\%$ cada mes es la tasa de disminución en las cuotas y 24 es el total de cuotas

De nuevo, lo primero que debemos hacer es financiar la deuda mediante la siguiente expresión:

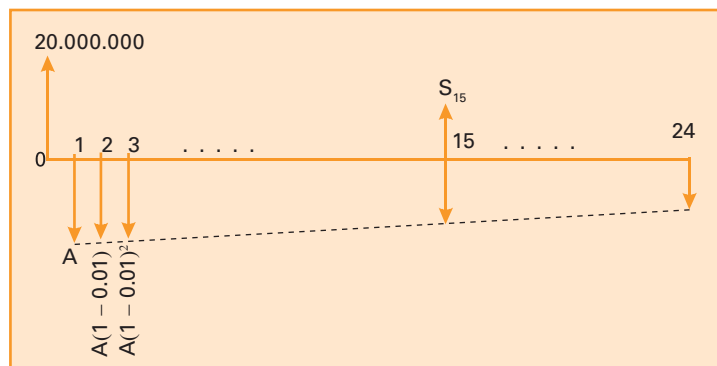


FIGURA 6.4

$$20.000.000 = \frac{A}{0,03 + 0,01} \left[1 - \left(\frac{1 - 0,01}{1,03} \right)^{24} \right]$$

$$\therefore A = \$ 1.303.997$$

Ahora bien: el saldo al cabo de 15 meses antes de pagar la cuota respectiva puede hallarse de dos formas diferentes:

- a) Encontrando el saldo en el mes 14 y cargarle los intereses de un mes:

$$S_{14} = 20.000.000 (1,03)^{14} - \frac{1.303.997}{0,03 + 0,01} [(1,03)^{14} - (1 - 0,01)^{14}]$$

$$= \$ 9.262.531$$

Luego, el saldo en el mes 15 antes de la cuota será:

$$9.262.531(1,03) = \$ 9.540.407$$

- b) También puede hallarse este valor calculando el saldo en el mes 15 y sumándole la cuota de ese mes.

$$S_{15} = 20.000.000 (1,03)^{15} - \frac{1.303.997}{0,03 + 0,01} [(1,03)^{15} - (1 - 0,01)^{15}]$$

$$= \$ 8.407.565.$$

La cuota del mes 15 es $1.303.997(1 - 0,01)^{14} = \$ 1.132.842$, de tal manera que el saldo en el mes 15 antes de pagar la cuota respectiva estará dado por:

$$8.407.565 + 1.132.842 = \$ 9.540.407$$

saldo igual al obtenido en el literal (a).

Como puede observar el estudiante, el problema de hallar el saldo en cualquier sistema de amortización se limita a la aplicación de cualquiera de las formas de saldo expuestas en los numerales (i) y (ii) de 6.3, lo que resulta posible comprobar si resuelve cualquiera de los ejemplos anteriores aplicando el concepto dado en el numeral (ii).

Con base en el concepto de saldo, es fácil llegar a determinar la parte de la deuda pagada hasta un momento determinado. Si denotamos por C_t la cantidad de la deuda amortizada hasta el momento t , con S_t el saldo existente en ese momento y con D_0 la deuda original o financiada, se cumple que:

$$C_t = D_0 - S_t \quad (6-9)$$

Cuando un activo se adquiere a crédito, se dice que el vendedor, en cualquier momento, es dueño o tiene derecho sobre la parte del valor al contado del activo que aún falta por amortizar, es decir, tiene derecho sobre S_t ; y, por otra parte, el comprador tiene derecho sobre la parte ya amortizada, es decir, sobre C_t . En esta relación, el valor D_0 representa el precio del activo o su valor al contado, de tal manera a partir de la relación (6-9) llegamos a:

$$D_0 = C_t + S_t$$

O sea:

Precio de venta = derechos del comprador + derechos del vendedor

EJEMPLO 6.8

Una compañía ensambladora de vehículos vende un automóvil que tiene un valor al contado de \$ 6.870.000 para ser pagado con una cuota inicial de \$ 2.350.000 y el resto financiado a 30 meses con cuotas mensuales iguales y un interés del 3% mensual. Hallar los derechos del comprador y los derechos de la compañía vendedora sobre el automóvil al cabo de 15 meses, una vez pagada la cuota respectiva.

Solución

El diagrama de flujo de caja deberá elaborarlo el estudiante.

En primer lugar debemos hallar el valor de la anualidad **A** que amortiza la cantidad financiada.

Cantidad financiada = $6.870.000 - 2.350.000 = \$ 4.520.000$. El valor de la cuota mensual **A** lo obtenemos así:

$$4.520.000 = A(P/A, 3\%, 30)$$

$$A = \$ 230.607$$

El saldo al cabo de 15 meses estará dado por:

$$S_{15} = 230.607(P/A, 3\%, 15) = \$ 2.752.971$$

De tal manera que los derechos del comprador son de \$ 4.117.029 y los derechos del vendedor son de \$ 2.752.971, al cabo de 15 meses.

De manera similar se resuelven los problemas cuando las cuotas de amortización son variables, porque lo básico es llegar a calcular el saldo en el momento requerido (este concepto ya se estudió para esta clase de series de pagos).

6.4 Composición de los pagos

Cuando una deuda inicial u obligación está amortizándose mediante una serie de pagos y con un interés establecido, es obvio que al final de algún tiempo el saldo sea 0, siempre y cuando, por lo menos, algunas cuotas cubran los intereses y amorticen parte del capital. No es necesario que todas las cuotas cumplan esta condición. En algunos sistemas de crédito, al principio del tiempo de amortización de la deuda el saldo crece y hacia el final disminuye hasta llegar a 0.

Sin embargo, la mayoría de cuotas que se pagan para amortizar una deuda tienen dos componentes básicos: intereses y amortización al capital. De esto consta una cuota. La razón de conocer cómo está compuesta una cuota es netamente financiera; por ejemplo, en algunos sistemas de crédito lo que se pague de intereses está exento de impuestos.

EJEMPLO 6.9

Para el caso del ejemplo 6.8, determinar la composición de la cuota 16.

Solución

Los intereses que se cancelan con la cuota 16 son los intereses sobre el saldo existente en el mes 15. De tal manera que como en este caso tenemos:

$$S_{15} = \$ 2.752.971 \text{ y } A = \$ 203.607$$

Entonces:

$$\text{Intereses cancelados con la cuota 16} = 2.752.971(0,03) = \$ 82.589,13$$

$$\text{Amortización al capital con la cuota 16} = 203.607 - 82.589,13 = \$ 121.017,87$$

Esta es la composición de la cuota 16. El estudiante puede calcular, como ejercicio, la composición de las cuotas 17, 18 y 19 y ver cómo a medida que avanza el tiempo los intereses disminuyen y la amortización al capital aumenta.

El registro período a período de toda la operación financiera en la cancelación de una obligación es lo que se conoce con el nombre de **tabla de amortización** de la obligación. Existen diferentes modelos, y cada persona o empresa puede diseñar el suyo. No obstante, una de las tablas más utilizadas es la que veremos en el ejemplo siguiente:

EJEMPLO 6.10

Un electrodoméstico vale al contado \$ 620.000; se adquiere con una cuota inicial de \$ 125.000 y el resto financiado a ocho meses con cuotas mensuales iguales y un interés del 2% mensual. Elaborar la tabla de amortización de la deuda.

Solución

Primero debemos hallar el valor de la cuota mensual uniforme **A**. Como se paga una cuota inicial, el saldo financiado es:

$$620.000 - 125.000 = \$ 495.000$$

Y entonces tenemos:

$$495.000 = A(P/A, 2\%, 8) = \$ 67.572,35$$

La tabla de amortización es la siguiente:

Tabla 6.1

Mes	Cuota mensual	Amortización al capital	Intereses	Saldo
0	125.000	125.000		495.000
1	67.572,35	57.672,35	9.900	437.327,65
2	67.572,35	58.825,8	8.746,55	378.501,85
3	67.572,35	60.002,31	7.570,04	318.499,54
4	67.572,35	61.202,35	6.370	257.297,18
5	67.572,35	62.426,41	5.145,94	194.870,77
6	67.572,35	63.674,93	3.897,42	131.195,84
7	67.572,35	64.948,43	2.623,92	66.247,41
8	67.572,35	66.247,41	1.324,94	0

Una de las ventajas de una tabla de amortización es que permite apreciar rápidamente la situación de la operación financiera en un momento dado. Ahora bien: para la construcción de una tabla de amortización como la anterior se aconseja utilizar una hoja electrónica en una computadora, y con la ayuda de las fórmulas correspondientes. Si lo que se desea es solo conocer los datos para una determinada cuota, lo mejor es aplicar directamente las fórmulas vistas antes y así determinar el valor de la cuota, el saldo y la composición de la cuota.

A continuación encontramos una tabla de amortización elaborada por una compañía de financiamiento comercial por un crédito para la adquisición del vehículo (véase tabla 6.2).

El estudiante debe hacer lo siguiente como ejercicio:

- Aplicar cualquiera de las expresiones para hallar un saldo en un mes determinado y comparar el resultado con el que se encuentra en la tabla en el mismo mes.
- En el mes 13, pagar una cuota extra por valor de \$ 500.000 y refinanciar el saldo en el resto de tiempo en cuotas mensuales iguales y construir la tabla de amortización de ahí en adelante.
- ¿En qué se afectará la columna de saldo de capital si se incluye un seguro de vehículo de \$ 25.000 cada mes?
- Si la persona que tomó el crédito tiene una tasa de oportunidad del 32% anual, ¿cuánto le costó el crédito el 14 de diciembre de 1994 y cuánto el 14 de junio de 1996?

Tabla 6.2

Fecha: 14/12/94

Plazo: 18 meses

Capital: \$ 3 millones

Tasa de interés: 42% MV

Fecha de pago	Mes	Valor intereses	Abono al capital	Seguro de vehículo	Seguro de vida	Cuota extra	Valor cuota	Saldo capital
14/01/95	01	105.000	122.460		1.283		228.743	2.877.540
14/02/95	02	100.714	126.746		1.283		228.743	2.750.794
14/03/95	03	96.278	131.182		1.283		228.743	2.619.612
14/04/95	04	91.686	135.774		1.283		228.743	2.483.838
95/05/95	05	86.934	140.526		1.283		228.743	2.343.312
14/06/95	06	82.016	145.444		1.283		228.743	2.197.868
14/07/95	07	76.925	150.535		1.283		228.743	2.047.333
14/08/95	08	71.657	155.803		1.283		228.743	1.891.530
14/09/95	09	66.204	161.256		1.283		228.743	1.730.274
14/10/95	10	60.560	166.900		1.283		228.743	1.563.374
14/11/95	11	54.718	172.742		1.283		228.743	1.390.632
14/12/95	12	48.672	178.788		1.283		228.743	1.211.844
14/01/96	13	42.415	185.045		1.283		228.743	1.026.799
14/02/96	14	35.938	191.522		1.283		228.743	835.277
14/03/96	15	29.235	198.225		1.283		228.743	637.052
14/04/96	16	22.297	205.163		1.283		228.743	431.889
14/05/96	17	15.116	212.344		1.283		228.743	219.545
14/06/96	18	7.684	219.545		1.283		228.743	0

Los casos anteriores corresponden a cuotas uniformes y, como se puede observar en la tabla 6.2, la amortización al capital aumenta con el tiempo a medida que los intereses disminuyen. Otro sistema de amortización es aquel en el que la cantidad correspondiente a la amortización de capital es constante; este es el sistema más utilizado en el crédito bancario. A continuación presentamos el caso general de este sistema.

Tomemos el ejemplo de un préstamo de \$ P hoy para ser pagado en n cuotas periódicas, donde cada cuota amortiza la misma cantidad al capital y el interés es del $i\%$ por período vencido. Se trata de determinar las cuotas que se van a pagar.

Como puede verse, las cuotas totales (abono al capital + intereses) no pueden ser uniformes, dado que la cantidad correspondiente a intereses cambia en cada período.

Denotemos por \$ R la suma correspondiente a la amortización al capital en cada período, y por S_t el saldo al final del período t una vez pagada la cuota respectiva.

Tenemos que:

$$R = \frac{P}{n}$$

Los intereses del período $t + 1$ serán:

$$iS_t$$

Si denotamos por C_{t+1} la cuota en el período $t + 1$, tenemos:

$$C_{t+1} = \frac{P}{n} + iS_t$$

De lo anterior obtenemos la relación siguiente:

$$S_{t+1} = S_t + iS_t - \left[\frac{P}{n} + iS_t \right]; \text{ con } S_0 = P$$

O sea:

$$S_{t+1} = S_t - \frac{P}{n}; \text{ con } S_0 = P$$

La ecuación de diferencia finita anterior tiene como solución la función:

$$S_t = P - \frac{P}{n}t \quad (6-10)$$

De tal manera que la cuota del período t será:

$$C_t = \frac{P}{n} + i \left[P - \frac{P}{n}(t-1) \right]$$

O sea:

$$C_t = P \left[\frac{1}{n} + i + \frac{i}{n} \right] - \frac{iP}{n}t \quad (6-11)$$

Como puede observarse, la serie de cuotas constituye un gradiente aritmético decreciente en el que el valor de G es igual a $i(P/n)$, y en este caso las cuotas disminuyen en el $i\%$ de la cuota de amortización al capital.

EJEMPLO 6.11

Una deuda por valor de \$ 3 millones de hoy debe financiarse a un año con cuotas mensuales tales que la amortización al capital sea la misma en todas las cuotas. Si la tasa de interés es del 2,8% mensual, hallar el valor de las cuotas.

Solución

De acuerdo con el caso general, la amortización al capital en cada cuota es:

$$R = \frac{3.000.000}{12} = \$250.000$$

La cuota del mes t será:

$$\begin{aligned} C_t &= 3.000.000 \left[\frac{1}{12} + 0,028 + \frac{0,028}{12} \right] - \frac{0,028(3.000.000)}{12}t \\ &= 341.000 - 7.000t \end{aligned}$$

Las cuotas serán de:

\$ 334.000, \$ 327.000, \$ 320.000, y así sucesivamente; la disminución de mes a mes (\$ 7.000) corresponde al 2,8% de la amortización al capital cada mes.

O sea:

$$7.000 = 0,028(250.000)$$

El estudiante debe calcular manualmente el valor de las primeras cuotas sin tener en cuenta las fórmulas obtenidas en el caso general.

Veamos ahora un caso similar al tratado antes, en el que lo único que cambia es la clase de tasa de interés y, específicamente, en el que la tasa de interés sea anticipada.

El caso general se plantea de la siguiente forma: supongamos un préstamo hoy por valor de \$ P para ser pagado en n cuotas periódicas de la misma forma del caso anterior, es decir, donde $R = P/n$. Tomemos una tasa de interés del $i\%$ por período anticipado. Se trata de determinar las cuotas periódicas para esta nueva modalidad. Para ello utilizamos la misma notación anterior y así tenemos:

$$S_{t+1} = S_t - \frac{P}{n}; S_0 = P$$

La solución de esta ecuación es:

$$S_t = P - \frac{P}{n}t$$

La cuota del mes t ($t = 1, 2, 3, \dots, n$) estará dada por:

$$C_t = \frac{P}{n} + iS_t$$

Sustituyendo el valor de S_t obtenemos:

$$C_t = P\left(\frac{1}{n} + i\right) - i\left(\frac{P}{n}\right)t; \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (6-12)$$

Para el punto 0 y n , tenemos:

$$C_0 = iP \quad \text{y} \quad C_n = \frac{P}{n}$$

porque la cuota en el punto 0 corresponde a los intereses anticipados del saldo P , y la última cuota en el punto n es solamente de amortización al capital sin intereses.

El estudiante debe calcular el valor de las cuotas del ejemplo utilizando la expresión (6-12) y comparar sus resultados con los obtenidos en el ejemplo.

EJEMPLO 6.12

Resolver el ejemplo 6.11 suponiendo una tasa de interés del 2,8% mensual anticipado.

Solución

El valor de R sigue siendo de \$ 250.000, y la cuota del mes t ($t = 1, 2, \dots, n$) será:

$$\begin{aligned} C_t &= 3.000.000 \left[\frac{1}{12} + 0,028 \right] - 0,028(250.000)t \\ &= 334.000 - 7.000t \end{aligned}$$

De tal manera que las cuotas para los meses 1, 2, 3, ..., 12 serán:

$C_1 = \$ 327.000$, $C_2 = \$ 320.000$, $C_3 = \$ 313.000$ y así sucesivamente, además del primer pago en el punto 0, que es de $0,028(3.000.000) = \$ 84.000$.

En este caso, la serie formada por las cuotas de los meses 1, 2, ..., 12 constituye un gradiente aritmético decreciente.

Al igual que en el ejemplo 6.11, el estudiante debe calcular manualmente las primeras cuotas del sistema de amortización contemplado en el ejemplo 6.12 y compararlas con las obtenidas a partir de la fórmula.

6.5 Amortización y saldos en los sistemas UPAC y UVR

Además de todos los sistemas de amortización vistos anteriormente y que tienen los bancos y demás instituciones financieras, es importante hacer referencia a dos sistemas conocidos en Colombia, diseñados básicamente para créditos destinados a la adquisición de vivienda: el UPAC y el UVR.

6.5.1 SISTEMA UPAC

Aun cuando este sistema ya no está operando en Colombia, vale la pena exponerlo así, en forma simplificada, para que el estudiante lo analice desde el punto de vista financiero y pueda hacerse una idea de sus ventajas y desventajas, que le aportarán elementos de valor para futuros trabajos como financista.

En Colombia el sistema UPAC (unidad de poder adquisitivo constante) se creó mediante el decreto 377 de 1972, con el fin de incentivar tanto el ahorro como el crédito para adquirir vivienda, razón por la cual las entidades financieras encargadas de manejar el sistema se llamaron **Corporaciones de Ahorro y Vivienda** (CAV).

El sistema funcionó con dos tasas que fueron: una tasa de interés y una tasa llamada de corrección monetaria, que se define a continuación.

TASA DE CORRECCIÓN MONETARIA

La corrección monetaria fue la operación utilizada por el sistema financiero colombiano de ahorro y vivienda para reajustar el valor del dinero, con el fin de recuperar, así sea en parte, el poder adquisitivo que pierde diariamente como consecuencia del aumento de los precios de los bienes y servicios.

El reajuste periódico se debe al factor económico de la pérdida de poder adquisitivo del dinero por efecto de la inflación. Por tanto, el deudor del sistema UPAC debía devolverle a la entidad, además de los intereses, una suma de dinero que tenga el mismo valor real (valor constante) que la suma que recibió en calidad de préstamo. Las entidades responsables de determinar el valor de ese aumento fueron en primer lugar el DANE, que obtiene mensualmente el incremento (%) en el costo de vida para obreros y para empleados; con el promedio aritmético de estos dos índices fijaba la base para calcular el valor de la UPAC, y luego el Banco de la República debía calcular e informar cada mes el valor diario de la UPAC.

Los componentes básicos para el cálculo y operaciones con UPAC eran la tasa de corrección monetaria i_{cm} y la tasa de interés i . Tanto la tasa de corrección monetaria como la tasa de interés venían dadas en forma anual; por tanto, lo primero que debía hacerse era pasarlas a tasas diarias tomando el año de 365 días y, a partir de esto, hallar la tasa para el período correspondiente tanto de abonos como de depósitos.

La ley que regía el funcionamiento del sistema UPAC contemplaba las siguientes condiciones:

- a) Se debía cobrar intereses sobre el saldo (I/S).
- b) Se debía cobrar corrección monetaria sobre el saldo (CM/S).
- c) Se debía cobrar corrección monetaria sobre los intereses (CM/I).
- d) Pero por ningún motivo se podía cobrar intereses sobre los intereses (I/I).

Si se denota con i la tasa de interés por período (por lo general el mes para cuotas mensuales), con i_{cm} la tasa mensual de corrección monetaria y con i_c la tasa combinada o tasa compuesta, se tenía que la tasa que cumple con las condiciones a), b), c) y d) anteriores era:

$$i_c = i + i_{cm} + i_{cm} \cdot i$$

Equivalente a decir que:

$$i_c = (1+i)(1+i_{cm}) - 1 \quad (6-13)$$

y con esta tasa se hacía la proyección tanto de las cuotas como de los saldos. Una de las principales operaciones en el sistema UPAC era la de los créditos a largo plazo para la adquisición de vivienda, razón por la cual la mayoría de entidades que manejaban este sistema recibían el nombre de **corporaciones de ahorro y vivienda**.

Para el caso de un crédito es necesario conocer los siguientes elementos: el valor total de la deuda o crédito, el plazo para amortizar la deuda, el costo que asume el deudor durante el tiempo de la operación financiera o tiempo de amortización y la forma de pago del crédito.

Con base en lo anterior, debemos estar en capacidad de: determinar el valor de las cuotas, la composición de cada cuota en abono al capital e intereses y, por último, calcular el saldo de la obligación en cualquier momento. Esto se desarrollará con algún ejemplo al final, una vez que se hayan presentado los diferentes sistemas de amortización de un crédito.

Es importante aclarar que las operaciones en este sistema se hacían desde dos puntos diferentes pero equivalentes financieramente: presentar el plan de financiación en la nueva unidad monetaria UPAC o presentarlo en pesos.

Los plazos más utilizados por este sistema para los créditos eran 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 15 y 20 años. Los principales sistemas de amortización de una deuda en UPAC eran los siguientes:

1. **Sistema de cuota fija en UPAC.** En este, todas las cuotas son iguales en UPAC, pero al convertirlas a pesos resultan cuotas crecientes.
2. **Sistema de abono constante a capital en UPAC.** En este, la cuota UPAC de amortización al capital es constante, pero la cuota en UPAC de abono al capital más intereses es decreciente; sin embargo, la cuota total en pesos es creciente.
3. **Sistema de cuota en UPAC decreciente en una cantidad fija mensual.** En este, la cuota en UPAC decrece cada mes en una cantidad fija; sin embargo, la cuota mensual en pesos es creciente.
4. **Sistema de abono a capital en UPAC decreciente geoméricamente cada mes.** En este, las cuotas en UPAC forman un gradiente geométrico decreciente; sin embargo, las cuotas mensuales en pesos son crecientes.
5. **Sistema de abono o capital en UPAC decreciente en una cantidad fija mensual.** En este, los abonos al capital en UPAC forman un gradiente aritmético decreciente, pero la cuota mensual en pesos es creciente.
6. **Sistema de cuotas mensuales fijas en UPAC decrecientes anualmente en una proporción geométrica.** En este, las cuotas en UPAC permanecen constantes durante los doce meses del año, pero al año siguiente disminuyen en una tasa constante; sin embargo, las cuotas mensuales en pesos son crecientes.

También existían los sistemas de amortización de una deuda directamente en pesos; estos son principalmente los siguientes:

1. Sistema de cuota fija mensual o anualidad.
2. Sistema de cuotas crecientes cada mes en una cantidad fija o gradiente aritmético creciente.
3. Sistema de cuotas crecientes cada mes en una tasa constante o gradiente geométrico creciente.
4. Sistema de cuotas mensuales constantes durante el año, pero que aumenten anualmente en una suma fija de pesos.
5. Sistema de cuotas mensuales constantes durante el año, pero que aumenten anualmente en una tasa constante.
6. Sistema de cuotas fijas mensuales, pero con abonos extraordinarios cada seis meses o cada año.

A continuación se desarrollará un ejemplo de un crédito por el sistema 3 de proyección y amortización en pesos.

EJEMPLO 6.13

Supongamos que obtenemos un crédito de una CAV por valor de \$ 10 millones para ser cancelados en un plazo de 15 años con cuotas mensuales que aumenten en el 0,9% cada mes. La tasa de interés será del 8,5% anual y la tasa de corrección monetaria del 24,5% anual.

En este ejemplo calcularemos lo siguiente:

- a) Proyección o cálculo de la primera cuota.
- b) Saldo en cuatro fechas diferentes, a saber: a los 5, 10, 12 y 14 años.
- c) La composición de las cuotas 1 y 145.
- d) Gráfica que represente las cuotas y los saldos respecto al tiempo.

Lo que debemos hallar son: la tasa anual y la tasa mensual que combinen intereses y la corrección monetaria. Para esto aplicamos la expresión (6-13) y tenemos:

$$i_c = (1,245)(1,085) - 1 = 0,3508 = 35,08\% \text{ anual, que equivale al } 2,537\% \text{ mensual}$$

El diagrama de flujo de caja para este caso es el siguiente:

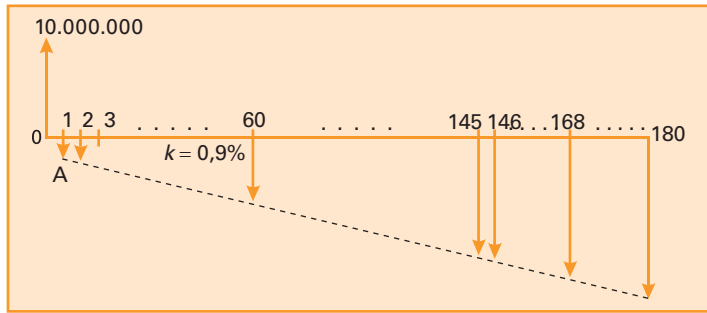


FIGURA 6.5

- a) Como podemos ver, el flujo de caja corresponde a un gradiente geométrico creciente, de tal manera que tenemos:

$$10.000.000 = \frac{A}{0,02237 - 0,009} \left[1 - \left(\frac{1,009}{1,02537} \right)^{180} \right]$$

$$\therefore A = \$ 173.263,30$$

O sea que para amortizar esta deuda, según las condiciones dadas, debemos iniciar con una cuota el primer mes de \$ 173.263,30 y de ahí en adelante aumentaremos el 0,9% cada mes.

- b) Para calcular los saldos en las fechas correspondientes, aplicamos cualquiera de las expresiones propias para estos casos.

Saldo al final del quinto año:

$$S_5 = 10.000.000 (1,3508)^5 - \frac{173.263,30}{0,02237 - 0,009} [(1,0253)^{60} - (1,009)^{60}]$$

$$= \$ 15.504.431,55$$

Saldo al final del décimo año:

$$S_{10} = 10.000.000 (1,3508)^{10} - \frac{173.263,30}{0,02237 - 0,009} [(1,0253)^{120} - (1,009)^{120}]$$

$$= \$ 19.318.022,73$$

Saldo al final del duodécimo año:

$$S_{12} = 10.000.000 (1,3508)^{12} - \frac{173.263,30}{0,02237 - 0,009} [(1,0253)^{144} - (1,009)^{144}]$$

$$= \$ 17.154.247$$

Saldo al final del año decimocuarto:

$$S_{14} = 10.000.000 (1,3508)^{14} - \frac{173.263,30}{0,02237 - 0,009} [(1,0253)^{168} - (1,009)^{168}]$$

$$= \$ 8.890.110$$

- c) Para determinar la composición de cualquier cuota debemos hallar las correspondientes tasas mensuales tanto de interés como de corrección monetaria.

Del 8,5% anual obtenemos el 0,682% mensual de intereses.

Del 24,5% anual obtenemos el 1,843% mensual de corrección monetaria. En cualquier caso se toman meses de 30 días.

Cada cuota debe pagar el total de los intereses de ese mes y el resto corresponderá al abono al capital.

Para la primera cuota tenemos:

$$\text{Intereses sobre saldo anterior} = 0,00682(10.000.000) = \$ 68.200$$

Corrección monetaria sobre capital e intereses

$$= 0,018843(10.000.000)(1,00682) = \$ 185.556,93$$

Total de los costos financieros del primer mes:

$$\$ 68.200 + \$ 185.556,93 = \$ 253.756,93$$

Total saldo al final del primer mes antes de pagar la cuota:

$$\$ 10.253.756,93$$

Saldo una vez pagada la primera cuota:

$$10.253.756,93 - 173.263,30 = \$ 10.080.493,63$$

La composición de la primera cuota será:

$$\text{Intereses} = \$ 68.200$$

$$\text{Abono al capital} = \$ 105.063,3$$

$$\text{Total} = \$ 173.263,3$$

Para la composición de la cuota 145, tenemos:

$$\text{Intereses sobre el saldo anterior} = 0,00682(17.154.247) = \$ 116.991,96$$

Corrección monetaria sobre el saldo e intereses:

$$0,01843(17.154.247)(1,00682) = \$ 318.308,93$$

$$\text{Valor de la cuota 145} = 173.263,3(1,009)^{144} = \$ 629.556,22$$

Por tanto, esta cuota estará conformada por:

$$\text{Intereses} = \$ 116.991,96$$

$$\text{Abono a capital} = \$ 512.564,26$$

$$\text{Total} = \$ 629.556,22$$

Como podemos observar, en la composición de las dos cuotas anteriores con la cuota 1 se pagan todos los intereses, pero no toda la corrección monetaria de ese mes; por esta razón, el saldo al final del primer mes después de cancelada la cuota correspondiente es mayor que el saldo anterior. Con la cuota 145 se pagan todos los intereses de ese mes y el abono al capital es superior al valor de la corrección monetaria de ese mes, lo cual nos indica que el saldo ya se encuentra en descenso y no en ascenso como en el primer mes.

Por último, debemos tener en cuenta que, por disposición legal, en un crédito debe cobrarse la corrección monetaria sobre los intereses pero **nunca intereses sobre intereses**. Por esta razón, toda cuota debe pagar la totalidad de los intereses de ese mes, de tal manera que no queden intereses pendientes para el mes siguiente.

- d) Es de gran ayuda en las decisiones financieras, en las que se involucra un crédito del sistema UPAC, poder visualizar el comportamiento hacia el futuro tanto de la variación de las cuotas como de la variación del saldo. En la figura 6.6 se representarán estos elementos de la operación financiera correspondiente al crédito estudiado numéricamente en el ejemplo anterior. Como podemos observar, el saldo aumenta hasta el décimo año aproximadamente y de ahí en adelante disminuye hasta llegar a 0 en el decimoquinto año. No obstante, las cuotas mensuales aumentan durante los 15 años.

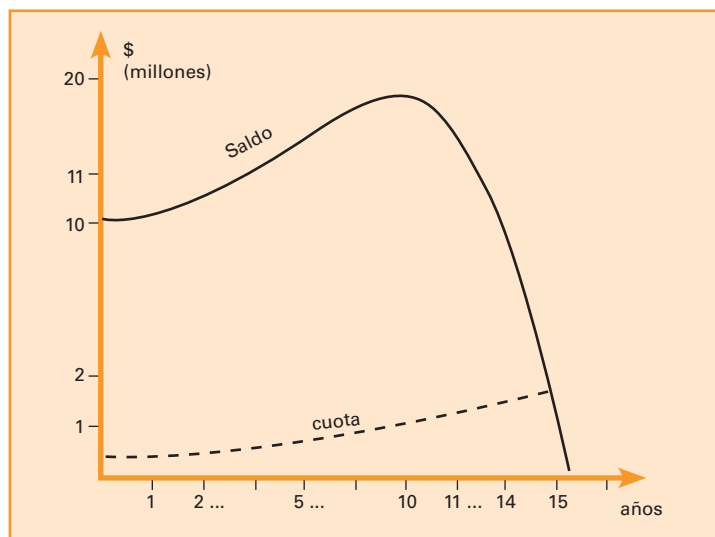


FIGURA 6.6

EJEMPLO 6.14

Una persona desea adquirir un apartamento que tiene un valor al contado de \$ 71.428.511; paga el 30% de cuota inicial y el resto financiado por una CAV según las siguientes adiciones:

Valor del crédito:	\$ 50.000.000
Tiempo:	15 años
Amortización:	Cuotas mensuales que aumenten el 0,9% mensual
Tasa de interés:	15% anual
Tasa de corrección monetaria:	24% anual

- Proyectar la primera cuota.
- Proyectar el saldo del primer mes.
- Proyectar los saldos al final de los años 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13 y 14.
- Determinar la composición de la primera cuota.

Solución

Tasa de interés mensual:	1,17149%
Tasa de corrección monetaria mensual:	1,80875%
Tasa combinada mensual:	3,00143%

- a) Primera cuota:

$$50.000.000 = \frac{A}{0,0300143 - 0,009} \left[1 - \left(\frac{1,009}{1,0300143} \right)^{180} \right]$$

$$A = \$ 1.077.070,31$$

- b) Saldo al final del primer mes:

$$S = 50.000.000(1,0300143) - 1.077.070,31 = \$ 50.423.644,68$$

- c) Saldos en los diferentes años: 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13 y 14:

$$S_1 = \$ 55.283.572,53$$

$$S_2 = \$ 60.999.928,06$$

$$S_5 = \$ 80.345.120,96$$

$$S_6 = \$ 87.154.159,97$$

$$S_7 = \$ 93.751.646,85$$

$$S_8 = \$ 99.694.196,88$$

$$S_9 = \$ 104.309.445,3$$

$$S_{10} = \$ 106.593.949,5$$

$$S_{11} = \$ 105.067.086,3$$

$$S_{13} = \$ 80.927.657,75$$

$$S_{14} = \$ 50.601.151,85$$

- d) Composición de la cuota 1:

$$\text{Intereses: } \$ 585.745$$

$$\text{CM/saldo: } \$ 904.375$$

$$\text{CM/intereses: } \$ \underline{10.594,66}$$

$$\$ 1.500.714,66$$

Primera cuota	
Intereses	\$ 585.745
Abono al capital	\$ 491.325,31
Total	\$ 1.077.070,31

Sin embargo, los valores dados en los saldos del literal (c) son proyectados con el supuesto de que la tasa de corrección monetaria no variará; pero como esta tasa cambia cada mes, la entidad competente informa a las corporaciones sobre el valor de la corrección monetaria para el siguiente mes y, a su vez, la corporación deberá hacer todo el proceso inicial para la financiación del saldo con la nueva tasa. Así, por ejemplo, en el caso anterior, para el segundo mes se tiene una tasa de corrección monetaria del 23,6% anual; entonces, con esta tasa y la de interés se debe hallar la nueva tasa combinada, y en esta financiación el saldo de \$ 50.423.644,68 a 179 cuotas determinando el valor de **A** en una expresión similar a la del literal (a), y de esta manera se puede hallar el valor de la segunda cuota del crédito en general. Esta situación la debe repetir la corporación hasta cuando el crédito quede totalmente saldado.

6.5.2 SISTEMA UVR

En el año 1999, por disposición del Estado, el sistema UPAC desapareció, pero como sustituto se creó el sistema denominado **UVR**.

La **UVR** (unidad de valor real) es una unidad financiera de medida que muestra el poder adquisitivo del peso colombiano, con base en los cambios o variaciones del índice de precios al consumidor (artículo 3.º de la ley 546 de 1999) y comenzó a funcionar el 1 de enero del año 2000.

Al igual que el UPAC, la **UVR** la utiliza las CAV para la actualización de los créditos a largo plazo que se otorgan para la adquisición de vivienda.

Para su cálculo se debe tener en cuenta la variación mensual del índice de precios al consumidor (IPC) que suministra el DANE. Este cálculo se hace con el valor del IPC inmediatamente anterior a la fecha en que se está calculando el valor de la **UVR**, debido a que en ese momento se desconoce el valor real del IPC mensual vigente.

Los valores de la **UVR** se calculan diariamente, ya que los créditos hipotecarios y sus pagos tienen que ver con los intereses diarios.

La metodología para el cálculo de la **UVR** en cualquier momento emplea la siguiente expresión:

$$UVR_t = UVR_{15} (1 + i)^{t/d} \quad (6 - 14)$$

Donde:

UVR_t : valor de la UVR, en moneda colombiana, en el día **t** del período de cálculo

UVR_{15} : valor de la UVR, en moneda colombiana, el día 15 anterior al día **t**

i: valor del IPC durante el mes anterior al del cambio

t: número de días calendario transcurridos desde el inicio de un período de cálculo hasta el día del cálculo de la UVR. El rango de valores que toma **t** es de 1 hasta 31, dependiendo del número de días calendario del respectivo período de cálculo.

d: número de días calendario del respectivo período del cálculo

Para efectos de los cálculos y resultados de la UVR se acostumbra utilizar cuatro decimales, como se puede observar en las tablas siguientes, correspondientes a junio y parte de julio de 2006, publicadas por el Banco de la República.

UVR

Junio	Valor en \$	Junio	Valor en \$	Julio	Valor en \$
1	156,9992	16	157,3352	1	157,5946
2	157,0219	17	157,3525	2	157,6119
3	157,0447	18	157,3697	3	157,6292
4	157,0674	19	157,3870	4	157,6465
5	157,0902	20	157,4043	5	157,6638
6	157,1129	21	157,4216	6	157,6811
7	157,1357	22	157,4389	7	157,6984
8	157,1584	23	157,4562	8	157,7158
9	157,1812	24	157,4735	9	157,7331
10	157,2040	25	157,4908	10	157,7504
11	157,2267	26	157,5081	11	157,7677
12	157,2495	27	157,5254	12	157,7851
13	157,2723	28	157,5427	13	157,8024
14	157,2951	29	157,5600	14	157,8197
15	157,3179	30	157,5773	15	157,8370

Fuente: Banco de la República.

Se presenta a continuación la forma de utilizar la expresión (6-14) para calcular y proyectar la UVR para cualquier período de tiempo comprendido entre el 16 de un mes y el 15 del mes siguiente; se denota con UVR ($m/n/q$) el valor de la UVR del día m del mes n y del año q .

Según la fuente expresada anteriormente, se tiene que la UVR (15/5/06) = 156.613,1; además, cada vez que se utilice este valor para proyectar los valores siguientes, en este caso la inflación de abril de 2006, que fue del 0,45%, el valor de d en (6-14) es de 31, que son los días del mes de mayo en los cuales se está tomando la base de 156.613,1.

Para algunos días de la tabla anterior, se tienen los valores siguientes:

$$\text{UVR (1/06/06)} = 156.6131(1.004,5)^{17/31} = 156.9992$$

Donde $t = 17$ es el número de días después del 15 de mayo y hasta el 1 de junio de 2006. De forma similar se obtienen los valores siguientes:

$$\text{UVR (6/6/06)} = 156.6131(1.004,5)^{22/31} = 157.1129$$

$$\text{UVR (13/6/06)} = 156.6131(1.004,5)^{29/31} = 157.2723$$

$$\text{UVR (15/6/06)} = 156.6131(1.004,5)^{31/31} = 157.3179$$

tal como se pueden observar en la tabla anterior.

Ahora, tomando este último valor de 157.317,9 como base, se puede calcular y proyectar la UVR hasta el 15 de julio de 2006, aplicando la inflación de mayo de 2006, que fue del 0,33%. Se tienen como ejemplos los siguientes valores:

$$\text{UVR (16/6/06)} = 157.3179(1.003,3)^{1/30} = 157.3352$$

Donde el valor del parámetro d en (6-14) es 30, que son los días que tiene el mes de junio, en el que se toma la base de 157.3179.

$$\text{UVR (22/6/06)} = 157.3179(1.003,3)^{7/30} = 157.4389$$

$$\text{UVR (30/6/06)} = 157.3179(1.003,3)^{15/30} = 157.5773$$

$$\text{UVR (3/7/06)} = 157.3179(1.003,3)^{18/30} = 157.6292$$

$$\text{UVR (15/7/06)} = 157.3179(1.003,3)^{30/30} = 157.8370$$

La amortización de un crédito para vivienda en el sistema UVR se puede hacer mediante dos formas que son:

- a) Sistema de cuota constante en UVR
 b) Sistema de amortización constante al capital en UVR

Con el sistema a) se establecen cuotas mensuales constantes o iguales en UVR, para todo el tiempo del crédito, pero como el valor de la UVR varía en el tiempo, generalmente aumentando, entonces el valor de la cuota mensual en pesos está subiendo por efectos de la inflación. En este sistema hay abono al capital desde el inicio del crédito, y por esto el saldo en UVR disminuye cada mes.

Con el sistema b) se abona, desde el principio del crédito, una cantidad constante al capital, al cual se le debe adicionar cada mes el valor de los intereses sobre el saldo. Con este sistema la cuota mensual en UVR es decreciente, dado que siempre se abona al capital, pero es creciente en pesos por efectos de la inflación.

Con la UVR, si bien la deuda crece, ya no lo hace tan rápido sino en forma moderada, porque los intereses ya no se capitalizan, y además el valor de la UVR está atado a la inflación, que es controlada por el Estado.

Las siguientes tablas muestran el comportamiento de la amortización de un crédito de un caso real y durante algunos meses del tiempo pactado, con el fin de observar el funcionamiento del sistema a) de amortización expresado anteriormente y para las condiciones siguientes:

- i) Tiempo del crédito: 15 años
 ii) Cuotas mensuales uniformes en UVR
 iii) Tasa de interés del 13% EA (1,023684435% mensual)
 iv) La cuota número 71 se canceló en enero de 2004

Cuotas por pagar de enero a junio de 2004

Valores en UVR				
Referencia	Cuota	Intereses	Amortización	Saldo
71	9.085,6200	6.124,1518	2.961,4682	595.284,5890
72	9.085,6200	6.093,8357	2.991,7843	592.292,8047
73	9.085,6200	6.063,2093	3.022,4107	589.270,3940
74	9.085,6200	6.032,2693	3.053,3507	586.217,0433
75	9.085,6200	6.001,0126	3.084,6074	583.132,4359
76	9.085,6200	5.969,4360	3.116,1840	580.016,2519

Valores en pesos					
Referencia	Cuota	Intereses	Amortización	Saldo	Valor Unidad UVR
71	1.253.957,30	845.228,48	408.728,81	82.158.559,72	138,0156
72	1.261.184,91	845.892,03	415.292,87	82.216.815,74	138,8111
73	1.271.962,27	848.832,93	423.129,34	82.496.264,13	139,9973
74	1.285.330,85	853.377,30	431.953,55	82.931.363,03	141,4687
75	1.293.836,81	854.573,60	439.263,20	83.040.916,22	142,4049
76	1.302.759,79	855.939,52	446.820,28	83.166.790,31	143,3870

El estudiante debe realizar los cálculos correspondientes que permitan justificar los valores registrados en las tablas anteriores.

A continuación se muestra el comportamiento de un crédito tomado en enero de 2004 por el valor de \$ 99.371.232, equivalente a 720.000 unidades UVR al valor de 138,0156 de esa fecha, donde se mostrarán los valores tanto en unidades UVR como en pesos, para los seis primeros meses de ese año utilizando el sistema b), o sea, el de amortización constante al capital en UVR y con la misma tasa

de interés del 13% EA (1,023684435% mensual), y para un tiempo de 15 años con cuotas mensuales. En este caso la cuota uniforme en UVR se obtiene $\frac{720.000}{180} = 4.000$ UVR cada mes.

Valores en UVR				
Referencia	Cuota	Intereses	Amortización	Saldo
1	11.370,5279	7.370,5279	4000	716.000
2	11.329,5806	7.329,5806	4000	712.000
3	11.288,6332	7.288,6332	4000	708.000
4	11.247,6858	7.247,6858	4000	704.000
5	11.206,7384	7.206,7384	4000	700.000
6	11.165,7911	7.165,7910	4000	696.000

Valores en pesos					
Referencia	Cuota	Intereses	Amortización	Saldo	Valor unidad UVR
1	1.569.310,23	1.017.247,83	552.062,4	98.819.169,6	138,0.156
2	1.572.671,55	1.017.427,15	555.244,4	98.833.503,2	138,8111
3	1.580.378,17	1.020.388,97	559.989,2	99.118.088,4	139,9973
4	1.591.195,49	1.025.320,69	565.874,8	99.593.964,8	141,4687
5	1.595.894,46	1.026.274,86	569.619,6	99.683.430,0	142,4049
6	1.601.029,29	1.027.481,27	573.548,0	99.797.352,0	143,3870

Como en el caso anterior, en este el estudiante debe realizar los cálculos correspondientes que permitan justificar los valores registrados en estas tablas.

6.6 Capitalización

La capitalización consiste en aquella actividad financiera mediante la cual los intereses devengados en un período se transforman en capital en el período siguiente.

De esta manera, es común oír decir que alguien está capitalizando cuando hace depósitos, ya sean periódicos e iguales o no, en una entidad que paga una tasa de interés; invierte en finca raíz; invierte en papeles financieros; invierte en monedas fuertes; establece planes de ahorro o invierte en otros activos cuyo valor de mercado aumente en el tiempo.

Las finalidades de la capitalización, o inversión con el ánimo de capitalizar, pueden ser varias; por ejemplo: acumular una determinada suma para cubrir un gasto futuro; acumular para cubrir varios gastos futuros; garantizar la adecuación futura de un activo; poder disfrutar una pensión en el futuro; adquirir bienes en el futuro; tener un plan programado de ahorro; o simplemente calcular en el futuro una deuda contraída hoy o en el pasado.

Desde este punto de vista, es una operación que puede considerarse, en cierta forma, contraria a la de amortización, porque en esta última la deuda se adquiere hoy y los pagos que se hagan no ganan intereses, sino que sirven para pagar tanto capital como intereses hasta llegar a un saldo cero; en la capitalización se hacen depósitos que ganan intereses, que, a su vez, ganarían intereses en los períodos siguientes y hacen crecer el total acumulado del futuro.

En cada país existen diferentes planes, programas y alternativas para invertir dinero con el ánimo de capitalizar, pero todos tendrán de común el significado dado acerca de capitalizar.

A esta altura de los temas tratados en los capítulos anteriores, estamos en capacidad de resolver problemas relacionados con la capitalización y valor total acumulado al final de cualquier tiempo, pues se trata de hallar el valor futuro para cualquier clase de flujo de caja.

Con los siguientes ejemplos, la teoría vista hasta el momento y los problemas propuestos, el estudiante deberá estar en capacidad de enfrentar cualquier problema relacionado con la determinación de valores del futuro cuando se está ante una operación de capitalización.

EJEMPLO 6.15

Usted necesita cubrir dos pagarés en sus respectivas fechas: el primero por un valor de \$ 2.500.000 dentro de 15 meses, y el segundo por un valor de \$ 3.500.000 al cabo de dos años. Con tal motivo, usted decide invertir cantidades iguales mensuales durante los dos años, en una institución que le promete una tasa de interés del 3% mensual. Determinar el valor de los depósitos mensuales iguales que le permitan saldar los pagarés.

Solución

El diagrama de flujo de caja es el siguiente:

Con los 24 depósitos mensuales de valor \$ **A** cada uno, capitalizados al 3% mensual, es apenas suficiente para cancelar los dos pagarés en las fechas correspondientes; por tanto, equilibrando ingresos con egresos tenemos:

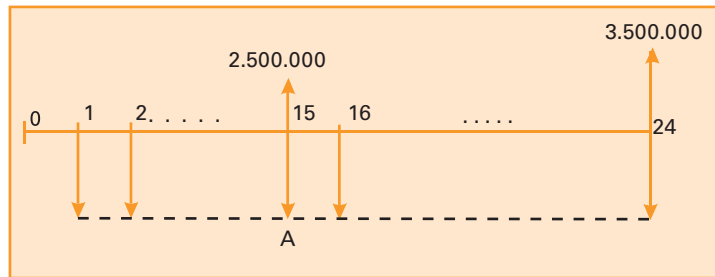


FIGURA 6.7

$$A(P/A, 3\%, 24) = 2.500.000(1,03)^{-15} + 3.500.000(1,03)^{-24}$$

$$\therefore A = \$ 196.417$$

EJEMPLO 6.16

Resolver el ejercicio anterior bajo el supuesto de que la institución descuenta cada mes el 2% sobre los intereses devengados en ese mes.

Solución

Sean:

F_t: valor total acumulado al final del mes **t**.

F_{t+1}: valor total acumulado al final del mes **t + 1** en las mismas condiciones anteriores.

Entonces, tenemos:

$$F_{t+1} = F_t + 0,03 F_t - 0,02 (0,03 F_t) + A$$

O sea:

$$F_{t+1} = 1,0294 F_t, \text{ con } F_0 = 0$$

Luego:

$$F_t = (1,0294)^t F_0 + A \left[\frac{1 - (1,0294)^t}{1 - 1,0294} \right]$$

Entonces:

$$F_{24} = 34,16884469 A$$

representará el valor total acumulado en el mes 24 por los depósitos capitalizados menos los descuentos sobre los intereses.

El valor de los dos pagarés en el mes 24 será:

$$2.500.000(1,0294)^9 + 3.500.000 = \$ 6.744.871$$

porque ahora el interés real para la capitalización ya no es del 3% mensual, sino del 2,94% mensual; por tanto, tendremos:

$$34,16884469 A = 6.744.871$$

$$A = \$ 197.398$$

Como podemos ver, la nueva cuota mensual deberá ser mayor que la del ejemplo 6.15, porque se deberá cubrir el descuento y además cumplir el objetivo propuesto inicialmente.

EJEMPLO 6.17

Una persona acaba de cumplir 25 años y decide hacer aportes mensuales iguales a un fondo de pensiones, con el fin de poder disfrutar de una pensión que consista en ingresos mensuales una vez cumpla 65 años, de tal manera que el primero de esos valores sea de \$ 12.500.000 y aumenten cada mes en el 2%. Si la pensión la desea disfrutar por espacio de 20 años y el fondo le paga un interés del 33,7% EA, ¿cuánto debe ser el aporte mensual?

Solución

El diagrama de flujo de caja es el siguiente:

La tasa de interés que paga el fondo es equivalente al 2,45% mensual; por tanto, equilibrando el diagrama en el punto 0, tendremos:

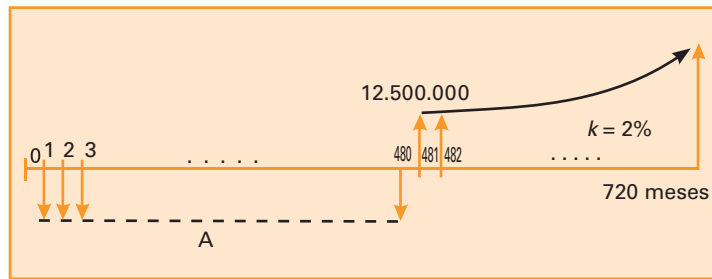


FIGURA 6.8

$$A(P/A, 2,45\%, 480) = \frac{12.500.000}{0,0245 - 0,02} \left[1 - \left(\frac{1,02}{1,0245} \right)^{240} \right] (1,0245)^{-480}$$

$$\therefore A = \$ 400$$

En este ejemplo podemos darnos cuenta de las ventajas de la capitalización del dinero, porque con depósitos de \$ 400 mensuales durante 40 años podrá disponer en el futuro de cantidades mensuales que, empezando con \$ 12.500.000, irán creciendo en el 2% cada mes y por espacio de 20 años.

El estudiante deberá resolver el ejemplo 6.17 para los casos siguientes: (a) si el fondo paga un interés del 2% mensual; y, (b) si el fondo paga un interés del 1,7% mensual, y explicar lo que observa.

EJEMPLO 6.18

Una familia desea adquirir una vivienda al cabo de cuatro años, pero en este momento solo dispone de \$ 3 millones. La vivienda tendrá en esa fecha un valor de contado de \$ 82 millones; sin embargo, puede adquirirse financiada así: cuota inicial equivalente al 30% del valor al contado y el resto a cinco años en cuotas mensuales que aumentan en el 1,5% cada mes y con un interés del 3,1% mensual. Para cumplir el objetivo de la adquisición de la vivienda, la familia decide establecer un fondo de capitalización con depósitos mensuales iguales a los \$ 3 millones de pesos de hoy durante los nueve años, de tal manera que le sea posible adquirir la vivienda financiada. Si el fondo paga un interés del 28,32% MV, determinar el valor de los depósitos uniformes mensuales.

Solución

El diagrama de financiación de la vivienda es el siguiente:

Las cuotas a partir del primer mes forman un gradiente geométrico con $n = 60$; $i = 3,1\%$ mensual; $k = 1,5\%$ mensual; y debemos hallar **A**, o sea, la primera cuota.

Equilibrando el diagrama en el punto 0, tenemos:

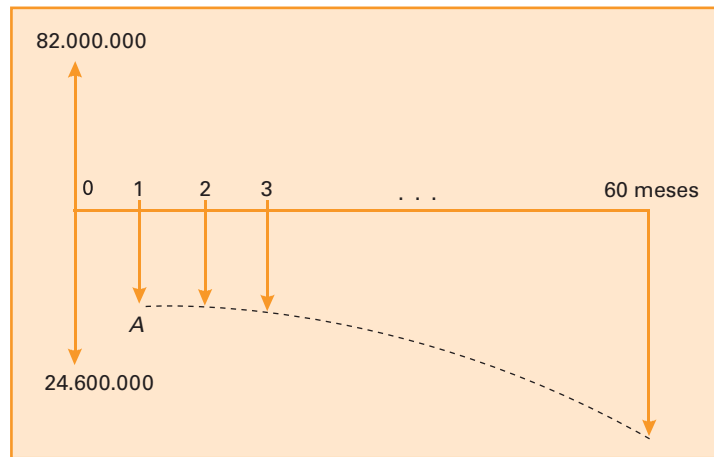


FIGURA 6.9

$$82.000.000 = 24.600.000 + \frac{A}{0,031 - 0,015} \left[1 - \left(\frac{1,015}{1,031} \right)^{60} \right]$$

$$\therefore A = \$ 1.508.639$$

Esto significa que después de cubrir la cuota inicial, la familia deberá pagar 60 cuotas mensuales que aumentan el 1,5% cada mes, empezando con una cuota de \$ 1.508.639. Todos estos valores deberán ser retirados del fondo creado con los depósitos mensuales iguales durante los nueve años.

El diagrama de flujo de caja de la familia frente al fondo de capitalización es el siguiente:

X es el valor del depósito mensual y la tasa de interés que paga el fondo es del 28,32% MV, equivalente al 2,36% mensual.

Equilibrando el diagrama en el punto 0, tenemos:

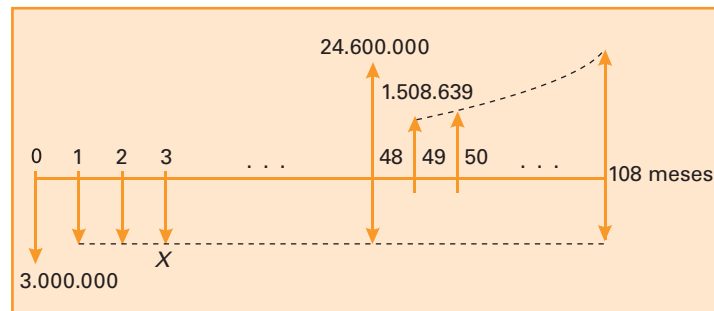


FIGURA 6.10

$$3.000.000 + X(P/A, 2,36\%, 108) = 24.600.000 (1,0236)^{-48} + \frac{1.508.639}{0,0236 - 0,015} \left[1 - \left(\frac{1,015}{1,0236} \right)^{60} \right] (1,0236)^{-48}$$

$$\therefore X = \$ 712.878$$

Esto indica que la familia deberá invertir en el fondo, además de los \$ 3 millones de pesos hoy, 180 cuotas mensuales de \$ 712.878 cada una.

Veamos otro de los ejemplos de capitalización más comunes.

EJEMPLO 6.19

Una persona invierte hoy \$ 6 millones en una institución financiera que promete pagar el DTF más 3 puntos, pero se deberá hacer una retención anual equivalente al 9% sobre los intereses devengados en ese año. Estimar el acumulado total o valor futuro que tendría esta persona al cabo de ocho años.

Solución

Como la tasa DTF (depósito a término fijo) es variable constantemente, y, por tanto, hoy no sabemos con certeza cuál irá a ser el valor de esta tasa para el futuro, antes de suponer valores de esa tasa (tomemos los que esta ha tenido en años anteriores) consideremos que estos han sido los siguientes para los últimos seis años: 24%, 22%, 17%, 17,5%, 18% y 20% del año pasado.

Ajustando estos datos a una función lineal, tenemos:

$$DTF(t) = 22,9 - 0,9t$$

Donde t es el tiempo medido en años. Así que los valores estimados para los próximos ocho años serán:

$$DTF(7) = 16,6\%; DTF(8) = 15,7\%; \text{ y de } 14,8\%; 13,9\%; 13\%; 12,1\%; 11,2\%, \text{ y } 10,3\%$$

Para estimar el valor futuro tomaremos su promedio aritmético de los valores anteriores, para cada uno de los ocho años, y obtenemos así el valor 13,45%.

Por tanto, la tasa anual de rendimiento sería de: $13,45\% + 3\% = 17,45$ anual; como hay una retención anual del 9% sobre los intereses, entonces la tasa real de capitalización será: $0,1745(1 - 0,09) = 15,88\%$ efectivo anual, y así el valor acumulado al cabo de los ocho años resultará:

$$F = 6.000.000(1,1588)^8 = \$ 19.508.287$$

Como podemos observar, este es un valor estimado, pues nada garantiza que esa sea la variación que irá a tener hacia el futuro la tasa del DTF, pero sí que la tendencia es la mostrada en los seis años anteriores; se espera que los valores obtenidos de la regresión lineal hallada sean representativos de esa tendencia.

PROBLEMAS RESUELTOS

- Usted obtiene un crédito por valor de \$ 75 millones para cancelarlo en un tiempo de cuatro años con cuotas mensuales que aumenten en el 1,5% cada mes. La tasa de interés es del 21,6% TV. Hallar el saldo que usted tendrá dentro de 2,5 años.

Solución

Sea A el valor del primer pago:

Tasa de interés: 21,6% TV \leftrightarrow 1,77% mensual

Tasa de incremento: $k\% = 1,5$

Equilibrando el diagrama en el punto 0, se tiene:

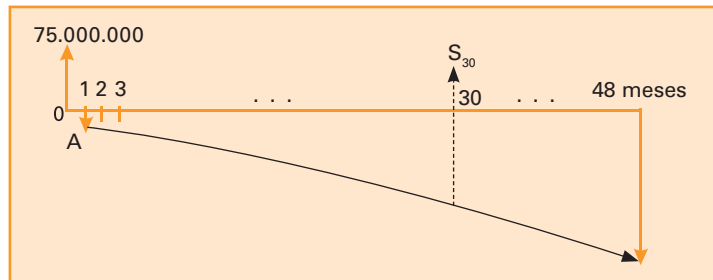


FIGURA 6.11

$$75.000.000 = \frac{A}{0,0177 - 0,015} \left[1 - \left(\frac{1,015}{1,0177} \right)^{48} \right]$$

$$\therefore A = \$ 1.691.477$$

El saldo en el mes 30 es:

$$S_{30} = 75.000.000 (1,0177)^{30} - \frac{1.691.477}{0,0177 - 0,015} [(1,0177)^{30} - (1,015)^{30}]$$

$$= \$ 45.722.183$$

- Usted compró hace nueve años un apartamento por un valor de \$ 110 millones, cancelando en esa fecha el 20% de ese valor y el resto se lo financió una institución financiera a 12 años en cuotas mensuales que aumentarán en el 1% mensual y con un interés del 36,6% MV. Hoy usted vende el apartamento bajo las siguientes condiciones: el comprador le cancelará hoy a usted la suma de \$ 130 millones y quedará con la deuda que usted tiene hoy con la institución financiera. Se pregunta, ¿cuánto le costó hoy el apartamento al comprador?

Solución

Tasa de interés: 36,6% MV \leftrightarrow 3,05% mensual

Tasa de incremento de las cuotas:
k% = 1%

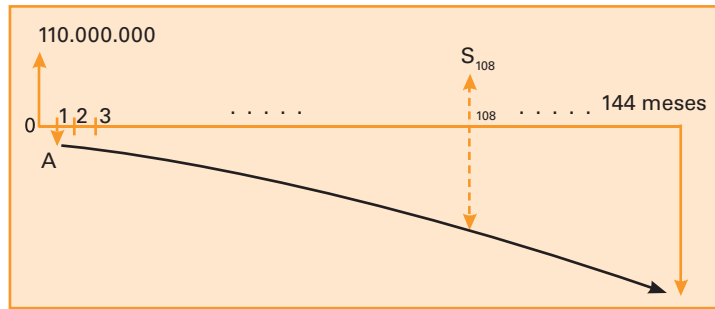


FIGURA 6.12

Cantidad financiada: $110.000.000 - 22.000.000 = \$ 88.000.000$

Financiación de la deuda:

$$88.000.000 = \frac{A}{0,0305 - 0,01} \left[1 - \left(\frac{1,01}{1,0305} \right)^{144} \right]$$

= \$ 1.909.766

El saldo con la institución financiera a los 108 meses:

$$S_{108} = 88.000.000 (1,0305)^{108} - \frac{1.909.766}{0,0305 - 0,01} [(1,0305)^{108} - (1,01)^{108}]$$

= \$ 140.490.792

Costo del apartamento al comprador = \$ 130.000.000 + \$ 140.490.792

= \$ 270.490.792

3. La empresa donde usted trabaja como asesor financiero debe invertir en activos hoy la suma de \$ 140 millones. Usted los solicita a una institución financiera y esta autoriza el crédito cobrando una tasa de interés del 25,8% MV durante el primer año y del 36,07% EA de ahí en adelante; el tiempo del crédito es de 5 años y se debe cancelar en cuotas mensuales que aumenten en el 1,5% cada mes. Al cabo de dos años hace un abono extraordinario por valor de \$ 30 millones y solicita que el saldo sea refinanciado en cuotas trimestrales iguales por el tiempo que resta para la cancelación del crédito. Usted debe determinar el valor de estas cuotas uniformes.

Solución

Tasa de interés: 25,8% MV \leftrightarrow 2,15% mensual

36,07% EA \leftrightarrow 2,6% mensual

Tasa de incremento de las cuotas:
k% = 1,5%

Financiación de la deuda:

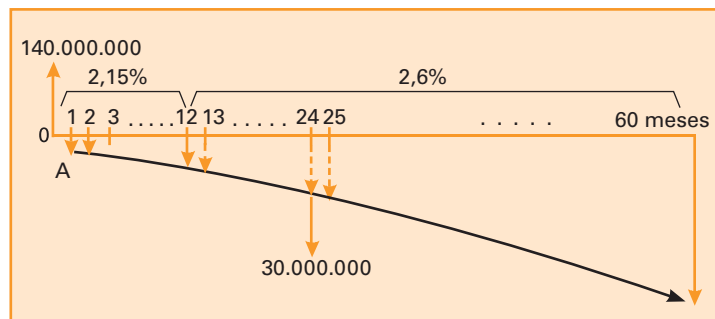


FIGURA 6.13

$$140.000.000 = \frac{A}{0,0215 - 0,015} \left[1 - \left(\frac{1,015}{1,0215} \right)^{12} \right] + \frac{A(1,015)^{12}}{0,026 - 0,015} \left[1 - \left(\frac{1,015}{1,026} \right)^{48} \right] (1,0215)^{-12}$$

$\therefore A = \$ 3.086.555$

El saldo en el mes 24 es:

$$S_{24} = \frac{4.412.240}{0,026 - 0,015} \left[1 - \left(\frac{1,015}{1,026} \right)^{36} \right] = \$129.006.190$$

Donde \$ 4.412.240 es la cuota número 25.

Saldo en el mes 24 después del abono = \$ 99.006.190

Este saldo financiado a 12 trimestres al 8% trimestral:

$$99.006.190 = X(P/A, 8\%, 12)$$

$$\therefore X = \$ 13.137.628$$

es el valor de las cuotas uniformes.

4. Una casa tiene un valor al contado de \$ 135 millones y se adquiere así: una cuota inicial del 30% del valor del precio al contado y el resto financiado a ocho años en cuotas mensuales que aumenten en el 1% cada mes y una tasa de interés del 35% anual. Al cabo de cuatro años y medio se hace un abono adicional de \$ 20 millones y el saldo se refinancia por el resto del tiempo en cuotas mensuales iguales. Hallar el valor de estas cuotas uniformes si para la refinanciación se toma una tasa del 41% anual.

Solución

Tasa de interés: 35% EA ↔ 2,53% mensual

Tasa de incremento: k% = 1%

Cantidad financiada: \$ 94.500.000

Entonces:

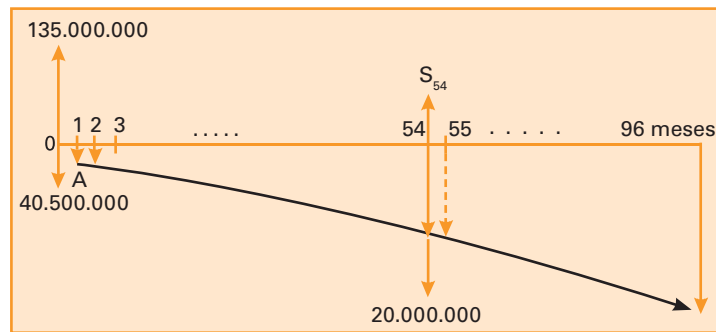


FIGURA 6.14

$$94.500.000 = \frac{A}{0,0253 - 0,01} \left[1 - \left(\frac{1,01}{1,0253} \right)^{96} \right]$$

$$\therefore A = \$ 1.892.807$$

$$\text{Cuota número 55} = 1.892.807(1,01)^{54} = \$ 3.239.370$$

Saldo en el mes 54 después del abono:

$$S_{54} = \frac{3.239.370}{0,0253 - 0,01} \left[1 - \left(\frac{1,01}{1,0253} \right)^{42} \right] - \$20.000.000 = \$79.126.582$$

Para la refinanciación de este saldo la tasa de interés mensual es del 2,9%; entonces, si X es la cuota mensual uniforme, su valor es:

$$X = 79.126.582(A/P, 2,9\%, 42) = \$ 3.282.700$$

$$\therefore X = \$ 3.282.700$$

5. Una empresa compra hoy una maquinaria por valor de \$ 135 millones, que cancela así: el 24% del valor con recursos propios y el resto con un préstamo a una corporación financiera. La corporación le cobra una tasa del 38% anual y la obligación la debe cancelar en cuotas mensuales que aumenten en el 2% cada mes y durante dos años y medio. Al cabo de un año y medio la empresa solicita que el saldo en esa fecha le sea refinanciado a 20 meses en cuotas mensuales iguales, si para la refinanciación se toma una tasa del 3,3% mensual. Hallar el valor de las cuotas uniformes.

Solución

Tasa de interés: 38% EA \leftrightarrow 2,72% mensual

Tasa de incremento: $k\% = 2\%$

Préstamo de la corporación:
\$ 102.600.000

Entonces la financiación de esta deuda es:

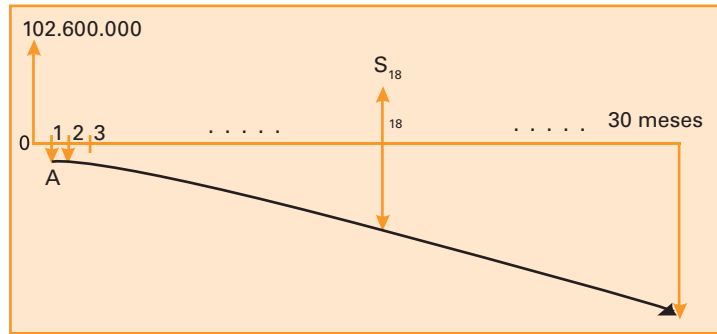


FIGURA 6.15

$$102.600.000 = \frac{A}{0,0272 - 0,02} \left[1 - \left(\frac{1,02}{1,0272} \right)^{30} \right]$$

$$\therefore A = \$ 3.883.038$$

El saldo en el mes 18 es:

$$S_{18} = 102.600.000 (1,0272)^{18} - \frac{3.883.038}{0,0272 - 0,02} [(1,0272)^{18} - (1,02)^{18}] = \$62.348.702$$

La refinanciación de este saldo en 20 cuotas mensuales iguales se hace con el 3,3% mensual; o sea que:

$$X = 62.348.702(P/A, 3,3\%, 20)$$

$$\therefore X = \$ 4.307.909$$

es el valor de la cuota mensual.

6. Un activo tiene un valor al contado de \$ 250 millones y se adquiere financiado con el siguiente plan: cuota inicial del 25% del valor del precio al contado y el resto a seis años en cuotas mensuales que aumenten en el 1,5% mensual y con un interés del 28,6% EA, debiendo cancelar la primera al cabo de seis meses. Una vez cancelada la cuota 35, el deudor solicita que el saldo le sea refinanciado a cuatro años en cuotas mensuales que disminuyan en el 2,5% cada mes y con una tasa de interés del 3% mensual. Hallar la primera cuota de la refinanciación.

Solución

Tasa de interés: 28,6% EA \leftrightarrow 2,12% mensual

Tasa de incremento de las cuotas:
 $k\% = 1,5\%$

Cantidad financiada: \$ 187.500.000

Equilibrando el diagrama en el punto 0 para la financiación, se tiene:

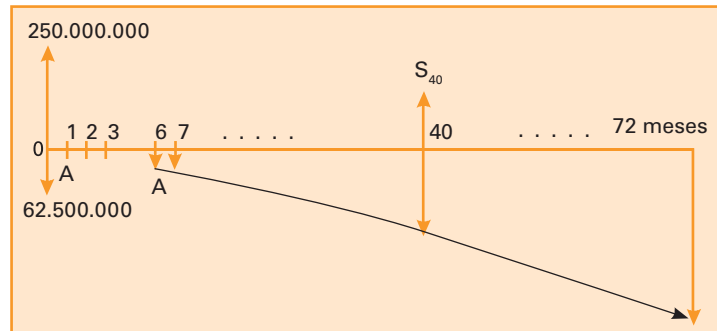


FIGURA 6.16

$$187.500.000 = \frac{A}{0,0212 - 0,015} \left[1 - \left(\frac{1,015}{1,0212} \right)^{67} \right] (1,0212)^{-5}$$

$$\therefore A = \$ 3.853.548$$

El saldo en el mes 40 está dado por:

$$S_{40} = 187.500.000 (1,0212)^{40} - \frac{3.853.548}{0,0212 - 0,015} [(1,0212)^{35} - (1,015)^{35}] = \$185.312.179$$

Este saldo se debe refinanciar a 48 meses en cuotas que disminuyan en el 2,5% cada mes y con un interés del 3% mensual.

Entonces:

$$185.312,179 = \frac{X}{0,03 - 0,025} \left[1 - \left(\frac{1 - 0,025}{1,03} \right)^{48} \right]$$

$$\therefore X = \$ 10.980.400$$

es el valor de la primera cuota de la refinanciación.

7. Una empresa obtuvo un préstamo hace tres años y medio de una institución financiera por el valor de \$ 100 millones para ser cancelados en un tiempo de seis años, en cuotas mensuales que aumenten cada mes en el 1,8%. La entidad cobra una tasa de interés del 22% nominal trimestral durante los tres primeros años y del 25,68% nominal mensual de ahí en adelante. Si hoy le solicitan a usted que el saldo pendiente de esa obligación sea refinanciado en 30 cuotas mensuales iguales y con un interés del 29,08% EA, determine el valor de estas cuotas uniformes.

Solución

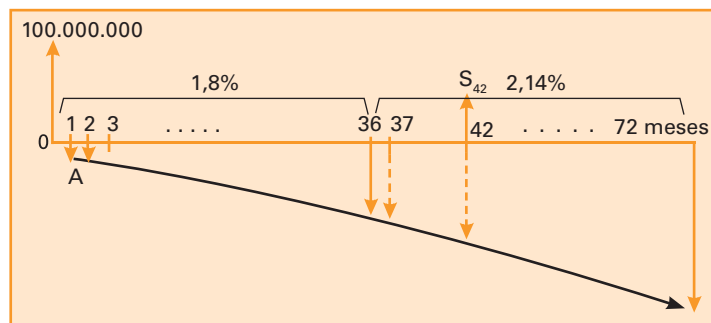


FIGURA 6.17

Tasa de interés: 22% TV ↔ 1,8% mensual
 25,68% MV ↔ 2,14% mensual
 29,08% EA ↔ 2,15% mensual

Tasa de incremento: $k\% = 1,8\%$

Cuota número 37 es $A(1,018)^{36}$

La financiación de la deuda está dada por:

$$100.000.000 = \frac{36 A}{1,018} + \frac{A(1,018)^{36}}{0,0214 - 0,018} \left[1 - \left(\frac{1,018}{1,0214} \right)^{36} \right] (1,018)^{-36}$$

$$\therefore A = \$ 1.457.059$$

es el valor de la primera cuota mensual de la financiación.

El saldo en el mes 42 está dado por:

$$S_{42} = \frac{1.457.059 (1,018)^{42}}{0,0214 - 0,018} \left[1 - \left(\frac{1,018}{1,0214} \right)^{30} \right] = \$ 86.296.457$$

Este saldo, refinanciado a 30 meses en cuotas iguales y con un interés del 2,15% mensual, es:

$$86.296.457 = X(P/A, 2,15\%, 30)$$

$$\therefore X = \$ 3.933.055$$

Donde **X** es el valor de la cuota uniforme mensual.

8. Un activo tiene un valor al contado de \$ 18.500.000. Se adquiere a crédito con una cuota inicial del 20% del valor al contado y el resto en 30 cuotas mensuales que aumenten en el 2% cada mes y una tasa de interés del 23% EA. Una vez cancelada la cuota número 18, se solicita que el saldo sea refinanciado a dos años en cuotas trimestrales iguales y con un interés del 22% TV. Hallar el valor de las cuotas uniformes.

Solución

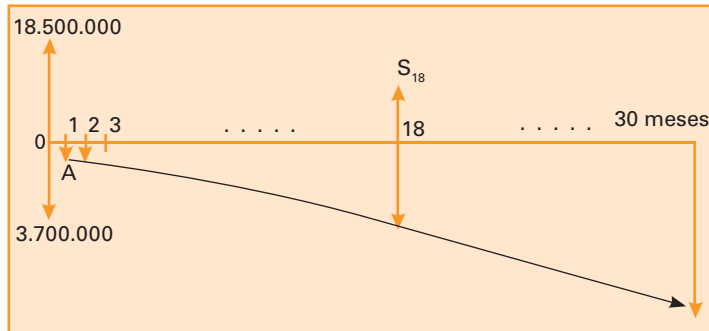


FIGURA 6.18

Tasa de interés: 23% EA \leftrightarrow 1,74% mensual

22% TV \leftrightarrow 5,5% trimestral

Tasa de incremento: $k\% = 2\%$

Cantidad financiada: \$ 14.800.000

$$14.800.000 = \frac{A}{1,0174 - 0,02} \left[1 - \left(\frac{1,02}{1,0174} \right)^{30} \right]$$

$$\therefore A = \$ 483.563$$

El saldo en el mes 18 está dado por:

$$S_{18} = 14.800.000 (1,0174)^{18} - \frac{483.563}{0,0174 - 0,02} [(1,0174)^{18} - (1,02)^{18}] = \$ 8.261.515$$

Este saldo, refinanciado a dos años en cuotas trimestrales iguales y un interés del 5,5% trimestral, da cuotas de:

$$X = 8.261.515(P/A, 5,5\%, 8)$$

$$\therefore X = \$ 1.304.195$$

9. Se deposita hoy la suma de \$ 6 millones en una corporación que paga un interés del 30% nominal trimestral. Cada mes se retira la tercera parte del saldo existente al final del mes anterior y simultáneamente se depositan \$ 25.000 cada mes comenzando al cabo de un mes. Hallar el saldo existente en la corporación al cabo de cuatro años y medio.

Solución

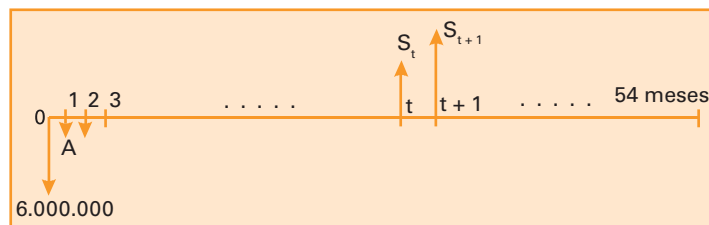


FIGURA 6.19

Tasa de interés: 30%TV \leftrightarrow 2,44% mensual

S_t : Saldo en el mes t

S_{t+1} : saldo en el mes t + 1

Entonces se plantea la relación siguiente:

$$S_{t+1} = S_t + 0,0244S_t - \frac{1}{3} S_t + 25.000$$

O sea:

$$S_{t+1} = 0,691066S_t + 25.000, \quad S_0 = 6.000.000$$

De donde:

$$S_t = (0,691066)^t (6.000.000) + 25.000 \left[\frac{1 - (0,691066)^t}{1 - 0,691066} \right]$$

Entonces:

$$S_{54} = \$ 80.923$$

es el saldo en la corporación al cabo de cuatro años y medio.

AUTOEVALUACIÓN

1. Cuando se proyectaba el saldo en el sistema UPAC con una tasa de interés y una tasa de corrección monetaria, se hacía con la tasa resultante de:
 - a) Sumar las dos tasas
 - b) Restar una tasa de la otra
 - c) Multiplicar las dos tasas
 - d) Ninguna de las anteriores

2. La amortización de una deuda en un determinado tiempo y con cuotas periódicas iguales, y con la misma tasa de interés, hace que:
 - a) Los intereses cancelados en cada período sean iguales.
 - b) El abono al capital en cada período sea igual.
 - c) Los intereses que se cancelan en los primeros períodos sean menores que los que se cancelan en los últimos.
 - d) Ninguna de las anteriores.

3. En cualquier sistema que se utilice para amortizar una deuda en cuotas periódicas:
 - a) Cualquier cuota siempre contiene intereses y abono al capital.
 - b) Hay cuotas que solo abonan al capital y no contienen intereses.
 - c) Puede haber cuotas que solo abonen parte de los intereses y no abonen al capital.
 - d) Cuando haya transcurrido la mitad del tiempo de la financiación, ya se ha cancelado la mitad de la deuda original.

4. Proyectar el saldo de una deuda original, con cualquier sistema de amortización y a un determinado tiempo, es siempre:
 - a) Hallar el valor futuro en ese tiempo de la deuda original.
 - b) Calcular en ese tiempo el valor de lo que aún falta por cancelar de la deuda.
 - c) Hallar en ese tiempo la diferencia entre la deuda original y lo que aún falta por pagar.
 - d) Hallar el valor futuro de las cuotas que ya se han cancelado.

5. En el cálculo del valor de la UVR para varios meses se tiene que:
 - a) Si la inflación no varía en esos meses, entonces el valor de la UVR es siempre el mismo.
 - b) Si la inflación es igual a 0 en esos meses, entonces la UVR disminuye.
 - c) Para que la UVR se mantenga constante, se necesita que la inflación sea igual a 0.
 - d) Si la inflación aumenta en forma lineal, entonces el valor de la UVR también aumenta en forma lineal.

PROBLEMAS I

- 1.1 Se tiene una deuda hoy por valor de \$ 5 millones, que debe ser pagada en un plazo de cinco años con cuotas mensuales que aumenten cada mes en el 3%. Si la tasa de interés que se cobra es del 29% nominal trimestral, hallar el saldo al cabo de tres años antes de pagar la cuota correspondiente.
- 1.2 Resolver el problema 6.1 con el supuesto de que la tasa de interés que se cobra sea del 29% nominal trimestral durante los dos primeros años y del 36% nominal mensual de ahí en adelante.
- 1.3 Para un activo que tiene un valor al contado de \$ 158.000 y que se amortiza con cuotas iguales mensuales, se sabe que el saldo al final del sexto mes es \$ 102.000. Si se conoce que se cobra un interés del 26% nominal mensual, ¿cuál es la cuota que se paga mensualmente?
- 1.4 Usted compra un automóvil a crédito y paga hoy el 40% del valor del precio al contado como cuota inicial. A su vez, firma hoy 36 letras por valores iguales y con vencimiento al final de cada mes. El interés que se cobra es el equivalente al 33% anual. Después de pagadas las 22 primeras letras, le informan a usted que el saldo pendiente debe pagarse un mes más tarde y equivaldría a \$ 2.200.000 en la fecha de pago. Determinar el valor del precio al contado del vehículo.
- 1.5 Una entidad financiera le hace un préstamo a un cliente por \$ 10 millones y le cobra un interés del 28% nominal trimestral. El deudor tiene 15 años para amortizar la deuda con cuotas mensuales variables. La primera cuota de \$ 165.000 se paga al cabo de un mes y de ahí en adelante se reajustan en el 2,4% mensual. Transcurridos cuatro años, y una vez pagada la cuota correspondiente, el deudor solicita que el saldo pendiente le sea refinanciado en los 11 años restantes en cuotas mensuales iguales. Hallar el valor de esta anualidad.
- 1.6 Una persona tiene una obligación para pagar en 15 años con cuotas mensuales de \$ 50.000, la primera para reajustarse en el 2% cada mes. Al final del quinto año decide cambiar el sistema de pagos por cuotas mensuales iguales y terminar dos años antes de lo previsto inicialmente. Hallar el valor de estas nuevas cuotas sabiendo que el interés sobre el saldo es del 2% mensual durante los tres primeros años y del 3% mensual para los 12 años siguientes.
- 1.7 Cuando usted adquirió una obligación financiera, se comprometió al siguiente plan: pagar una cuota inicial de \$ 860.000 y tres pagos por el valor de \$ 950.000, \$ 730.000 y \$ 1.250.000 a 6, 10 y 15 meses respectivamente, y un interés del 33% ATV. Transcurridos ocho meses, usted paga la mitad del saldo en esa fecha y el resto cuatro meses más tarde. Hallar el valor de cada uno de estos dos pagos.
- 1.8 Una pequeña empresa obtiene hoy un préstamo de un banco por valor de \$ 7 millones, con la condición inicial de amortizar esta deuda en un plazo de cuatro años con cuotas mensuales variables que disminuyan cada mes en \$ 50.000. Transcurridos dos años, el Gerente de la empresa le propone al banco cambiar el sistema de pagos para los dos últimos años por cuotas trimestrales que aumenten en el 4%. Si la tasa de interés que cobra el banco es del 38% nominal trimestral, hallar el valor de la primera de las cuotas trimestrales.
- 1.9 Una institución financiera le otorga a usted un crédito por el valor de \$ 6 millones para ser pagados en un plazo de ocho años con cuotas mensuales que aumenten cada mes en el 1,5% y con un interés del 33% nominal trimestral. Al cabo de cinco años, usted solicita que el saldo en esa fecha le sea refinanciado a cuatro años con cuotas trimestrales iguales. Si para la refinanciación la tasa de interés es del 34% nominal mensual, hallar el valor de las cuotas uniformes.

- 1.10** Un banco comercial le otorga a usted un préstamo hoy por \$ 1 millón de pesos para ser cubiertos en un año con pagos trimestrales iguales en amortización al capital y con un interés del 34% nominal trimestral anticipado. Elaborar la tabla de amortización y el diagrama de flujo de caja con los desembolsos totales por trimestre.
- 1.11** Resolver el problema 6.10 para el caso de pagos mensuales y tasa de interés del 33% nominal mensual anticipado. ¿Existe alguna relación entre los pagos totales mensuales?
- 1.12** Usted obtiene un crédito por el valor de \$ 2 millones el 1 de enero de 1990, para ser pagado en un plazo de tres años con cuotas mensuales que aumenten en el 3% cada mes y con una tasa de interés del 38% anual. Si la primera cuota se cancela el 1 de mayo de 1990, determinar el saldo para el 1 de junio de 1991.
- 1.13** Un agricultor obtiene un préstamo de \$ 6 millones de una entidad crediticia que otorga préstamos para invertir en el sector agrario; las condiciones de este crédito son:
- El tiempo total para la amortización de la deuda es de seis años, de los cuales los dos primeros son años de gracia y solamente paga interés.
 - La tasa de interés es del 27,5% pagadero por semestre vencido.
 - El capital se amortiza en cuotas semestrales iguales durante los cuatro últimos años de plazo.
- Elaborar la tabla de amortización del crédito.
- 1.14** Si en el problema 6.13 se estipula una tasa de mora sobre el capital del 12% anual, el deudor no paga las cuotas 4 y 5 de capital, pero sí los intereses corrientes. Elaborar el flujo de caja especificando en cada pago los abonos al capital, intereses corrientes e intereses por mora.
- 1.15** Un banco comercial hace un préstamo a una empresa por el valor de \$ 10 millones para ser pagados en un plazo de cuatro años con cuotas mensuales que aumenten en el 3% cada mes y con una tasa de interés del 36% nominal semestral. Al cabo de dos años y medio la empresa abona la suma de \$ 2 millones al saldo existente en ese momento. Una vez pagada la cuota respectiva, solicita que el nuevo saldo le sea refinanciado por el tiempo que falta, en cuotas mensuales iguales. Determinar el valor de estas nuevas cuotas.
- 1.16** Un comerciante adquiere un préstamo de un banco comercial de la ciudad por el valor de \$ 6.500.000 para ser pagados en un plazo de tres años. Los abonos de amortización al capital son constantes por trimestre vencido y la tasa de interés es del 38% pagadero por trimestre anticipado. Al cabo de un año, el comerciante hace un abono adicional al capital por el valor de \$ 1 millón; por tanto, los pagos restantes al capital se disminuyen pero siguen siendo constantes. Un año más tarde hace otro abono adicional al capital por el valor de \$ 800.000 y de nuevo el resto de pagos al capital se disminuyen pero son constantes. Elaborar la tabla de amortización de la deuda.
- 1.17** En el problema 6.16, una de las cláusulas del préstamo contempla una tasa de mora sobre capital del 4% trimestral vencida. Suponer que el comerciante no paga en sus fechas correspondientes las cuotas al capital (pero sí los intereses corrientes) de los trimestres 5 y 6; como consecuencia, al final del sexto trimestre debe pagar, además de los intereses corrientes, los intereses de mora equivalentes a los dos trimestres en mora, y el saldo se le refinancia por el resto de tiempo en cuotas iguales de amortización al capital. Elaborar la tabla de amortización y el diagrama de flujo de caja para valores totales.

- 1.18** Resolver el problema 6.15 si la tasa de interés es del 36% nominal semestral durante los dos primeros años y del 41% anual de ahí en adelante.
- 1.19** En la información que suministra un banco comercial sobre un crédito para personas naturales, se encuentran, textualmente, los siguientes datos:

Monto del crédito: desde \$ 500.000 hasta \$ 6 millones

Plazos: 12, 18, 24, 36 meses

Meses	Factor
12	0,104563
18	0,076931
24	0,063434
36	0,050543

- a) Justificar el factor dado por el banco.
- b) Elaborar la tabla de amortización y el diagrama de flujo de caja para un crédito de \$ 2 millones a 12 meses.
- c) Si un segundo banco otorga el crédito a una tasa del 50% anual, ¿cuál de los dos es menos costoso?
- 1.20** Un artículo vale al contado \$ 120.000, pero puede adquirirse a crédito con una cuota inicial del 30% del valor del precio al contado y el resto financiado a 30 cuotas mensuales iguales; la primera cuota debe pagarse al cabo de cinco meses con una tasa de interés del 28% nominal trimestral. Una vez cancelada la cuota 18, se solicita que el saldo pendiente en esa fecha sea refinanciado en 10 cuotas trimestrales iguales y para esta refinanciación se cobrará un interés del 3,5% mensual. Hallar el valor de estas nuevas cuotas.
- 1.21** Usted obtiene hoy un crédito de una institución financiera por el valor de \$ 10 millones, y acordó pagar la deuda en tres años con cuotas mensuales que aumenten en el 2% cada mes; la primera cuota debe cancelarla al cabo de cuatro meses y con un interés del 43,5% anual. Pasados dos años usted hace un abono adicional por el valor de \$ 3 millones y solicita que el saldo le sea refinanciado a 18 meses en cuotas mensuales iguales. Si para la refinanciación le cobran un interés del 39% AMV, determinar el valor de estas nuevas cuotas.
- 1.22** Usted recibe hoy un préstamo de \$ 2 millones de una entidad financiera, comprometiéndose inicialmente a pagarlo con cuotas mensuales variables. El primer mes debe pagar una cuota de \$ 38.000 y a partir de esa fecha las cuotas aumentarán en el 3% cada mes. Si al cabo de dos años y medio usted quiere cubrir el saldo existente en esa fecha antes de pagar la cuota correspondiente, calcule el valor de ese pago si la tasa de interés es del 33,6% nominal mensual.
- 1.23** Usted obtiene hoy un préstamo de \$ 7 millones de una entidad financiera, para ser pagados en un plazo de cinco años con cuotas mensuales que aumenten en el 4% cada mes. Al cabo de tres años usted le solicita a la entidad acreedora que el saldo en esa fecha, después de pagar la cuota correspondiente, le sea refinanciado a dos años y medio en cuotas trimestrales iguales. Si la tasa de interés que usted paga por el crédito es del 35% nominal trimestral durante los dos primeros años y del 34,5% nominal mensual de ahí en adelante, hallar el valor de las cuotas correspondientes a la refinanciación.
- 1.24** Una empresa recibe hoy \$ 4.500.000 en calidad de préstamo de un banco comercial. Esta deuda debe pagarse en cuotas mensuales iguales durante cuatro años. La empresa a su vez obtiene

unas utilidades mensuales de \$ 235.000 por la venta de sus productos; con estas utilidades se cancela cada mes la cuota al banco y el resto se deposita en una cuenta que paga un interés del 2,5% mensual. Hallar los saldos en el banco y en la cuenta de ahorros al cabo de tres años, sabiendo que el banco cobra por el préstamo un interés del 39% anual.

- 1.25** Una deuda estaba pactada para ser amortizada en 24 cuotas mensuales de \$ 28.000 cada una y con un interés del 3% mensual. Una vez pagada la décima cuota, el deudor, por razones personales, deja de cubrir las tres cuotas siguientes; por esto, el acreedor aplica una tasa de interés, sobre los saldos y durante estos tres meses, del 3,6% mensual y, a su vez, el nuevo saldo –o sea, el existente al final de los tres meses– lo refinancia a seis cuotas iguales por mes vencido y con un nuevo interés del 3% mensual. Hallar el valor de cada una de estas nuevas cuotas.
- 1.26** El plan para cancelar una deuda contemplaba el pago de 25 cuotas mensuales anticipadas de \$ 10.645 cada una. Pero una vez pagada la cuota 13, se decide refinanciar el saldo en 20 cuotas mensuales iguales; la primera de estas cuotas debe pagarse tres meses más tarde. Si la tasa de interés es del 2% mensual durante el primer año y del 2,5% mensual de ahí en adelante, hallar el valor de cada una de estas últimas cuotas.
- 1.27** La empresa donde usted presta sus servicios como asesor financiero obtiene un préstamo de una corporación por el valor de \$ 10 millones para ser pagados en un período de seis años en cuotas mensuales que aumenten cada mes en el 1,8%. La corporación cobra un interés del 33% nominal trimestral durante los tres primeros años y del 34% nominal mensual de ahí en adelante. Si al cabo de cuatro años y medio usted solicitó que el saldo existente en ese momento le sea refinanciado a 30 cuotas mensuales iguales y la corporación acepta su solicitud pero le cobra un interés del 3,3% mensual para esta refinanciación, ¿de cuánto debe ser cada una de estas nuevas cuotas?
- 1.28** Se tienen dos pagarés por el valor de \$ 55.000 el primero, para ser pagado al cabo de un año, y por \$ 72.500 el segundo, a dos años y medio. Se desea sustituir esta deuda por su equivalente en una serie de seis pagos mensuales, de tal manera que cada uno de ellos sea igual al del mes anterior disminuido en el 8%. Elaborar la tabla de amortización, sabiendo que el interés es del 30% nominal trimestral.
- 1.29** Una determinada deuda está amortizándose con pagos mensuales de tal manera que cada pago, con excepción del último, amortiza \$ 3.500 al capital; el plazo es de cinco meses. El saldo al final del tercer mes es de \$ 28.700 y la tasa de interés es del 3% mensual. Con estos datos, ¿es posible elaborar la tabla de amortización?
- 1.30** Un activo de contado vale \$ 1.500.000. Se adquiere a crédito para ser pagado así: cuota inicial del 35% del valor del precio al contado y el resto financiado a 30 cuotas mensuales iguales; la primera cuota debe pagarse al cabo de cuatro meses con un interés del 3% mensual. Una vez pagada la cuota 15, se solicita que el saldo sea refinanciado en 20 cuotas mensuales iguales y una tasa de interés para la refinanciación del 3,5% mensual. Hallar el valor de estas nuevas cuotas.
- 1.31** Está cancelándose una deuda de \$ 73.000 mediante una serie de pagos por mes anticipado, en la que cada pago es igual al del mes anterior disminuido en el 5%. Si la deuda está pactada para ser amortizada con 15 pagos, hallar la composición del pago 12, sabiendo que la tasa de interés es del 28% nominal mensual.

- 1.32** Una compañía urbanizadora vende una casa con una cuota inicial de \$ 830.000 y el resto financiado a 15 años con cuotas mensuales; la primera cuota es de \$ 135.000 y de ahí en adelante cada cuota se reajusta en el 1%. Si la tasa de interés es del 3% mensual, hallar el derecho que sobre la casa tiene el comprador al final de cinco años y el derecho que la compañía tiene sobre la casa al final de 12 años.
- 1.33** Usted solicita un préstamo a una entidad financiera por \$ 30 millones, comprometiéndose a pagar la deuda en un plazo de 10 años y con un interés del 30% nominal trimestral; las cuotas son mensuales y aumentarán cada mes en el 1,5%. Al cabo de cuatro años usted solicita que el saldo en esa fecha, una vez pagada la cuota correspondiente, le sea refinanciado a ocho años con cuotas mensuales que aumenten cada mes en el 1,6%. Determinar en qué porcentaje varió la cuota del mes 49 respecto de la del mes 48.
- 1.34** Una empresa recibe hoy \$ 1 millón, en calidad de préstamo, de un banco comercial. Esta deuda debe pagarse en cuotas iguales mensuales durante tres años. La empresa, a su vez, recibe \$ 50.000 por concepto de venta de su producto. Con estos ingresos se pagan las cuotas al banco y el resto se deposita en una cuenta de ahorros que abona el 3% mensual. Hallar el saldo de la empresa en el banco al cabo de dos años y el valor total acumulado en la cuenta de ahorros en la misma fecha, sabiendo que el banco cobra un interés del 36% nominal trimestral.
- 1.35** Un estudiante universitario recibe un préstamo de una entidad oficial, que consta de 10 pagos iguales cada año, durante los meses de febrero a noviembre y durante los cinco años que dura su carrera. El primer año recibe \$ 10.000 por mes; después de cada año se incrementa el 10%. Durante este tiempo, la institución cobra el 1,5% mensual. Una vez finalizada la carrera, el nuevo profesional debe empezar a amortizar la deuda con pagos mensuales iguales y durante cuatro años. Si para el tiempo de amortización la tasa de interés es del 2,3% mensual, hallar el saldo existente al cabo de tres años de estar amortizando la deuda.
- 1.36** Para el problema 6.35, hallar la composición de la cuota 35 de amortización.
- 1.37** Una persona adquiere hoy un préstamo de una corporación de ahorro y vivienda por el valor de \$ 10 millones para ser pagados en un plazo de 15 años con cuotas mensuales que sean constantes durante el año pero se incrementen en el 12% cada año. La tasa de interés es del 6,5% anual y la corrección monetaria del 27,5% anual. Determinar el valor de las cuotas mensuales uniformes del primer año.
- 1.38** Un banco le prestó a usted la suma de \$ 5 millones hoy para ser pagados en un plazo de dos años y en cuotas mensuales. Dentro de las condiciones del crédito están las siguientes: la amortización al capital debe ser la misma en todas las cuotas, el interés del crédito es del 33% nominal mensual (vencido). Hallar el valor total de la cuota 15.
- 1.39** Un señor obtiene un crédito de una corporación de ahorro y vivienda por \$ 10 millones para ser amortizados en un plazo de 15 años, con cuotas mensuales variables que aumenten cada mes en el 0,8%. La corporación cobra un interés del 9,5% anual y una corrección monetaria del 24,5% anual. Al cabo de seis años, el deudor hace un abono adicional a la cuota correspondiente por el valor de \$ 4 millones y solicita que el nuevo saldo le sea refinanciado por el resto del tiempo en las mismas condiciones anteriores. Calcular el saldo pendiente tres años antes de finalizar el plazo.
- 1.40** Si usted no tomara el crédito del problema 6.38, entonces podría ahorrar cada mes el dinero correspondiente a los intereses que dejaría de pagar por no tomar el préstamo. Si estos ahorros ganan el 30% nominal mensual, ¿cuánto tendrá acumulado al final de los dos años?

- 1.41** Resolver el problema 6.38 si la tasa de interés es del 32,5% nominal mensual anticipado.
- 1.42** Usted solicita un préstamo a un banco comercial por el valor de \$ 6 millones con la condición de ser pagados en un plazo de tres años con cuotas trimestrales que amorticen el capital en cantidades iguales y con un interés del 34% nominal trimestral. Al cabo de dos años de estar amortizando la deuda, le solicita al banco que el saldo le sea refinanciado a 24 meses con cuotas que también amorticen al capital cantidades iguales y con un interés del 30% nominal mensual anticipado. Determinar la cuota total pagada un año después de recibido el préstamo y la cuota total pagada un año más tarde de la refinanciación.
- 1.43** Un ganadero obtiene de una institución bancaria semioficial un crédito con el fin de aumentar su producción en el campo. El crédito es por el valor de \$ 20 millones, y las condiciones estipuladas en el documento firmado por las partes son las siguientes:
- Plazo total de seis años, de los cuales los dos primeros son años de gracia.
 - Interés del 29% nominal trimestral anticipado.
 - Durante los dos años de gracia solo se pagan los intereses.
 - Las cuotas de amortización al capital son trimestrales vencidas e iguales.
 - En caso de mora en una cuota se cobrará un interés de mora sobre el saldo de capital del 3% trimestral vencida. Si en la sexta cuota de los cuatro últimos años el señor ganadero solo pagó intereses, ¿cuál debe ser el desembolso total que debe hacer en el séptimo de estos trimestres para volver a quedar dentro del plan original de financiación?
- 1.44** En el problema 6.43, suponer que en el séptimo trimestre de los cuatro últimos años el ganadero, además de pagar la cuota total allí determinada, decide hacer un abono al capital por el valor de \$ 1 millón de pesos y que el resto le sea refinanciado en el tiempo que falta, también con cuotas de pagos iguales al capital y la misma tasa de interés del problema 6.43. Determinar la cuota total que debe pagar nueve meses más tarde de la refinanciación.
- 1.45** Una corporación de ahorro y vivienda le otorga a usted un préstamo por el valor de \$ 5 millones para ser pagados en 10 años con cuotas mensuales que aumenten en el 1% cada mes. La corporación cobra un interés del 6,5% anual y una corrección monetaria del 23,5% anual. Determinar el saldo al cabo de cuatro años.
- 1.46** Una empresa obtiene un crédito del banco por \$ 20 millones a una tasa de interés del 36% anual, comprometiéndose a pagar la deuda en cuatro años en cuotas mensuales que aumenten en el 2,2% cada mes. Al cabo de dos años se hace un abono adicional por el valor de \$ 4 millones, y solicita que el saldo sea refinanciado en el tiempo que falta en cuotas mensuales que aumenten en \$ 10.000 cada mes y para una tasa de interés del 2,5% mensual. Hallar el valor de la última de estas cuotas.
- 1.47** Una casa tiene un valor de precio al contado de \$ 135 millones y se adquiere así: cuota inicial del 30% del valor al contado y el resto financiado a ocho años en cuotas mensuales que aumenten en el 1% cada mes y con una tasa de interés del 35% anual durante los tres primeros años y del 39% anual de ahí en adelante. Al cabo de cuatro años y medio se hace un abono adicional de \$ 20 millones y el saldo se refinancia por el tiempo que falta en cuotas mensuales que aumenten en el 3% cada mes. Hallar el valor de la primera de estas nuevas cuotas, si para la refinanciación se toma una tasa del 41% anual.

- 1.48** Una corporación de ahorro y vivienda le concede a usted un préstamo por el valor de \$ 8 millones para ser pagados en un plazo de 12 años con cuotas mensuales que aumenten cada mes en el 0,85%. Si la tasa de interés es del 8% anual y la corrección monetaria del 24,5% anual, determinar la composición (interés y abono al capital) de la cuota 106.
- 1.49** Una corporación de ahorro y vivienda le otorga a usted un crédito hoy por el valor de \$ 6 millones para ser pagados en un plazo de 12 años con cuotas mensuales que aumenten en el 0,95% cada mes. La tasa de interés será del 7,5% anual y la corrección monetaria se estima en el 24% anual durante los cinco primeros años y del 26% anual de ahí en adelante. Usted debe determinar el saldo que tendrá pendiente con la corporación al cabo de siete años.
- 1.50** Resolver el problema anterior suponiendo que las cuotas mensuales son iguales durante el año y se incrementan en el 9,5% cada año.

PROBLEMAS II

- 2.1** Se tiene hoy la suma de \$ 600.000 en una corporación de ahorro que paga un interés del 30% nominal trimestral; cada mes se retira la quinta parte del saldo existente al final del mes inmediatamente anterior y, a la vez, se depositan \$ 5.000. Hallar el saldo existente en la cuenta de ahorros al cabo de cinco años.
- 2.2** Este problema debe desarrollarse en la computadora, y consiste en elaborar las tablas de amortización de un crédito por 10 millones y un plazo de tres años con cuotas trimestrales y planes diferentes, así:
- Cuotas uniformes proyectadas para los tres años; sin embargo, al cabo de un año se hace un pago adicional equivalente al 20% del saldo en esa fecha. El nuevo saldo debe refinanciarse en cuotas uniformes por el resto del tiempo. La tasa de interés es del 10,5% trimestral.
 - Cuotas iguales durante el primer año y de ahí en adelante aumentarán en el 8% cada trimestre. La tasa de interés será del 42% anual.
 - Cuotas iguales durante el primer año y medio y de ahí en adelante las cuotas disminuirán en el 10% cada trimestre. La tasa de interés será del 36% anual.
 - Cuotas que aumentan el 9% cada trimestre durante el primer año y de ahí en adelante permanecerán constantes. La tasa de interés será del 39% anual.
 - Cuotas iguales durante los dos primeros años y luego aumentarán en \$ 50.000 cada trimestre. La tasa de interés será del 35% nominal mensual.
 - Cuotas que disminuyan en \$ 100.000 cada trimestre durante el primer año y luego permanezcan constantes. La tasa de interés será del 38,5% nominal trimestral.
- 2.3** Una persona invierte hoy \$ 2 millones en una entidad financiera, donde cada mes retira la tercera parte de los intereses devengados en ese mes; a su vez, la entidad le descuenta mensualmente \$ 15.000 por concepto de administración y seguros. Si la entidad paga un interés del 33% anual durante los tres primeros años y del 38% anual de ahí en adelante, determinar el saldo del inversionista al cabo de cinco años.
- 2.4** Una persona adquiere un préstamo de una corporación de ahorro y vivienda por el valor de \$ 10 millones para ser pagados en un plazo de 15 años con cuotas mensuales que sean constantes durante el año pero que se incrementen en el 12% cada año. La tasa de interés es del 6,5% anual y la corrección monetaria del 27,5% anual. Determinar el valor de las cuotas mensuales uniformes del primer año.

- 2.5** Una persona abre una cuenta de ahorros hoy con \$ 2.500.000; cada mes deposita \$ 40.000 y la cuenta le paga el 31% MV. A partir del momento en que su saldo sea mayor o igual a \$ 4 millones, la institución le haría una retención del 4% anual sobre los intereses devengados en ese año. ¿Dentro de cuántos meses se tendrá un saldo que supere en lo mínimo a \$ 5.800.000?
- 2.6** Una obligación que consta de 30 pagos iguales por mes anticipado se decide amortizar mediante una serie de 36 pagos por mes vencido, de tal manera que sean de la siguiente forma:
- Primer pago = \$ 200 = 2(100)
 Segundo pago = \$ 500 = 5(100)
 Tercer pago = \$ 1.000 = 10(100)
 Enésimo pago = $(n^2 + 1)(100)$
- Sabiendo que la tasa de interés es del 2% mensual, hallar el valor de los pagos iguales iniciales.
- 2.7** Una corporación de ahorro y vivienda le otorga a usted un crédito por \$ 55 millones para ser pagados en 15 años con cuotas mensuales iguales por año, pero que aumentarán cada año en el 11%. La tasa de interés es del 18% anual y la corrección monetaria del 24% anual. Hallar el saldo al cabo de tres años y ocho meses después y antes de pagar la cuota correspondiente.
- 2.8** Usted inicia hoy una cuenta de ahorros con \$ 1.850.000 y le pagan el 26% TV; además, cada trimestre usted retira la quinta parte del saldo que tenía en el trimestre anterior, pero, a su vez, deposita cantidades que aumentan cada trimestre en el 4%; \$ 80.000 es el depósito en el primer trimestre. Hallar el saldo al cabo de cuatro años y medio antes del depósito y del retiro respectivos.
- 2.9** Una persona obtiene un crédito de una corporación de ahorro y vivienda por el valor de \$ 60 millones para ser pagados en 14 años en cuotas mensuales que aumenten en el 0,4% cada mes. La tasa de interés es del 16% anual y la corrección monetaria del 22% anual. Al cabo de ocho años, la persona hace un abono adicional por el valor de \$ 50 millones, y el saldo lo amortizará en el tiempo que falta en las mismas condiciones iniciales de tasas. Hallar la composición de la primera de estas nuevas cuotas.
- 2.10** Usted compró hace ocho años un apartamento por \$ 50 millones y pagó en ese momento una cuota inicial del 30% del valor del precio al contado, y el resto se lo financió una corporación de ahorro y vivienda a 15 años, en cuotas mensuales que aumenten en el 0,9% cada mes. La tasa de interés pactada fue del 13% anual y la corrección monetaria del 24% anual.
- Hoy usted vende el apartamento en las condiciones siguientes: el comprador pagará \$ 140 millones y quedará con la deuda que hay pendiente con la corporación. ¿Cuanto le costó hoy el apartamento al comprador?
- 2.11** Un inversionista toma un CDT (certificado en depósito a término) en las siguientes condiciones:
- | | |
|----------------------------|----------------------|
| Tiempo de inversión: | 180 días |
| Cantidad depositada: | \$ 12.000.000 |
| Tasa de interés: | 28,5% anual efectivo |
| Forma de liquidación: | mes vencido |
| Retención sobre intereses: | 7% |

Si los intereses se liquidan cada mes, se les debe hacer la retención correspondiente, y este valor neto resultante se deposita cada mes en una institución que paga el 27% anual efectivo. ¿Cuánto tendrá acumulado el inversionista al cabo de los seis meses?

- 2.12** Se invierte hoy la suma de \$ 2.500.000 en una institución que paga un interés del 28% TV; cada mes retira la mitad de los intereses devengados en ese mes y a su vez deposita cantidades que aumentan en el 3% cada mes; \$ 15.000 es el depósito del primer mes. Si la institución hace un descuento del 1% cada mes sobre los intereses de ese mes, determinar el saldo acumulado en la cuenta al cabo de cuatro años.
- 2.13** Con el ánimo de capitalizar, usted invierte hoy \$ 5.500.000 en una institución que paga un interés del 31,5% MV, pero cada mes le retienen el 0,8% sobre los intereses devengados en ese mes. Si cada año usted retira \$ 1.500.000, ¿en cuántos meses usted alcanzará \$ 8.200.000 como saldo de su inversión?
- 2.14** Se recibe un crédito por el valor de \$ 120 millones para ser amortizado en cuatro años con cuotas mensuales iguales y con unos intereses del 18% EA para el primer año, del 20% EA para los dos años siguientes y del 16% EA para el último año. Se pide:
- El valor de la cuota uniforme
 - El saldo al final del segundo año
 - Los intereses cancelados en la cuota número 25
- 2.15** Usted obtiene hoy un crédito por el valor de \$ 75 millones de una corporación de ahorro y vivienda, para ser pagados en 13 años con cuotas mensuales que aumenten en el 1% cada mes. La tasa de interés es del 16% anual y la corrección monetaria del 18,5% anual. Al cabo de siete años usted hace un abono adicional por \$ 60 millones y el saldo lo amortizará en el tiempo que falta según las mismas condiciones anteriores. Hallar la composición de la primera de estas nuevas cuotas.
- 2.16** Una familia que desea comprar una vivienda adquiere un préstamo de una corporación de ahorro y vivienda por el valor de \$ 105 millones para cancelarlos en 10 años con una tasa de interés del 15,6% EA para los primeros cinco años y del 17% EA de ahí en adelante. Las cuotas deben ser mensuales e iguales por año con un aumento del 6% cada año. Se pide:
- El valor de la cuota uniforme del tercer año
 - El saldo de la deuda al cabo de tres años y medio
 - La composición de la cuota número 31
- 2.17** Una entidad financiera concede un préstamo a uno de sus usuarios por el valor de \$ 42 millones, a una tasa de interés del 23,6% EA y para ser cancelado con cuotas mensuales que aumenten en el 2% cada mes. Además, impone al deudor la condición de que deposite, en una cuenta bancaria que paga el 1,5% mensual de interés, una suma equivalente al 20% del valor del préstamo original. Al cabo de cuatro años, el saldo en la cuenta bancaria debe destinarse a cancelar el saldo de la deuda con la entidad financiera. Determinar el valor de la primera cuota del plan de amortización.
- 2.18** Una empresa necesita \$ 45 millones para la construcción de sus oficinas. Un banco comercial prestó este dinero el 1/4/06 para amortizarlo en cinco años con cuotas trimestrales que aumenten en el 3% cada trimestre y cancelar la primera el 1/7/06. La tasa de interés será del 22% TV para los dos primeros años y del 28% TV de ahí en adelante.

Se pide:

- a) El valor de la quinta cuota
- b) El valor del saldo pendiente el 1/7/07
- c) El capital amortizado en la décima cuota

2.19 Una deuda se está amortizando con cuotas mensuales que aumentan en el 1% cada mes, sabiendo que la cuota número 3 es de \$ 40.826 y que el saldo una vez cancelada la cuota m es de \$ 5.275.400. Si la tasa de interés sobre los saldos es del 21% MV, se pide:

- a) Expresar el saldo una vez cancelada la cuota $m - 1$.
- b) Expresar el saldo una vez cancelada la cuota $m + 1$.

2.20 El 1 de enero de 2006 se obtuvo un préstamo por el valor de \$ 60 millones para ser cancelado en un plazo de tres años en cuotas mensuales y con un interés del 19,6% MV. Si la operación se hace por el sistema de abono al capital uniforme en cada cuota, se pide:

- a) El valor de la cuota del 31/4/07 y su composición en interés y abono al capital.
- b) El momento en el cual el saldo sea igual al 40% del préstamo original.

2.21 El deudor de un crédito recibió la suma de \$ 70 millones al 19% EA de interés, para cancelarla con cuotas mensuales que aumenten en el 1% cada mes. Al cabo de dos años el saldo es la mitad del crédito original. Se solicita:

- a) El plazo del préstamo
- b) El valor de la cuota número 18
- c) La composición de la cuota número 25

2.22 Una empresa adquiere un préstamo por el valor de \$ 180 millones para cancelarlo en cinco años en cuotas mensuales que aumenten cada mes en \$ 20.000 y con una tasa de interés del 19,4% MV durante los dos primeros años y del 23% MV de ahí en adelante. Una vez cancelada la cuota número 30, se acuerda entre las partes (deudor y acreedor) disminuir el plazo de la deuda en un año; para ello se debe refinanciar el saldo existente en el mes 30, en cuotas que sigan aumentando en \$ 20.000. Determinar en qué porcentaje aumentó la nueva cuota del mes 31 respecto de la cuota del mes 30.

2.23 Determinar el valor de una deuda original a partir de la siguiente información: las cuotas mensuales son iguales; la composición de la cuota número 20 es de \$ 123.400 de intereses y \$ 723.120 de abono al capital; la tasa de interés es del 24,12% MV. También hallar el número de cuotas y el valor de la última cuota, y el tiempo (un número entero) al cabo del cual la deuda quede cancelada.

2.24 El total amortizado de una deuda cuando aún faltan 22 cuotas mensuales es de \$ 48 millones. Si el tiempo total del crédito es de cuatro años y medio, se pide calcular el valor de la deuda inicial, sabiendo que: las cuotas mensuales aumentan en el 1,5% cada mes, que la tasa de interés es del 19,5% MV para los dos primeros períodos de cinco años y del 23,6% MV de ahí en adelante.

2.25 En la siguiente tabla se muestran las utilidades mensuales de una empresa durante los ocho meses anteriores y medidas en millones de pesos:

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8
Utilidad	4	3,5	4,3	5	6,1	6	7,5	6,5

Utilizando una función exponencial, proyectar las utilidades para los dos años siguientes e invertir las al 19% EA el primer año y al 22% EA para el segundo año.

Se pide determinar el saldo que tendrá a su favor en un año y medio.

2.26 Suponga que el valor de la UVR el 15 de agosto sea de \$ 194,3642; si la inflación de julio de ese año fue del 0,48%, se pide determinar la fecha en la que la UVR tenga un valor de:

a) \$ 194,8452; b) \$ 195,0560; y, c) \$ 195,2971.

2.27 Se adquiere un crédito por el valor de \$ 90 millones para cancelarlo en cinco años, así: cuotas uniformes mensuales, cuotas adicionales trimestrales que sean el doble de la cuota mensual y cuotas extraordinarias cada semestre, tales que cada una de esas sea el doble de la cuota adicional trimestral.

Se pide determinar el saldo al cabo de 40 meses, sabiendo que la tasa que se cobra por el crédito es del 26% EA para los dos primeros años y del 28,7% de ahí en adelante.

2.28 Si el valor de la UVR del 18 de agosto de un año fue de 205,7823 y las inflaciones de julio, agosto, setiembre y octubre fueron: 0,56%; 0%; -0,32%; y 0,43% respectivamente, determinar el valor de la UVR el 15 de noviembre del mismo año y en qué fecha el valor de la UVR fue de \$ 206,2143.

2.29 Si la inflación de abril de un cierto año fue del 0,78% y el valor de la UVR el 13 de mayo del mismo año fue de \$ 189,2663, se pide determinar: a) el valor de la UVR el 15 de abril; y, b) el valor de la UVR el 20 de mayo del mismo año.

2.30 En caso de que las inflaciones de junio, julio, agosto y setiembre de un determinado año hayan sido del: 1,1%; 0,83%; 0,64%; y 0,93% respectivamente, y que el valor de la UVR del 18 de julio haya sido de \$ 201,2786, estimar el valor de la UVR del 13 de octubre del mismo año.

2.31 El 1 de febrero de 2007 se obtiene un crédito para adquirir una vivienda por el valor de \$ 93.600.00 para ser cancelado en un tiempo de 15 años, y se presentan dos alternativas:

Alternativa A: el crédito lo otorga una institución financiera que cobra un interés del 16% EA y cuotas mensuales que aumenten en el 0,5% cada mes.

Alternativa B: el crédito en UVR, sabiendo que el valor de la UVR el 1/2/07 fue de \$ 168,3126, se cancela con cuotas mensuales iguales en UVR y la tasa de interés es del 13% EA; suponga que las inflaciones de enero, febrero, marzo, abril, mayo y junio de ese año hayan sido del: 1%; 0,83%; 0,52%; 0,92%; 0,71%; y 1,2% respectivamente, y la de diciembre del año anterior del 0,48%.

Usted debe calcular los saldos de los dos créditos para cada uno de los cinco meses desde febrero hasta junio y representarlos gráficamente.

2.32 Una corporación de ahorro y vivienda otorga un crédito a un usuario con las siguientes condiciones:

i) Valor del crédito: \$ 86.500.000

ii) Fecha del crédito: 2/6/05

iii) Tiempo del crédito: 15 años

- iv) Tasa de interés: 13% EA
- v) Valores de la unidad UVR para el último día de cada uno de los meses desde junio hasta noviembre de 2005: 151,3983, 152,0213, 152,3545, 152,3914, 152,7293 y 153,226, respectivamente.

Desarrollar las tablas de amortización del crédito, similares a las expuestas en el numeral 6.5.2 para los meses de junio a noviembre del año 2005, en los dos sistemas a) y b) de amortización del crédito en valores de **UVR** y de pesos, comparando los saldos en los dos sistemas.

- 2.33** Suponga que el valor de la UVR del 18 de noviembre de un año sea de \$ 203,4521 y el valor el 15 de octubre del mismo año haya sido de \$ 203,0316. Se pide determinar el valor de la inflación de octubre de ese año.

Valor presente neto (VPN)

El objetivo de este capítulo es capacitar al lector para evaluar y seleccionar alternativas de inversión utilizando el índice del valor presente neto (VPN).

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

Al terminar el capítulo el lector estará en capacidad de:

- *Calcular el valor presente neto en cualquier flujo de caja.*
- *Interpretar el índice del valor presente neto según el problema particular.*
- *Seleccionar la mejor de dos o más alternativas a partir del valor presente neto, según sean de vidas útiles iguales o diferentes.*
- *Calcular e interpretar el costo capitalizado o valor presente neto del flujo de caja de un proyecto de vida útil perpetua.*

7.1 Introducción

En los capítulos anteriores hemos estudiado el manejo de los flujos de caja de una operación financiera según unas condiciones, y nuestro trabajo se ha centrado en la determinación del equilibrio entre ingresos y egresos para ese flujo de caja. En estos últimos capítulos del libro nos detendremos a estudiar algunos de los principales índices utilizados en la evaluación financiera de proyectos de inversión, que se obtienen del tratamiento técnico y cuántico que se le dé al flujo de caja del proyecto o alternativa respectiva. Tales índices son, entre otros: el valor presente neto (VPN), el costo anual uniforme equivalente (CAUE), la tasa interna de retorno (TIR) y la tasa de rentabilidad verdadera (TRV). Estos índices son la base de la evaluación financiera de un proyecto; por tanto, se busca que el estudiante, al finalizar estos capítulos, domine el tema correspondiente, de modo que una vez que llegue a un curso de evaluación financiera de alternativas o proyectos de inversión, los pueda aplicar con propiedad, interpretar su resultado y llegar a tomar la mejor decisión.

Este capítulo tiene como propósito que el estudiante logre calcular, interpretar y aplicar el índice del valor presente neto a problemas y casos sencillos, para que más tarde pueda hacer lo mismo pero con casos un poco más complejos, cuando esté aplicando estos conceptos a problemas prácticos de la vida real.

DEFINICIÓN 7.1

Dado el flujo de caja de un proyecto o alternativa de inversión, se define su valor presente neto VPN como:

$$VPN = VP(I) - VP(E)$$

Donde :

VP(I): valor presente de los ingresos

VP(E): valor presente de los egresos

Como podemos darnos cuenta, para calcular el valor presente neto debemos conocer: (a) el tiempo de duración del proyecto o alternativa, conocido como la vida útil; (b) el flujo de caja, es decir, los ingresos y egresos en el tiempo; (c) la tasa de descuento o tasa de oportunidad, que puede ser constante o variable; (d) en algunos casos el **valor de mercado** del proyecto, que corresponde al valor comercial o ingreso que se obtiene al final de la vida útil del proyecto; y, (e) las matemáticas financieras necesarias para calcular tanto el VP(I) como el VP(E).

El VPN del flujo de caja de un proyecto o alternativa de inversión representa el valor, equivalente en pesos de hoy, de la ganancia o pérdida que se obtendrá al llevar a cabo ese proyecto. Así, este índice puede interpretarse de la siguiente manera:

Si $VPN > 0$, significa que al llevar a cabo ese proyecto se obtendrá una utilidad que, medida en pesos de hoy, es igual al valor dado por el VPN de un proyecto.

Si $VPN < 0$, ello significa que al llevar a cabo ese proyecto se obtendrá una pérdida que, medida en pesos de hoy, es equivalente al valor dado por el VPN.

Si $VPN = 0$, significa que al llevar a cabo ese proyecto no se obtendrá pérdida ni ganancia.

Sin embargo, lo anterior comúnmente se conoce como la teoría del índice del valor presente neto, pero lo que en la práctica se hace, algunas veces, puede diferir de las afirmaciones anteriores, pues la decisión de tomar o no una alternativa de inversión o proyecto en general depende en gran parte de que se cumpla o no el objetivo que se haya planteado inicialmente el inversionista en el proyecto.

En términos generales, veremos cuáles son los elementos básicos para el cálculo y, posteriormente, aplicaciones del índice del VPN:

a) En primer lugar, **la construcción del flujo de caja del proyecto**, que es el resultado de lo que se

conoce como la formulación o elaboración de un proyecto, pues del estudio de mercado, del estudio técnico y del estudio financiero se obtiene la información necesaria para la construcción del flujo de caja. Este tema corresponde a un curso de materia de formulación de proyectos; por tanto, este libro no lo desarrolla.

Pero sí es fundamental tener en cuenta que de la precisión en el flujo de caja dependen los resultados de la evaluación del proyecto y, por tanto, el acierto en la decisión final.

- b) **El tiempo de evaluación** se debe determinar desde la formulación: el tiempo durante el cual se va a formular y a evaluar el proyecto.
- c) **La tasa de descuento** que se va a aplicar al flujo de caja del proyecto, para calcular el valor presente neto.

Esta tasa de descuento es comúnmente la tasa de oportunidad del inversionista, cuya determinación es tema de un curso de evaluación financiera de proyectos, pues en esta tasa deben estar presentes, de alguna manera, el factor de riesgo y el de liquidez. En este caso, la tasa de oportunidad, o tasa de interés de oportunidad (TIO), estaría dada por la tasa de oportunidad de los recursos propios más un incremento por riesgo y más un incremento por liquidez. Sin embargo, para los ejercicios de este capítulo estaremos dando directamente el valor de la tasa de oportunidad del inversionista.

- d) En todo proyecto debe estar explícito el **objetivo de esa actividad**, ya sea financiero o de otra índole; por tanto, es posible que el índice del VPN no se utilice acorde con lo expuesto al principio de este numeral. Por ejemplo, un proyecto cuyo objetivo sea adquirir un beneficio no monetario, a pesar de que el valor presente neto nos da un valor negativo; pero si se cumple el objetivo, se decidirá por llevar a cabo ese proyecto.

7.2 Índice del VPN para un solo proyecto

Cuando se está evaluando un solo proyecto, el índice del valor presente neto aplica, según la teoría generalizada, de la siguiente manera:

- i) Si $VPN > 0$, entonces el proyecto es aceptable
- ii) Si $VPN < 0$, entonces el proyecto no es aceptable
- iii) Si $VPN = 0$, entonces es indiferente aceptarlo o no

Sin embargo, es importante advertir que esta aplicación del índice de valor presente neto es relativa, porque la decisión se tomará solamente de acuerdo con el objetivo planteado en el proyecto y no necesariamente siguiendo lo expresado en los numerales (i), (ii) y (iii) anteriores. En algunos casos prácticos, a pesar de que se tenga $VPN > 0$, la decisión puede ser la de no llevar a cabo el proyecto, porque posiblemente este hecho cuántico no satisface las expectativas del inversionista expresadas en el objetivo del proyecto; lo mismo puede suceder con los otros dos numerales. Pero como el objetivo de este libro en este aspecto es preparar al estudiante en la parte operatoria de los flujos de caja y no el de habilitarlo en la evaluación de proyectos (que corresponde a otro curso superior), los casos que resolveremos estarán circunscritos a la aplicación de los conceptos expresados en los numerales antes mencionados.

EJEMPLO 7.1

Un proyecto consiste en una inversión hoy por \$ 3 millones y costos mensuales de \$ 95.000 el primer mes y aumentarán en \$ 5.000 cada mes. Los ingresos se estiman en \$ 245.000 el primer mes y aumentarán en el 4% cada mes. El proyecto tendrá una duración de dos años con un valor de mercado de \$ 1.300.000 al cabo de este tiempo; si la tasa de oportunidad del inversionista es del 36,07% anual, determinar, utilizando el índice del VPN, si es rentable o no el proyecto.

Solución

Véase el diagrama de flujo de caja (figura 7.1).

La tasa de descuento mensual será del 2,6% mensual, equivalente al 36,07% anual, y así tendremos:

$$VP(1) = \frac{245.000}{0,026 - 0,04} \left[1 - \left(\frac{1,04}{1,026} \right)^{24} \right] + 1.300.000 (1,3607)^{-2}$$

$$= \$ 7.429.237$$

$$VP(E) = 3.000.000 + 95.000(P/A, 2,6\%, 24) + 5.000(P/G, 2,6\%, 24)$$

$$= \$ 5.589.473$$

Por tanto, tendremos:

$$VPN = \$ 7.429.237 - \$ 5.589.473 = \$ 1.839.764$$

Esto quiere decir que llevar a cabo el proyecto equivale a tener una utilidad de \$ 1.839.764 en pesos de hoy; luego, sí sería rentable el proyecto.

Veamos ahora un ejemplo en el que el valor presente neto de un proyecto no solamente debe cumplir el hecho de ser positivo para que la decisión sea la de aceptar o llevar a cabo el proyecto, sino que además deberá cumplir el objetivo propuesto por el inversionista.

EJEMPLO 7.2

Un proyecto de inversión tiene la siguiente información:

- a) Inversión inicial: \$ 15 millones
- Nuevas inversiones: \$ 5 millones al cabo de un año
\$ 2 millones al cabo de 1,5 años
- b) Costos de operación/mes: \$ 700.000 el primer mes y aumentarán en el 3% mensual
- c) Ingresos trimestrales: \$ 3.500.000 el primer trimestre y aumentarán en el 10% cada trimestre
- d) Valor de mercado (al final de la vida útil): \$ 8.500.000
- e) Vida útil del proyecto: 3 años
- f) Tasa de oportunidad del inversionista: 30% anual
- g) El objetivo del inversionista es obtener una ganancia, en pesos de hoy, de por lo menos el 15% del valor presente de las inversiones del proyecto. ¿Se debe llevar a cabo el proyecto o no?

Solución

El diagrama de flujo de caja del proyecto es el siguiente:

La tasa de descuento –en este caso tasa de oportunidad del inversionista– es del 30% anual, equivalente al 6,7% trimestral y al 2,21% mensual.

Por tanto, calculando el valor presente de los ingresos $VP(I)$ y el valor

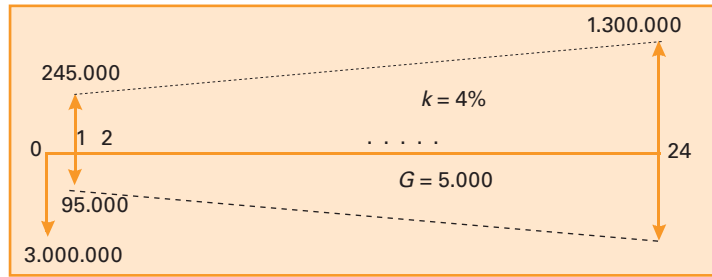


FIGURA 7.1

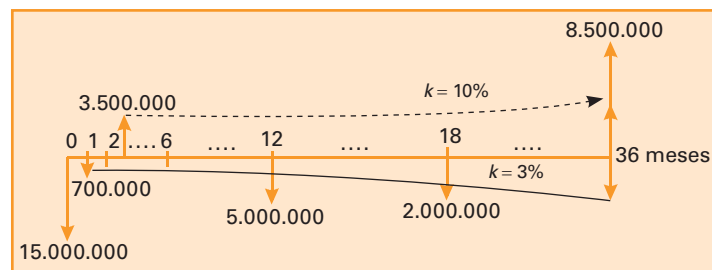


FIGURA 7.2

presente de los egresos VP(E), tenemos:

$$VP(I) = \frac{3.500.000}{0,0678 - 0,1} \left[1 - \left(\frac{1,1}{1,0678} \right)^{12} \right] + 8.500.000 (1,3)^{-3}$$

$$= \$ 50.428.188$$

$$VP(E) = [15.000.000 + 5.000.000 (1,3)^{-1} + 2.000.000 (1,0221)^{-18}] + \frac{700.000}{0,021 - 0,03} \left[1 - \left(\frac{1,03}{1,0221} \right)^{36} \right]$$

$$= \$ 48.497.285$$

Por tanto, el VPN = VP(I) – VP(E) = 50.428.188 – 48.497.285 = \$ 1.930.903.

El valor presente de las inversiones, que es la expresión dentro del primer paréntesis angular en el VP(E), es igual a \$ 20.195.580, y el 15% de esta cantidad es \$ 3.029.337, y era lo que el inversionista deseaba ganarse hoy; sin embargo, lo que se ganaría en pesos de hoy al llevar a cabo el proyecto es solamente \$ 1.930.903, que es el VPN.

En este caso, a pesar de ser VPN > 0, no alcanza al objetivo planteado por el inversionista; así, la decisión es no llevar a cabo el proyecto.

7.3 Índice de VPN para dos o más proyectos

Dadas dos alternativas de inversión o proyectos A y B, para compararlos o evaluarlos con el criterio del VPN debemos tener en cuenta los dos casos siguientes:

- i) Si ambos proyectos tienen vidas útiles iguales.
- ii) Si los proyectos tienen vidas útiles diferentes.

Cuando los proyectos tienen vidas útiles iguales, el método del VPN se aplica de la siguiente manera:

- a) Tomar un ciclo de vida útil para cada proyecto y registrar los correspondientes flujos de caja.
- b) Calcular el VPN para cada proyecto, sean VPN(A) y VPN (B) los valores presentes netos de A y B respectivamente.
- c) Comparar los valores presentes netos y de ahí deducir cuál es el mejor. Esta comparación y elección se hace así:

Si VPN(A) > VPN (B), se escoge el proyecto A

Si VPN(A) < VPN (B), se escoge el proyecto B

Si VPN(A) = VPN (B), es indiferente la elección

Sin embargo, debe advertirse que la comparación y decisión, (expresada en c), corresponde a la forma un poco literaria de aplicación de este índice, porque en la práctica pueden encontrarse casos en los que la relación sea cualquiera de las indicadas en (c) y, sin embargo, la decisión sea la de no tomar ninguno de los proyectos. La profundización en estos temas corresponde a la evaluación de proyectos propiamente dicha.

EJEMPLO 7.3

Se tienen dos proyectos de inversión, A y B, con la siguiente información: el proyecto A requiere una inversión hoy por el valor de \$ 4 millones, gastos mensuales de \$ 80.000, ingresos de \$ 320.000 el primer mes y que disminuirán en el 3% cada mes, una vida útil de un año y medio y un valor de mercado de \$ 2.950.000.

El proyecto B requiere una inversión hoy de \$ 5 millones, gastos mensuales de \$ 40.000 el primer mes y que aumentarán en \$ 3.000 cada mes, ingresos de \$ 450.000 mensuales, un valor de mercado nulo y una vida útil de un año y medio. Si la tasa de oportunidad del inversionista es del 38% anual, seleccionar el proyecto más rentable.

Solución

El flujo de caja del proyecto A es el siguiente:

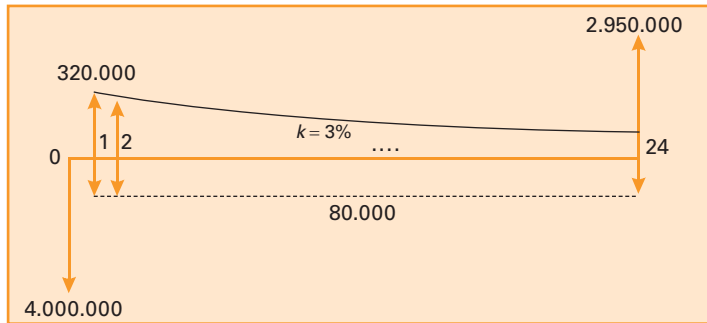


FIGURA 7.3

Con una tasa de descuento del 2,72% mensual, equivalente al 38% anual, el valor presente neto de este proyecto es:

$$VP(A) = \frac{320.000}{0,0272 + 0,03} \left[1 - \left(\frac{1 - 0,03}{1,0272} \right)^{18} \right] + 2.950.000 (1,0272)^{-18} - 4.000.000 - 80.000.000 (P/A, 2,72\%, 18)$$

$$= \$ 292.858$$

El diagrama de flujo de caja del proyecto B es:

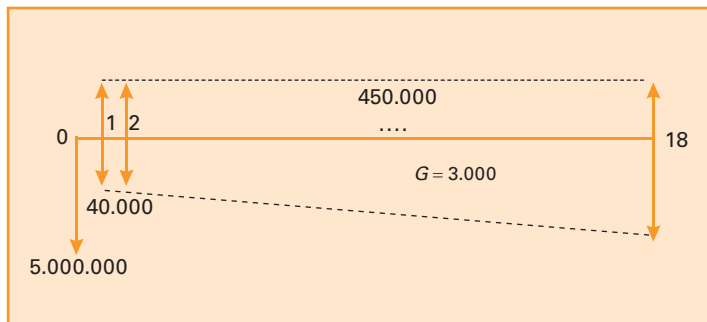


FIGURA 7.4

Con la tasa del 2,72% mensual, el valor presente neto de este proyecto es:

$$VPN(B) = 450.000(P/A, 2,72\%, 18) - 5.000.000 - 40.000(P/A, 2,72\%, 18) - 3.000(P/G, 2,72\%, 18) = \$ 446.016$$

Como $VPN(B) > VPN(A)$, entonces se concluye que el mejor proyecto es el B, con el cual se obtiene una utilidad de \$ 446.016 en pesos de hoy.

EJEMPLO 7.4

Una empresa productora de artículos de cuero se encuentra en la necesidad de adquirir una máquina cortadora de cuero y ha recibido dos ofertas, que son una máquina A o una máquina B.

La máquina A tiene un costo inicial de \$ 650.000, de los cuales se paga una cuota inicial de \$ 250.000 y el resto financiado a dos años con cuotas mensuales iguales y con un interés del 3% mensual. Los gastos mensuales de mantenimiento de esta máquina son de \$ 3.600 el primer mes y

luego se incrementan en un 2% cada mes, reparaciones cada seis meses por valores de \$ 50.000 la primera, \$ 65.000 la segunda, \$ 80.000 la tercera y así sucesivamente. La máquina se vende al cabo de cuatro años en \$ 500.000.

La máquina B se puede adquirir financiada así: una cuota inicial de \$ 200.000 y tres pagos adicionales de \$ 100.000, \$ 200.000 y \$ 150.000 a 5, 12 y 20 meses respectivamente, con un interés del 3,2% mensual. Los gastos mensuales de mantenimiento de esta maquinaria son de \$ 4.200 el primer mes aumentados en \$ 200 cada mes. Esta máquina se puede vender en \$ 420.000 al cabo de cuatro años. Las reparaciones son cada año por el valor de \$100.000 cada una.

Dado que las dos máquinas tienen el mismo rendimiento y efectividad, no consideramos los ingresos por concepto de producción, porque son los mismos para ambas máquinas.

Seleccionar la mejor alternativa si la empresa utiliza una tasa de descuento del 28% nominal trimestral.

Solución

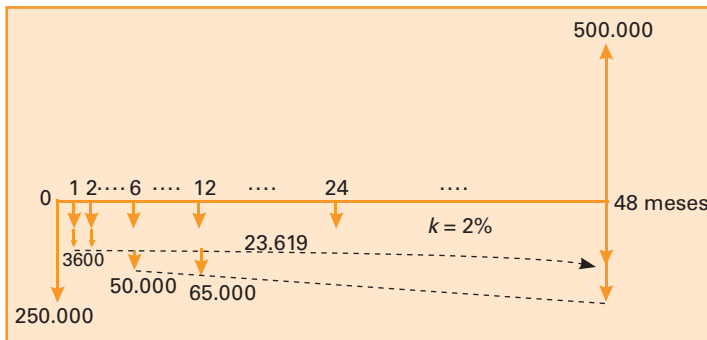


FIGURA 7.5

Por tratarse de dos alternativas o proyectos con vidas útiles iguales (cuatro años), basta con compararlos o evaluarlos para un ciclo de vida útil cada uno.

El flujo de caja de la alternativa de la máquina A es el siguiente:

Donde la cuota de financiación del saldo pendiente por la compra es:

$$A = 400.000(A/P, 3\%, 24) = \$ 23.619$$

La tasa de descuento de la empresa es equivalente al 228% mensual o

14,49% semestral o 31,08% anual. De tal manera que el valor presente neto es:

$$VPN(A) = 500.000(1,0228)^{-48} - 250.000 - 23.619(P/A, 2,28\%, 24) - \frac{3.600}{0,0228 - 0,02} \left[1 - \left(\frac{1,02}{1,0228} \right)^{48} \right]$$

$$-50.000(P/A, 14,49\%, 8) - 15.000(P/G14,49\%, 8) = \$ -1.092.035$$

El flujo de caja de la alternativa de la máquina B es el siguiente:

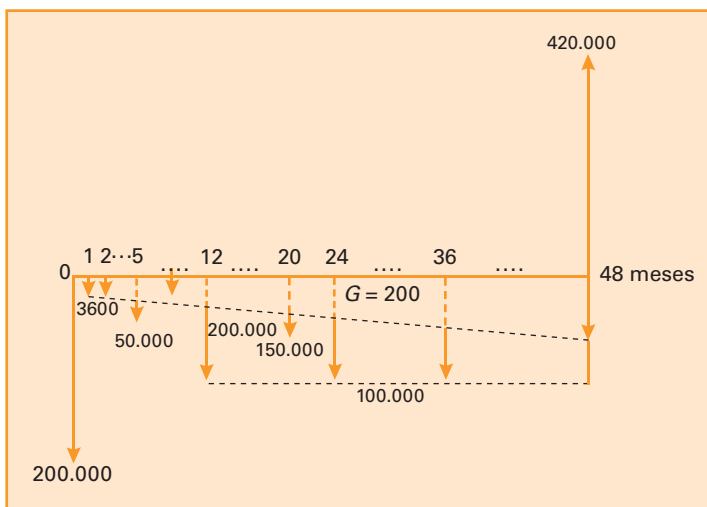


FIGURA 7.6

El valor presente neto para esta alternativa es:

$$\begin{aligned} \text{VPN}(B &= 420.000(1.0228)^{-48} - 200.000 - 100.000(1.032)^{-5} - 200.000(1.032)^{-12} - 150.000(1.032)^{-20} \\ &- 4200(P/A, 2,28\%, 48) - 200(P/G, 2,28\%, 48) \\ &- 100.000(P/A, 31,08\%, 4) \\ &= \$ -806.256 \end{aligned}$$

Los resultados anteriores nos indican que, teniendo en cuenta solo los gastos y el valor de mercado de cada máquina, y si debemos comprar necesariamente una de estas dos máquinas, la decisión es adquirir la máquina B.

Sin embargo, en casos como el anterior puede suceder que exista la posibilidad de no adquirir ninguna, si ambas producen pérdidas; entonces aquí sí se deben considerar los ingresos obtenidos en cada alternativa o proyecto, así sea que estos sean iguales o no para ambas, para, luego, comparar los valores presentes netos de las dos alternativas.

Estos son los casos en los cuales, además de las dos alternativas o proyectos expuestos, existe la posibilidad de "no hacer nada", es decir, de no llevar a cabo ninguno de los proyectos expuestos.

Para cuando las vidas útiles económicas son diferentes, el problema tiene varias formas de solución según algunos supuestos que se deben tomar desde un comienzo.

Si tenemos dos proyectos, A y B, con vidas útiles económicas diferentes, sean por ejemplo tres y cuatro años para A y B respectivamente, las diferentes formas de aplicar el VPN para su comparación y evaluación son:

- i) Tomar el mínimo común múltiplo (mcm) entre 3 y 4, que es 12, y suponer que en cada ciclo de vida útil de un proyecto el flujo de caja es el mismo del ciclo inmediatamente anterior, es decir, que las condiciones son iguales en cualquier ciclo de vida útil; bajo este supuesto, bastante irreal, se evalúan los dos proyectos en un tiempo de 12 años, calculando $\text{VPN}(A)$ y $\text{PN}(B)$ y comparándolos.
- ii) Tomar el mcm de sus vidas útiles, 12 años en nuestro ejemplo, y proyectar los flujos de caja reales para cada ciclo. En este método el mayor inconveniente radica en la aproximación al flujo de caja real para tiempos largos como 12 años en nuestro ejemplo.
- iii) Acortar la vida útil del proyecto de mayor duración hasta llegar a igualarlo con el de menor duración. En nuestro ejemplo, se debe acortar la proyecto B a tres años, de tal manera que se iguale con la vida útil de A.iv)

Para esto se debe calcular un valor de mercado del proyecto B al final de los tres años, que consiste en actualizar en esa fecha el flujo de caja del cuarto año. Una vez que se tengan ambos proyectos en igualdad de tiempos –esto es, en vidas útiles iguales– se aplica el método del VPN para este caso.

- iv) Prolongar el tiempo de estudio del proyecto de menor vida útil hasta igualarlo con el tiempo de vida útil del proyecto de mayor duración.

La elección del método para la evaluación de uno o varios proyectos depende básicamente de la naturaleza de los proyectos, y es así como para algunos casos es más razonable un método que otro.

EJEMPLO 7.5

Usted debe asesorar a una empresa en la adquisición de una de las máquinas, A y B, cada una de las cuales produce el mismo artículo, pero tienen vidas de servicio diferentes. Los flujos de caja son los siguientes y la tasa de descuento es del 3% mensual.

	A	B
Costo inicial	\$ 5.000.000	\$ 8.000.000
Beneficios mensuales	\$ 300.000	\$ 300.000
		\$ 305.000
		\$ 310.000
Valor de mercado	\$ 1.500.000	\$ 2.000.000
Vida útil (años)	2	3

Supóngase que el uso de la máquina es por más de seis años y que el flujo de caja se repite en cada uno de los ciclos de vida útil de cada máquina.

El mínimo común múltiplo de 2 y 3 es 6. Entonces tomamos un tiempo de seis años para el estudio de cada alternativa. Para la máquina A, el VPN del primer ciclo de vida útil es:

$$VPN_1 = 300.000(P/A, 3\%, 24) + 1.500.000(1,03)^{-24} - 5.000.000 = \$ 818.563$$

Como este valor de \$ 818.563 se repite para cada uno de los dos ciclos siguientes, el VPN(A) estará dado por:

$$VPN(A) = 818.563 + 818.563(1,03)^{-24} + 818.563(1,03)^{-48} = \$ 1.419.333$$

Para la máquina B, el VPN del primer ciclo de vida útil es:

$$\begin{aligned} VPN_1 &= 300.000(P/A, 3\%, 36) + 5.000(P/G, 3\%, 36) + 2.000.000(1,03)^{-36} - 8.000.000 \\ &= \$ 808.254 \end{aligned}$$

Como este valor de \$ 808.254 se repite para el segundo ciclo de vida útil, entonces el VPN (B) estará dado por:

$$VPN(B) = 808.254 + 808.254(1,03)^{-36} = \$ 1.087.128$$

Ahora bien: como $VPN(A) > VPN(B)$, debe seleccionarse o escogerse la máquina A, y esto significa que al optar por esta máquina se obtendrá una utilidad por un tiempo de seis años y que en pesos de hoy equivale a \$ 1.419.333, superior a la que se lograría con la máquina B para el mismo tiempo.

EJEMPLO 7.6

Suponga que en el ejemplo 7.5, después de un estudio de estimación de los flujos de caja para los ciclos de vida útil futuros para cada alternativa, se ha llegado a la siguiente conclusión: para la máquina A los costos se incrementan cada ciclo de vida útil en el 25%, y los beneficios e ingresos en el 20%; y para la máquina B los costos se incrementan en el 18% y los beneficios e ingresos en el 25%. En estas condiciones, seleccionar la mejor alternativa.

Solución

En este caso, el flujo de caja de un ciclo ya no se repite en el ciclo siguiente para ninguna de las alternativas.

Como complemento del ejercicio, el estudiante debe hacer el diagrama de flujo de caja en cada una de las alternativas, en el período de seis años.

Aquí es necesario calcular el VPN de cada uno de los ciclos de vida útil para las dos alternativas.

Para la máquina A tenemos:

$$VPN_1 = \$ 818.563, \text{ en el punto } 0$$

$$VPN_2 = 360.000(P/A, 3\%, 24) + 1.800.000(1,03)^{-24} - 6.250.000 = \$ 732.275, \text{ en el punto } 24$$

$$VPN_3 = 420.000(P/A, 3\%, 24) + 2.160.000(1,03)^{-24} - 7.812.500 = \$ 566.231, \text{ en el punto } 48$$

El valor presente neto de la alternativa A será:

$$VPN(A) = 818.563 + 732.275(1,03)^{-24} + 566.231(1,03)^{-48} = \$ 1.315.821$$

Para la máquina B tenemos:

$$VPN_1 = \$ 808.254 \text{ en el punto } 0$$

$$\begin{aligned} VPN_2 &= 375.000(P/A, 3\%, 36) + 6.250(P/G, 3\%, 36) + 2.500.000(1,03)^{-36} \\ &- 9.440.000 = \$ 1.570.318 \text{ en el punto } 36 \end{aligned}$$

El valor presente neto de la alternativa B será:

$$VPN(B) = 808.254 + 1.570.318(1,03)^{-36} = \$ 1.350.064$$

Ahora bien: como $VPN(B) > VPN(A)$, debe seleccionarse la máquina B.

Como es posible observar a partir de los ejemplos 7.4 y 7.5, la decisión puede cambiar dependiendo de las condiciones que determinen el comportamiento del flujo de caja de cada alternativa. El estudio de este tema corresponde a la materia "Evaluación financiera de proyectos", de la cual las matemáticas financieras son base.

7.4 Costo capitalizado

DEFINICIÓN 7.2

Se llama costo capitalizado el valor presente neto del flujo de caja de un proyecto de vida útil perpetua.

En la práctica, cuando un proyecto tiene vida útil indeterminada –es decir, se considera que puede funcionar a perpetuidad– se hace una estimativa y proyección del flujo de caja y se calcula el costo capitalizado o valor presente neto para su evaluación.

Debe tenerse en cuenta que para esta clase de proyectos el valor que se calcula como VPN es solo un estimado, dada la dificultad real para la proyección tanto del flujo de caja como de la tasa de descuento. Por esta razón, un método utilizado frecuentemente consiste en hacer evaluaciones periódicas, o lo que comúnmente se conoce como **evaluación ex post**.

EJEMPLO 7.7

Un proyecto consiste en la construcción, mantenimiento y uso de un pequeño edificio para oficinas, cuya vida útil se estima a tiempo indefinido y el flujo de caja es aproximadamente el siguiente:

El costo del terreno es \$ 35 millones; el de construcción, \$ 185 millones; el mantenimiento anual es de \$ 8 millones el primer año y se incrementará en \$ 1 millón por año de ahí en adelante. Los ingresos serán de \$ 55 millones el primer año y se incrementarán en el 20% anual aproximadamente; la tasa de oportunidad del inversionista se estima en el 33% anual. En estas condiciones, determinar el valor presente neto o costo capitalizado.

Solución

El diagrama de flujo de caja, en el cual los valores están en millones de pesos, es el siguiente:

Como la serie de ingresos anuales forma un gradiente geométrico perpetuo y los egresos un gradiente aritmético perpetuo, aplicando las fórmulas correspondientes a estas clases de series variables tenemos:

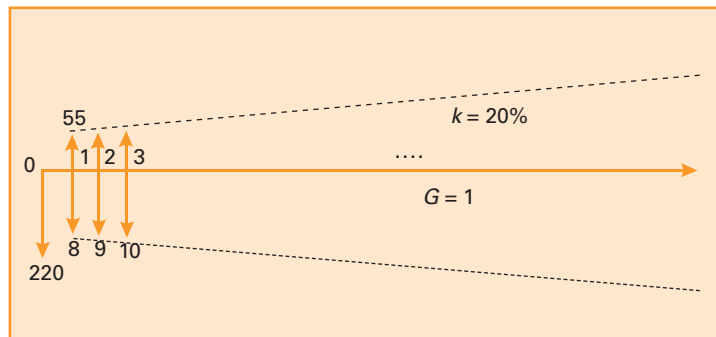


FIGURA 7.7

$$VPN = \frac{55}{0,33 - 0,2} - 220 - \frac{1}{0,33} \left[8 + \frac{1}{0,33} \right] = \$169.65000$$

Es decir, este proyecto da una utilidad que, medida en pesos de hoy, equivale a \$ 169.650.000.

Cuando se trate de dos o más proyectos a término indefinido, para su evaluación y selección por el método del VPN simplemente calculamos el costo capitalizado para cada uno de ellos y hacemos la comparación entre estos valores, en forma similar al caso de proyectos o alternativas de vida útil finita.

EJEMPLO 7.8

Un pequeño proyecto requiere una inversión inicial de \$ 10 millones hoy y \$ 5 millones en un año, unos gastos mensuales de \$ 600.000 el primer mes y aumentarán de ahí en adelante en \$ 20.000 cada mes; generará unos ingresos mensuales de \$ 1.050.000 el primer mes y aumentarán en el 2% cada mes de ahí en adelante, una vida útil de tres años y un valor de mercado de \$ 6 millones. Si el objetivo del inversionista es ganar en pesos de hoy el equivalente por lo menos del 15% del valor presente del total de las inversiones, determinar si el inversionista debe llevar a cabo el proyecto o no, sabiendo que la tasa de oportunidad es del 30% anual.

Solución

El estudiante debe construir el diagrama de flujo de caja. Para una tasa de descuento del 30% anual, equivalente al 2,21% mensual, tenemos:

$$\text{Valor presente de las inversiones} = 10.000.000 + 5.000.000(1,3)^{-1} = \$ 13.846.154$$

$$VP(I) = \frac{1.050.000}{0,0221 - 0,02} \left[1 - \left(\frac{1,02}{1,0221} \right)^{36} \right] + 6.000.000 (1,3)^{-3} = 38.414.398$$

$$\begin{aligned} VP(E) &= 13.846.154 + 600.000(P/A, 2,21\%, 36) + 20.000(P/G, 2,21\%, 36) \\ &= \$ 36.112.401 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$VPN = 38.414.398 - 36.112.401 = \$ 2.302.000$$

Además, el 15% del valor presente de las inversiones es $0,15(13.846.154) = \$ 2.076.923$. Luego, la ganancia en pesos de hoy, o VPN, sí es superior al 15% del valor presente de las inversiones; esto quiere decir que el inversionista sí debe llevar a cabo el proyecto. Sin embargo, en esta situación la decisión podría cambiar en el caso de tener un $VPN > 0$, pero no muy inferior al 15% del valor en pesos de hoy de las inversiones.

El estudiante encontrará en la sección de problemas una cantidad suficiente de ejercicios para que practique no solo la parte mecánica de calcular el VPN, sino también para interpretar este valor.

PROBLEMAS RESUELTOS

- Un proyecto requiere de las siguientes inversiones: \$ 80 millones hoy, \$ 30 millones en seis meses y \$ 40 millones en un año. Generará unos ingresos de \$ 3.600.000 el primer mes y aumentarán en el 4% mensual de ahí en adelante hasta finales del quinto año, cuando tendrá un valor de mercado de \$ 42 millones. Los egresos serán de \$ 1.500.000 mensuales el primer año y aumentarán en el 15% cada año. Si la tasa de oportunidad del inversionista es del 22,6% EA, se pide hallar el valor presente neto del proyecto.

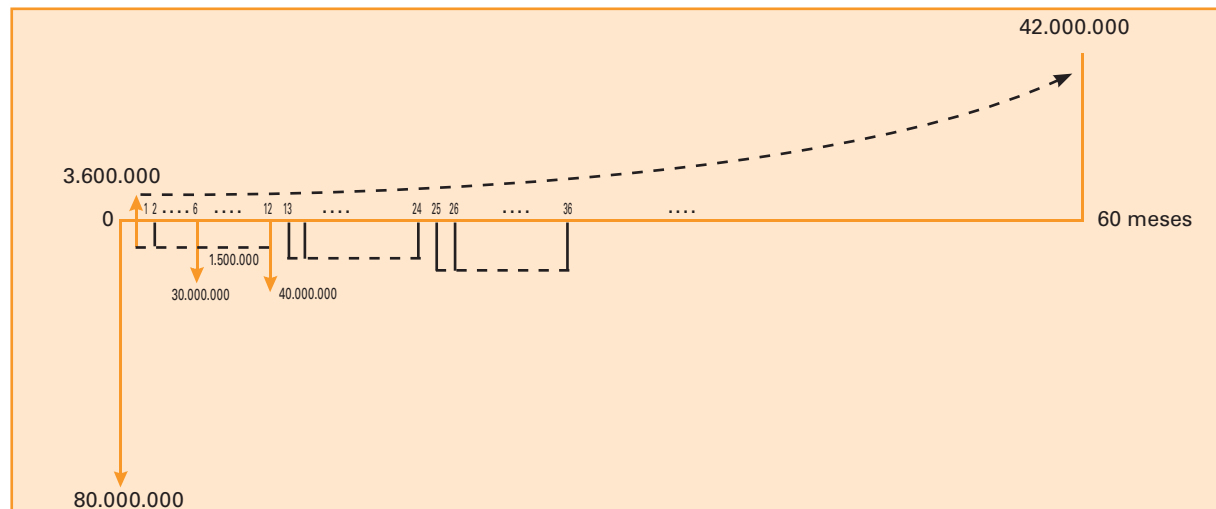
Solución

FIGURA 7.8

Tasa: 22,6% EA \leftrightarrow 1,71% mensual

Tasa de incremento anual: $k\% = 15\%$ para los egresos

Tasa de incremento mensual: $k\% = 4\%$ para los ingresos.

$$VP(I) = \frac{3.600.000}{0,0171 - 0,04} \left[1 - \left(\frac{1,04}{1,0171} \right)^{60} \right] + 42.000.000 (1,226)^{-6} = \$455.885.107$$

$$VP(E) = 80.000.000 + 30.000.000 (1,0171)^{-6} + 40.000.000 (1,0171)^{-12} + \frac{1.500.000 (F/A, 1,71\%, 12)}{0,226 - 0,15} \left[1 - \left(\frac{1,15}{1,226} \right)^5 \right]$$

$$= \$ 211.050.166$$

$$VPN = 455.885.107 - 211.050.166 = \$ 244.834.941$$

2. Un proyecto tiene una inversión inicial de \$ 45 millones; los ingresos trimestrales se estiman en \$ 4 millones durante el primer año y de ahí en adelante aumentarán en el 6% cada trimestre hasta finales del cuarto año. Los egresos mensuales son de \$ 800.000 el primer mes y aumentarán en el 2% cada mes hasta finales del segundo año y luego se mantendrán constantes. La vida útil del proyecto es de cuatro años con un valor de mercado por el valor de \$ 28 millones.3.

Hallar el VPN para una tasa de oportunidad del inversionista del 24,75% EA.

Solución

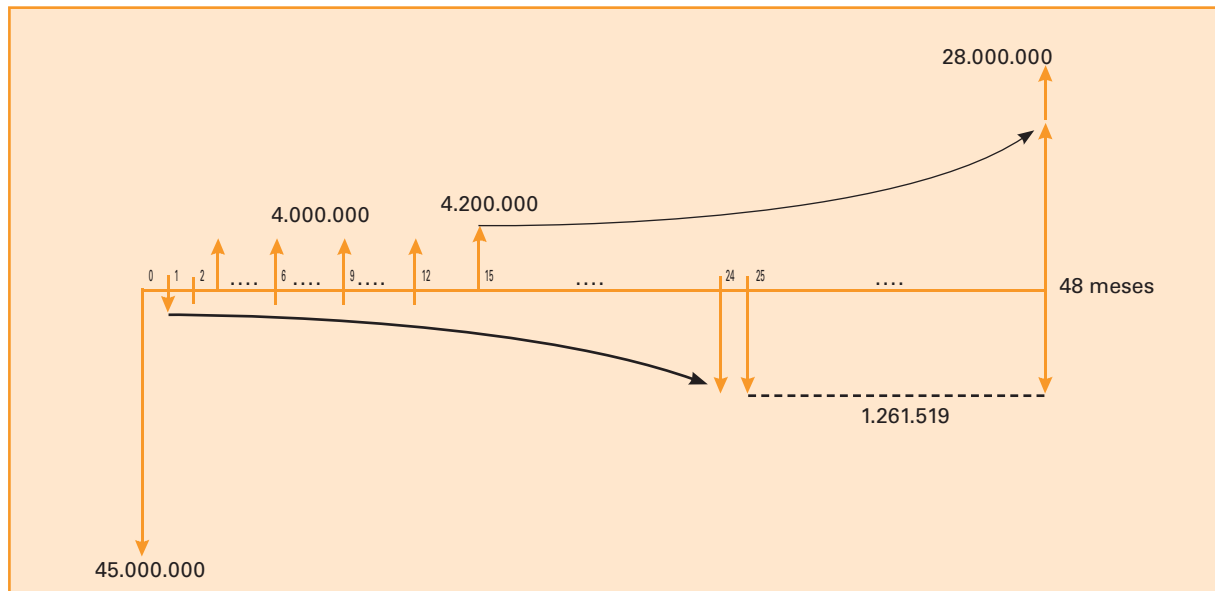


FIGURA 7.9

Tasa de interés: 24,75% EA \leftrightarrow 5,68% trimestral \leftrightarrow 1,86% mensual

Tasa de incremento: 6% trimestral para ingresos y 2% mensual para egresos

$$VP(I) = 4.000.000 (P/A, 5,68\%, 4) + \frac{4.200.000}{0,0568 - 0,06} \left[1 - \left(\frac{1,06}{1,0568} \right)^{12} \right] (1,2475)^{-1} + 28.000.000 (1,2475)^{-4}$$

$$= 64.780.000$$

$$VP(E) = 45.000.000 + \frac{800.000}{0,0286 - 0,02} \left[1 - \left(\frac{1,02}{1,0186} \right)^{24} \right] + 1.261.519 (P/A, 1,86\%, 24) (1,2475)^{-2} = \$79.728.160$$

$$VPN = VP(I) - VP(E) = \$ 64.780.000 - \$ 79.728.160 = \$ -14.948.160$$

3. La inversión inicial de un proyecto es de \$ 70 millones; después se deben hacer nuevas inversiones así: \$ 8 millones al cabo de 10 meses y \$ 10 millones al cabo de un año. Los costos de mantenimiento y producción se estiman en \$ 1.200.000 mensuales el primer año y aumentarán en el 15% cada año. Los ingresos son de \$ 4.500.000 mensuales el primer año y aumentarán en el 10% cada año. 5.

El valor de mercado del proyecto al final de la vida útil, que es de cinco años, se estima en \$ 55 millones.

Determinar la pérdida o ganancia del proyecto en pesos de hoy, para una tasa de oportunidad del inversionista del 22% TV.

Para resolver este problema, el estudiante deberá participar con la construcción del diagrama de flujo de caja, y podrá observar que:

22% TV \leftrightarrow 1,8% mensual \leftrightarrow 23,88% EA

Para los ingresos: $F_1 = 4.500.000(F/A, 1,8\%, 12) = \$ 59.680.133$

$$VP(I) = \frac{59.680.133}{0,2388 - 0,1} \left[1 - \left(\frac{1,1}{1,2388} \right)^5 \right] + 55.000.000 (1,2388)^{-5}$$

$$= \$ 211.469.450$$

Para los egresos: $F_1 = 1.200.000(F/A, 1,8\%, 12) = 15.914.702$

$$VP(E) = \frac{15.914.702}{0,2388 - 0,15} \left[1 - \left(\frac{1,15}{1,2388} \right)^5 \right] + 8.000.000 (1,018)^{-10}$$

$$+ 10.000.000(1,018)^{-12} + 70.000.000 = 140.427.930$$

Entonces:

$$VPN = VP(I) - VP(E) = 71.041.500 \text{ de ganancia}$$

4. Se ha podido establecer que en cierto proyecto, cuya inversión inicial es de \$ 80 millones, los ingresos mensuales guardan la siguiente relación: los ingresos de cualquier mes son iguales a las 5/4 partes de los ingresos del mes anterior aumentado en \$ 10.000, y se sabe que los ingresos totales del tercer mes fueron de \$ 24.000. Los costos del primer mes fueron de \$ 1.100.000 y aumentarán en \$ 40.000 cada mes hasta finales del segundo año, y de ahí en adelante se mantendrán constantes. 7.

La vida útil del proyecto es de cuatro años con un valor de mercado al cabo de este tiempo por el valor de \$ 9.500 millones.

Si la tasa de oportunidad del inversionista es del 20,98% EA durante los dos primeros años y del 21% MV de ahí en adelante, se pide determinar la pérdida o ganancia, en pesos de hoy, al llevar a cabo el proyecto.

Como en el problema anterior, el estudiante deberá participar en la solución construyendo el diagrama de flujo de caja del proyecto, con el fin de familiarizarse con ese trabajo.

Tasa de interés: 20,98% EA \rightarrow 1,6% mensual

21% MV \rightarrow 1,75% mensual

Para los ingresos: Sea Y_t el valor del ingreso en el mes t , y sea Y_{t+1} el valor del ingreso en el mes $t + 1$. Según la información del problema se tiene la siguiente ecuación:

$$Y_{t+1} = \frac{5}{4} Y_t + 100.000, \quad Y_3 = 24.000$$

Por lo tanto:

$$Y_t = \left(\frac{5}{4} \right)^t C + 10.000 \left[\frac{1 - \left(\frac{5}{4} \right)^t}{1 - \frac{5}{4}} \right]$$

Es decir:

$$Y_t = \left(\frac{5}{4}\right)^t [C + 40.000] - 40.000$$

De la condición del ingreso en el tercer mes se tiene:

$$24.000 = y_3 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 [C + 40.000] - 40.000$$

O sea que: $C + 40.000 = 32.768$

Por lo tanto, los ingresos en cualquier mes t estarán dados por:

$$Y_t = 32.768 \left(\frac{5}{4}\right)^t - 40.000 = 32.768 (1,25)^t - 40.000$$

Como se puede observar, el ingreso en cualquier mes t está dado por un primer valor que representa un gradiente geométrico con $k = 25\%$ y de una anualidad del valor de \$ 40.000 por cada pago; sin embargo, como la tasa de oportunidad cambia a los dos años, se debe hallar el valor presente de los ingresos de los dos primeros años y luego el de los otros dos.

Para los dos primeros años:

$$\begin{aligned} VP_1(I) &= \frac{40.960}{0,016 - 0,25} \left[1 - \left(\frac{1,25}{1,016}\right)^{24} \right] - 40.000 (P/A, 1,6\%, 24) \\ &= 24.357.150 \end{aligned}$$

Para los últimos años se tiene que el valor del ingreso del mes 25 está dado por:

$$32.768(1,25)^{24} - 40.000$$

Por tanto, el valor presente de los ingresos de los dos últimos años está dado por:

$$\begin{aligned} VP_2(I) &= \left\{ \frac{6'938.894}{0,0175 - 0,25} \left[1 - \left(\frac{1,25}{1,0175}\right)^{24} \right] - 40.000 (P/A, 1,75\%, 24) \right\} (1,2098)^{-2} \\ &= \$ 2.810.219.180 \end{aligned}$$

En consecuencia, el valor presente total de ingresos del proyecto estará dado por:

$$\begin{aligned} VP(I) &= 24.357.150 + 2.810.219.180 + 9.500.000(1,0175)^{-24}(1,016)^{-24} \\ &= \$ 2.838.856.377 \end{aligned}$$

Para los egresos del proyecto se tiene para los dos primeros años:

$$\begin{aligned} VP_1 &= 80.000.000 + 1.100.000(P/A, 1,6\%, 24) + 40.000(P/G, 1,6\%, 24) \\ &= \$ 110.286.587 \end{aligned}$$

Para los últimos años, los egresos mensuales son iguales a los del mes 24, los cuales están dados por: $\$ 1.100.000 + (24 - 1)40.000 = 2.020.000$, de tal manera que el valor presente de los egresos de los dos últimos años está dado por:

$$VP_2 = 2.020.000(P/A, 1,75\%, 24) (1,2098)^{-2} = \$ 26.858.536$$

Por tanto, el valor presente de los egresos del proyecto está dado por:

$$VP(E) = 110.286.587 + 26.858.536 = \$ 137.145.123$$

Y así el valor presente neto del proyecto está dado por:

$$VPN = VP(I) - VP(E) = \$ 2.701.711,254 \text{ de ganancia en pesos de hoy.}$$

PROBLEMAS

- 1.1 Una compañía editorial posee dos máquinas que tienen un costo de \$ 3.700.000 y que deben reemplazarse cada ocho años al mismo costo. La compañía desea sustituir estas dos máquinas por una sola de otro modelo con el mismo rendimiento de las dos anteriores y que tiene una vida útil de 12 años. Hallar la suma de dinero que la compañía debe pagar por esta nueva máquina para que le sean indiferentes las dos alternativas, sabiendo que la nueva máquina puede adquirirse al mismo precio cada 12 años y que el dinero rinde el 30% nominal trimestral.
- 1.2 Resolver el problema 7.1 sabiendo que el precio de las primeras máquinas se aumenta en \$ 300.000 cada ocho años y el de la segunda máquina se aumenta en el 45% cada 12 años.
- 1.3 Seleccionar el mejor activo entre A y B si tienen el siguiente flujo de caja, para una tasa de descuento del 3% mensual:
Activo A: costo inicial de \$ 600.000; costo mensual de mantenimiento de \$ 20.000 el primer mes y se incrementará en el 3% cada mes; ingresos mensuales de \$ 55.000; valor de mercado de \$ 380.000, y una vida útil de tres años.
Activo B: costo inicial de \$ 1 millón; costo mensual de mantenimiento de \$ 15.000 el primer mes y luego aumentará en \$ 1.000 cada mes; ingresos mensuales de \$ 90.000; valor de mercado de \$ 550.000, y una vida útil de tres años.
- 1.4 Resolver el problema 7.3 suponiendo que el activo A tenga una vida útil de dos años y el activo B una vida útil de dos años y medio.
- 1.5 En el problema 7.3, suponer que la tasa de descuento es del 3% mensual durante el primer año y del 3,6% mensual de ahí en adelante.
- 1.6 El dueño de un supermercado desea seleccionar entre dos clases de carros-canasta en los que los clientes depositan los artículos y los transportan hasta las cajas registradoras. El de la clase A tiene un costo de \$ 32.000 cada uno, se le deben cambiar las cuatro ruedas cada año a un costo de \$ 1.200 cada una, tiene una vida útil de seis años y un valor de mercado de \$ 8.000. El de la clase B tiene un costo de \$ 38.000 cada uno, se le deben cambiar las cuatro ruedas cada dos años a un costo de \$ 1.500 cada rueda, tiene una vida útil de ocho años y un valor de mercado de \$ 12.000. La tasa de descuento será del 32% anual.
- 1.7 Resolver el problema 7.6 suponiendo que la tasa de descuento sea del 32% anual durante los primeros años ¿cuántos años? y del 3,6% anual de ahí en adelante.
- 1.8 En el problema 7.6, ¿cuál debería ser el valor de mercado del carro-canasta de la clase A para que al dueño del supermercado le sea indiferente cualquiera de las dos clases de carros?
- 1.9 Una compañía dedicada a la construcción de casas está decidiendo entre comprar una máquina mezcladora o tomarla en arriendo. Para adquirir la máquina en compra debe invertir hoy \$ 2 millones y hacerle un mantenimiento mensual de \$ 50.000 durante el primer año, \$ 60.000 mensuales durante el segundo año y que continúa aumentando en \$ 10.000 mensuales cada año. Se estima una vida de servicio de seis años y un valor de mercado de \$ 1 millón al final de este tiempo. Por otra parte, puede tomarse en arriendo la mezcladora con un costo de \$ 120.000 mensuales el primer año, \$ 140.000 durante el segundo año y que continúa aumentando en \$ 20.000 mensuales cada año. Seleccionar la mejor alternativa con una tasa de interés del 28% nominal mensual durante los tres primeros años y del 32% nominal trimestral de ahí en adelante.

- 1.10** En el problema 7.9, ¿de cuánto debería ser el arriendo mensual de la mezcladora en el primer año para que, continuando con el mismo incremento anual, le sea indiferente a la compañía cualquiera de las dos alternativas?
- 1.11** Un hotel desea sistematizar parte de sus actividades, y con tal fin se presentan dos propuestas:
- La propuesta A tiene un costo inicial de \$ 3.600.000 y unos costos de asesoría de \$ 40.000 mensuales el primer año y que luego aumentarán en \$ 25.000 cada año.
- La propuesta B tiene un costo inicial de \$ 4.200.000 y unos costos de asesoría de \$ 30.000 mensuales el primer año y que se incrementarán en el 20% cada año.
- Si el hotel desea utilizar este servicio por espacio de 15 años, seleccionar la mejor propuesta para una tasa de oportunidad del 34% anual.
- 1.12** Una universidad desea seleccionar la más económica de dos clases de escritorios para un salón. La primera clase consiste en escritorios fijos al piso con un costo inicial de \$ 2.250.000, costo de instalaciones de \$ 120.000, mantenimiento mensual de \$ 10.000, reparación cada cuatro años por el valor de \$ 100.000 cada una, una vida útil de 20 años y un valor de mercado de \$ 600.000.
- La segunda clase consiste en escritorios móviles con un costo inicial de \$ 1.400.000, mantenimiento mensual por el valor de \$ 6.000, reparación cada año por \$ 80.000 cada una, una vida útil de 10 años y un valor de mercado de \$ 400.000. La tasa de oportunidad de la universidad es del 36% anual.
- 1.13** Resolver el problema 7.12 suponiendo una tasa de oportunidad del 36% anual durante los 10 primeros años y del 40% anual de ahí en adelante.
- 1.14** Una fábrica de zapatos puede comprar una máquina cosedora con una cuota inicial de \$ 455.000, que equivale al 30% del valor al contado y el resto financiado a 30 meses con cuotas mensuales iguales y a un interés del 3,2% mensual sobre el saldo; el costo mensual de mantenimiento de las máquinas es de \$ 18.000, requiere de una reparación a los cuatro años por el valor de \$ 160.000, tiene una vida útil de seis años y un valor de mercado de \$ 680.000; además, se obtienen unos ingresos mensuales de \$ 80.000.
- También existe la posibilidad de tomar una máquina en arriendo por el mismo tiempo de seis años y en los que se deben pagar unos arriendos así: \$ 32.000 mensuales el primer año y luego aumentarán en \$ 4.000 cada año; los ingresos mensuales serán iguales a los de la primera máquina. Determinar la mejor alternativa para una tasa de descuento del 30% nominal mensual.
- 1.15** Un horticultor desea determinar el cultivo más rentable entre uno de zanahoria y uno de remolacha, en un terreno de 5 hectáreas de extensión. El cultivo de zanahoria tiene una inversión inicial de \$ 10 millones, costos de mantenimiento mensuales por \$ 2 millones, \$ 2.100.000, \$ 2.200.000 y así sucesivamente. La producción en ocho meses se estima en un promedio de 10 kilos por metro cuadrado; el costo de recolección es de \$ 3.000 por cada 100 kilos y la zanahoria se vende a razón de \$ 180 el kilo. El cultivo de remolacha requiere una inversión inicial de \$ 12 millones, gastos mensuales de mantenimiento de \$ 3 millones, \$ 3.100.000, \$ 3.200.000 y así sucesivamente. La producción al cabo de 10 meses se estima en un promedio de 8 kilos por metro cuadrado, el costo de recolección es de \$ 4.000 por cada 100 kilos y se vende a razón de \$ 300 el kilo.
- Seleccionar el cultivo más rentable para una tasa de descuento del 32% nominal mensual.
- 1.16** Resolver el problema 7.15 suponiendo que el precio de la zanahoria aumenta cada ocho meses en \$ 40 el kilo y el de la remolacha en \$ 50 el kilo cada 10 meses, y con una tasa de descuento del 33% nominal mensual durante los dos primeros años y del 36% nominal mensual de ahí en adelante.

- 1.17** En el problema 7.15, hallar el precio del kilo de remolacha tal que al horticultor le sea indiferente cualquiera de los dos cultivos.
- 1.18** Una fábrica desea saber qué alternativa le es más favorable entre ampliar sus bodegas o tomar una en arriendo durante ocho años. Si amplía sus bodegas, esto le implica una inversión inicial de \$ 12 millones, un mantenimiento mensual de \$ 100.000, reparaciones cada año por valor de un \$ 1 millón de pesos cada una y un valor de mercado al final de los ocho años por el valor de \$ 15 millones. Si toma en arriendo una bodega debe pagar la suma de \$ 300.000 por mes anticipado el primer año, reajutable en el 18% cada año. La tasa de oportunidad de la empresa es del 38% anual.
- 1.19** En el problema 7.18, ¿cuál deberá ser el costo mensual del arriendo en el primer año para que las dos alternativas sean equivalentes financieramente?
- 1.20** Un empleado de una empresa desea determinar el sistema más económico de transporte para asistir a su trabajo durante los próximos tres años. Un sistema es comprar un vehículo usado, con una cuota inicial de \$ 4.500.000 y tres pagos de \$ 850.000 cada uno a 10, 15 y 20 meses. Se supone que el costo de la gasolina aumente en el 23% anual a partir del precio actual de \$ 1.300 por galón. Se requiere un galón de gasolina por cada 30 kilómetros y se espera que haga un recorrido promedio de 12.000 kilómetros por año. Espera venderlo al final de los tres años en \$ 5.500.000.
- Un segundo sistema consiste en pagar el transporte de servicio público, y estima que el costo será de \$ 160.000 mensuales el primer año y aumentará el 24% cada año.
- Resolver el problema con una tasa de descuento del 3% mensual.
 - Determinar, al final de los tres años, cuánto habrá ahorrado el empleado al elegir el sistema más económico.
- 1.21** Usted, como Jefe de la Oficina de Planeación y Recreación de una ciudad, debe decidir entre dos propuestas para la construcción y administración de un parque recreacional. La propuesta A requiere una inversión inicial de \$ 25 millones hoy y un costo de ampliación por el valor de \$ 10 millones al cabo de 10 años; se prevé que los costos anuales de operación sean de \$ 200.000 el primer año, de \$ 240.000 el segundo año, de \$ 280.000 el tercer año y así sucesivamente hasta el año 20, y de ahí en adelante permanecerán constantes. Los ingresos serán de \$ 500.000 anuales durante los primeros 15 años, y de ahí en adelante aumentarán en \$ 50.000 cada año.
- La propuesta B requiere una inversión inicial de \$ 30 millones hoy y unos costos anuales de operación de \$ 300.000 por año; se espera que los ingresos sean de \$ 600.000 el primer año y aumentarán en \$ 40.000 anuales hasta el octavo año y de ahí en adelante permanecerán constantes.
- Para la evaluación de las alternativas se considera una tasa de interés del 30% anual y una vida útil perpetua del parque.
- 1.22** El dueño de un restaurante desea seleccionar la mejor alternativa entre comprar una camioneta para transportar los artículos desde la plaza del mercado hasta el restaurante, o pagar diariamente en vehículos de servicio público.
- Si compra la camioneta, esta tiene un costo inicial de \$ 8 millones, costos mensuales de mantenimiento por el valor de \$ 50.000, reparaciones cada año por el valor de \$ 150.000 cada una; utilizará la camioneta durante cinco años y la venderá al cabo de este tiempo en \$ 8.500.000. Por otra parte, puede utilizar vehículos de servicio público haciendo un viaje diario a la plaza (30 días al mes) y pagando \$ 3.500 por cada viaje durante el primer año, y luego este costo aumentará en el 24% cada año.
- Seleccionar la mejor alternativa para una tasa de oportunidad del 28% nominal trimestral.

1.23 Usted debe decidir, desde el punto de vista financiero, entre:

- Adquirir un activo con una cuota inicial de \$ 480.000 y el resto financiado a 24 meses con cuotas de \$ 12.000 cada mes, un costo mensual de operación de \$ 15.000, ingresos mensuales de \$ 40.000, \$ 42.000, \$ 44.000 y así sucesivamente, un valor de mercado al final de la vida útil del 10% del valor al contado y una vida útil de cinco años.
- Tomar en arriendo el activo durante los cinco años con los siguientes gastos: arriendo por mes anticipado de \$ 85.000, reparación cada año por el valor de \$ 120.000 cada una, un depósito de garantía hoy por el valor de \$ 200.000, cantidad esta que será devuelta al cabo de cinco años. Los ingresos mensuales son los mismos del caso (a).

La tasa de oportunidad que se toma para la selección de las alternativas es del 3,5% mensual.

1.24 El Jefe de Compras de un almacén debe decidir entre dos clases de máquinas. La máquina clase A se adquiere con una cuota inicial del 35% del valor al contado y el resto financiado a 30 meses con cuotas mensuales de \$ 30.000 la primera y luego aumentarán en el 2% cada mes. Esta máquina debe ser reparada cada dos años a un costo de \$ 200.000 por cada reparación. Tendrá un costo de mantenimiento de \$ 25.000 mensuales y un valor de mercado al final de la vida útil del 30% del valor al contado; se estima que la vida útil sea de cinco años.

La máquina clase B también tiene una vida útil de cinco años, un valor de contado de \$ 1.250.000, costos mensuales de mantenimiento así: \$ 12.000 el primer mes, \$ 13.000 el segundo mes, \$ 14.000 el tercer mes y así sucesivamente. El valor de mercado al final de la vida útil será de \$ 1.890.000.

La selección se hace teniendo en cuenta la tasa de oportunidad del almacén, que será del 2,5% mensual durante los dos primeros años y del 3% mensual de ahí en adelante.

1.25 Una fábrica de tejas plásticas afronta el problema de falta de espacio para almacenar partes de su producción, y en este momento se le presentan dos alternativas: tomar en arriendo una bodega de una fábrica vecina, o construirla en un terreno propio de la fábrica. La construcción de la bodega le implicaría una inversión inicial de \$ 8 millones, un mantenimiento mensual promedio de \$ 25.000, reparaciones cada dos años por el valor de \$ 100.000 cada una, un valor de mercado al cabo de seis años de \$ 6 millones e impuestos anuales de \$ 140.000, \$ 150.000, \$ 160.000 y así sucesivamente. Tomar en arriendo la bodega le implicaría pagar una mensualidad por mes anticipado durante los seis años y un mantenimiento mensual de \$ 35.000. El arriendo tendrá el mismo valor en los 12 meses de un año, pero aumentará cada año en el 20%. El dueño de la fábrica desea saber cuál sería el valor del arriendo mensual del primer año para que, evaluando las dos alternativas con una tasa del 35% anual, le sea indiferente, desde el punto de vista financiero, optar por cualquiera de las dos alternativas.

1.26 Se empieza a construir hoy un pequeño hotel que estará terminado al cabo de dos años y medio y a partir de esta fecha entrará en servicio. La compañía que lo construye le propone a usted hoy que le compre las utilidades de los últimos cinco años de servicio debiendo pagar ese valor en dos cuotas iguales: la primera hoy y la segunda al cabo de dos años y medio.

Se estima que las utilidades en la explotación del hotel serán de \$ 600.000 mensuales durante el primer año, de \$ 550.000 mensuales durante el segundo año, de \$ 500.000 mensuales durante el tercer año, y así sucesivamente.

- ¿De cuánto deberá ser cada uno de los pagos que usted hará si estos se calculan con la tasa de oportunidad de la compañía, que es del 36% anual?
- Si usted compra estas utilidades haciendo los pagos determinados en la parte (a), pero su tasa de oportunidad es del 32% anual, determinar cuál será su pérdida o ganancia al final de los cinco años de servicio del hotel. ¿Compraría o no usted estas utilidades?

1.27 Para el aseo de un edificio durante seis años, la administración de este tiene que decidir hoy entre dos alternativas. La primera es utilizar una máquina eléctrica que tiene una vida útil de tres años, un costo inicial de \$ 2.500.000 hoy y de \$ 3.100.000 dentro de tres años, un costo de mantenimiento de \$ 50.000 el primer mes y que luego aumentará en el 3% mensual durante los seis años, un empleado para operar la máquina con un salario de \$ 85.000 mensuales durante los tres primeros años y de \$ 115.000 mensuales de ahí en adelante; la máquina tendrá un valor de mercado de \$ 1.500.000 a los tres y seis años.

La segunda alternativa es contratar cinco empleados para el aseo manual con un salario mensual de \$ 65.000 para cada uno durante los tres primeros años y de \$ 90.000 mensuales de ahí en adelante; los gastos en implementos de aseo se estiman en \$ 200.000 por año anticipado. Seleccionar la mejor alternativa con una tasa de descuento del 27% nominal mensual y utilizando el VPN.

1.28 En el problema 7.27, para la segunda alternativa, contratando el mismo número de empleados con un salario mensual de \$ 48.000 para cada uno durante los tres primeros años, ¿de cuánto deberá ser el salario mensual uniforme de cada uno en los tres años restantes para que las dos alternativas sean financieramente equivalentes?

1.29 Una fábrica de gaseosas del país desea construir una planta para producir las nuevas botellas que requerirá anualmente, que son de 1 millón de botellas aproximadamente. La inversión inicial requerida por esta planta será de \$ 250 millones, su valor de mercado al cabo de 10 años se estima en \$ 300 millones, y sus gastos anuales en materias primas, mantenimiento y funcionamiento se estiman en \$ 22 millones el primer año y aumentarán en el 33% anual. El costo en mano de obra será de \$ 2.400.000 mensuales el primer año y luego aumentarán en el 19% anualmente.

Si la tasa de oportunidad del dueño de la fábrica es del 34% anual, determinar a qué precio de la botella este obtendrá un valor presente neto de \$ 10 millones.

1.30 Un empleado desea comprar un vehículo para su uso particular por espacio de tres años, y se le presentan dos alternativas. La alternativa A es comprar un automóvil en un valor al contado de \$ 12 millones, gastos mensuales en combustibles, estacionamientos, impuestos y reparaciones por un valor aproximado de \$ 180.000 el primer mes y que aumentarán en el 2% cada mes y un valor de mercado de \$ 10 millones.

La alternativa B es comprar una camioneta por el valor de \$ 19 millones, con gastos en combustibles, seguros, impuestos y reparaciones por el valor de \$ 220.000 mensuales el primer año y que aumentarán en el 25% cada año, y un valor de mercado de \$ 18 millones.

Si el empleado tiene una tasa de oportunidad del 32% anual, hallar la mejor alternativa.

1.31 Una familia dispone en este momento de la suma de \$ 80 millones y desea determinar qué es mejor: comprar un apartamento por este valor que estiman lo venderán dentro de cinco años en \$ 110 millones, o tomarlo en arriendo por el mismo tiempo, pagando la suma de \$ 600.000 por mes anticipado durante el primer año y luego aumentará en el 19% cada año.

Determinar la mejor alternativa de la familia si su tasa de oportunidad es del 31% anual.

1.32 Un agricultor compró un tractor en \$ 100 millones; el mantenimiento mensual será de \$ 320.000 para el primer año y aumentará en el 25% anual; se estima que pueda laborar 140 horas al mes y recibirá \$ 20.000 por hora el primer mes y aumentará en \$ 1.000 por hora al mes. Si aspira operar el tractor durante dos años y medio, determinar el valor de mercado del tractor para que el agricultor obtenga el día en que lo compra una ganancia del 10% del valor al contado si su tasa de oportunidad es del 29% anual.

1.33 Usted ha logrado determinar un proyecto agrícola con la siguiente información:

Inversión inicial: \$ 5 millones

Otras inversiones: \$ 10 millones en cada uno de los años 1 y 2

Las utilidades por la comercialización del producto serán de \$ 2 millones en el año 2 y aumentarán de ahí en adelante en \$ 500.000 cada año

Vida útil del proyecto: 7 años

Valor de mercado (final de la vida útil): \$ 8 millones

Si la tasa de descuento es del 30% EA, determinar si se debe llevar a cabo el proyecto o no, utilizando el índice del valor presente neto.

1.34 Un proyecto de inversión tiene la siguiente información: inversión inicial, \$ 35 millones; nuevas inversiones así: \$ 15 millones al cabo de un año y \$ 2 millones al cabo de un año y medio; gastos de mantenimiento y operación: \$ 200.000 el primer mes y aumentarán en el 3% mensual; ingresos trimestrales: \$ 3.500.000 el primer trimestre y aumentarán el 10% por trimestre; valor de mercado al cabo de tres años: \$ 8.500.000; tiempo de evaluación: 3 años; tasa de oportunidad del inversionista: 32% anual. Hallar el valor presente neto de este proyecto.

1.35 Una fábrica de gaseosas en el país está estudiando la posibilidad de construir una planta para producir las nuevas botellas que requiere anualmente: un millón aproximadamente. La inversión inicial requerida por esta planta será de \$ 500 millones; su valor de mercado después de 10 años será de \$ 200 millones y sus gastos anuales en materias primas y mantenimiento son \$ 25 millones el primer año y luego se incrementan cada año el 18%; el costo de mano de obra es de \$ 1.500.000 mensuales el primer año y luego se aumenta el 21% anualmente. Si la tasa de oportunidad de la fábrica es del 30% anual, ¿a qué precio de la botella debería la fábrica de gaseosas construir la planta?

1.36 Un banco comercial está analizando la posibilidad de comprar una empresa W. En el estudio de valoración de la empresa W se ha logrado identificar que esta podría generar más utilidades netas anuales que crecerán a una tasa del 20% promedio anual. Si además se ha logrado determinar que las utilidades para el próximo año de la compañía W son de \$ 200 millones y que la tasa de descuento que utiliza el banco para sus evaluaciones es del 20% anual, ¿cuál es la cantidad máxima que el banco podría ofrecer hoy por la compra de la empresa W considerando 10 años de vida útil de la empresa?

1.37 Dado el volumen de papelería necesaria cada mes en una empresa (1.300.000 hojas de papel con perforaciones para doblar y 500.000 hojas de papel con membrete de la empresa), se requiere evaluar dos alternativas para llevar a cabo tanto las perforaciones como el membrete. En la actualidad, la perforación y el membrete se hacen en un departamento adaptado con tal fin, a un costo de \$ 2.000 la perforación de mil hojas y \$ 5.500 el membrete de mil hojas. Las dos alternativas para estudiar son las siguientes: la alternativa A, que consiste en utilizar estos servicios de una compañía similar que cobraría a razón de \$ 2.000 la perforación de mil hojas y \$ 6.300 imprimir el membrete en mil hojas durante el primer año, pero luego incrementaría estos costos en el 24% cada año. La alternativa B es comprar una máquina que hace los dos trabajos por un costo de \$ 2.800 millones con un valor de mercado al cabo de seis años de \$ 1.200.000, un costo de mantenimiento mensual de \$ 15.000 el primer año, \$ 20.000 el segundo año, \$ 25.000 el tercer año y así sucesivamente; costo de mano de obra mensual de \$ 25.000 para el primer año, y luego aumentará en \$ 85.000 cada año, y un seguro al principio de cada año por el valor de \$ 500.000. La empresa necesitará estos servicios de papelería solo por seis años. Considerar una tasa de oportunidad de la empresa del 30% anual.

- a) Determinar la mejor alternativa entre A y B, según el VPN.
- b) ¿Cuál debe ser la suma de dinero mínima que la empresa debe invertir hoy al 32% nominal trimestral para crear un fondo que le sea suficiente para sufragar mensualmente los gastos al utilizar la alternativa A durante los seis años?

1.38 Se tienen dos proyectos de inversión, A y B. El inversionista desea saber qué alternativa debe seleccionar, o si lo mejor es ninguna de las dos, es decir, no hacer nada. Los flujos de caja son los siguientes:

Semestre	Proyecto A	Proyecto B	No hacer nada
0	\$ -(10.000.000,00)	\$-15.000.000	0
1	\$ 1.315.000,00	1.765.000	0
2	\$ 1.315.000,00	1.765.000	0
3	\$ 1.315.000,00	1.765.000	0
4	\$ 1.315.000,00	1.765.000	0

Resolver el problema para cada uno de los casos siguientes, utilizando el método del VPN:

- a) Tasa de oportunidad: 6% semestral
- b) Tasa de oportunidad: 9% semestral
- c) Tasa de oportunidad: 10% semestral
- d) Tasa de oportunidad: 14% semestral

¿Qué observa?

1.39 Un pequeño proyecto requiere de una inversión inicial de \$ 45 millones y luego inversiones de \$5 millones en un año y \$ 3 millones en dos años. Los ingresos mensuales se estiman en \$ 3.500.000 el primer mes y luego aumentarán en el 1,5% mensual, y tendrá un valor de mercado de \$ 10 millones al cabo de tres años y medio. Los egresos se estiman en \$ 1 millón mensuales. Si el inversionista tiene una tasa de oportunidad del 18,5% anual, determinar si debe llevar a cabo el proyecto o no, suponiendo que su objetivo sea ganar, en pesos de hoy, al menos el 5% de la inversión inicial.

1.40 Un agricultor tiene la opción de tomar en arriendo una finca que produce fruta en los meses de enero, febrero, marzo y abril en el primer semestre, y en julio, agosto, setiembre y octubre en el segundo semestre. Los niveles de producción en años anteriores han tenido los siguientes comportamientos, que, se espera, sean los mismos para los años siguientes: en enero la producción es de 450 cajas de fruta y aumentará en 40 cajas por mes hasta abril y de 310 cajas en julio y aumentará en 15 cajas por mes hasta octubre. Los precios por caja de fruta se han mantenido en \$ 4.500 para el primer semestre del año y en \$ 5.500 para el segundo semestre. Los costos mensuales ascienden a \$ 900.000 durante todo el año, y el arriendo de la finca tiene un valor de \$ 28 millones por año anticipado.

Si el agricultor tiene una tasa de oportunidad del 10,5% EA, se pide determinar cuánto gana o cuánto pierde, en pesos del 1 de enero, al tomar en arriendo la finca por tres años.

1.41 Un pequeño proyecto requiere de una inversión inicial de \$ 70 millones, nuevas inversiones por el valor de \$ 8 millones en 10 meses y \$ 10 millones en un año. Los costos de mantenimiento y producción mensuales, así como los ingresos mensuales para los próximos seis meses, se muestran en la tabla siguiente, medidos en millones de pesos.

Mes	1	2	3	4	5	6
Costo	1,2	1,5	2	1,6	1,8	2,1
Ingreso	5	4,6	5,5	6	7	6,8

El valor de mercado del proyecto al cabo de cinco años se estima en \$ 55 millones. Ajustando los costos a una función lineal y los ingresos a una función exponencial, estimar el flujo de caja para los cinco años, y determinar la pérdida o ganancia, en pesos del día, del inicio de labores del proyecto para una tasa de oportunidad del inversionista del 18% TV.

- 1.42** Un proyecto agrícola requiere de una inversión hoy de \$ 25 millones y luego inversiones así: \$ 5 millones en un año y \$ 3 millones en dos años. Los ingresos mensuales se estiman en \$ 1.800.000 el primer mes y luego aumentarán en el 1,5% cada mes, y tendrá un valor de mercado de \$ 10 millones al cabo de tres años. Los egresos se estiman en \$ 1 millón mensuales. Si el inversionista tiene una tasa de oportunidad del 28,5% anual, determinar el valor presente neto del proyecto y decidir si se debe llevar a cabo, suponiendo que el inversionista tiene como meta ganar, en pesos de hoy, al menos el 25% del valor de las inversiones actuales.

- 1.43** Un industrial dedicado a la elaboración de zapatos desea saber si debe llevar a cabo o no un proyecto que consiste en abrir una sucursal de esa empresa en una ciudad alterna. La información que tiene es la siguiente:

Inversión inicial de \$ 120 millones, nuevas inversiones de \$ 25 millones en seis meses y \$ 10 millones en un año.

Por estudio de mercado estima que los ingresos y gastos mensuales en millones de pesos durante los próximos seis meses serán los que se registran en la siguiente tabla, y se espera que sigan un comportamiento similar.

Mes	1	2	3	4	5	6
Costo	4,3	5	5,1	4,8	5,4	5,5
Ingreso	2,3	2,5	3	2,8	3,1	3,4

A partir de la función lineal o exponencial que sea más representativa para cada caso, ingresos o gastos, proyectan un flujo de caja para los próximos cinco años que será el tiempo de vida útil y de evaluación del proyecto, al cabo del cual se estima que tenga un valor de mercado de \$ 100 millones.

La tasa de oportunidad del inversionista se estima en el 12% anual para los dos primeros años y en el 16% anual de ahí en adelante.

Si el objetivo del inversionista es ganar, en pesos de hoy, al menos el 18% del valor presente de las inversiones, usted debe asesorarlo en el sentido de tomar la decisión sobre si llevar a cabo o no el proyecto de la nueva sucursal de la empresa.

- 1.44** Un proyecto de inversión tiene la siguiente información: Inversión inicial de \$ 150 millones, nuevas inversiones de \$ 500 millones en un año y \$ 20 millones en un año y medio.

Gastos de mantenimiento y operación por mes: \$ 2 millones el primer mes y aumentarán en el 3% mensual durante el primer año, en el 4% mensual durante el segundo año y en el 6% mensual de ahí en adelante.

Ingresos trimestrales de \$ 35 millones el primer trimestre y aumentarán en el 10% cada trimestre.

Valor de mercado al cabo de cuatro años: \$ 85 millones.

Si el objetivo del inversionista es obtener una ganancia, en pesos de hoy, de por lo menos el 15% del valor presente de las inversiones, determinar si el inversionista deberá llevar a cabo o no el proyecto, sabiendo que tiene una tasa de oportunidad del 13% EA en los dos primeros años y del 18% EA de ahí en adelante.

1.45 Un proyecto industrial dedicado a la confección y comercialización de vestidos para dama requiere de una inversión inicial de \$ 110 millones y se prevé nuevas inversiones así: \$ 25 millones al cabo de un año y \$ 30 millones al cabo de dos años.

Los ingresos por la venta de los vestidos se estiman en \$ 6.500.000 el primer mes y luego aumentarán en el 1,5% cada mes, y tendrán un valor de mercado de \$ 40 millones al cabo de cuatro años. Los gastos de funcionamiento y producción se estiman en \$ 3.500.000 mensuales el primer año y aumentarán en el 12% cada año.

Si la tasa de oportunidad del inversionista en este proyecto es del 18% EA para el primer año y del 16,2% MV de ahí en adelante, determinar si el inversionista obtiene pérdida o ganancia, en pesos de hoy, al llevar a cabo este proyecto, así como el valor de esa pérdida o ganancia.

Costo anual uniforme equivalente (CAUE)

El objetivo de este capítulo es capacitar al estudiante en los métodos para calcular el costo anual uniforme equivalente (CAUE), su aplicación en la evaluación y selección de alternativas y su interpretación financiera.

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

Al terminar el capítulo el lector estará en capacidad de:

- *Identificar la relación entre el CAUE de un flujo de caja y una anualidad vencida.*
- *Calcular el CAUE a partir del valor presente neto de un flujo de caja o de su valor futuro neto.*
- *Estimar el CAUE de un flujo de caja y la consideración de varias tasas de interés en el tiempo de la operación financiera.*
- *Seleccionar la mejor de dos o más alternativas a partir del CAUE de sus flujos de caja.*
- *Aplicar el CAUE para dos alternativas con vidas útiles diferentes con valor de mercado o sin él.*

8.1 Introducción

En el capítulo 7 estudiamos el índice de evaluación conocido con el nombre de **valor presente neto**. Con este se comparan alternativas de vidas útiles iguales o diferentes, pero en este último caso, cuando el mínimo común múltiplo de ellas es un número grande (por ejemplo, para dos alternativas que tengan vidas útiles de seis y cinco años respectivamente el mcm es 30), para este intervalo de tiempo podemos tener serias dificultades para establecer flujos de caja, tasas de descuento, valores de mercado, etcétera, que nos permitan comparar las dos alternativas en este tiempo y llegar a una conclusión confiable.

El objetivo de este capítulo es presentar y llegar a manejar con alguna propiedad otro método que nos permita seleccionar la mejor de dos alternativas, así se encuentren en una situación similar a la descrita en el párrafo anterior. Este método se conoce con el nombre de **costo anual uniforme equivalente (CAUE)**, y se lo llama también **promedio financiero (PF)**.

DEFINICIÓN 8.1

Dado el flujo de caja de un proyecto durante un tiempo de n períodos, se llama costo anual uniforme equivalente, y se denota por **CAUE**, a la cantidad neta periódica e igual que sustituya financieramente al flujo de caja dado.

El **CAUE** o **PF** del flujo de caja de un proyecto representa la cantidad que financieramente es el promedio, ya sea de ganancia, si es positiva, o de pérdida, si es negativa, que se logra al llevar a cabo ese proyecto. Se debe advertir que algunos autores también lo llaman costo anual equivalente (**CAE**), y su aplicación tiene lugar cuando quien decide en un proyecto o alternativa desea saber cuál es el promedio periódico de pérdida o ganancia que obtendrá si realiza el proyecto.

8.2 Cálculo del CAUE

Con base en el diagrama de flujo de caja en una anualidad vencida de n pagos de valor A cada uno y con un tasa de interés del $i\%$ por período, tenemos que $P = (P/A, i\%, n)$, donde P es el valor presente ubicado un período antes del primer pago. De la expresión anterior, obtenemos:

$$A = P \left[\frac{1}{(P/A, i\%, n)} \right]$$

El factor $1/(P/A, i\%, n)$ se denota **(A/P, i%, n)**, de tal manera que:

$$A = P (A/P, i\%, n) \quad (8-1)$$

A este factor **(A/P, i%, n)** se le conoce algunas veces con el nombre de **factor de distribución** de un valor presente y se interpreta como el factor que, aplicado a un valor presente P , lo distribuye financieramente hacia delante, en n pagos iguales. El valor A de cada pago así obtenido es lo que se llama el costo anual uniforme equivalente a P , y por esta razón tenemos:

$$A = \text{CAUE}$$

De igual manera, en el mismo diagrama de flujo de caja anterior, $F = A(F/A, i\%, n)$ y a partir de esta relación llegamos a:

$$A = F \left[\frac{1}{(F/A, i\%, n)} \right]$$

Al factor $1/(F/A, i\%, n)$ denotado por **(A/F, i%, n)** se le conoce con el nombre de **factor de distribución** de un valor futuro. La relación anterior puede escribirse como:

$$A = F (A/F, i\%, n) \quad (8-2)$$

Como en el caso anterior, este valor de **A** corresponde al costo anual uniforme equivalente al valor futuro **F**, y también tenemos:

$$A = \text{CAUE}$$

EJEMPLO 8.1

Calcular el **CAUE** del siguiente flujo de caja, para una tasa de interés del 3% mensual.

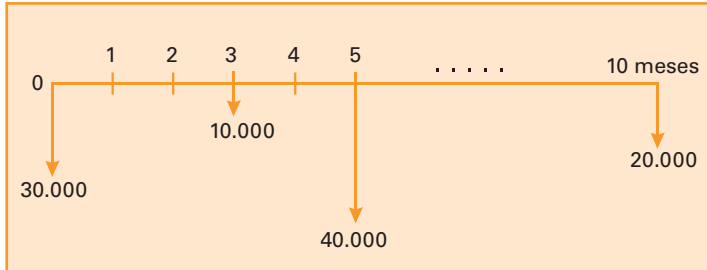


FIGURA 8.1

Solución

Utilizando el valor presente tenemos:

$$P = 30.000 + 10.000(P/F, 3\%, 3) + 40.000(P/F, 3\%, 5) + 20.000(P/F, 3\%, 10) = \$ 88.537,6$$

Y:

$$\text{CAUE} = 88.537,6(A/P, 3\%, 10) = \$ 10.379,3$$

Si utilizamos el valor futuro tenemos:

$$F = 30.000(F/P, 3\%, 10) + 10.000(F/P, 3\%, 7) + 40.000(F/P, 3\%, 5) + 20.000 = \$ 118.987,2$$

Y:

$$\text{CAUE} = 118.987,2(A/F, 3\%, 10) = \$ 10.379,3$$

Como se puede observar, el valor del CAUE es independiente de si utilizamos el presente o el futuro.

El valor anterior significa que para una tasa de interés del 3% mensual, el flujo de caja de los cuatro pagos mostrado en la figura 8.1 es equivalente financieramente a una serie uniforme de 10 pagos de \$ 10.379,3 mensuales.

8.3 El CAUE neto

En la mayoría de casos, el flujo de caja de un proyecto está formado por ingresos y egresos y no siempre por solo egresos, como el flujo de caja dado en el ejemplo 8.1. Por esta razón, y para efectos prácticos, debe calcularse lo que se conoce como el costo anual uniforme equivalente neto, que viene dado por cualquiera de las operaciones siguientes:

- a) $\text{CAUE (neto)} = \text{CAUE(I)} - \text{CAUE(E)}$
- b) $\text{CAUE (neto)} = P(A/P, i\%, n)$ (8-3)
- c) $\text{CAUE (neto)} = F(A/F, i\%, n)$

EJEMPLO 8.2

Un proyecto requiere una inversión hoy de \$ 4 millones y nuevas reinversiones en los meses 3, 4 y 5 de \$ 500.000 cada una; se obtienen unos ingresos de \$ 850.000 mensuales a partir del sexto mes hasta

finales del año en el que el proyecto se termina con un valor de mercado de \$ 1.500.000. Si la tasa de oportunidad del inversionista es del 3,5% mensual, hallar el promedio financiero mensual de pérdida o ganancia, es decir, el CAUE mensual.

Solución

El diagrama de flujo de caja es el siguiente:

Para hallar el CAUE (neto) mensual podemos aplicar cualquiera de las relaciones de (8-3).

Así, por ejemplo, si aplicamos la primera de esas relaciones, tenemos:

$$CAUE(I) = [1.500.000 + 850.000(F/A, 3,5\%, 7)](A/F, 3,5\%, 12) = \$ 555.576$$

$$CAUE(E) = [4.000.000 + 500.000(P/A, 3,5\%, 3)(1,035)^{-2}](A/P, 3,5\%, 12) = \$ 549.260$$

Por tanto, el CAUE (neto) mensual será:

$$CAUE = 555.576 - 549.260 = \$ 6.316$$

Esto quiere decir que llevar a cabo este proyecto equivale a tener una ganancia mensual de \$ 6.316.

El estudiante deberá resolver el ejemplo 8.2 utilizando las otras dos relaciones de las expresiones (8-3).

Se debe tener en cuenta que para hallar el CAUE podemos aplicar cualquiera de las relaciones de (8-3), siempre y cuando la tasa de descuento o de oportunidad sea constante a lo largo de la vida útil del proyecto. Si la tasa de descuento varía, el procedimiento para hallar el CAUE es diferente, como lo podremos ver en el ejemplo 8.3.

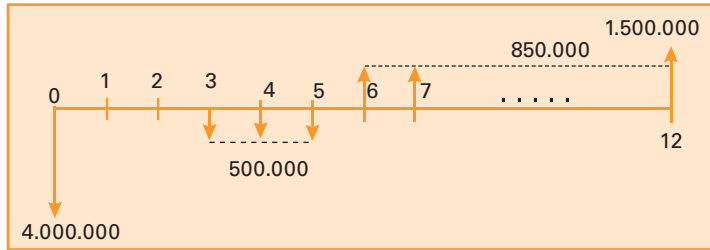


FIGURA 8.2

EJEMPLO 8.3

Resolver el ejemplo 8.2, suponiendo que la tasa de oportunidad del inversionista sea del 3,5% mensual durante los cinco primeros meses y del 4,5% mensual de ahí en adelante.

Solución

El diagrama de flujo de caja es el mismo que el del ejemplo 8.2, solo que en este caso la tasa de descuento es una para los cinco primeros meses y otra de ahí en adelante.

Debemos calcular en primer lugar el valor presente neto del flujo de caja:

$$VP(I) = 850.000(P/A, 4,5\%, 7)(1,035)^{-5} + 1.500.000(1,045)^{-7}(1,035)^{-5} = \$ 5.145.330$$

$$VP(E) = 500.000(P/A, 3,5\%, 3)(1,035)^{-2} + 4.000.000 = \$ 5.307.67$$

Así que el valor presente neto será:

$$VPN = \$ 5.145.330 - \$ 5.307.679 = \$ -162.349$$

Ahora se debe distribuir uniformemente esta cantidad durante los 12 meses teniendo en cuenta las dos tasas:

El diagrama de flujo de caja final será:

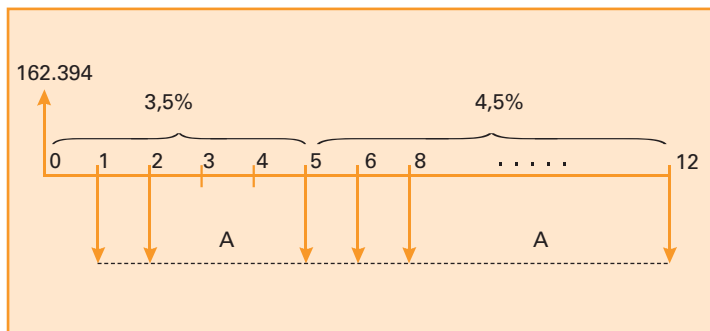


FIGURA 8.3

Por tanto:

$$-162.349 = A(P/A, 3,5\%, 5) + A(P/A, 4,5\%, 7)(1,035)^{-5}$$

$$A = \$ -17.131$$

Este valor de **A** es el CAUE neto mensual, lo que quiere decir que, en estas condiciones, llevar a cabo el proyecto equivale a tener una pérdida mensual, durante un año, de \$ 17.131.

8.4 El CAUE en la selección de alternativas

Sean **A** y **B** dos alternativas con vidas útiles iguales o diferentes. Cuando se van a comparar las dos por el método del CAUE se siguen los pasos que se describen a continuación:

- i) Tomar un ciclo de vida útil para cada alternativa y registrar en cada uno de ellos el flujo de caja correspondiente.
- ii) Hallar CAUE(A) y CAUE(B), cada uno en el ciclo de vida correspondiente.
- iii) Comparar los valores obtenidos en (ii). Si son diferentes, seleccionar la de mayor CAUE, y si son iguales es indiferente la selección que se haga.iv)

Se debe advertir que ambos CAUE deben corresponder al mismo período en ambas alternativas, es decir, ambos deben ser mensuales, trimestrales, semestrales, etcétera.

Que se tome solo un ciclo de vida útil para cada alternativa, y de ahí hacer la comparación y la selección, implica que para cada alternativa el flujo de caja se repite en cada uno de los ciclos de vida útil; por esto, el método puede tener mayor aplicación cuando el flujo de caja se maneja en pesos constantes.

EJEMPLO 8.4

Seleccionar la mejor alternativa entre A y B utilizando el método del CAUE, si la información es la siguiente:

La alternativa A tiene un costo inicial de \$ 600.000, costos mensuales de mantenimiento de \$ 32.000, ingresos mensuales de \$ 30.000, \$ 32.000, \$ 34.000 y así sucesivamente; un valor de mercado de \$ 250.000 y una vida útil de tres años.

La alternativa B tiene un costo inicial de \$ 1.400.000, costos mensuales de mantenimiento de \$ 65.000, ingresos mensuales de \$ 86.000 el primer mes, y luego se reajustarán en el 5% cada mes; el valor de mercado es \$ 450.000 y una vida útil de cuatro años.

La tasa de oportunidad del inversionista es del 3% mensual y se supone que el flujo de caja se repite en cada ciclo de vida útil de cada alternativa.

Solución

Tomando un ciclo de vida útil para cada alternativa tendremos:

Alternativa A. El diagrama de flujo de caja es:

Calculando el CAUE mensual se llega a:

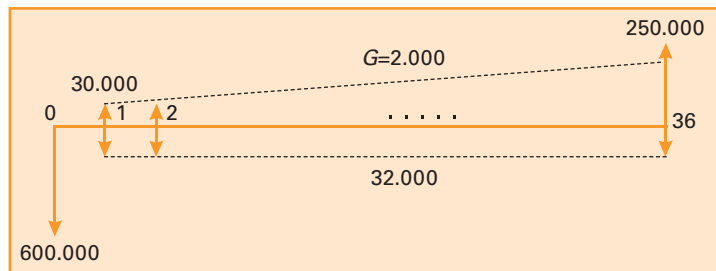


FIGURA 8.4

$$CAUE(I) = [30.000(F/A, 3\%, 36) + 2.000(F/G, 3\%, 36) + 250.000](A/F, 3\%, 36) = \$ 62.688,5$$

$$CAUE(E) = 32.000 + 600.000(A/P, 3\%, 36) = \$ 59.482$$

Entonces:

$$CAUE(A) = \$ 62.688,5 - \$ 59.482 = \$ 3.206,5$$

Alternativa B. El diagrama de flujo de caja es:

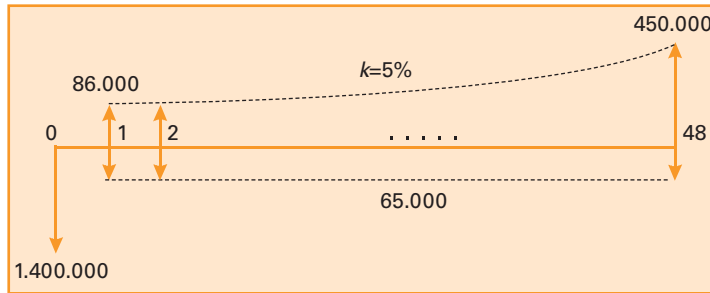


FIGURA 8.5

Calculando el CAUE mensual llegamos a:

$$CAUE(I) = \left[\frac{86.000}{0,03 - 0,05} [(1,03)^{48} - (1,05)^{48}] + 45.000 \right] \times (A/P, 3\%, 48)$$

$$= \$ 262.496$$

$$CAUE(E) = 65.000 + 1.400.000(A/P, 3\%, 48) = \$ 120.409$$

Entonces:

$$CAUE(B) = \$ 262.496 - \$ 120.409 = \$ 142.087$$

Como $CAUE(B) > CAUE(A)$, entonces la mejor alternativa es B.

Frecuentemente hay que calcular un CAUE cuando la tasa de interés no sea constante durante el ciclo de vida útil o cuando la tasa de descuento o de oportunidad sufra uno o varios cambios durante el tiempo que está calculándose el CAUE. Para estos casos no se puede aplicar ninguna de las relaciones o fórmulas de (8-3), sino que debe utilizarse el mismo procedimiento visto en el capítulo 4, cuando se financiaba una deuda presente en un determinado número de cuotas periódicas iguales con tasas diferentes, como en el ejemplo 4.13 o en el ejemplo 8.3.

Para efectos de decisión entre dos o más alternativas, en la mayoría de casos es indiferente tomar como método de evaluación el VPN o del CAUE, puesto que ambos conducen a la misma elección.

Queda a criterio del evaluador, y en algunos casos dependiendo de los ciclos de vida útil, el método que se va a utilizar.

Sin embargo, en algunos casos prácticos, el mismo problema exige que el índice sea el del promedio financiero, como lo podemos observar en el ejemplo 8.5.

EJEMPLO 8.5

Un profesional labora en una empresa y devenga un salario integral mensual de \$ 1 millón. Se le presenta la oportunidad de trabajar en otra empresa, que le hace el siguiente ofrecimiento: un salario básico mensual de \$ 680.000, tres primas al año –en junio, setiembre y diciembre al final de esos meses–, por el valor de \$ 600.000 cada una; una bonificación al final del año por \$ 1 millón, un auxilio mensual para educación de sus hijos por \$ 100.000, un descuento del 15% del salario básico en junio y diciembre. Desde el punto de vista financiero, determinar la mejor alternativa para el profesional suponiendo una tasa de oportunidad del 30% anual.

Solución

Como podemos darnos cuenta, la decisión que tome el profesional entre la empresa actual y la propuesta que le hacen se basará en la comparación que haga del salario integral actual con el promedio financiero y no aritmético de los ingresos netos que va a recibir en la segunda empresa.

El estudiante debe elaborar el diagrama de flujo de caja de la segunda alternativa u ofrecimiento que le hacen al profesional, y con la tasa mensual del 2,21% equivalente al 30% anual, hallar el CAUE mensual y compararlo con el salario actual.

Para el caso, tenemos:

$$\text{VPN} = 780.000(\text{P/A}, 2,21\%, 12) + 600.000[(1,0221)^{-6} + (1,0221)^{-9} + (1,0221)^{-12}] \\ + 1.000.000(1,0221)^{-12} - 102.000[(1,0221)^{-6} + (1,0221)^{-12}] = \$ 12.667.837$$

Por tanto, el promedio financiero de salario neto mensual será de:

$$12.667.837(\text{A/P}, 2,21\%, 12) = \$ 1.213.368$$

Esto quiere decir que el CAUE de la segunda alternativa de trabajo es de \$ 1.213.368 mensuales, superior al salario mensual actual; luego, desde el punto de vista exclusivamente financiero, al profesional le conviene la segunda alternativa de trabajo.

Es importante tener en cuenta la diferencia que hay entre lo que es el promedio financiero o CAUE y lo que es el promedio aritmético del mismo flujo de caja. En el ejemplo anterior, si calculamos el promedio aritmético de salario mensual en la segunda alternativa, se tendrá que este es igual a:

$$[780.000 \times 12 + 600.000 \times 3 + 1.000.000 - 102.000 \times 2]/12 = \$ 996.333$$

Y este valor es inferior al salario integral actual. Se corre entonces el riesgo de tomar este valor como promedio de salario mensual y así la decisión cambiaría en el sentido de que ahora la mejor sería la primera alternativa.

Finalmente, es claro que en toda operación financiera que se analice debe tenerse en cuenta el valor del dinero a lo largo del tiempo, y es lo que no se considera cuando, como en el ejemplo anterior, se toma el promedio aritmético.

Con los factores $(\text{A/P}, i\%, n) = 1/(\text{P/A}, i\%, n)$ o $(\text{A/F}, i\%, n) = 1/(\text{F/A}, i\%, n)$ se puede distribuir uniformemente a una tasa del $i\%$ por período y durante n períodos, ya sea un valor presente o un valor futuro.

De tal manera que el CAUE de un flujo de caja para n períodos y una tasa de descuento del $i\%$ por período se puede calcular de cualquiera de las siguientes formas:

- a) $\text{CAUE} = \text{VPN}(\text{A/P}, i\%, n)$
- b) $\text{CAUE} = \text{VFN}(\text{A/F}, i\%, n)$
- c) $\text{CAUE} = \text{CAUE}(\text{ingresos}) - \text{CAUE}(\text{egresos})$

El método del CAUE para la evaluación de dos alternativas, A y B, se aplica de la siguiente manera:

- i) Si las vidas útiles de A y B son iguales, calcular $\text{CAUE}(A)$, $\text{CAUE}(B)$ y comparados así:
 - a) Si $\text{CAUE}(A) > \text{CAUE}(B)$, seleccionar la alternativa A.
 - b) Si $\text{CAUE}(A) = \text{CAUE}(B)$, es indiferente la alternativa que se escoja.
 - c) Si $\text{CAUE}(A) < \text{CAUE}(B)$, seleccionar la alternativa B.
- ii) Si las vidas útiles de A y B son diferentes, entonces se procede de la siguiente manera:
 - a) Si el flujo de caja se repite en cada ciclo de vida útil de la alternativa A, se toma un solo ciclo de vida útil y ahí se calcula el $\text{CAUE}(A)$, y si lo mismo sucede para la alternativa B, se calcula el $\text{CAUE}(B)$ y se comparan los dos como en el caso i).
- iii) Si las vidas útiles son diferentes para A y B, y además las condiciones del flujo de caja cambian de un ciclo a otro en cada alternativa, se procede como en los casos iii) y iv) del método del VPN, y en ese tiempo, igual para ambas alternativas, se aplica el numeral i) de esta sección.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Una alternativa de inversión requiere de \$ 35 millones hoy, \$ 10 millones en un año y \$ 8 millones en dos años. Los ingresos mensuales se estiman en \$ 3.400.000 el primer mes y aumentarán en el 2% cada mes hasta finales del segundo año y luego se mantendrán constantes. Los egresos serán de \$ 1.100.000 el primer mes y aumentarán en \$ 20.000 cada mes; el valor de mercado será de \$ 15 millones al cabo de cinco años de vida útil.

Se pide hallar el promedio mensual de pérdida o ganancia para una tasa de oportunidad del inversionista del 18% MV.

El diagrama de flujo de caja de esta alternativa o proyecto de inversión es:

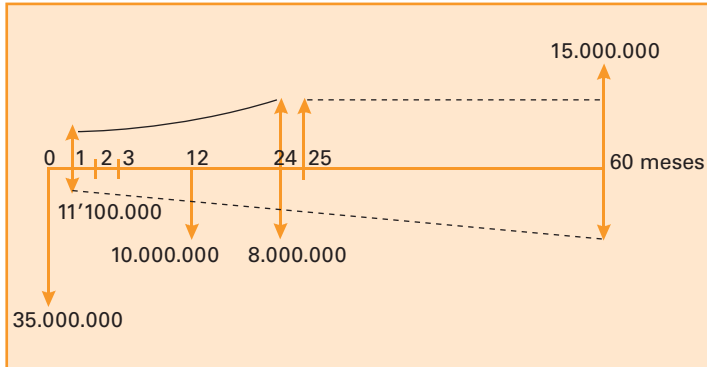


FIGURA 8.6

Tasa de interés: 18% MV ↔ 1,5% mensual

Valor del ingreso en el mes 24 es \$ $3.400.000(1,02)^{23} = 5.361.457,5$

$$VP(I) = \frac{3.400.000}{0,15 - 0,02} \left[1 - \left(\frac{1,02}{1,015} \right)^{24} \right] + 5.361.457,5 (P/A, 1,5\%, 36)(1,015)^{-24}$$

$$+ 15.000.000(1,015)^{-60} = \$ 195.000.209$$

$$VP(E) = 35.000.000 + 10.000.000(1,015)^{-12} + 8.000.000(1,015)^{-24}$$

$$+ 1.100.000(P/A, 1,5\%, 60) + 20.000(P/G, 1,5\%, 60)$$

$$= \$ 112.041.869$$

$$VPN = \$ 82.958.340$$

$$CAUE = 82.958.340(A/P, 1,5\%, 60) = \$ 2.106.596,6$$

Se interpreta este resultado como que al llevar a cabo ese proyecto, con esa tasa de oportunidad, se obtiene una ganancia promedio mensual de \$ 2.106.596,6.

- Un proyecto se debe iniciar con un crédito del banco por el valor de \$ 120 millones y bajo las siguientes condiciones: el crédito se amortizará en un tiempo de tres años, cuotas mensuales que aumenten en el 1% cada mes, tasas de interés del 18% EA para el primer año, del 16% EA para el segundo año y del 15% EA para el tercer año. Además, se sabe que el inversionista tiene una tasa de oportunidad del 14% EA. Si la cuota al banco se cancela con los ingresos del proyecto, se pregunta: ¿Cuánto debería rendir en promedio mensual el proyecto como mínimo para que el inversionista pueda cumplir con su obligación con el banco?

El diagrama de financiación del crédito es el siguiente:

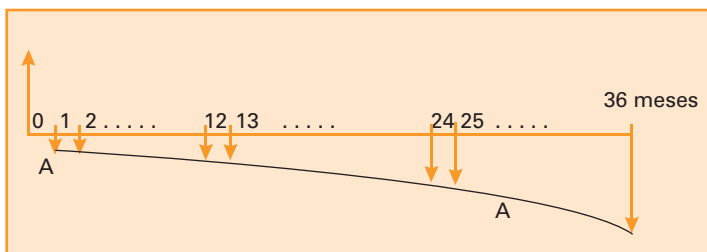


FIGURA 8.7

$$\text{Cuota número 13} = A(1,01)^{12}$$

$$\text{Cuota número 25} = A(1,01)^{24}$$

Tasas mensuales de interés: 1,39% para el primer año
 1,24% para el segundo año
 1,17% para el tercer año

Tasa de oportunidad mensual: 1,1%

Entonces, equilibrando el diagrama en el punto 0, se tiene:

$$120.000.000 = \frac{A}{0,0139 - 0,01} \left[1 - \left(\frac{1,01}{1,0139} \right)^{12} \right] + \frac{A(1,01)^2}{0,0124 - 0,01} \left[1 - \left(\frac{1,01}{1,0124} \right)^{12} \right] (1,18)^{-1} \\ + \frac{A(1,01)^{24}}{0,0117 - 0,01} \left[1 - \left(\frac{1,01}{1,0117} \right)^{12} \right] (1,16)^{-1} \cdot (1,18)^{-1}$$

$$\therefore A = \$ 3.564.807$$

En este momento el estudiante debe elaborar un diagrama de flujo de caja que tenga como egresos las cuotas que debe pagar al banco, y como ingresos los valores uniformes mensuales que debe generar el proyecto, y equilibrarlo en el punto 0 con la tasa de oportunidad; este diagrama representa la operación consistente en depositar, a la tasa de oportunidad, los valores generados por el proyecto, para retirar las cuotas que debe cancelar al banco.

Se tiene entonces que:

$$\frac{3.564.807}{0,011 - 0,01} \left[1 - \left(\frac{1,01}{1,011} \right)^{36} \right] = X(P / A, 1,1\%, 36)$$

$$\therefore X = \$ 4.215.820$$

Este valor de X representa el valor promedio que debe generar el proyecto mensualmente para que, invertido a la tasa de oportunidad, se pueda cancelar el crédito.

- Un ingeniero constructor tiene dos alternativas para utilizar una cierta maquinaria necesaria en sus labores de constructor:

La alternativa A es pagar arriendo por mes vencido de \$ 2.250.000 por una máquina que le alquilan, durante los dos años en los que se debe realizar una obra.

La alternativa B es comprar una maquinaria que realizará el mismo trabajo de la descrita en la alternativa A, y, además, los costos de mantenimiento para ambas máquinas son los mismos. En este caso la máquina tiene un valor al contado de \$ 140 millones, debe pagar unos impuestos por año vencido de \$ 3 millones y se estima que se podrá vender al cabo de dos años en \$ 90 millones.

Si la tasa de oportunidad del ingeniero es del 19% EA para el primer año y del 21% EA para el segundo, se pide determinar la mejor alternativa para el ingeniero.

El estudiante debe diseñar el diagrama de flujo de caja de cada una de las alternativas.

La tasa de oportunidad mensual es del 1,46% para el primer año y del 1,6% para el segundo.

Para la alternativa A, el CAUE es de \$ 2.250.000 mensualmente de egreso (o negativo).

Para la alternativa B, se tiene que:

$$\text{VPN} = 90.000.000(1,21)^{-1}(1,19)^{-1} - 3.000.000[(1,21)^{-1}(1,19)^{-1} + (1,19)^{-1}] \\ - 140.000.000 = \$ -82.100.146$$

Por tanto, el costo anual uniforme equivalente para este caso estará dado por el valor X, donde:

$$- 82.100.146 = X(P/A, 1,46\%,12) + X(P/A, 1,6\%,12)(1,19)^{-1}$$

$$\therefore X = \$ -4.096.024$$

Como el promedio de egresos mensuales es menor en la alternativa A, es decir, el promedio de gastos mensuales en A es menor que en B, entonces se debe seleccionar la alternativa A, o sea, tomar en arriendo la maquinaria.

4. Se tienen dos proyectos, A y B, para evaluar bajo las siguientes condiciones:

El proyecto A requiere de una inversión hoy por el valor de \$ 20 millones, gastos de mantenimiento mensuales así: \$ 200.000 el primer mes y luego aumentan en \$ 10.000 cada mes; ingresos de \$ 600.000 el primer mes, y de ahí en adelante se incrementan en el 6% cada mes; un valor de mercado al final de la vida útil, que es de tres años, de \$ 28 millones.

El proyecto B requiere la misma inversión inicial del proyecto A y unos gastos mensuales constantes de \$ 450.000; los ingresos mensuales son de \$ 1 millón el primer año y de ahí en adelante cada mes aumentan en \$ 200.000 hasta el final de la vida útil, que es de dos años. Tiene un valor de mercado de \$ 20 millones.

La tasa de descuento para la evaluación es del 3% mensual.

Solución

El diagrama del flujo de caja para cada proyecto y el correspondiente CAUE para un ciclo de vida útil son los siguientes:

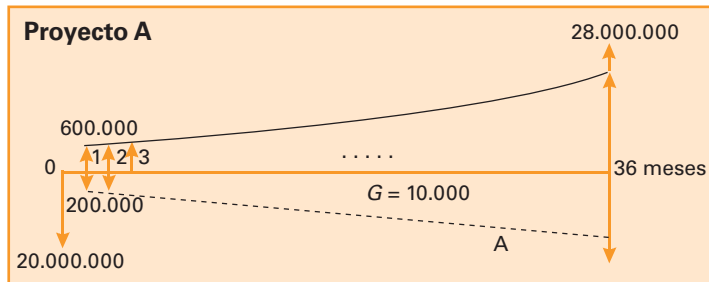


FIGURA 8.8

$$CAUE(A) = \left\{ 28.000.000 (1,03)^{-36} + \frac{600.000}{0,03 - 0,06} \left[1 - \left(\frac{1,06}{1,03} \right)^{36} \right] - 20.000.000 - 200.000 (P/A, 3\%, 36) \right. \\ \left. - 10.000 (P/G, 3\%, 36) \right\} \times (A/P, 3\%, 36) \\ = \$ 841.816$$

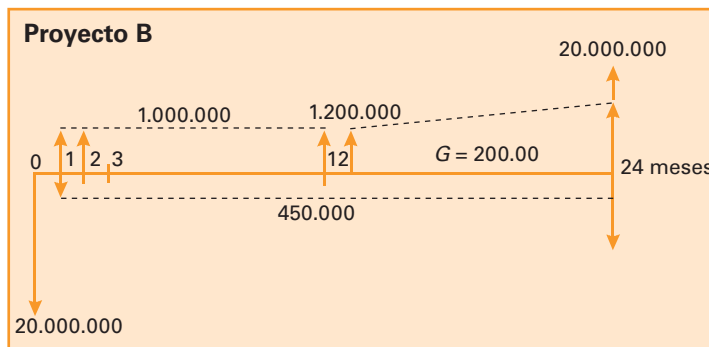


FIGURA 8.9

$$\begin{aligned}
 CAUE (B) &= \{20.000.000 (1,03)^{-24} + 1.000.000 (P/A, 3\%, 12) + \\
 &[1.200.000 (P/A, 3\%, 12) + 200.000 (P/G, 3\%, 12)](1,03)^{-12} \\
 &- 20.000.000 - 450.000 (P/A, 3\%, 24)\} \times (A/P, 3\%, 24) \\
 &= \$ 456.934
 \end{aligned}$$

Bajo el supuesto de que el flujo de caja de cada proyecto sea idéntico para los ciclos de vida útil siguientes, es válido que el mejor proyecto de entre A y B es el **A**, ya que se cumple que $CAUE(A) > CAUE(B)$.

En el ejemplo anterior se pueden hacer los supuestos correspondientes para acortar el proyecto A a 24 meses, aumentar o prolongar el proyecto B a 36 meses o considerar ambos proyectos en condiciones reales y registrar los flujos de caja por ciclos para cada proyecto, hasta llegar a una igualdad de tiempo de estudio que será de 72 meses.

PROBLEMAS

- 1.1** Un activo tiene un costo hoy de \$ 4.200.000 y debe reemplazarse cada cuatro años al mismo costo. Para una tasa de descuento del 34% anual, hallar el CAUE por años, sabiendo que la renovación debe hacerse a término indefinido.
- 1.2** Hallar el CAUE mensual para un activo con la siguiente información: se adquiere con una cuota inicial de \$ 1.280.000, y el resto financiado a 36 meses con cuotas de \$ 130.000 cada mes, costo mensual de la operación de \$ 45.000, ingresos mensuales de \$ 40.000, \$ 43.000, \$ 46.000 y así sucesivamente; un valor de mercado igual al 10% del valor al contado del activo y una vida útil de cinco años. La tasa de descuento es del 2,8% anual.
- 1.3** Un comerciante compró una máquina por \$ 950.000. El costo de mantenimiento se estima en \$ 100.000 anuales durante los tres primeros años y de \$ 11.000 mensuales de ahí en adelante. Hizo una reparación general de la máquina tres años y medio después de comprada por el valor de \$ 155.000 y vendió la máquina, dos años después de la reparación, en \$ 300.000. Determinar el promedio mensual de costo o CAUE para una tasa de descuento del 27% nominal mensual.
- 1.4** Resolver el problema 8.3 suponiendo una tasa de descuento del 27% nominal mensual durante los tres primeros años y del 33% nominal mensual de ahí en adelante.
- 1.5** Usted invierte hoy \$ 3 millones en un negocio que, además, requiere unos gastos de \$ 50.000 el primer mes y que aumentarán en el 2% cada mes; el negocio se vende al cabo de tres años en \$ 1.500.000. ¿Cuáles deberían ser los ingresos uniformes mensuales durante los tres años para que, con una tasa de descuento del 3% mensual, usted no tenga pérdidas ni ganancias en el negocio?
- 1.6** Hallar el CAUE mensual para un activo con la siguiente información: se adquiere con una cuota inicial de \$ 2 millones y el resto financiado a 36 meses con cuotas de \$ 60.000 mensuales; el costo de la operación es de \$ 570.000 mensuales; los ingresos son de \$ 120.000 el primer mes y de ahí en adelante disminuyen en \$ 1.000 cada mes; el valor de mercado será del 30% del valor al contado del activo; la vida útil es de seis años y la tasa de oportunidad del 2,85% mensual durante los tres primeros años y del 3,2% mensual de ahí en adelante.
- 1.7** Un vehículo se adquirió hace cinco años por \$ 24.500.000 y se vende hoy por \$ 25 millones. Los gastos fueron: en combustibles, \$ 228.000 mensuales; en taller, \$ 140.000 cada tres meses; en llantas y repuestos, \$ 420.000 cada año; un seguro por \$ 113.500 por mes anticipado; en estacionamiento, \$ 39.000 mensuales; e impuestos, \$ 536.000 al año. Hallar el CAUE mensual del vehículo para una tasa de oportunidad del 2,5% mensual.
- 1.8** Una fábrica de artículos de cuero obtiene ingresos mensuales cada vez mayores. Inició el primer mes con un ingreso de \$ 1.200.000, y cada mes siguiente el ingreso aumentará en el 2%; los costos se estiman en \$ 950.000 el primer mes, y disminuirán en \$ 5.000 cada mes. Hallar el CAUE mensual para esta fábrica en un tiempo de cuatro años y medio para una tasa de descuento del 28% nominal mensual.
- 1.9** Usted invierte hoy \$ 6 millones en un proyecto en el cual debe hacerse además una reinversión por el valor de \$ 2 millones al cabo de un año. La vida útil del proyecto es de cuatro años y se obtienen unas utilidades mensuales así: \$ 400.000 el primer mes y de ahí en adelante aumentarán en el 3% cada mes. Determinar el promedio financiero trimestral de pérdidas o ganancias en este proyecto, asumiendo una tasa de oportunidad del 38% anual para los dos primeros años y del 42% anual de ahí en adelante.

- 1.10** Determinar la mejor alternativa entre A y B utilizando el CAUE y teniendo en cuenta la siguiente información:

La alternativa A tiene un costo mensual de \$ 12.000 durante el primer año, \$ 18.000 mensuales el segundo año, \$ 24.000 mensuales el tercer año y así sucesivamente; gastos adicionales de \$ 100.000 cada dos años y una vida útil de siete años. La alternativa B tiene costos mensuales de \$ 80.000 durante el primer año, y de ahí en adelante disminuirán en \$ 2.000 cada mes; costos adicionales anuales de \$ 80.000 y una vida útil de cuatro años.

La tasa de descuento para la selección de las dos alternativas será del 38% anual.

- 1.11** Se presentan a la Gerencia de una empresa dos propuestas para automatizar un sistema de control:

La propuesta A tiene un costo inicial de \$ 20 millones, un costo anual de operación de \$ 3 millones durante los cuatro primeros años y de ahí en adelante se supone que aumentará en \$ 200.000 cada año; la vida útil será de 10 años sin valor de mercado al final de este tiempo.

La propuesta B tiene un costo inicial de \$ 35 millones, un costo anual de operación de \$ 2.500.000 en los tres primeros años y que luego aumentará en \$ 250.000 por año; la vida útil será de 15 años y tendrá un valor de mercado al final de este tiempo de \$ 6 millones.

Si la tasa de oportunidad de la empresa es del 34% anual, utilice el método del CAUE anual para seleccionar la mejor propuesta.

- 1.12** Se adquiere hoy un activo con una cuota inicial equivalente al 30% de su valor al contado y el resto financiado a tres años con cuotas mensuales comenzando con \$ 2.000 el primer mes y de ahí en adelante cada cuota será igual a los 3/4 de la del mes anterior. Los gastos de operación del activo serán de \$ 1.500 mensuales durante el primer año y luego aumentarán en el 5% cada mes. Los ingresos mensuales serán de \$ 4.000 el primer mes y luego aumentarán en \$ 200 cada mes hasta finales del segundo año, y a partir de este momento disminuirán en el 2,5% cada mes. El valor de mercado del activo al final de la vida útil, que es de cuatro años, será equivalente al 40% de su valor de contado.

Tomando una tasa de oportunidad del 30% nominal mensual durante los tres primeros años y del 3% mensual de ahí en adelante, determinar el promedio de pérdida o ganancia mensual para este activo.

- 1.13** El dueño de una casa desea determinar la clase de tejado más económico, sabiendo que debe cubrir un área de 480 metros cuadrados. Una alternativa es utilizar tejas clase A, que tienen una extensión de 1,6 metros cuadrados cada una y un costo de \$ 16.400; el costo de instalación de esta clase de tejado es de \$ 850.000, una reparación anual por valor de \$ 350.000 y una vida útil de 12 años.

La otra alternativa es utilizar tejas clase B, que tienen una extensión de 2,1 metros cuadrados cada una y un costo de \$ 42.500; el costo de instalación es de \$ 720.000, una reparación anual de \$ 640.000 y una vida útil de 16 años.

¿Qué alternativa debe seleccionar el dueño de la casa si su tasa de oportunidad es del 32% nominal trimestral?

- 1.14** Se ha estimado que el costo de un parque de recreación será de \$ 135 millones; se espera mejorar el parque durante los cinco años siguientes a un costo de \$ 40 millones por año. Los costos anuales de mantenimiento serán de \$ 1.200.000 el primer año y aumentarán en \$ 100.000 cada año hasta el quinto año, y de ahí en adelante permanecerán constantes. Se espera recibir \$ 2 millones el primer año, \$ 1.800.000 el segundo, \$ 1.600 millones el tercero y así sucesivamente hasta el sexto año, y de ahí en adelante el ingreso se mantendrá constante.

Suponiendo una tasa de descuento del 33% anual y una vida útil perpetua del parque, hallar el CAUE anual.

- 1.15** Un proyecto tiene una inversión inicial de \$ 5 millones hoy; los gastos mensuales de operación, comenzando al cabo de cuatro meses, son de \$ 300.000, \$ 310.000, \$ 320.000 y así sucesivamente. Los ingresos que se reciben son de \$ 880.000 en un mes y de ahí en adelante aumentarán en el 8% cada mes. El proyecto tiene una vida útil de tres años y medio, con un valor de mercado al final de este tiempo de \$ 3.600.000.

Para una tasa de oportunidad del inversionista del 36,07% anual, hallar el promedio financiero CAUE mensual de pérdida o ganancia del proyecto.

- 1.16** Un señor pensionado de una empresa tiene la oportunidad de adquirir un taxi y trabajarlo con el fin de obtener unos mayores ingresos mensuales. Se le presentan dos oportunidades: la primera es comprar un taxi nuevo pagando una cuota inicial de \$ 3 millones y 24 cuotas mensuales de \$ 720.000 cada una con un interés del 3% mensual; los gastos de mantenimiento, conducción e impuestos ascienden a \$ 100.000 promedio mensual; lo vende al cabo de cinco años en \$ 8 millones.

También puede adquirir el taxi ya usado por el valor de \$ 7.500.000 al contado; los gastos de mantenimiento, conducción e impuestos ascienden a \$ 150.000 promedio mensual, una reparación anual por el valor de \$ 200.000 cada una. Este taxi se puede vender en \$ 2 millones al cabo de cinco años.

Para una tasa de descuento del 30% anual, hallar el CAUE mensual.

- 1.17** Para el problema 8.16, suponer que el dueño del taxi obtiene unos ingresos promedio mensuales de \$ 200.000 el primer año y que luego aumentarán en el 20% cada año; esto para el taxi nuevo. En el caso del usado los ingresos serán de \$ 180.000 mensuales el primer año, de \$ 200.000 mensuales el segundo año, de \$ 220.000 mensuales el tercer año y así sucesivamente.

- 1.18** El dueño de un restaurante desea hallar el promedio financiero de pérdida o ganancia (costo anual uniforme equivalente) mensual, durante un año de funcionamiento de su restaurante, con base en la siguiente información: se paga un arriendo de \$ 200.000 por mes anticipado, un seguro por el valor de \$ 850.000 al principio del año, alquiler de maquinaria por el valor de \$ 155.000 mensuales, materias primas para los alimentos por el valor de \$ 1.200.000 mensuales, 10 empleados con un sueldo mensual de \$ 110.000 cada uno, y por concepto de servicios públicos \$ 185.000 cada dos meses. Los ingresos del restaurante ascienden a \$ 2.200.000 mensuales y la tasa de oportunidad del dueño del restaurante es del 32% anual.

- 1.19** Resolver el problema 8.18 para una tasa de oportunidad del 32% anual durante los primeros cinco meses y del 34% anual de ahí en adelante.

- 1.20** En el problema 8.18, ¿de cuánto deberán ser los ingresos mensuales uniformes para que el dueño no tenga pérdida ni ganancia?

- 1.21** Una entidad financiera le acaba de aprobar un crédito a una persona con el siguiente plan: inicialmente el plazo para amortizar la deuda es de cinco años con cuotas mensuales que aumenten cada mes en el 1,5%, y la primera cuota al cabo de un mes tiene un valor de \$ 84.500. Hoy mismo, el deudor solicita que la forma de pago anterior le sea cambiada a un sistema de cuotas mensuales uniformes durante los mismos cinco años.

Determinar el valor de estas cuotas sabiendo que la entidad financiera cobra un interés del 2,5% mensual durante los dos primeros años y del 3,1% mensual de ahí en adelante.

1.22 En una ciudad debe instalarse una tubería para el acueducto, y para esto se presentan dos alternativas. Una es instalar una tubería de 36 pulgadas por un valor de \$ 670 millones; los costos de operación, incluyendo bombeo y mantenimiento, serán de \$ 1.600.000 el primer año y aumentarán en el 25% cada año.

La otra alternativa es instalar una tubería de 30 pulgadas por un valor de \$ 480 millones, con costos de operación de \$ 2 millones el primer año y que aumentarán en \$ 200.000 anualmente.

Seleccionar la mejor alternativa utilizando el CAUE y suponiendo una vida útil perpetua de cada una de ellas y una tasa de descuento del 33% anual.

1.23 Resolver el problema 8.22 para una tasa de descuento del 33% anual durante los 10 primeros años y del 38% anual de ahí en adelante.

1.24 Los gastos del departamento que usted dirige en una empresa son de \$ 1.500.000 al principio de enero y luego disminuyen en el 10% cada mes hasta principios de setiembre; de ahí en adelante permanecerán constantes hasta finales de diciembre del mismo año. A usted le solicitan que determine el promedio financiero o CAUE de gastos por mes vencido para los 13 desembolsos de ese año, teniendo en cuenta una tasa de descuento o de oportunidad del 2,4% mensual durante los cinco primeros meses y del 2,7% mensual de ahí en adelante.

1.25 Los costos mensuales de operación en una empresa guardan siempre la siguiente relación: los costos en cualquier mes son iguales a los $\frac{4}{3}$ de los costos del mes anterior más \$ 140.000; si los costos del cuarto mes fueron de \$ 860.000; calcular el CAUE mensual para un tiempo de dos años y una tasa de oportunidad del 32% anual.

1.26 En el problema 8.25, suponer que cada tres meses se incurre en unos costos adicionales de \$ 200.000.

1.27 Hallar el promedio mensual o CAUE para un proyecto que tiene el siguiente flujo de caja: inversión inicial de \$ 6 millones, gastos de mantenimiento por \$ 30.000 el primer mes y después aumentarán en el 2% cada mes hasta finales del segundo año, y luego permanecerán constantes; gastos adicionales de \$ 150.000 cada 10 meses. Los ingresos serán de \$ 90.000 mensuales durante los primeros dos años y medio y de ahí en adelante aumentarán en \$ 3.000 cada mes; valor de mercado al final de la vida útil de \$ 1.500.000; vida útil de cinco años. La tasa de oportunidad del inversionista será del 30% nominal mensual.

1.28 Resolver el problema 8.27 para una tasa de oportunidad del 30% nominal mensual durante los dos primeros años y del 36% nominal mensual de ahí en adelante.

1.29 En el problema 8.27, ¿de cuánto deberán ser los ingresos mensuales uniformes durante los dos años y medio para que, aumentando en \$ 3.000 de ahí en adelante, el proyecto no tenga pérdidas ni ganancias?

1.30 Usted debe decidir entre adquirir una máquina nueva o usada. Si la máquina es nueva, se podrá comprar con una cuota inicial de \$ 310.000 y 24 cuotas mensuales de \$ 25.908 cada una; los gastos mensuales por concepto de mantenimiento serán de \$ 22.000 el primer mes y después aumentarán el 2% cada mes hasta finales del tercer año, y luego permanecerán constantes. Esta máquina podrá venderse en \$ 480.000 al cabo de cinco años.

Si la máquina es usada, puede comprarse con tres pagos de \$ 250.000 cada uno; el primero hoy, el segundo al cabo de seis meses y el tercero pasado un año. Los gastos mensuales por concepto de mantenimiento para esta clase de máquina serán de \$ 26.000 el primer mes y luego aumentarán en \$ 200 cada mes. Esta máquina podrá venderse en \$ 340.000 al cabo de cinco años.

Determinar la máquina más económica, teniendo en cuenta una tasa de oportunidad del 2% mensual y utilizando el criterio del CAUE mensual.

- 1.31** El editor de un libro hace una inversión inicial de \$ 6.200.000, para la edición de 2.000 ejemplares que se venderán, en los próximos dos años, a un promedio de 100 libros mensuales durante el primer año, 80 mensuales durante los cuatro primeros meses del segundo año y 480 en el último mes del segundo año. El precio del libro es de \$ 18.000 para el primer año y de \$ 19.000 para el segundo año. Hallar el CAUE mensual de este proyecto para una tasa del 29% anual.
- 1.32** Un matrimonio desea saber cuánto le cuesta, promedio mensual, vivir en casa propia por un tiempo de cuatro años, con la siguiente información: la casa tiene un valor al contado de \$ 93 millones, reparaciones cada año por \$ 1.500.000 la primera y aumentarán en el 28% anual; impuestos por año anticipado de \$ 430.000 el primer año, reajustado en el 22% cada año; valor de mercado de la casa al cabo de los cuatro años de \$ 100 millones y tasa de oportunidad de los dueños de la casa del 31% anual.
- 1.33** Un comerciante invierte hoy en un negocio \$ 10 millones; espera tener unos gastos de funcionamiento de \$ 1.500.000 el primer mes y estima que aumentarán a razón del 4% cada mes. Los ingresos están proyectados para que sean del orden de \$ 2.500.000 el primer mes y aumentarán en \$ 200.000 cada mes. Se calcula un valor de mercado del negocio por el valor de \$ 4 millones al cabo de dos años. Si el comerciante utiliza una tasa de descuento del 28% EA, determinar el promedio de pérdida o ganancia mensual.
- 1.34** Un proyecto tiene una inversión inicial de \$ 15 millones hoy; los gastos mensuales de operación comenzando en cuatro meses son de \$ 500.000, \$ 510.000, \$ 520.000 y así sucesivamente. Los ingresos son de \$ 900.000 el primer mes y aumentarán de ahí en adelante en el 4% cada mes. El proyecto tiene una vida útil de tres años con un valor de mercado, al final de este tiempo, de \$ 9 millones. Para una tasa de oportunidad del inversionista del 36,07% anual, hallar el promedio financiero de pérdida o ganancia mensual del proyecto.
- 1.35** Una empresa de transporte terrestre está considerando dos clases de motores para usar en sus camiones de carga pesada. Las dos tienen las siguientes especificaciones: el motor A cuesta \$ 22 millones y gasta un promedio de 1,3 galones de combustible por kilómetro de recorrido con la carga promedio normal. El motor B cuesta \$ 38 millones y gasta un promedio de 0,9 galones de combustible por kilómetro de recorrido con carga normal.
- Ambos motores tienen una vida útil de cinco años antes de que se requiera una reparación significativa, y cuentan con un valor de mercado al final de esta vida útil del 15% del valor original. Si hoy el combustible cuesta \$ 1.250 por galón y se espera que su precio aumente a una tasa promedio anual del 24%, ¿qué clase de motor debe utilizar la empresa para un recorrido promedio anual de 90.000 kilómetros?
- La tasa de oportunidad de la empresa es del 29% anual. Utilizar los métodos del CAUE.
- 1.36** Un proyecto requiere de una inversión inicial de \$ 200 millones. Este dinero se puede obtener de una institución bancaria que cobra un interés del 36% EA, y la deuda se debe amortizar en un tiempo de cuatro años con cuotas trimestrales que aumenten en el 5% cada trimestre y cancelando la primera dentro de seis meses. Para cubrir esta obligación el Gerente del proyecto deberá depositar la mitad de las utilidades mensuales en una cuenta que pagará un interés del 3% mensual durante los cuatro años, de tal manera que cada trimestre se tenga la cantidad de dinero necesario para cubrir la cuota del banco.

¿Cuáles deberán ser las utilidades promedio mensuales que genere el proyecto, de tal manera que el inversionista pueda cumplir la obligación con el banco?

- 1.37** En alguna finca de la región cafetera se desea llevar a cabo un proyecto agrícola con una inversión inicial de \$ 700 millones y con nuevas inversiones así: \$ 80 millones en 10 meses y \$ 100 millones en dos años. Los costos de mantenimiento y producción se estiman en \$ 12.500.000 mensuales durante el primer año y aumentarán en el 8% cada año.

Los ingresos son de \$ 48 millones mensuales el primer año y aumentarán en el 12% cada año. El valor de mercado del proyecto al final de la vida útil, que será de cinco años, se estima en \$ 550 millones.

Si el objetivo del inversionista es obtener una ganancia promedio mensual de al menos el 2,1% de la inversión inicial, determinar si se debe llevar a cabo o no el proyecto, sabiendo que el inversionista tiene una tasa de oportunidad del 16% EA.

- 1.38** Una persona dispone en este momento de la suma de \$ 130 millones y quiere determinar en cuál de las dos siguientes alternativas los debe invertir.

Alternativa A: invertir la suma de dinero en una institución financiera que ofrece una tasa de interés del 13% EA.

Alternativa B: comprar un apartamento con esa suma de dinero, que podría arrendar por \$ 1.300.000, pagaderos por mes anticipado durante el primer año, y aumentará el arriendo en el 5,5% cada año; deberá pagar unos impuestos prediales por el valor de \$ 2.600.000 cada año, y lo venderá a los seis años en \$ 142 millones.

Si esta persona tiene una tasa de oportunidad del 10,5% EA, determinar cuál será la mejor alternativa para un tiempo de seis años, utilizando el índice del costo anual uniforme equivalente.

Tasa interna de retorno (TIR) y beneficio/costo (B/C)

El objeto de este capítulo es capacitar al lector en el cálculo de los índices de tasa interna de retorno (TIR) y beneficio/costo (B/C) del flujo de caja de un proyecto o alternativa de inversión, su aplicación en la evaluación financiera de un proyecto y su interpretación financiera.

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

Al terminar el capítulo el lector estará en capacidad de:

- Entender y aplicar la definición tanto matemática como financiera de los índices de TIR y B/C.
- Calcular la TIR de cualquier flujo de caja utilizando la tecnología apropiada.
- Establecer las relaciones entre tasa interna de retorno y rentabilidad verdadera en un proyecto de inversión.
- Determinar cuándo el flujo de caja de un proyecto tiene una o varias tasas internas de retorno, y calcularlas.
- Determinar e interpretar la tasa de rentabilidad verdadera (TVR) de un proyecto de inversión.
- Calcular e interpretar el índice B/C en un proyecto de inversión y su relación con otros índices como el VPN y la TIR.

9.1 Introducción

Uno de los índices de evaluación financiera de proyectos de mayor uso es el que se conoce con el nombre de **tasa interna de retorno (TIR)**. Dada su importancia en la selección de alternativas, se ha considerado conveniente dedicarle este capítulo para hacer una breve exposición de lo que es la tasa, los métodos de calcularla y algunas aplicaciones.

Aprovechando uno de los métodos para calcular la tasa interna de retorno, se aplicará también para el cálculo de la tasa de incremento en un gradiente geométrico y para el tiempo, o número de períodos y pagos, en un gradiente aritmético, y de esta forma quedarán resueltas todas las incógnitas que se presentan en matemáticas financieras, como son **P, F, A, G, n, k, i**, entre otras.

Sin embargo, debe advertirse que el tratamiento que en este capítulo se hace de la tasa de retorno es introductorio, pues el estudio a fondo de esta tasa es materia propia de un curso de evaluación financiera de proyectos.

9.2 La tasa interna de retorno

Dada la importancia de la tasa interna de retorno en la práctica de la evaluación de proyectos, aquí se ampliarán algunos conceptos ya vistos en matemáticas financieras.

Hay varios conceptos relacionados con la TIR que se deben tener en cuenta, como son:

- Recordar que la tasa interna de retorno es la **tasa de interés que ganan o devengan los dineros que permanecen invertidos en el proyecto**. Esto quiere decir que la **tasa de retorno** (o TIR) no siempre representa el rendimiento sobre la inversión inicial, sino sobre la parte de la inversión no amortizada al comienzo de cada período.
- TIR como índice para evaluar inversiones**. Recordemos que cuando se evalúa por el método del VPN (valor presente neto), se necesita conocer una tasa de interés, o de descuento, para todo el tiempo del proyecto. Esta situación no se da en todos los casos prácticos.

Cuando se evalúa por el método de la TIR hay necesidad de hacer referencia a la llamada **tasa de oportunidad** de decisión, para poder afirmar que "este proyecto se debe emprender". Para un mejor resultado, se debe unificar la tasa de oportunidad de quien evalúa con la de quien decide.

- Desde el punto de vista puramente matemático, la tasa interna de retorno del flujo de caja de un proyecto es aquella tasa que equilibra el valor presente de los ingresos con el valor presente de los egresos; o, lo que es lo mismo, es aquella que anula el valor presente neto, es decir, aquella que hace:

$$VPN = 0$$

Para su cálculo, lo más aconsejable es el uso de calculadoras programables o de paquetes o módulos financieros apropiados y la ayuda de la computadora.

Sin embargo, para casos de flujos de caja sencillos se utiliza el método manual de tanteo e interpolación lineal.

EJEMPLO 9.1

Si invertimos hoy \$ 2 millones en un proyecto por espacio de dos años y obtenemos al final de este tiempo \$ 3.699.200, calcular la TIR para esta inversión.

Solución

Con base en el diagrama de flujo de caja correspondiente se tiene:

$$3.699.200 = 2.000.000(1 + i)^2$$

$$\therefore i = 36\% \text{ anual}$$

Esto quiere decir que la TIR es del 36% anual, y en este caso representa la rentabilidad de la inversión, debido a que cada año se carga la tasa del 36% anual sobre la inversión inicial y sobre los intereses correspondientes.

Sin embargo, si la inversión anterior genera un ingreso al cabo de un año por el valor de \$ 1.500.000 y, al cabo de dos años, de \$ 1.659.200, podemos anticipar que la TIR para este proyecto es del 36% anual, porque el valor presente neto con esta tasa es nulo.

Veamos ahora que esta tasa no representa la rentabilidad sobre la inversión inicial. En efecto, si hoy invertimos \$ 2 millones, el proyecto nos estará debiendo al cabo de un año:

$$\$ 2.000.000(1,36) = 2.720.000$$

Pero en ese momento el proyecto nos abona \$ 1.500.000, y queda un saldo de \$ 1.220.000. Sobre este saldo aplicamos la tasa por un año para darnos un valor de:

$$1.220.000(1,36) = \$ 1.659.200$$

Y en esa fecha el proyecto nos abona esta suma y queda así un saldo nulo.

En este caso, la tasa del 36% anual se aplica sobre saldos o dineros no recuperados y no siempre sobre la inversión inicial, lo que nos indica que esta tasa no estará midiendo la rentabilidad real del proyecto ni la de la inversión inicial.

9.3 Cálculo de la TIR

En la actualidad, y gracias al avance de la tecnología computacional, el medio más adecuado para calcular la TIR de un proyecto de inversión es utilizar desde una calculadora financiera hasta una hoja electrónica o programas especiales de financieras y evaluación de proyectos en la computadora.

Sin embargo, vale la pena exponer y tener en cuenta otro método menos técnico y más manual para el cálculo de la TIR, que además lo podemos utilizar para calcular otras variables como el valor del $k\%$ en el gradiente geométrico y el n en el gradiente aritmético. Este método se conoce con el nombre de **tanteo e interpolación**, o **tanteo y error**.

La forma general de este método es la siguiente: supongamos un flujo de caja durante m períodos, en el cual conocemos tanto los ingresos como los egresos en los tiempos correspondientes, y sea i la tasa interna de retorno de este flujo de caja y que corresponde a nuestra incógnita. Aplicando la definición 9.2, obtenemos como ecuación básica la siguiente:

$$VP(I) - VP(E) = 0$$

Donde el miembro de la izquierda depende solamente de la variable i ; denotamos esta parte por $R(i)$. El objetivo es hallar uno o varios valores de i , tal que $R(i) = 0$; para esto tomamos un valor arbitrario de la variable: sea i_1 , y calculamos $R(i_1)$; este resultado será un valor positivo o negativo: sea i_2 , y calculamos $R(i_2)$; este valor de nuevo será positivo o negativo, pero ya nos indicará si debemos aumentar o disminuir el valor de la tasa. Continuando este procedimiento hasta encontrar dos valores de las variables i_p e i_n no muy distantes, tales que $R(i_p) > 0$ y $R(i_n) < 0$. Interpolando entre estos dos valores obtendremos una tasa lo más aproximada posible a la tasa deseada.

Cuando se utiliza una computadora para calcular la TIR, obviamente el tiempo es mínimo y el resultado más cercano al real, pero en caso de no disponer de la computadora el método anterior nos permitirá obtener una TIR bastante confiable.

EJEMPLO 9.2

Usted invierte hoy en un negocio \$ 3.500.000 y además deberá reinvertir la suma de \$ 800.000 al cabo de tres meses. Este negocio le reportará unas utilidades trimestrales de \$ 400.000 durante tres años, que recibirá los primeros seis meses después de la iniciación del negocio. Además, el negocio se podrá vender al final de este tiempo en \$ 2.800.000. Hallar la TIR correspondiente a este proyecto.

Solución

El diagrama de flujo de caja, en el que los períodos son trimestrales, es el siguiente:

Sea i la tasa interna de retorno trimestral correspondiente al flujo de caja anterior. Aplicando la ecuación básica de $VPN = 0$, tenemos:

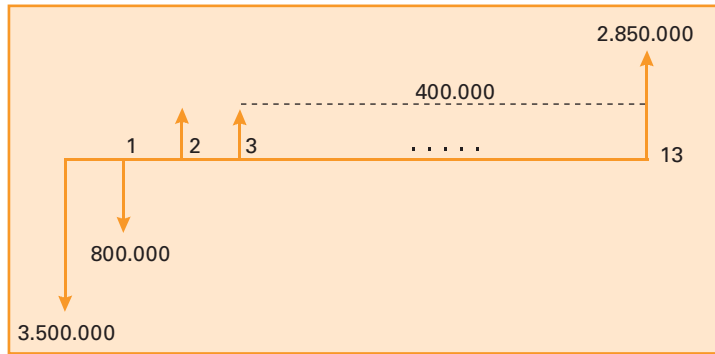


FIGURA 9.1

$$R(i) = 400.000(P/A, i\%, 12)(1 + i)^{-1} + 2.850.000(1 + i)^{-13} - 800.000(1 + i)^{-1} - 3.500.000 = 0$$

Si $i_1 = 6\%$, entonces $R(6\%) = 245.188,92$

Si $i_2 = 5\%$, entonces $R(5\%) = 625.987,9$

Si $i_3 = 7\%$, entonces $R(7\%) = -95.786,35$

Tomando las tasas del 6% y del 7% y sus correspondientes valores en $R(i)$ e interpolando entre ellos, se llega a que $i = 6,719\%$ trimestral. Esta tasa hace que VPN sea muy cercano a 0; por tanto, se toma como la TIR del proyecto del negocio.

El estudiante deberá calcular la TIR del flujo de caja del ejemplo 9.2 en una calculadora financiera o en una computadora, con el fin de observar las ventajas y exactitud en la tasa cuando se hace uso de esta tecnología.

Cuando necesitamos aplicar el método descrito anteriormente y utilizado en el ejemplo 9.2, podemos simplificar el trabajo, y evitamos la interpolación lineal utilizando la fórmula de Gittinger, que es la siguiente:

$$TIR = i_n + (i_p - i_n) \left[\frac{|R(i_n)|}{R(i_p) + |R(i_n)|} \right] \tag{9-1}$$

o su equivalente:

$$TIR = i_p + (i_n - i_p) \left[\frac{|R(i_p)|}{R(i_p) + |R(i_n)|} \right] \tag{9-2}$$

en las cuales:

TIR: tasa interna de retorno

i_p : tasa que hace $R(i_p) > 0$

i_n : tasa que hace $R(i_n) < 0$

$$R(i) = VP(I) - VP(E)$$

En efecto, si en el ejemplo 9.2 aplicamos la fórmula (9-1), tenemos:

$i_p = 6\%$; $i_n = 7\%$; $R(i_p) = 245.188,92$; $R(i_n) = -95.786,35$; y así:

$$\begin{aligned} TIR &= 0,07 + (0,06 - 0,07) \left[\frac{|- 95.786,35|}{245.188,92 + |- 95.786,35|} \right] \\ &= 0,07 \quad (-1,01) \left[\frac{95.786,35}{340.975,27} \right] = 0,06719 = 6,71\% \text{ trimestral} \end{aligned}$$

Obteniéndose el mismo valor hallado en el ejemplo 9.2.

El estudiante deberá resolver el ejemplo 9.2 utilizando la fórmula (9-2).

Como se anotó al principio de esta sección, el método utilizado anteriormente también nos permite calcular otras variables financieras, como el número de pagos en un gradiente aritmético y la tasa de incremento en un gradiente geométrico, como veremos en los ejemplos siguientes:

EJEMPLO 9.3

Una deuda de hoy por el valor de \$ 1.500.000 deberá cancelarse con cuotas mensuales que aumenten cada mes en \$ 10.000. Si la primera cuota, que es de \$ 80.000, se paga al cabo de un mes y la tasa de interés es del 3% mensual, hallar el número de cuotas.

Solución

El diagrama de flujo de caja para este ejemplo corresponde al de un gradiente aritmético creciente donde:

$$P = \$ 1.500.000; A = 580.000; G = \$ 10.000; i = 3\% \text{ mensual}; n = ?$$

Al igual que en el ejemplo 9.2, aquí planteamos una ecuación que exprese el valor presente neto igual a 0:

$$80.000(P/A, 3\%, n) + 10.000(P/G, 3\%, n) - 1.500.000 = 0$$

Llamando $R(n)$ al miembro de la izquierda y aplicando el mismo procedimiento anterior, tenemos, después de algunos ensayos:

$$\text{Si } n_1 = 13, \text{ entonces } R(13) = -55.800$$

$$\text{Si } n_2 = 14, \text{ entonces } R(14) = 83.827$$

En este caso no hay necesidad de interpolar, porque la solución es que la deuda se podrá pagar con 13 o con 14 cuotas mensuales.

El estudiante deberá calcular la última cuota para cada una de las dos opciones anteriores.

EJEMPLO 9.4

Financiar \$ 2 millones a tres años con cuotas mensuales que aumenten en un porcentaje constante, sabiendo que la primera cuota al cabo de un mes será de \$ 50.000 y la tasa de interés del 2,5% mensual.

Solución

El diagrama de flujo de caja para este ejemplo corresponde al de un gradiente geométrico creciente donde:

$$P = \$ 2.000.000; A = \$ 50.000; n = 36 \text{ cuotas}; i = 2,5\% \text{ mensual}; k = ?$$

De nuevo, a partir del método planteado anteriormente, tenemos:

$$\frac{50.000}{0,025 - k} \left[1 - \left(\frac{1+k}{1,025} \right)^{36} \right] - 2.000.000 = 0$$

Llamando $R(k)$ al miembro de la izquierda y después de algunos cálculos, llegamos a:

$$\text{Si } k_1 = 3,2\%, \text{ entonces } R(3,2\%) = -16.827$$

$$\text{Si } k_2 = 3,3\%, \text{ entonces } R(3,3\%) = 18.608$$

Interpolando o aplicando cualquiera de las fórmulas $-(9-1)$ o $(9-2)$ llegamos a $k = 3,248\%$, y este será el incremento mensual en las cuotas.

9.4 Aplicaciones de la TIR en la selección de alternativas

La tasa interna de retorno es otro de los índices que se utilizan con bastante frecuencia en la evaluación de alternativas de inversión, hasta el punto de que algunas clases de proyectos no son tomadas en cuenta si no tienen calculada la tasa interna de retorno. Esto ocurre con los proyectos que requieren financiación de algunas entidades semifinancieras.

En la mayor parte de la bibliografía de evaluación de proyectos de inversión encontramos el siguiente criterio para la aplicación de la TIR en la selección de alternativas:

Supongamos que i_0 sea la tasa de oportunidad del inversionista; dado el flujo de caja de su proyecto y calculada la tasa interna de retorno tendremos:

Si $TIR > i_0$, el proyecto se acepta

Si $TIR < i_0$, el proyecto se rechaza

Si $TIR = i_0$ es indiferente aceptarlo o rechazarlo

Sin embargo, al igual que con los índices anteriores, aquí se presentan los casos en los que hay necesidad de tomar una decisión contraria a la correspondiente según la TIR.

EJEMPLO 9.5

Una persona invierte en un proyecto \$ 2 millones y recibe unas utilidades trimestrales de \$ 603.842 durante un año. Si la tasa de oportunidad del inversionista es del 7,5% trimestral, determinar, a partir de la tasa interna de retorno, si debe llevar a cabo o no el proyecto.

Solución

El estudiante deberá hacer el diagrama de flujo de caja.

Calculando la TIR para este proyecto llegamos al 8% trimestral, y como $8\% > 7,5\%$, el proyecto se deberá aceptar.

Sin embargo, supongamos que el inversionista tiene como objetivo en sus inversiones ganar, en pesos de hoy, por lo menos el 10% de lo invertido. Para nuestro caso tenemos que $VPN = \$ 22.464$ a la tasa de oportunidad, y este valor solo corresponde al 1,12% de lo invertido, de tal manera que este proyecto no le conviene al inversionista.

Como puede observarse a partir del ejemplo anterior, el criterio de la TIR, al igual que el de otros vistos, no pueden aplicarse en forma absoluta, sino que la decisión final dependerá no solamente del valor de los índices de evaluación sino también de los objetivos que se haya fijado el inversionista.

Otra aplicación se presenta a continuación: el funcionamiento y rentabilidad de uno de los papeles financieros existentes en el mercado, el de las **cédulas de inversión**. Estas cédulas sirven para solucionar el problema de financiamiento de la vivienda usada. Son títulos valores a la orden con un plazo de redención de 10 años y por un monto hasta del 70% del valor del inmueble.

Los rendimientos son variables: el 24% nominal capitalizable trimestralmente, o sea, el 26,24% efectivo anual para el primer año; el 26% nominal trimestral, esto es, el 28,64% efectivo anual para el segundo año; y el 28% nominal trimestral, es decir, el 31,08% efectivo anual del tercer año en adelante.

El pago de los rendimientos se hace de la siguiente manera: el 3% mensual vencido sobre el valor actualizado de la cédula; además, una valorización mensual del 0,96% para el primer año, del 1,12% para el segundo y del 1,28% del tercer año en adelante. Esta valorización es acumulativa al valor de la cédula.

El reintegro del capital se hace mediante ocho pagos iguales cada uno del 12,5% del valor nominal inicial actualizado, a partir del final del tercer año.

Como ya se anotó, estas cédulas son títulos valores a la orden y, por tanto, se pueden negociar con algún descuento por medio de corredores de bolsa, de inversionistas o de deudores del banco que deseen pagar cuotas de vivienda usando estas cédulas.

Tomemos como ejemplo el caso de un inversionista que adquiere hoy cédulas en la bolsa por un valor nominal de \$ 500.000 al 80% y que este sea el primer año de las cédulas; además, supongamos que las conserva en su poder durante un año al final del cual las vende al 90%. Hallar la tasa interna de retorno de esta inversión.

En primer lugar, veamos cuál es el flujo de caja de la inversión:

Valor real hoy de las cédulas: \$ 500.000(0,8) = \$ 400.000

Ingreso al final del primer trimestre: \$ 500.000(1,0096)³(0,03) = \$ 15.436

Ingreso al final del segundo trimestre: \$ 514.538(1,0096)³(0,03) = \$ 15.885

y así sucesivamente. Al final del año se tiene un ingreso adicional correspondiente al valor de venta de las cédulas; este es de:

\$ 560.740,6(0,9) = 504.666,5

Por tanto, el diagrama de flujo de caja es el siguiente:

Dado que la serie de ingresos trimestrales constituye un gradiente geométrico donde $k = 2,91\%$, la ecuación básica para el cálculo de la TIR es:

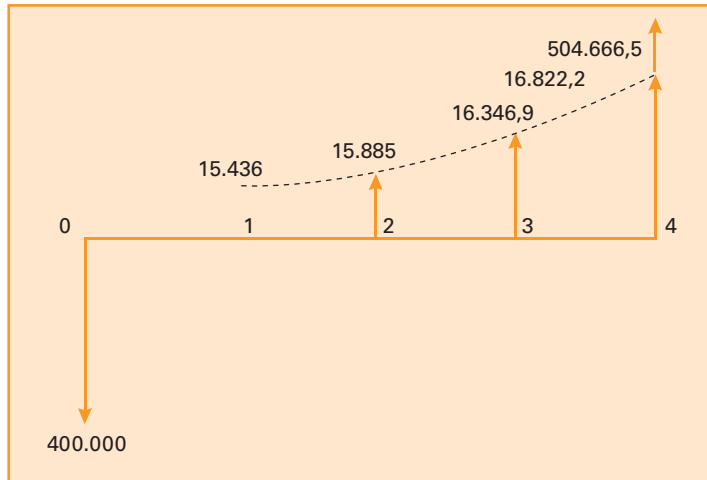


FIGURA 9.2

$$504.666,5(1+i)^{-4} + \frac{15.436}{i - 0,0291} \left[1 - \left(\frac{1,0291}{1+i} \right)^4 \right] - 400.000 = 0$$

Utilizando el método de tanteo visto al principio de este capítulo, llegamos a que la tasa interna de retorno es de $i = 9,68\%$ trimestral, o sea, una TIR del 44,71% efectiva anual.

Debe tomarse en cuenta que la tasa anual anterior es solamente la TIR del proyecto de la inversión y no representa la verdadera rentabilidad de este, debido a que se tienen unos ingresos parciales durante el año. La tasa que sí representa la rentabilidad del proyecto se conoce con el nombre de **tasa de rentabilidad verdadera (TRV)**, y se estudiará a continuación.

9.5 Tasa de rentabilidad verdadera

Uno de los mayores errores que se comete cuando se evalúan alternativas de inversión es confundir la tasa interna de retorno con la rentabilidad del proyecto o alternativa. Sucede que en algunos casos estas dos tasas coinciden y otras veces no, como veremos en los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 9.6

Se invierten hoy \$ 15 millones en un proyecto que generará un ingreso de \$ 36.905.625 al cabo de tres años. Determinar la TIR para esta inversión.

Solución

El diagrama de flujo de caja de este proyecto es:

Por cualquier método que calculemos la tasa interna de retorno, obtengamos que TIR = 35% anual.

En este caso, el 35% anual corresponde a la TIR del proyecto y es también su rentabilidad.

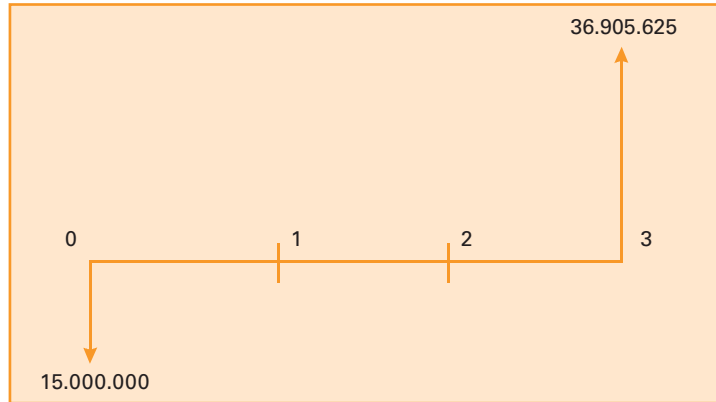


FIGURA 9.3

EJEMPLO 9.7

Supongamos un proyecto en el que se invierten hoy \$ 15 millones y que generará unos ingresos netos de \$ 10 millones en un año, \$ 16 millones en dos años y \$ 10.905.625 en tres años. Determinar la TIR de este proyecto.

Solución

El diagrama de flujo de caja del proyecto es el siguiente:

Aun cuando la suma de los ingresos es igual al ingreso del proyecto del ejemplo 9.6 y la inversión es la misma en ambos casos, sabemos que no son equivalentes. Para nuestro ejemplo, por cualquier sistema que calculemos la TIR llegamos a que su valor es del 60,98% anual aproximadamente. Así que podemos concluir que esta es la TIR del proyecto, pero que en este caso no representa la rentabilidad de la inversión y, por tanto, del proyecto, puesto que esta tasa se aplica cada año solamente al dinero que aún está invertido en el proyecto en ese año.

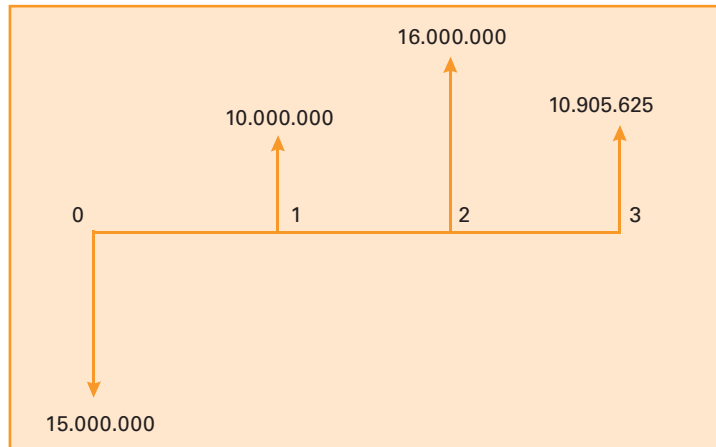


FIGURA 9.4

Ahora bien: la pregunta que nos estaremos haciendo es: ¿Y cuál es la rentabilidad de este proyecto? Para calcularla debemos tener en cuenta la tasa de oportunidad del inversionista, que para nuestro ejemplo la suponemos del 33% anual. Entonces, como el proyecto genera algunos beneficios cada año, su dueño los reinvertirá a su tasa de oportunidad, de tal manera que por este concepto tendrá, al cabo de los tres años, un total acumulado de:

$$10.000.000(1,33)^2 + 16.000.000(1,33) + 10.905.625 = \$ 49.874.625$$

Ante lo cual el inversionista hará la siguiente reflexión: "Por haber invertido hace tres años la suma de \$ 15 millones, hoy tengo la suma de \$ 49.874.625". Y la pregunta es: ¿Cuál es la tasa que convierte a esa inversión en la suma que se tiene hoy? La respuesta es la solución de la ecuación:

$$15.000.000(1 + i)^3 = 49.874.625$$

Es decir, $i = 49,255\%$ anual.

Esta tasa del 49,255% anual es la que se conoce como **tasa de rentabilidad verdadera (TRV)** del proyecto del ejemplo 9.7, cuando la tasa de oportunidad del inversionista sea del 33% anual; y es la tasa que mide la rentabilidad de la inversión y, por tanto, del proyecto.

Resumiendo, en el proyecto de nuestro ejemplo 9.7 la TIR es del 60,98% anual, pero su rentabilidad es del 49,255% anual. Con este ejemplo queda en evidencia la diferencia que puede haber entre TIR y TRV; sin embargo, si miramos el ejemplo 9.6 vemos que en él TIR y TRV son las mismas e iguales al 35% anual. Como conclusión podemos afirmar que la TIR unas veces mide la rentabilidad de una inversión y otras veces no, y que en cualquier caso debemos calcular siempre la tasa de rentabilidad verdadera del proyecto.

Existen tres nociones básicas sobre rentabilidad, que el evaluador debe tener muy claras para no incurrir en los errores que con frecuencia se cometen en su cálculo. Estas nociones son:

- i) La TIR de un proyecto es una característica propia de ese proyecto, independiente de las condiciones de quien evalúa.
- ii) La **tasa de oportunidad** del evaluador es una característica propia del evaluador, independiente hasta el momento de la evaluación del proyecto. Es una tasa netamente personal y no depende del proyecto en sí.
- iii) La **rentabilidad del proyecto** para un evaluador es la que buscan los decisores. Esta resulta de la interacción entre la TIR y la TO (tasa de oportunidad del decisor).
- iv) La **TRV** de un proyecto es aquella tasa que combina el flujo de caja del proyecto con la tasa de oportunidad del evaluador o del decisor, para medir la rentabilidad verdadera de la inversión que se realiza en el proyecto. Básicamente, tiene que ver con el efecto debido a la inversión o reinversión de las ganancias periódicas que genera el proyecto.

EJEMPLO 9.8

Supongamos que disponemos en este momento de 10 millones de pesos para invertir. Una posibilidad es crear una empresa que, según los estudios de mercadeo, se estima que dará unas utilidades anuales de \$ 2.549.000 durante 10 años con un valor de salvamento nulo al final de este tiempo. Nosotros deseamos saber cuál es la rentabilidad del proyecto de crear esta empresa. Por otra parte, también tenemos la oportunidad de invertir los 10 millones de pesos en una institución bancaria que nos ofrece una tasa de interés del 21% anual. Nuestra TO es del 20% anual.

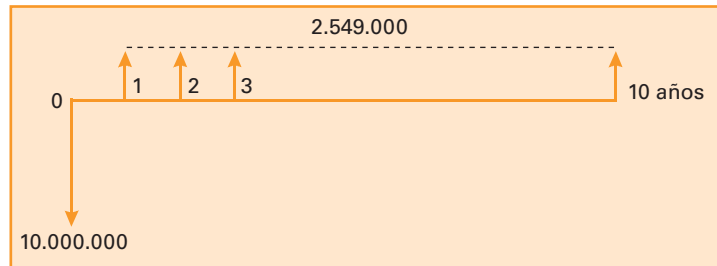


FIGURA 9.5

Según los datos del proyecto de la empresa, se tiene el siguiente diagrama:

De aquí obtenemos que la ecuación básica para hallar la TIR es:

$$2.549.000(P/A, i\%, 10) - 10.000.000 = 0$$

Y se encuentra que la tasa interna de rentabilidad es del 22% anual. Hasta aquí, si la TIR fuera un método de selección, escogeríamos el proyecto de la empresa.

De aquí resulta la pregunta acerca de si es cierto que estamos ganando el 22% de interés anual durante los 10 años que dura el proyecto. La respuesta puede ser sí o no.

En efecto, nosotros obtenemos un rendimiento del 22% anual en el proyecto de la empresa durante 10 años, pero esta rentabilidad se aplica solo al dinero que se mantiene invertido en el proyecto durante cada uno de los años que este dura.

Es incorrecto afirmar que el proyecto represente la oportunidad de invertir 10 millones de pesos durante 10 años al 22% anual, porque el proyecto devuelve cada año parte de la inversión inicial.

Sin embargo, queremos saber cuál es la **verdadera rentabilidad** en este proyecto. Esta respuesta se puede dar al considerar tanto el proyecto de crear la empresa como la reinversión de los \$ 2.529.000 que libera el proyecto a la **tasa de oportunidad**, que en este caso suponemos del 20% anual.

Concretando la pregunta, esta es: ¿Cuál es el rendimiento que obtenemos de los 10 millones de pesos durante los 10 años que dura el proyecto?

Para responder a esta pregunta debemos hallar la cantidad total de dinero que se puede acumular al cabo de 10 años al invertir los 10 millones de pesos en el proyecto de la empresa, y reinvertir el dinero allí liberado en otra institución a la tasa de oportunidad del 20% anual.

Al final de cada año se liberan \$ 2.549.000, que se reinvierten al 20%, de tal manera que al cabo de los 10 años se tendrá:

$$F = 2.549.000(F/A, 20\%, 10) = \$ 66.168.681$$

En consecuencia, como resultado de la inversión de los 10 millones de pesos con el proyecto de la empresa y de la reinversión de los dineros liberados durante los 10 años, se tiene:

O sea que:

$$66.168.681 = 10.000.000(1 + i)^{10}$$

$$\therefore i = 20,8\% \text{ anual}$$

En este momento podemos dar una respuesta concreta diciendo que:

1. La verdadera rentabilidad del proyecto de la empresa es aquella que combina las características propias del proyecto de la empresa (TIR) con las características propias de los inversionistas (tasa de interés de oportunidad, TIO), y es del 20,8% anual sobre la inversión inicial.
2. La rentabilidad propia del proyecto es del 22% anual, es decir, la TIR, índice que no depende de quién esté evaluando el proyecto.
3. La TIO es el 20% anual, es una característica del inversionista y no depende del proyecto.
4. En conclusión, el mejor proyecto o alternativa es invertir los \$10 millones en la institución bancaria al 21% anual.

Lo anterior no implica que siempre se tengan diferencias entre TIR, TIO y verdadera rentabilidad, ya que en algunos casos, debido a las cantidades que intervienen en el flujo de caja del proyecto, algunas de estas tasas –o todas– pueden coincidir. Con frecuencia se confunden estas tres tasas o mediciones, que tienen un significado y utilización diferentes. Esto ocurre porque la verdadera rentabilidad del proyecto, la tasa de rentabilidad verdadera (TRV), es igual a la tasa interna de rentabilidad (TIR). Esto sucede cuando el proyecto no devuelve o libera dinero en su tiempo de estudio o funcionamiento, y por no dar oportunidad de reinversión; o también porque la TIR es muy cercana a la TIO, como sucede en el ejemplo anterior.

Sin embargo, es de advertir que la tasa de rentabilidad verdadera aún no representa la ganancia real en una inversión, puesto que ella contiene la inflación. Entonces, si queremos averiguar cuál ha sido la tasa real –o libre de inflación– obtenida en una determinada inversión, debemos utilizar una expresión similar a la usada en el capítulo 3 para hallar la tasa deflactada. Por ejemplo, si la TRV de una inversión fue del 29% anual, pero la inflación fue del 24% anual, entonces la tasa real obtenida está dada por:

$$i_r = \frac{0,29 - 0,024}{1,24} = 0,0403$$

Es decir, la tasa real fue del 4,03% anual y no del 5% (29% – 24%), como podría pensarse.

Veamos ahora algunos casos de toma de decisiones cuando debe tenerse en cuenta no solamente la tasa interna de retorno, sino que esta se encuentra enfrentada, como índice de evaluación o de selección de alternativas, a otros índices, como el valor presente neto y la tasa de rentabilidad verdadera.

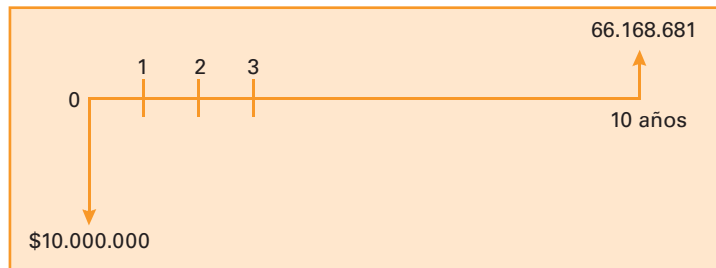


FIGURA 9.6

EJEMPLO 9.9

Supongamos que tenemos dos alternativas de inversión, A y B, con los siguientes flujos de caja netos para cada caso, sabiendo además que la tasa de descuento que utilizará el inversionista en estos casos es del 20% EA:

Año	A	B
0	\$ -5.000.000	\$ -5.000.000
1	0	\$ 3.500
2	\$ 7.800.000	\$ 3.500.000

Determinar cuál de las dos alternativas es la más rentable.

Solución

Al calcular la tasa interna de retorno de cada alternativa, llegamos a:

$TIR(A) = 24,9\%$ anual y $TIR(B) = 25,69\%$ anual. Si solamente tomamos este índice como elemento para seleccionar, entonces escogeríamos la alternativa B, por tener la mayor tasa interna de retorno, y además porque es mayor que la tasa de descuento.

Si calculamos el valor presente neto de cada alternativa, tenemos:

$$VPN(A) = 416.667 \text{ y } VPN(B) = 347.222$$

Según este índice escogeríamos la alternativa A, por tener el mayor valor presente neto.

Pero como estos dos índices –TIR y VPN– no miden el mismo concepto, pasamos a determinar cuál es la verdadera rentabilidad de cada una de las alternativas, y debemos calcular la TRV para cada caso:

$$TRV(A) = 24,9\% \text{ anual, y } TRV(B) = 24,1\% \text{ anual}$$

Y aquí volvemos a determinar que la mejor alternativa es la A. Escogemos la alternativa A porque tanto VPN como TRV nos indican que esta alternativa es más rentable que la alternativa B.

Otro caso importante es aquel en el que el flujo de caja de un proyecto o alternativa tenga varias tasas internas de retorno, y se corre riesgo al tomar la decisión considerando solamente una de estas tasas.

9.5.1 CONTRADICCIONES ENTRE LOS CRITERIOS DE VPN Y TIR

En ocasiones se presentan contradicciones entre los métodos de selección de VPN y TIR, sobre todo cuando se pretende utilizar la TIR como método de selección de alternativas.

Además, debe tenerse en cuenta que el índice de la TIR presenta una limitante, y es que no tiene sentido aplicarlo cuando la tasa de interés no es constante, lo que corresponde a la mayoría de los casos de la realidad.

Otra limitante es la de que al resolver la ecuación

$$\sum_j I_j (1 + i)^{-j} = \sum_j C_j (1 + i)^{-j}$$

donde I_j y C_j son ingreso y costo o egreso en el período j , para obtener $i^* = TIR$, pueden presentarse múltiples raíces, o sea que para un mismo proyecto puede haber varias TIR, como se verá en 9.5.3.

9.5.2 RENTABILIDAD INCREMENTAL

Es una modificación al método de la TIR para hacer que esta sea una herramienta un poco más precisa para evaluar alternativas.

Se trata de considerar los beneficios producidos por la inversión incremental (A – B), o sea, por el incremento de la inversión, donde A y B representan dos proyectos, y la inversión en A es mayor que la inversión en B.

En este caso, si ambos producen beneficios al decisor, entonces al analizar la diferencia A – B se está estudiando en realidad la posibilidad de realizar o no la inversión extra, que implica llevar a cabo el proyecto A.

Veamos con un ejemplo la manera de calcular y aplicar la rentabilidad incremental.

EJEMPLO 9.10

Se tienen dos proyectos, A y B, con las siguientes características:

Proyecto	Inversión	Beneficios trimestrales	Vida útil trimestres	Valor de salvamento
A	\$ 1.000.000	\$ 162.800	10	0
B	\$ 2.000.000	\$ 311.600	10	0

Capital disponible: \$ 2.000.000

Realizando los cálculos adecuados, se encuentra que las tasas internas de retorno son:

TIR(A) = 10,01%

TIR(B) = 9%

Si la tasa de interés de oportunidad (TIO) es del 5% trimestral, entonces se justifican ambos proyectos.

Ahora bien: los valores presentes netos calculados al 5% son:

VPN(A) = \$ 257.100 para el proyecto A

VPN(B) = \$ 406.100 para el proyecto B

Según el criterio del VPN, la mejor alternativa es la B.

Si tratamos de utilizar, desde luego incorrectamente, el índice de la TIR, se encontrará contradicción con el VPN. En efecto, el índice de la TIR nos diría que el mejor proyecto es el A. Esta dificultad se puede obviar calculando la rentabilidad incremental de la inversión (B – A) y comparándola con el 5%.

A partir del ejemplo se tiene que:

Proyecto	Inversión	Beneficios trimestrales	Vida útil trimestres	Valor de salvamento
B – A	\$ 1.000.000	\$ 148.000	10	0

De aquí se obtiene que la tasa interna de rentabilidad incremental (TIR) (B – A) es:

TIR(B – A) = 7,9%

Como TIR(B – A) = 7,97% > TIO = 5%, entonces se debe aceptar la inversión incremental, o, lo que es lo mismo, se debe aceptar el proyecto B.

Si se calcula el VPN de B – A al 5%, el resultado será el mismo, ya que:

VPN(B – A) = 149.000

Por tanto, la inversión incremental es aceptable y se llega a la misma conclusión.

Con el ejemplo anterior podemos darnos cuenta de que con el índice de la TIR incremental se obtienen las mismas decisiones que con el VPN.

Cuando se tengan varios proyectos, para escoger el mejor el método anterior exige que se comparen por parejas, así el cálculo sea extenso.

9.5.3 MÚLTIPLES TASAS INTERNAS DE RETORNO

La TIR no es más que una raíz de un polinomio de grado n dado por la ecuación:

$$\sum_j VP(I_j) = \sum_j VP(C_j)$$

En términos matemáticos, se tiene que para cualquier polinomio con coeficientes reales puede ocurrir que:

- a) No exista raíz real del polinomio.
- b) Exista una sola raíz real para el polinomio.
- c) Existan múltiples raíces reales para el polinomio.

Para identificar la presencia de varias tasas internas de retorno en el problema se puede utilizar el criterio de Descartes para un polinomio de grado n . Este criterio dice: "El número de raíces reales positivas de un polinomio de grado n , con coeficientes reales, no es nunca mayor que el número de cambios de signo en la sucesión de coeficientes, o en caso de que el número de tales raíces sea menor, la diferencia será un número par".

EJEMPLO 9.11

Dados los proyectos A y B siguientes:

Año	Proyecto A (en miles de pesos)	Proyecto B (en miles de pesos)
0	-5.000	-15.000
1	1.000	2.000
2	1.500	8.000
3	2.000	-3.000
4	2.500	10.000

Se tiene que, para el proyecto A, la regla de los signos nos indica que solamente hay una raíz positiva, pues solo hay un cambio (de $-$ a $+$).

Para el proyecto B, la regla de los signos nos indica que hay como máximo tres raíces positivas, pues existen tres cambios (de $-$ a $+$, de $+$ a $-$, de $-$ a $+$), y si no son tres las raíces positivas entonces será 1, puesto que la diferencia $3 - 1 = 2$ es un número par.

PROBLEMAS CUANDO HAY MÚLTIPLES TASAS DE RENTABILIDAD

Si hay más de un cambio de signo en el flujo de caja, puede haber varias raíces.

A: hacer una importación de un cierto producto con el siguiente flujo de caja:

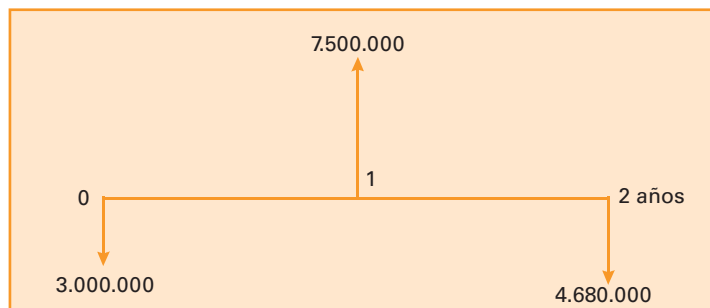


FIGURA 9.7

B: colocar el dinero en una corporación que ofrece el siguiente plan:

Se sabe que la TMAR de la empresa es del 24% anual. Desarrollando las ecuaciones correspondientes para hallar la TIR, se obtiene:

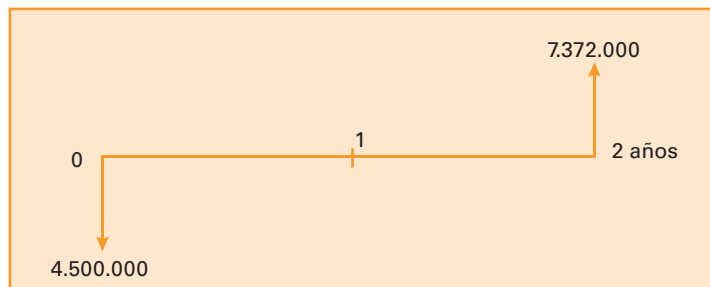


FIGURA 9.8

$$\begin{aligned} \text{TIR(A)} &= 20\% & \text{y} & & \text{TIR(B)} &= 28\% \\ \text{como } i_{op} &= \text{TIO} = 24\% & & > & \text{TIR(A)} \\ & & & & \text{TIR(B)} \\ \text{TIO} &= 24\% & & < & \end{aligned}$$

Se concluye que la opción A no es conveniente y, en cambio, la opción B sí lo es.

Sin embargo, alguien hace ver a la empresa que también $\text{TIR(A)} = 30\%$.

Según este resultado se aceptaría la propuesta A, pero ya había sido rechazada por el 20%. Entonces la empresa establece el cuadro siguiente:

i%	VP(A)	VP(B)
0	-180.000	2.872.800
10	-49.587	1.593.223
11	-49.636	1.483.930
15	-17.013	1.074.896
20	0	620.000
24	4.682	295.005
28	2.930	0
30	0	-137.396
35	-12.345	-454.568

Al calcular el $\text{VPN}(24\%)$, $A = 4.682$

$\text{VPN}(24\%)$, $B = 295.005$

Lo cual significa que B es mejor que A; sin embargo, se debe analizar más a fondo el proyecto A.

Es preciso presentar en un mismo plano las dos situaciones con base en los datos obtenidos en la tabla anterior.

El proyecto A libera \$ 7.500.000 al final del primer año, que se pueden reinvertir al 24% para convertirse al cabo de un año en \$ 9.300.000. No obstante, el proyecto A también requiere una inversión a los dos años, de tal manera que, en definitiva, se tiene para A:

Lo cual da una rentabilidad del 24,1%. Esto indica que las cifras 20% y 30% no tienen significado alguno en la verdadera rentabilidad del proyecto A, y que la verdadera rentabilidad es del 24,1% para el proyecto A.

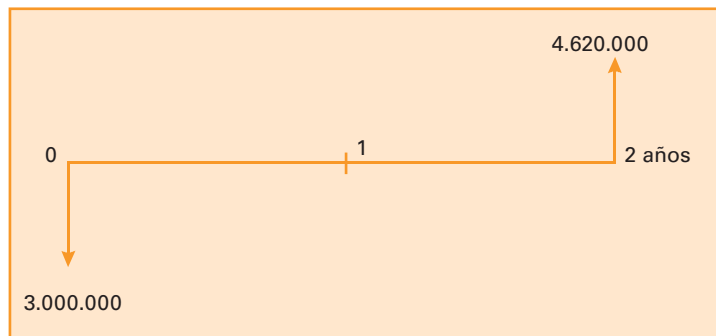


FIGURA 9.9

Luego, como conclusión, podemos afirmar que debemos guiarnos más por la verdadera rentabilidad del proyecto que por su tasa interna de retorno.

9.6 La relación beneficio/costo (B/C)

Otro índice para la evaluación de proyectos de inversión es el de la relación beneficio/costo, que también tiene en cuenta la variación del dinero respecto del tiempo. Corresponde al índice que se define como la relación entre los beneficios y los costos de un proyecto.

Los beneficios se definen como el valor presente de los flujos netos de caja cuando son positivos (e.d., cuando son ingresos I_t).

$$B = \sum_t I_t (1+i)^{-t}$$

Los costos se definen como el valor presente de los flujos netos de caja cuando son negativos (e.d., cuando son ingresos E_t).

$$C = \sum_t E_t (1+i)^{-t}$$

Aquí también se supone que todas las tasas de oportunidad son constantes por períodos durante la vida útil del proyecto.

EJEMPLO 9.12

Determinar la relación B/C para el proyecto cuyo diagrama de flujo de caja es el siguiente:

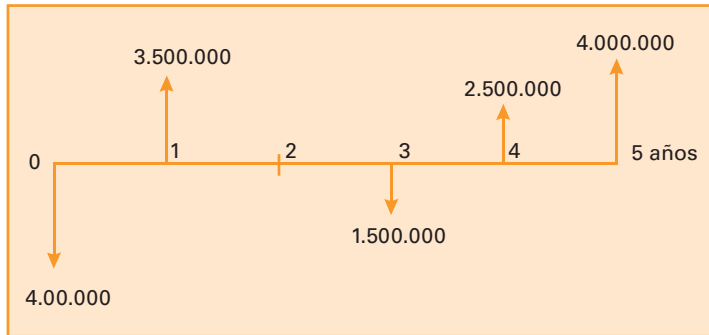


FIGURA 9.10

Sabiendo que la tasa de descuento es del 28% anual tanto para los beneficios como para los costos, se tiene entonces que:

$$B = 3.500.000(1,28)^{-1} + 2.500.000(1,28)^{-4} + 4.000.000(1,28)^{-5} = \$ 4.829.850$$

$$C = 4.000.000 + 1.500.000(1,28)^{-3} = \$ 4.715.255$$

La relación **beneficio/costo** estará dada por:

$$B/C = \frac{4.829.850}{4.715.255} = 1.0243$$

Dado un proyecto con su respectivo flujo de caja durante la vida útil y, además, una tasa de descuento, para aplicar el índice de evaluación de beneficio/costo se utiliza el siguiente criterio:

- i) Si $B/C > 1$, entonces el proyecto se justifica, es decir, se puede aceptar.
- ii) Si $B/C < 1$, entonces el proyecto se rechaza, es decir, no se debe llevar a cabo.
- iii) Si $B/C = 1$, se debe ser indiferente frente al proyecto, es decir, se puede o no aceptar. Como podemos ver, este criterio de B/C es muy similar al criterio del VPN, en el sentido de que un proyecto se acepta si el $VPN > 0$, o sea, si $VP(I) > VP(E)$, lo que equivale a decir que:

$$\frac{VP(I)}{VP(E)} > 1$$

y de la misma manera para los demás casos del VPN.

Sin embargo, al evaluar dos proyectos mediante los criterios de VPN y B/C no siempre los dos métodos conducen a la misma decisión.

Veamos enseguida estos casos.

EJEMPLO 9.13

Dados los proyectos A y B con sus respectivos diagramas de flujo de caja, seleccionar el mejor a partir de los criterios de VPN y B/C, sabiendo además que la tasa de descuento es del 29% anual.

a)

b)

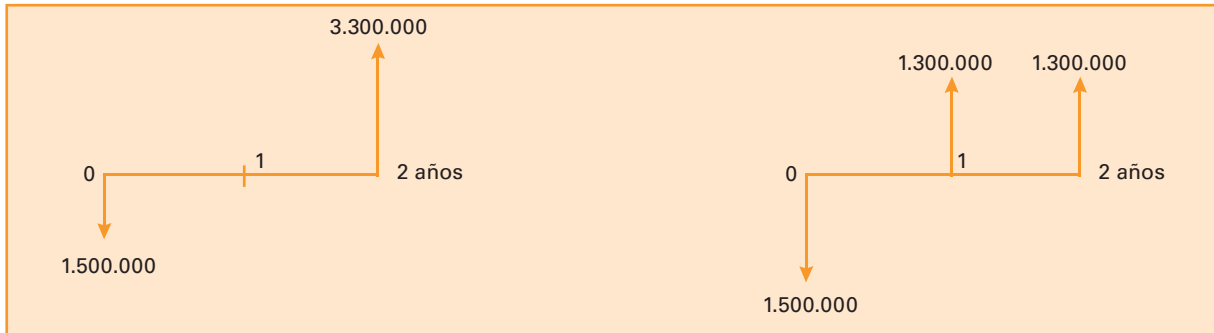


FIGURA 9.11

Según el criterio del VPN, se tiene que:

$$VPN(A) = \$ 483.054$$

$$VPN(B) = \$ 288.955$$

Y, por tanto, el mejor proyecto es A.

Según el criterio del B/C se tiene que:

$$(B/C)(A) = 1.322$$

$$(B/C)(B) = 1.192,6$$

Y, así, el mejor proyecto es A.

Como se puede observar, ambos criterios –el de VPN y el de B/C– conducen a la misma decisión, es decir, a seleccionar el proyecto A.

EJEMPLO 9.14

Dados los proyectos A y B siguientes, seleccionar el mejor desde el punto de vista financiero, teniendo en cuenta una tasa de oportunidad del 25% anual y utilizando los criterios de VPN y B/C.

a)

b)

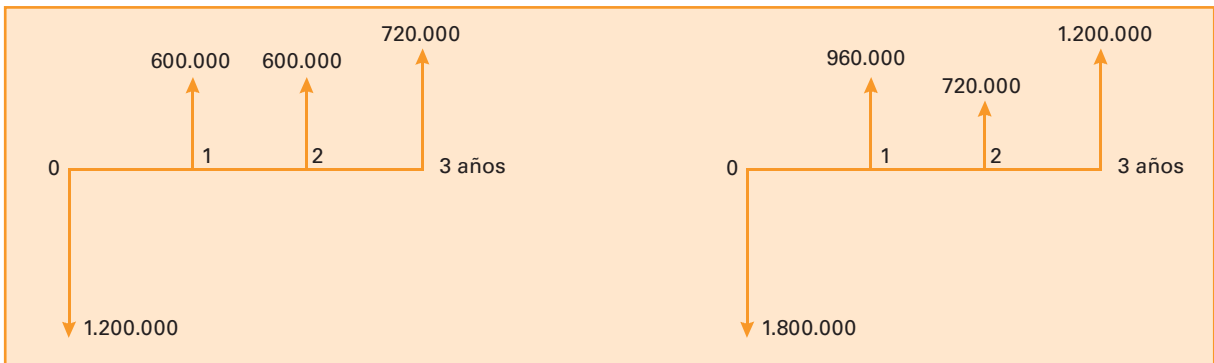


FIGURA 9.12

El criterio del VPN nos da los siguientes resultados:

$$VPN_{(A)} = \$ 32.640 \text{ y } VPN_{(B)} = \$ 43.200$$

Y según este criterio, se debe seleccionar el proyecto B, porque tiene un mayor VPN.

El criterio del B/C nos da los siguientes resultados:

$$(B/C)_A = 1.0272$$

$$(B/C)_B = 1.024$$

Y, según este criterio, se debe seleccionar el proyecto A por tener un mayor valor la relación B/C.

La pregunta que nos hacemos ahora es: ¿Cuál es la respuesta o elección correcta, dado que un índice nos da como mejor proyecto el A y el otro el proyecto B?

Una manera de resolver esta contradicción inicial entre los dos criterios consiste en analizar financieramente lo que implica emprender el proyecto que es el de mayor inversión inicial. En este caso debemos, como inversionistas, desembolsar \$ 600.000 más que en el proyecto A; además, recibimos \$ 360.000 más en B que en A, al cabo de un año; también al cabo de dos años, recibimos \$ 120.000 más en B que en A; y, por último, al cabo de tres años recibimos \$ 480.000 más en B que en A.

El problema es analizar estas diferencias de ingresos frente a la diferencia en la inversión inicial, y es lo que en evaluación de proyectos se conoce como el proyecto incremental, y que en nuestro caso se denota por $B - A$, que es la diferencia entre el proyecto de mayor inversión y el de menor inversión.

El flujo de caja de este proyecto, que en la práctica es un poco artificial, puesto que los únicos reales son A y B, es el siguiente:

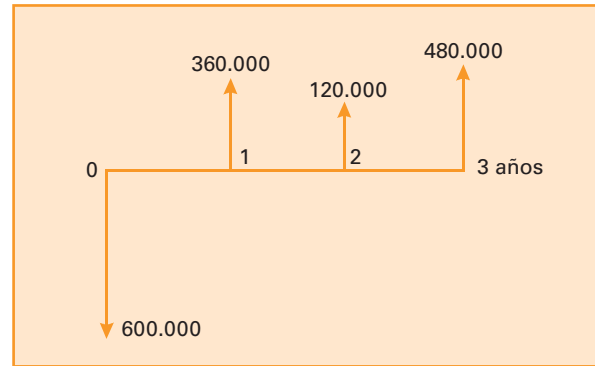


FIGURA 9.13

Analicemos la bondad financiera del proyecto representado en este flujo de caja, a partir de los mismos índices utilizados para A y B.

$$VPN(B - A) = \$ 10.560$$

y

$$(B/C)_{(B-A)} = 10.176$$

Según estos dos criterios, el proyecto $B - A$ es aceptable; esto quiere decir que financieramente es aconsejable la inversión de los \$ 600.000 de diferencia entre las inversiones originales, o sea que el proyecto original que se aconseja es el B, lo que coincide con la selección hecha por el método de VPN inicialmente.

Como ya se había mencionado, este análisis recibe el nombre de **relación de valor presente neto incremental** y de **beneficio/costo incremental**. Como en el caso anterior, donde el proyecto $B - A$ es aceptable, se dice que el proyecto B domina al proyecto A y se denota así: $B > A$. Esta relación de dominación entre proyectos se utiliza para ordenar un conjunto de proyectos y determinar la posición financiera de un proyecto respecto de los demás.

PROBLEMAS

- 1.1 Una residencia campestre evaluada hoy en \$ 3.800.000 se vende a crédito para ser pagada durante cuatro años con cuotas semestrales de \$ 525.000 cada una. ¿Qué tasa de interés nominal trimestral recibió el vendedor en esta operación financiera?
- 1.2 Un hospital recibió como donación una renta perpetua de \$ 500.000 anuales. Debido a las necesidades locativas actuales, las directivas del hospital decidieron sustituir dicha renta por \$ 2 millones hoy. ¿Cuál fue la tasa de interés adoptada para esta operación?
- 1.3 Un automóvil vale al contado \$ 1.200.000 y se vende financiado así: una cuota inicial del 40% del valor del precio al contado y el saldo se incrementa en el 20% y se divide por 12, lo que da el valor de las cuotas que deben cancelarse mensualmente durante un año. Hallar la tasa efectiva mensual cargada en esta financiación.
- 1.4 Una corporación de ahorro ofrece pagar el 29% nominal trimestral. Un ahorrador hace una serie de depósitos mensuales así: \$ 500, \$ 520, \$ 540 y así sucesivamente. Transcurridos tres años y medio de estar efectuándose estos depósitos, la corporación le devuelve al ahorrador la suma correspondiente al capital depositado, los intereses convenidos y una suma adicional de \$ 6.800. Hallar la TIR de esta inversión.
- 1.5 Un banco comercial concede un préstamo a uno de sus clientes por el valor de \$ 2 millones y le cobra un interés del 8% trimestral anticipado, y un plazo de un año para pagar la deuda. Los intereses los debe pagar el cliente al principio de cada trimestre, y la deuda debe ser cubierta en cuatro cuotas de \$ 500.000 por trimestre vencido. Cada vez que el banco recibe, ya sean los intereses o las cuotas de amortización de la deuda, invierte estas cantidades de dinero en otra empresa a un interés del 8,5% por trimestre vencido. Hallar la rentabilidad anual para el banco por esta operación al cabo de un año.
- 1.6 Un inversionista compró una casa por \$ 4 millones y la vendió cuatro años más tarde en \$ 7.300.000. Los gastos por reparaciones fueron de \$ 400.000 el primer año, \$ 300.000 el segundo y \$ 500.000 el cuarto. Hallar la tasa anual de retorno de esta inversión.
- 1.7 ¿Cuál hubiera sido la tasa de retorno del problema 9.6 si el inversionista vende la casa por el mismo precio, pero cinco años más tarde de la fecha de compra?
- 1.8 Un vehículo que tiene un valor al contado de \$ 18.500.000 puede adquirirse financiado así: una cuota inicial del 30% del valor del precio al contado y el resto a 36 meses con cuotas mensuales de \$ 808.550; la primera cuota debe pagarse en tres meses. Hallar la tasa de interés que se cobra por la financiación.
- 1.9 Se adquiere hoy un bono por \$ 200.000 y se conserva durante ocho años, al cabo de los cuales vence con un valor de \$ 250.000. Durante el período de los ocho años se reciben \$ 6.000 cada semestre. ¿Cuál es la tasa de rentabilidad de esta inversión?
- 1.10 La compañía de seguros Viva Feliz tiene el siguiente plan: la póliza se obtiene con una inversión inicial de \$ 735.000 y cuotas por trimestre anticipado de \$ 350.000 cada una y durante los cuatro primeros años. De ahí en adelante el fondo constituido por las cuotas anteriores produce un rendimiento y el asegurado no debe volver a pagar más cuotas. Si la compañía le devuelve al asegurado \$ 88 millones al final de 20 años, hallar la tasa de retorno para esta clase de inversión.

- 1.11** Un proyecto exige las siguientes inversiones: \$ 830.000 hoy, \$ 150.000 en tres meses, \$ 140.000 al cabo de seis meses, \$ 130.000 al cabo de nueve meses, y así sucesivamente durante la vida útil del proyecto, que es de tres años. Si al final de este tiempo se obtiene un ingreso total de \$ 2.500.000, hallar la tasa nominal trimestral del rendimiento del dinero en este proyecto.
- 1.12** Un señor solicita un préstamo de \$ 100.000 a una entidad crediticia y esta otorga el préstamo en las siguientes condiciones: tasa de interés del 2,5% mensual; período de reembolso de 20 meses; interés total de $20(0,025) 100.000 = \$ 50.000$; investigación y seguro de crédito de \$ 20.000; deuda total de $\$ 100.000 + \$ 50.000 + \$ 20.000 = \$ 170.000$; valor de cada cuota de $\$ 170.000/20 = \$ 8.500$ mensuales. ¿Cuál es la tasa de interés real mensual que el prestatario le paga a la entidad que le otorgó el préstamo?
- 1.13** Un estudiante universitario recibe un préstamo para poder adelantar sus estudios superiores de 10 semestres. El préstamo consiste en cuotas de \$ 950.000 al principio de cada semestre académico. El que garantiza el préstamo contempla una cláusula que exige que el estudiante amortice la deuda en 30 pagos mensuales iguales de \$ 418.500, empezando un año después de terminar los estudios. Hallar la tasa anual y mensual del préstamo.
- 1.14** Una empresa recibe hoy la suma de \$ 1 millón de pesos de una institución financiera y se compromete a pagar esta deuda durante dos años con cuotas mensuales iguales y una tasa del 3% mensual. La empresa obtiene ingresos mensuales suficientes para cubrir las cuotas a la institución y para realizar depósitos en una cuenta de ahorros, del modo que sigue: \$ 30.000, \$ 35.000, \$ 40.000 y así sucesivamente. Si la cuenta de ahorros paga un interés del 2,5% mensual, ¿en qué momento el saldo en la cuenta de ahorros será suficiente para pagar el saldo pendiente con la institución financiera?
- 1.15** Una corporación de ahorro le hace un préstamo a usted por \$ 1.800.000 y le concede 15 años para amortizar esta deuda con cuotas mensuales variables y con un interés del 2,5% mensual. Usted paga el primer mes una cuota de \$ 28.000, el segundo mes \$ 29.000, el tercer mes \$ 30.000 y así sucesivamente durante un año. A partir de esta fecha las cuotas deben reajustarse en una tasa constante cada mes. ¿Cuál debe ser la tasa de reajuste mensual para que la deuda quede saldada al final de los 15 años?
- 1.16** Una institución que capta dinero para inversión tiene entre sus planes el siguiente: por una serie de 10 depósitos por mes anticipado de \$ 22.000 cada uno que se hagan en la institución, esta se compromete a otorgar 24 pagos mensuales empezando 15 meses después de iniciada la inversión, de tal manera que cada pago sea igual a la cuarta parte del saldo existente al final del mes anterior. Si al hacer el último pago el saldo que queda es \$ 62.000, hallar el rendimiento del dinero en esta institución.
- 1.17** Resolver el problema 9.16 si el primer pago lo hace la institución un mes después de haber realizado el último depósito.
- 1.18** Un profesional está estudiando la posibilidad de hacer una donación a su universidad que consiste en que esta puede disponer de \$ 60.000, \$ 50.000, \$ 40.000 y \$ 30.000 al final del primer, segundo, tercer y cuarto trimestres respectivamente de cada año, para ayudar a otros estudiantes. El profesional debe efectuar hoy un depósito único de \$ 612.000 en una institución financiera, y la universidad deberá hacer allí los retiros de las cantidades respectivas, en las fechas correspondientes. ¿Qué tasa de interés nominal trimestral debe pagar la institución financiera para que la universidad pueda disponer de estas sumas todos los años a perpetuidad?

- 1.19** ¿Para qué tasa de interés trimestral el fondo anterior se agotará al cabo de 20 años?
- 1.20** Un proyecto de inversión consiste en invertir hoy \$ 1.200.000 y retirar cada mes la mitad de los intereses devengados en ese mes. Si al final de los dos años después de los retiros correspondientes se tiene un saldo de \$ 1.650.000, hallar la tasa interna de rentabilidad de este proyecto.
- 1.21** En el problema 9.20, suponer que en un año se hace un retiro adicional de \$ 60.000 y que el saldo al cabo de dos años es de \$ 1 millón. Hallar la tasa interna de rentabilidad.
- 1.22** Un almacén distribuidor de calculadoras hace una importación al principio de un año por un valor de \$ 7.500.000 en esta clase de máquinas. Las calculadoras se venden todas durante un año y los ingresos mensuales por este concepto son de \$ 1.125.000 el primer mes, y luego aumentan en \$ 120.000 cada mes. Hallar la tasa interna de retorno de este almacén.
- 1.23** En el problema 9.22, suponer que al final del quinto mes se hace una nueva inversión de \$ 2.600.000 y de ahí en adelante los ingresos mensuales aumentan en \$ 545.000. Hallar la tasa interna de retorno para el almacén en esta nueva situación.
- 1.24** Se tiene hoy una deuda de \$ 850.000 y se debe pagar en cuotas mensuales así: \$ 40.000 la primera, \$ 55.000 la segunda, \$ 70.000 la tercera, y así sucesivamente. Si el interés que se cobra es del 2,5% mensual, ¿al cabo de cuánto tiempo se amortizará la deuda? Dar la respuesta en número entero de meses, así la última cuota no guarde relación con las anteriores. (El problema puede tener dos soluciones.)
- 1.25** Una corporación le hace a usted un préstamo por \$ 11.400.000, que debe amortizar, inicialmente, en un plazo de ocho años, con cuotas mensuales iguales y con un interés del 30% nominal mensual para los cuatro primeros años y del 34% nominal mensual de ahí en adelante. Transcurridos dos años, la corporación decide cambiar el contrato, de común acuerdo con usted, para la amortización del saldo. Este nuevo contrato estipula que a partir de la fecha las cuotas se reajustarán en un determinado porcentaje constante cada mes, de tal manera que, conservando las tasas de interés del primer contrato, la deuda quede pagada dos años antes de la fecha dada en el primer contrato. Hallar la tasa de reajuste mensual.
- 1.26** Resolver el problema 9.25 suponiendo que en el segundo contrato se conviene que la tasa de interés sea del 32% nominal mensual para los dos primeros años, del 34% nominal mensual para los dos años siguientes y del 36% nominal mensual para los dos últimos años.
- 1.27** Un padre de familia instaló en el garaje de su casa una pequeña cafetería con una inversión de \$ 860.000. De ahí en adelante, cada dos meses debe hacer nuevas inversiones de \$ 150.000 cada una; obtiene ingresos semanales del orden de los \$ 55.000. Si este señor conserva el negocio durante tres años, hallar una tasa interna de retorno en estas condiciones.
- 1.28** Un agricultor cultivó 30 fanegas anuales de maíz. Cada año obtiene dos cosechas, una en el primer semestre y la otra en el segundo semestre. Las inversiones al principio de cada semestre son del orden de los \$ 5.400.000 por fanega; los gastos de recolección al final de cada semestre son de \$ 1.200.000 por fanega. Los ingresos provenientes de la venta del maíz y pastos son de \$ 4.050.000 por fanega el primer semestre y de \$ 2.750.000 por fanega para el segundo. Calcular una tasa de retorno para dos años de esta actividad.

- 1.29** Resolver el problema 9.28 suponiendo que los ingresos en ambos semestres del año sean de \$ 4.050.000 por fanega.
- 1.30** Un camión tiene un valor inicial de \$ 36 millones y puede transportar 25 toneladas. Cada mes logra hacer tres recorridos con carga completa y se obtienen ingresos de \$ 28.000 por tonelada transportada. Los gastos de mantenimiento y conductor suman \$ 1.500.000 cada mes. Si al final de tres años el camión se vende en 28 millones, hallar la tasa interna de retorno de este proyecto.
- 1.31** Como ejercicio de investigación, analizar el funcionamiento y rentabilidad de los siguientes **papeles comerciales**:
- a) Bonos de desarrollo económico
 - b) Bonos del IFI
 - c) Certificado de abono tributario, CAT
 - d) Certificado de depósito a término, CDT
 - e) Certificado de cambio
 - f) Certificados cafeteros
 - g) Títulos financieros agroindustriales
 - h) Títulos de participación del Banco de la República
 - i) Depósitos en cuentas de ahorros
 - j) Seguro de vida con capitalización
 - k) Cédula hipotecaria a corto plazo
 - l) Certificado eléctrico valorizable FEN
 - m) Bonos Fondo Financiero Industrial
 - n) Bonos cafeteros
 - o) Bonos de seguridad ciudadana
 - p) Bonos agrarios clase L
- 1.32** Usted tiene hoy una obligación por el valor de \$ 6 millones, y el acreedor le presenta las cuatro siguientes alternativas para saldarla:
- Primera:** 12 cuotas mensuales de \$ 600.000 cada una
- Segunda:** 15 cuotas mensuales empezando en tres meses con \$ 540.000 y que aumentarán cada mes en \$ 10.000
- Tercera:** 4 cuotas de \$ 2 millones, \$ 1.600.000, \$ 1.400.000 y \$ 1.900.000 en los meses 4, 6, 8 y 14 respectivamente
- Cuarta:** 2 pagos de \$ 3.650.000 cada uno en los meses 8 y 10
- Determinar la mejor alternativa para usted como deudor.
- 1.33** Por un crédito de \$ 7.500.000 se deberá hacer la siguiente serie de pagos: \$ 543.750 hoy, \$ 1.123.437,5 en un mes, y de ahí en adelante los pagos disminuirán en \$ 45.312,5 hasta el final de un año. Hallar la tasa anual de costo del dinero.

- 1.34** Un proyecto presenta el siguiente flujo de caja: inversiones de \$ 1 millón hoy y \$ 4.770.000 en dos años, y generará beneficios de \$ 3.800.000 en un año y \$ 1.980.000 en tres años. Determinar las tasas internas de retorno de este proyecto e interpretar el resultado.
- 1.35** Una acción se adquirió hace cuatro años en \$ 525.000 y los dividendos pagados han sido de \$ 28.000 mensuales durante los cuatro años. Si el valor hoy de la acción es \$ 520.000, hallar la tasa interna de retorno del flujo de caja de esa inversión y la tasa de rentabilidad verdadera, sabiendo que el inversionista tiene una tasa de oportunidad del 31% anual.
- 1.36** Un inversionista es socio en diferentes negocios pequeños. Su práctica es suministrar el capital para nuevos negocios. Si su tasa de oportunidad es del 38% anual y se le presentan las tres alternativas siguientes, ¿cuál debe seleccionar según la TRV?

	0	1	2	3
A	-103.506	55.000	55.000	55.000
B	-363.800	170.000	200.000	230.000
C	-284.560	200.000	150.000	100.000

Los períodos son años y los valores están en miles de pesos.

- 1.37** Considere los proyectos A y B, donde los períodos son trimestres y cuyos flujos de caja se dan a continuación:

	0	1	2	3	4
A	-900.000	250.000	300.000	350.000	400.000
B	-1.000.000	350.000	350.000	350.000	350.000

- Calcule la TIR de cada proyecto.
 - ¿Para qué valores de tasa de interés se prefiere el proyecto A al proyecto B?
 - Haga una gráfica que relacione el VPN y la tasa de interés para cada proyecto.
- 1.38** Hace dos años usted compró un automóvil por el valor de \$ 10 millones. De acuerdo con la última declaración de renta el automóvil aparece con un valor de \$ 7 millones, pero usted sabe que no puede venderlo en más de \$ 6 millones. Se quiere considerar la posibilidad de continuar usando ese vehículo durante tres años más, o de comprar uno nuevo. Al automóvil actual tendrá que hacerle inmediatamente reparaciones por \$ 160.000 y podrá venderlo al cabo de tres años en \$ 3 millones. El automóvil nuevo vale ahora \$ 15 millones y dentro de tres años se podrá vender en \$ 9 millones. Los costos anuales de operación y mantenimiento son de \$ 1.200.000 para el automóvil actual y de \$ 900.000 para el nuevo. Si usted considera que sus inversiones de capital deben producir por lo menos el 30% anual, sin contar impuestos, ¿cuál será su decisión? ¿Cuál sería el costo de oportunidad del capital para el cual daría lo mismo un automóvil que otro? ¿Qué otras consideraciones cree usted que serían pertinentes para tomar esta decisión?
- 1.39** Supóngase que existen tres inversiones, A, B y C, excluyentes entre sí. ¿Cuál de las tres se debe elegir? Utilice los métodos VPN y TIR. El costo del capital es del 31% nominal trimestral, y los períodos son semestres.

	0	1	2	3
A	-100	505	505	505
B	-10.000	2.000	2.000	12.000
C	-11.000	5.304	5.304	5.304

- 1.40** El Gerente de Producción de una compañía estima que con el sistema actual de operación, que es manual, necesitará tres años con la planta de personal existente en este momento para llevar a cabo un determinado volumen de producción. Bajo este sistema, la compañía producirá un beneficio neto mensual de \$ 220.000. Si adquiere una máquina para la elaboración del producto por el valor de \$ 1 millón, los beneficios netos mensuales se elevarán a \$ 450.000 y la producción terminará un año antes de lo previsto en el caso manual. Si la máquina puede tener un valor de mercado de la mitad de su costo inicial, y la tasa mínima es del 32% nominal trimestral, se pide:
- Hacer un diagrama del flujo de las dos alternativas.
 - ¿Para qué valor de la tasa anual son equivalentes las dos alternativas?

- 1.41** Evalúe los siguientes proyectos de inversión por los métodos de VPN y la TIR. Use como tasa de oportunidad el 22% anual.

	A	B	C
0	-3.000.000	-7.000.000	-3.000.000
1	1.200.000	600.000	0
2	1.200.000	2.100.000	0
3	1.200.000	3.600.000	1.000.000
4	1.200.000	6.000.000	5.350.000

- Ordenarlos de mejor a peor según cada criterio.
 - Formule los proyectos incrementales: B – A, C – B, C – A.
 - Evalúe y ordene estos proyectos incrementales según los dos criterios.
 - Halle la tasa de rentabilidad verdadera (o tasa de rentabilidad interna ponderada) para cada uno de los proyectos iniciales y ordénelos.
 - Compare resultados y tome una decisión si es posible.
- 1.42** Se tienen dos proyectos A y B con las siguientes características, en los que los valores están en millones de pesos.

Proyecto	Inversión	Beneficios anuales	Vida útil (en años)	Valor de mercado
A	10	3,2	5	8
B	15	3,7	5	10

El capital disponible para invertir es de \$ 15 millones. Se pide seleccionar el mejor proyecto utilizando los criterios de VPN y TIR.

Si hay contradicción entre los dos criterios anteriores, utilizar la tasa interna de retorno incremental.

La tasa de oportunidad es del 30% anual.

- 1.43** Una fábrica industrial tiene asegurada contra robos toda su maquinaria por un valor de \$ 210 millones. El costo del seguro hoy en día es \$ 180 por cada \$ 1.000 de cubrimiento y este valor permanecerá constante por los próximos cuatro años y luego se aumentará a \$ 230 por cada \$ 1.000 de cubrimiento para los cinco años siguientes. La empresa tiene la posibilidad también de contratar el servicio con una compañía de celaduría y vigilancia por espacio de nueve años. En este caso la fábrica deberá utilizar cinco celadores diurnos y cinco nocturnos. El salario mensual de un celador diurno es de \$ 300.000 y el de uno nocturno de \$ 400.000. Estos salarios se incrementan cada dos años en el 24%.
- Si la tasa mínima atractiva de la fábrica es del 30% anual, ¿qué alternativas debe seleccionar?

- b) Determinar la tasa de retorno incremental. Según este criterio, ¿qué alternativa debe seleccionar la fábrica?

1.44 Utilizando los métodos de VPN y B/C para una tasa del 20% anual, analizar las alternativas siguientes:

Resolver el problema anterior si la tasa de interés es del 25% anual y las alternativas son las siguientes:

a)

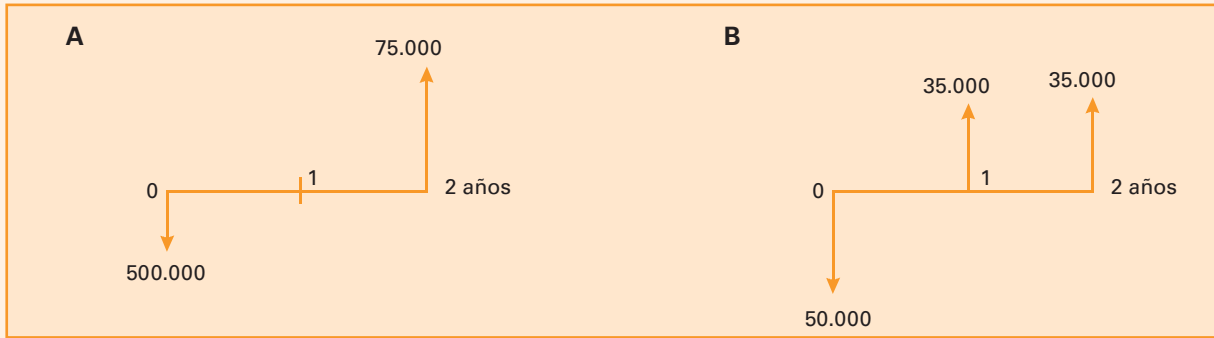


FIGURA 9.14

b)

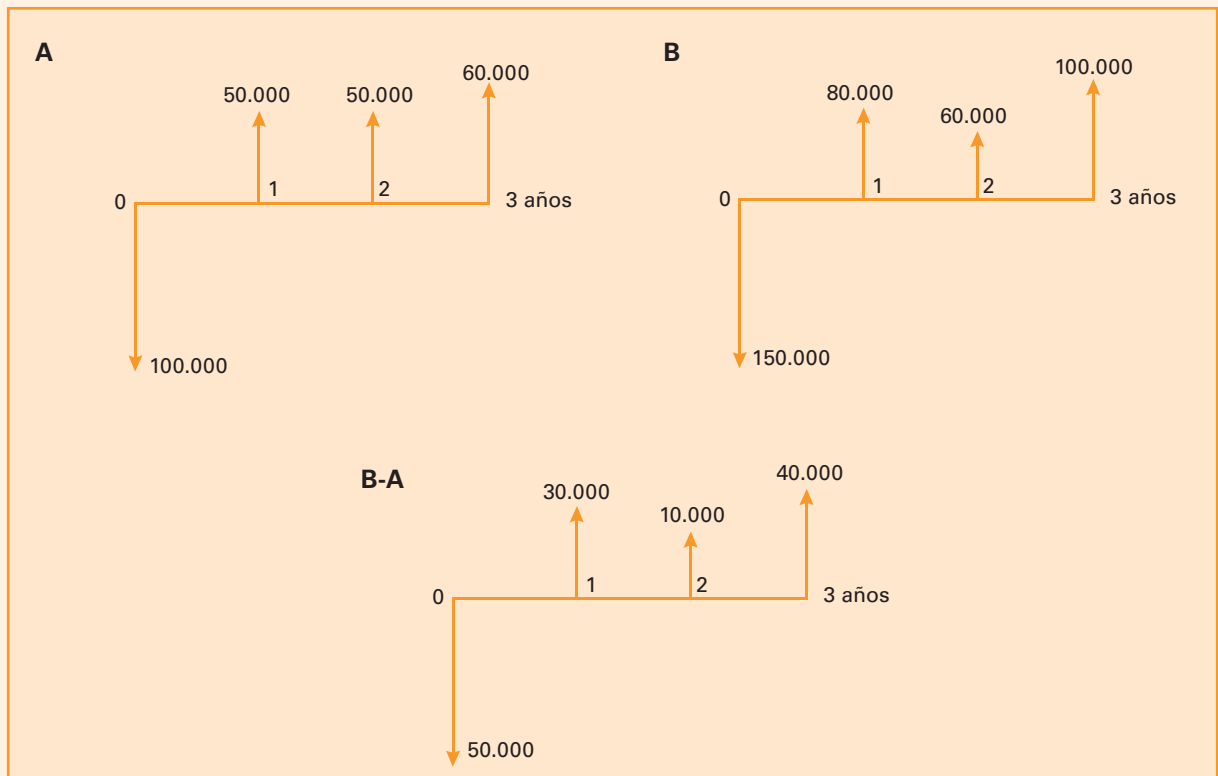


FIGURA 9.15

1.45 Se tienen cuatro proyectos de inversión, A, B, C y D. Utilizando los índices de VPN, TIR y TRV, analizarlos conjuntamente, es decir, ordenarlos según cada criterio en orden de prioridad. El flujo de caja para cada proyecto es el siguiente:

t (semestres)	A	B	C	D
0	\$ -1.000.000	\$ -3.000.000	\$ -2.500.000	\$ -1.000.000
1	400.000	0	200.000	0
2	400.000	400.000	700.000	0
3	400.000	1.600.000	1.200.000	0
4	400.000	2.900.000	2.000.000	1.800.000

Tasa de oportunidad del 12% semestral.

- 1.46** Una oficina pública planea construir un edificio para oficinas que tenga tres pisos; se espera que al cabo de 15 años se añadirán tres pisos más. Se consideran dos diseños:

El diseño A es uno convencional para un edificio de tres pisos. El costo estimado es de \$ 420 millones. El diseño B supone que la construcción inicial sea de los tres primeros pisos de un edificio de seis pisos. El costo inicial de la construcción es de \$ 490 millones. Con el diseño A se estima que costará \$ 500 millones añadir los otros tres pisos al cabo de 15 años. Con el diseño B, la adición de los tres pisos costará \$ 440 millones. La vida total estimada del edificio es de 40 años con valor de salvamento o de mercado de \$ 500 millones en cada diseño.

Se estima que los costos de mantenimiento mensuales serán de \$ 700.000 menos con el diseño A a lo largo de los 40 años. Se cree que los otros gastos anuales, incluidos seguros, serán los mismos para ambos diseños. Como se trata de una inversión del Gobierno, no se consideran impuestos.

Con una tasa de descuento del 32% anual, ¿cuál de estos dos proyectos se debe emprender? Haga análisis del VPN y de la rentabilidad interna incremental. ¿Coinciden estos criterios?

- 1.47** En una compañía manufacturera se han presentado seis propuestas para la mecanización de una operación manual. La inversión inicial estimada y la reducción de los gastos anuales de cada una de las propuestas se dan a continuación. Se supone que la vida económica de cada una de ellas es de 10 años. También se supone que la tasa de reinversión permanece constante durante los cinco primeros años y que es igual a la tasa de descuento, que es del 26% anual. Durante los otros cinco años se considera que la tasa de reinversión y de descuento permanece igual y se estima en el 28% anual. Estas tasas son antes de impuestos.

¿Cuál de estas seis alternativas se debe aceptar? Explique los supuestos de su selección y muestre además los cálculos que sean necesarios para respaldar su respuesta.

Maquinaria	Inversión inicial	Reducción en gastos anuales
A	600.000	2.000.000
B	1.000.000	250.000
C	1.100.000	300.000
D	1.200.000	350.000
E	1.500.000	400.000
F	1.500.000	425.000

- 1.48** Un estudiante egresado de la Facultad de Ciencias Económicas de una universidad estimó los siguientes datos respecto de sus gastos e ingresos entre las alternativas de estudiar una carrera y desempeñarse luego como profesional en la misma, frente a no haber estudiado.

Calcula que la educación durante los cinco años de carrera le costó el equivalente a \$ 5 millones en la fecha de graduación, considerando el aumento de los gastos y los ingresos dejados de recibir al estar estudiando. Ha estimado que los ingresos mensuales durante los tres años siguientes después de salir de la universidad son en promedio de \$ 550.000 más de lo que hubiera ganado si no hubiera ingresado a la universidad.

En los tres años siguientes esta cifra aumenta a \$ 750.000 mensuales, y en los tres años siguientes a \$ 950.000 mensuales. ¿Cuál es la tasa interna de retorno obtenida por su inversión en educación universitaria?

- 1.49** Una compañía distribuidora de combustibles para automotores tiene planes para adquirir un lote en una ciudad por el valor de \$ 50 millones. La compañía tiene cuatro diferentes negocios que puede instalar allí.

Negocio	Costo de las mejoras (Instalaciones)	Descripción del negocio
A	\$ 40.000.000	Bomba de gasolina convencional con servicio de lubricación
B	\$ 125.000.000	Instalación de lavado automático de vehículos con una bomba de gasolina
C	\$ 25.000.000	Servicio de lubricación
D	\$ 65.000.000	Bomba de gasolina con lavado manual de vehículos

En el costo de las mejoras no se incluye el valor del terreno. La vida útil de cualquiera de los negocios será de 12 años. El valor de mercado al final de este tiempo será el equivalente a \$ 90 millones para cualquier negocio que corresponde al valor del terreno reajustado. El beneficio anual neto después de pagar todos los gastos de operación y materias primas es:

Negocio	Costo de las mejoras (Instalaciones)
A	\$ 18.000.000 el primer año aumentando en 25% cada año
B	\$ 40.000.000 el primer año incrementando en 20% cada año
C	\$ 30.000.000 cada año
D	\$ 32.000.000 y aumentará en \$ 650.000 cada año

Si la compañía distribuidora de combustible tiene una tasa de oportunidad del 32% anual para sus inversiones, clasificar los proyectos o negocios de mejor a peor financieramente, utilizando los criterios de VPN, TIR, TRV, B/C sencillos o incrementales según el caso.

- 1.50** Una fábrica de plásticos está situada en la zona industrial de una ciudad y opera en una bodega en arriendo. Esta bodega tiene una extensión de 8.000 metros cuadrados y cuesta \$ 11 millones el arriendo mensual anticipado. Cerca de esta fábrica están vendiendo una bodega con una extensión de 12.000 metros cuadrados por un valor de \$ 450 millones. Los términos en los que se ofrece esta bodega son el 40% de cuota inicial y el resto financiado a cinco años con cuotas mensuales iguales a un interés del 34% anual. Se estima que esta bodega tendrá un valor de mercado de \$ 500 millones al cabo de cinco años.

La fábrica de plásticos dispone en este momento del dinero necesario para comprar la nueva bodega, pero no necesita todo el espacio. Una fábrica de muebles ha ofrecido tomar en arriendo la mitad de esta bodega por \$ 58.500.000 mensuales anticipados.

La fábrica de plásticos tiene en este momento la opción de reducir el espacio, por el que está pagando arriendo en 2.000 metros cuadrados, en cuyo caso el arriendo sería de \$ 3 millones mensuales anticipados. Aun más: esta fábrica podría dejar de pagar arriendo. El Gerente Financiero de la fábrica de plásticos está considerando tres alternativas:

- Comprar las nuevas bodegas y arrendarle a la fábrica de muebles la mitad del espacio. Además el espacio tomado en arriendo por la fábrica de plásticos se reduciría a 2.000 metros cuadrados en la actual bodega.
- Comprar la nueva bodega y dejar de pagar arriendo por completo. En este caso no podría arrendar a la otra fábrica espacio alguno.
- Continuar como está, con 8.000 metros cuadrados de espacio pagando arriendo.

Tomando una tasa de oportunidad para la fábrica de plásticos del 34,5% anual, ¿qué alternativas debe seleccionar el Gerente Financiero?

Formulario

Número	Fórmula	Aplicación
1	$F = P(1 + i)^n = P(F/P, i\%, n)$	
2	$P = F(1 + i)^{-n} = F(P/F, i\%, n)$	
3	$i_a = \frac{i_v}{1 + i_v}$ $i_v = \frac{i_a}{1 - i_a}$	
4	$i = \frac{j}{m}$	
5	$1 + i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$	
6	$i = e^n - 1$	
7	$i_R = \frac{i_c + i_a}{1 - (i_c + i_a)}$ $i_R = \frac{i_v + i_c}{1 - i_c}$	
8	$i_R = (1 + i_1)(1 + i_2) - 1$	
9	$i_R = \frac{i_f + i_i}{1 + i_i}$ $i_f = i_R + i_i + i_R \times i_i$	
10	$K \% = \sum_{j=1}^n P_j K_j$	
11	$F_{Total} = \sum_{K=0}^n F_k$	
12	$P_{Total} = \sum_{K=0}^n P_k$	
13	$P = A \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right] = A(P/A, i\%, n)$	
14	$A = P \left[\frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} \right]$ $= P(A/P, i\%, n) \Leftrightarrow CAUE$	
15	$F = A \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right] = A(F/A, i\%, n)$	
16	$A = F \left[\frac{i}{(1 + i)^n - 1} \right] = F(A/F, i\%, n)$ $\Leftrightarrow CAUE$	

Número	Fórmula	Aplicación
17	$P = \frac{A}{i}$	
18	$P = A \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] (1+i)^{-k}$	
19	$P = A \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] (1+i)$	
20	$P = A \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$ $+ \frac{G}{i} \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right]$ $= A(P/A, i\%, n) + G(P/G, i\%, n)$	
21	$F = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] + \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right]$ $= A(F/A, i\%, n) + G(F/G, i\%, n)$	
22	$P = A \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$ $+ \frac{G}{i} \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right]$ $= A(P/A, i\%, n) + G(P/G, i\%, n)$	
23	$F = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] - \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right]$ $= A(F/A, i\%, n) - G(F/G, i\%, n)$	
24	$P = \frac{1}{i} \left[A + \frac{G}{i} \right]$	
25	$F = \frac{A}{i-k} [(1+i)^n - (1+k)^n]$ <p><i>Si $i \neq k$</i></p>	
26	$F = nA(1+i)^{n-1}$ <p><i>Si $i = k$</i></p>	
27	$P = \frac{A}{i-k} \left[1 - \left(\frac{1+k}{1+i} \right)^n \right]$ <p><i>Si $i \neq k$</i></p>	

Número	Fórmula	Aplicación
28	$P = \frac{nA}{1+i}$ <p>Si $i = k$</p>	
29	$F = \frac{A}{i+k} [(1+i)^n - (1-k)^n]$	
30	$P = \frac{A}{i+k} \left[1 - \left(\frac{1-k}{1+i} \right)^n \right]$	
31	$P = \begin{cases} \text{No existe; si } i < k \\ \frac{A}{i-k}; \text{ si } i > k \end{cases}$	
32	$S_t = D_0(1+i)^t - A \left[\frac{(1+i)^t - 1}{i} \right]$ $= D_0(1+i)^t - A(F/A, i\%, t)$ $S_t = A(P/A, i\%, n-t)$	
33	$S_t = D_0(1+i)^t - [A(F/A, i\%, t) + G(F/G, i\%, t)]$	
34	$S_t = D_0(1+i)^t - \frac{A}{i-k} [(1+i)^t - (1+k)^t]$ $S_t = \frac{A(1+k)^t}{i-k} \left[1 - \left(\frac{1+k}{1+i} \right)^{n-t} \right] \text{ si } i \neq k$ <p>Si $i = k$</p>	
35	$A_t = K_t + I_t$	
36	$Y_{t+1} = AY_t + B$ $Y_t = \begin{cases} A^t Y_0 + B \left[\frac{1-A^t}{1-A} \right]; A \neq 1 \\ Y_0 + Bt; A = 1 \end{cases}$ $Y_t = \begin{cases} A^t C + B \left[\frac{1-A^t}{1-A} \right]; A \neq 1 \\ C + Bt; A = 1 \end{cases}$	
37	$a_t Y_{t+1} + a_0 Y_t = g(t)$ $Y_t = Y_h(t) + Y_p(t)$	

Respuestas

(A los problemas múltiplos de tres)

CAPÍTULO 1

PROBLEMAS I

- 1.3 i) $X = 5$
 ii) $X = -3$
 iii) $X = e$
 iv) $X = 30$
 v) $X = 1$

- 1.9 i) No es progresión
 ii) Progresión aritmética
 iii) No es progresión
 iv) No es progresión
 v) Progresión aritmética
 vi) Progresión geométrica

1.12 $A = 574.864$

1.15 $n = 20$

1.18 Sí. Los primeros son: 8.500, 8.000, 7.500,1.500

- 1.21 a. $1,073 \times 10^9$
 b. $5,7646 \times 10^{17}$

1.24 \$ 2.000.000, \$ 1.600.000, \$ 1.280.000, y el décimo: \$ 268.435

1.27 $p = \$ 34,65$

1.30 $n = 12$ días

1.33 \$ 5.042.100

1.36 $n = 16$

1.39 \$ 212.000

PROBLEMAS II

2.3 80,47 meses

- 2.6 a) $i = -0,1652$
 b) No existe
 c) $i = 0,5427$

2.9 $n = -30,56$

2.12 $t = -0,009415$

2.15 \$ 18.623.395

2.18 \$ 1966 millones

2.21 $a = 3.820.000$, $b = 1,01$, $r = 0,01$

CAPÍTULO 2

PROBLEMAS I

- 1.3 a) $Y_t = 1/2$
 b) $Y_t = 4(1/2)^t + 2$
 c) $Y_t = 6(-1)^t$
 d) $Y_t = 243/8 (4/9)^t$
 e) $Y_t = 6(1/2)^t + 1/2$

1.6 a) $S_t = 15.000(1,16)^t$

b) $S_t = 45.000 \left(\frac{1}{2}\right)^t$

c) $S_t = 45.020 \left(\frac{1}{2}\right)^t + 20t - 20$

1.9 Al cabo de 26 días

1.12 \$ 3.145.743

- 1.15 a) $Y_t = C_t + I_t$
 b) $C_t = aY_t$
 c) $Y_{t+1} - Y_t = bl_{t+1}$

1.18 \$ 57.368 millones y \$ 57.388 millones

1.21 a) $\$ S_t = \frac{40}{0,03} (1,03)^t + \frac{50}{0,03}$

b) $S_t = 19.400 (0,98)^t + 250t - 12.400$

c) $F_t = -32.170 (1,1)^{t-1} - 30t + 34.700$

d) $U_t = 250 + t(t-1)$

e) $R_t = (1,003 + t) \left(\frac{1}{3}\right)^t - 3$

1.24 $q_t = P(1 - r)^{t-1}$

1.27 $S_{15} = 1.847.525$

1.30 $U_1 = -\$799,98$

1.33 $G_5 = 3420,15$

1.36 $S_{12} = \$22.290.251$

$$1.39 Y_t = 2.000 \left(\frac{1}{3}\right)^t + 3.000$$

$$C_t = 2.000 \left(\frac{1}{3}\right)^t + 1.000$$

PROBLEMAS II

2.3 55.080 unidades

2.6 $t = 8$ meses

2.9 a) $U_1 = 4$,

b) $U_{10} = 24.498,7$,

c) $U_{12} = 98.225,52$

$$2.12 S_t = \frac{23}{2} - 0,25t^3 + 0,5t^2 + 0,25t + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^t;$$

$$S_2 = 12,125 \text{ y } S_8 = -82,5$$

$$2.15 S_t = 63'600.000 \left(\frac{4}{5}\right)^t + 400.000 (1,05)^t;$$

$$S_{53} = \$ 5.310.444$$

$$2.18 P_t = 25 (-1)^t + 25$$

$$2.21 S_t = a (1 - b)^t \cdot S_0$$

CAPÍTULO 3

PROBLEMAS I

1.3 a) 2 años

b) 13 trimestres

1.6 Invertir en la empresa

1.9 \$ 8.670.167

1.12 19 meses

1.15 \$ 389.667

1.18 38 meses

1.21 14 trimestres

1.24 \$ 284.985

1.27 9 trimestres

1.30 a) 36%

b) 26,52%

c) 33,56%

d) 34,97%

1.33 La primavera

1.36 \$ 664.884

1.39 \$ 550.400

1.42 La segunda alternativa

1.45 \$ 189.471

1.48 28,5 meses

1.51 13 meses

1.54 \$ 295.518

1.57 \$ 3.807.850

1.60 \$ 652.979

1.63 \$ 212.912

1.66 \$ 2.131.124

1.69 \$ 350.000

1.72 \$ 1.693.600 último pago

1.75 \$ 865.567 y \$ 962.153

1.78 \$ 779.635

1.81 10,7976%

1.84 \$ 290.100

1.87 19,8% EA(365 días)

1.90 a) Sí

b) 34,98% EA

1.93 27,10% EA

PROBLEMAS II

2.3 \$ 1.634.088 cada pago

2.6 \$ 14.528.290

2.9 0,37%, 0,33%, 0,28%, 0,23%, 0,19% y 0,16%;

$$I = 1,42236 (0,833188)^t$$

2.12 \$ 40.347.940, $i_t = 0,00668\%$ promedio mensual.

2.15 5,99%, 5,94%, 5,88%, 5,83%, 5,78% y 5,73% ;

$$D = 6,36868 (0,991256)^t$$

2.18 a) Lineal: $v = 2663,33 - 17,14285t$,
 $v(8) = \$ 2.526$; $r = -0,2797$

b) Exponencial: $v = 2659,294 (0,993719)^t$;
 $v(8) = \$ 2.528$; $r = -0,2738$

Es más representativo el valor obtenido en la función lineal.

2.21 $VM(t) = 7,6559(0,9121)^t$, Tasa de inversión: $-8,79\%$
 $VM(8) = 3,67$ millones de pesos

CAPÍTULO 4

PROBLEMAS I

1.3 \$ 339,8 millones
1.6 \$ 10.125.067
1.9 \$ 5.727.500
1.12 \$ 32.155
1.15 \$ 13.362.500
1.18 \$ 609.000
1.21 \$ 6.207.840
1.24 \$ 55.505
1.27 \$ 16.945.503
1.30 \$ 309.189
1.33 16 meses
1.36 8 trimestres
1.39 \$ 1.619.876
1.42 \$ 799.376
1.45 \$ 242.383
1.48 Por tiempo indefinido
1.51 33 meses
1.54 \$ 38.336
1.57 41 retiros
1.60 \$ 1.638.140
1.63 \$ 229.622
1.66 \$ 6.830.910
1.69 \$ 35.077
1.72 \$ 126.941 y \$ 2.051.043
1.75 \$ 1.245.804
1.78 \$ 32.064
1.81 \$ 366.857

1.84 \$ 495.026

1.87 \$ 3.759

1.90 \$ 17.065

PROBLEMAS II

2.3 \$ 18.404.434
2.6 \$ 5
2.9 \$ 3.051.397
2.12 \$ 7.515.865
2.15 \$ 58.733.188
2.18 \$ 3.291.710
2.21 \$ 1.871.171 y \$ 1.853.292

CAPÍTULO 5

PROBLEMAS I

1.3 \$ 398.702
1.6 \$ 228.298
1.9 \$ 149.792
1.12 \$ 5.214.813
1.15 \$ 1.284.850
1.18 \$ 1.406.640
1.21 \$ 160.460
1.24 Primera cuota de \$ 167.123
1.27 \$ 3.250 primer pago
1.30 \$ 1.888.380
1.33 Primera cuota de \$ 341.494
1.36 \$ 649.283
1.39 Primera cuota de \$ 702.728
1.42 \$ 207,65 millones
1.45 \$ 156.318
1.48 \$ 222.800
1.51 52 cuotas, y de \$ 596.160 la última
 53 cuotas, y de \$ 219.993 la última
1.54 \$ 85.830

- 1.57** \$ 89.916 millones
1.60 \$ 228.332,1 millones
1.63 \$ 152,35 millones
1.66 Primera cuota de \$ 130.079
1.69 $A = -\$ 22.431$

PROBLEMAS II

- 2.3** \$ 12.324 millones
2.6 \$ 16,26 millones
2.9 \$ 4.327 millones
2.12 \$ 363.071
2.15 \$ 6.785,5
2.18 \$ 351.900
2.21 \$ 4,7 millones
2.24 \$ 2.086 millones
2.27 Al cabo de 14 meses
2.30 \$ 799.470
2.33 \$ 96.293 antes y \$ 94.295 después
2.36 \$ 32.935 millones
2.39 $A = \$ 2.561.319$, $2A = \$ 5.122.638$
2.42 \$ 26.235.380
2.45 $U(t) = 1,7712 (1,0784)^t$; $U(7) = 3,0042$ millones de pesos será la utilidad del mes siete y de allí en adelante aumentará en el 7,84% cada mes.
 VF = \$ 23.508 millones. Sí puede cancelar
2.48 $p(t) = 19,98465 (1,0339)^t$
 $Q(p) = 2465,3727 (0,98515)^p$
 Con estas funciones calcular: p, Q y el ingreso $y = p \cdot Q$ para los meses 8,9,10,11, 12 y 13
 VF = \$ 141.916.000
2.51 a) Saldo en 6 años : \$ 55.069.860
 b) 49 meses
2.54 $Q(t) = 31,71428 + 0,42857t$
 VF = \$ 455.980.790 al cabo de cinco años
2.57 $U(t) = 4,38433 (0,95465)^t$
 Inversión primer mes \$ 1.443.676 y dismi-

nuirá cada mes en el 4,535%
 VF (total) = \$ 112.042.737. Si logra acumular lo necesario para cubrir la deuda.

- 2.60** $T(t) = 1,98667 - 0,005714t$
 Total acumulado dentro de seis meses = \$ 22.728.954
2.63 $y(t) = 3,43214 + 0,05952 \cdot t$: Ingreso
 $C(t) = 0,95485 (1,15183)^t$: Costo
 $VPN = 47.951.776 - 91.517.490 = -\$ 43.565.714$
2.66 $U(t) = 4884,10714 + 90,05952t$, $\frac{1}{2}U(9) = \$ 2.847.314$ inversión primer mes y aumentará en \$ 45.029 cada mes.
 Total acumulado al final del año = \$ 41.707.733

CAPÍTULO 6

PROBLEMAS I

- 1.3** \$ 12.263,8
1.6 \$ 360.640
1.9 \$ 880.660
1.12 \$ 1.727.307
1.15 \$ 488.809
1.18 \$ 489.911
1.21 \$ 3.890.395
1.24 \$ 1.724.081 y \$ 3.670.843
1.27 \$ 429.437
1.30 \$ 45.658
1.33 Disminuyó en el 17,47%
1.36 \$ 26.721 de intereses y \$ 11.035 de capital
1.39 \$ 42.658
1.42 \$ 882.500 y \$ 108.333,33
1.45 \$ 6.192.890
1.48 Intereses \$ 64.943,6 abono a capital \$ 290.422,5

PROBLEMAS II

- 2.3** \$ 3.890.095
- 2.6** \$ 42.658
- 2.9** Intereses: \$ 305.447, abono a capital:
\$ 440.868
- 2.12** \$ 6.195.435
- 2.15** Intereses: \$ 875.416, abono a capital:
\$ 828.000
- 2.18** a) \$ 34.797.324,
b) \$ 405.491.930,
c) \$ 16.170.917
- 2.21** a) 38,3 meses,
b) \$ 2.387.617,
c) Intereses: \$ 511.000, abono a capital:
\$ 2.048.848
- 2.24** \$ 143.775.758
- 2.27** \$ 47.500.000
- 2.30** 205,7952
- 2.33** 0,2675986% mensual

CAPÍTULO 7

- 1.3** $VPN(A) = \$ 32.857$, $VPN(B) = \$ 513.484$.
Seleccionar el activo B
- 1.6** $VPN(A) = -\$ 52.527$, $VPN(B) = -\$ 49.183$.
Seleccionar la clase B
- 1.9** $VPN(1) = -\$ 4,123$ millones; $VPN(2) = -\$ 5,279$
millones. Seleccionar la alternativa de comprar la máquina
- 1.12** $VPN(1) = -\$ 2,794$ millones; $VPN(2) = -\$ 1,897$
millones. Seleccionar la segunda clase
- 1.15** $VPN(1) = \$ 114,7$ millones; $VPN(2) = \$ 105$
millones. Seleccionar el cultivo de zanahoria
- 1.18** $VPN(1) = -\$ 16,688$ millones; $VPN(2) = -\$ 15,372$
millones. Seleccionar la alternativa de tomar en arriendo
- 1.21** $VPN(A) = -\$ 25,153$ millones, $VPN(B) = -\$ 28,660$
millones Seleccionar la primera alternativa
- 1.24** $VPN(A) = -\$ 2,097$ millones, $VPN(B) = -\$ 1,897$
millones Seleccionar la máquina clase B

- 1.27** $VPN(1) = -\$ 10.879$ millones; $VPN(2) = -\$ 13,59$
millones. Seleccionar la primera alternativa
- 1.30** La alternativa A
- 1.33** $VPN = -\$ 11.474.300$. No se debe llevar a
cabo el proyecto
- 1.36** \$ 1.666,666 millones
- 1.39** $VPN = \$ 70.014.280$. Si debe llevar a cabo
el proyecto.
- 1.42** $VPN = \$ 6.215.125$. El 25% del valor de
las inversiones en pesos de hoy es de
\$ 7.684.326, por lo tanto no debe llevar a
cabo el proyecto.
- 1.45** \$ 42.418.554 de ganancia en pesos de hoy.

CAPÍTULO 8

- 1.3** Costo promedio mensual \$ 35.917
- 1.6** CAUE = $-\$ 80.955$
- 1.9** CAUE = \$ 1,425 millones de ganancia tri-
mestral
- 1.12** CAUE = \$ 2,679
- 1.15** CAUE = \$ 4,34 millones de ganancia mensual
- 1.18** CAUE = $-\$ 633.173$
- 1.21** $A = \$ 119.846$
- 1.24** CAUE = \$ 1,022 millones
- 1.27** CAUE = \$ 134.640 promedio de ganancia
mensual
- 1.30** CAUE (N) = $-\$ 52.880$ CAUE(U) = $-\$ 47.007$.
Comparar la máquina usada
- 1.33** \$ 1.850.000 de ganancia promedio mensual
- 1.36** \$ 14.344.495

CAPÍTULO 9

- 1.3** 2,922% mensual
- 1.6** 10,2% anual
- 1.9** 4,13% semestral
- 1.12** 5,69 % mensual
- 1.15** 0,58% mensual
- 1.18** 30% nominal trimestral

1.21 3% mensual

1.24 9 meses y la última cuota de \$ 250.640, ó
10 meses y la última cuota de \$ 92.007

1.27 19,38% mensual

1.30 1,17% mensual

1.33 35,13% anual

1.36 La alternativa C

1.39 La alternativa C

1.42 El proyecto A

1.45 $C > B > A > D$

1.48 11,09% mensual

Índice analítico

A

Amortización 236
 Anualidad anticipada 149
 Anualidad con tasa anticipada 161
 Anualidad diferida 151
 Anualidades 142
 Anualidad perpetua 153
 Anualidad vencida 143
 Año financiero de 360 días 112
 Aplicaciones de la TIR en la selección de alternativas 328

B

Base 18
 Beneficio/costo incremental 339

C

Cálculo de la anualidad 145
 Cálculo de la tasa de interés 148
 Cálculo de la TIR 325
 Cálculo del CAUE 306
 Cálculo del tiempo 147
 Capitalización 79, 257
 CAUE en la selección de alternativas 309
 CAUE neto 307
 Cédulas de inversión 328
 Clases de anualidades 142
 Clases de interés 77
 Composición de los pagos 244
 Contradicciones entre los criterios de VPN y TIR 333
 Corporaciones de ahorro y vivienda 249
 Costo anual uniforme equivalente (CAUE) 305
 Costo capitalizado 290
 Cuotas en UPAC decrecientes 73

D

Descuento simple 78
 Diagrama de flujo de caja 80
 Diagrama de tiempo valor 80

Diferencia finita 44
 Diferencia lineal 46

E

Ecuación de diferencia finita 45
 Equivalencia 81
 Evaluación ex post 290

F

Factor de distribución 306
 Financiar una deuda 148
 Función exponencial 18
 Función logarítmica 21

G

Gradiente aritmético 184
 Gradiente aritmético creciente 185
 Gradiente geométrico 196
 Gradiente geométrico creciente vencido 197
 Gradiente geométrico decreciente vencido 201
 Gradiente geométrico perpetuo 202

I

Incremento o diferencia común 26
 Índice del VPN para un solo proyecto 283
 Índice de VPN para dos o más proyectos 285
 Índice nacional de precios al consumidor 110
 Interés compuesto 79
 Interés simple 77

M

Método de interpolación lineal 87
 Múltiples tasas internas de retorno 334

P

Papeles comerciales 343
 Período 77
 Período de gracia 152
 Pesos constantes 107, 108
 Pesos corrientes 107, 108
 Primera diferencia 44

Prime Rate 105
 Progresión aritmética 26
 Progresión geométrica 28
 Promedio financiero (PF) 306
 Propensión marginal al consumo 31
 Propiedades de la función exponencial 18
 Propiedades de la función logarítmica 21
 Punto focal 85, 156

R

Relación beneficio/costo (B/C) 336
 Relación de valor presente neto incremental 339
 Rentabilidad del proyecto 331
 Rentabilidad incremental 333

S

Saldos 237
 Segunda diferencia 45
 Series variables 183, 184
 Sistema de abono a capital en UPAC decreciente geoméricamente cada mes 250
 Sistema de abono constante a capital en UPAC 250
 Sistema de abono o capital en UPAC decreciente en una cantidad fija mensual 250
 Sistema de capitalización 90
 Sistema de cuota en UPAC decreciente en una cantidad fija mensual 250
 Sistema de cuota fija en UPAC 250
 Sistema de cuotas mensuales fijas en UPAC decrecientes anualmente en una proporción geométrica 250
 Sistemas de amortización 236
 Sistema UPAC 248
 Sistema UVR 254
 Soluciones de la ecuación de diferencia de primer orden 47
 Solución general de la ecuación homogénea 50
 Solución particular 50

T

Tabla de amortización 244
 Tanteo e interpolación 325

Tasa anticipada 98
 Tasa de corrección monetaria 249
 Tasa de descuento 283
 Tasa de devaluación 111
 Tasa deflactada 107
 Tasa de inflación 107
 Tasa de interés 77, 89
 Tasa de interés compuesto 90
 Tasa de interés continuo 95
 Tasa de interés discreta 95
 Tasa de interés efectiva 90
 Tasa de interés LIBOR 105
 Tasa de interés nominal 91
 Tasa de interés simple 89
 Tasa de oportunidad 112, 324
 Tasa de rentabilidad verdadera 329
 Tasa de rentabilidad verdadera (TRV) 329
 Tasa DTF 104
 Tasa inflada 107
 Tasa interna de retorno 77
 Tasa interna de retorno (TIR) y beneficio/costo (B/C) 323
 Tasa mínima atractiva de rentabilidad 112
 Tasas compuestas 106
 Tasas equivalentes 92
 Tasa vencida 98
 TCC 105
 Tiempo 77
 Tiempo de evaluación 283

U

Uso de la regresión en matemáticas financieras 208

V

Valor cronológico del dinero 76
 Valor de mercado 282
 Valores presente y futuro 81
 Valor presente neto 281
 Verdadera rentabilidad 332