Raymundo Palacios Figueroa

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES I

PROGRAMACIÓN LINEAL

Contenidos Interactivos Web

Alfaomega

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES I

Programación lineal

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES I

Programación lineal

Raymundo Palacios Figueroa

Alfaomega

Buenos Aires • Bogotá • Ciudad de México • Santiago de Chile

Director Editorial:
Marcelo Grillo Giannetto
mgrillo@alfaomega.com.mx

Jefe de Edición:
Francisco Javier Rodríguez Cruz
jrodriguez@alfaomega.com.mx

Al cuidado de la Edición:
Luz Ángeles Lomelí Díaz
lalomeli@alfaomega.com.mx

Datos catalográficos
Palacios Figueroa, Raymundo.
Investigación de Operaciones I.
(En el contexto de la Programación lineal).
Primera Edición.
Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C. V., México
ISBN: 978-607-622-753-4
Formato: 17 x 23 cm Páginas: 256

Investigación de Operaciones I. (En el contexto de la Programación lineal).
Raymundo Palacios Figueroa

Primera edición: Alfaomega Grupo Editor, México, enero 2017.

Dr. Isidoro Olvera (Eje 2 Sur) No. 74, Col. Doctores, C.P. 06720, Ciudad de México

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro No. 2317

Página Web: **http://www.alfaomega.com.mx**
E-mail: **atencionalcliente@alfaomega.com.mx**

ISBN: 978-607-622-753-4

Impreso en México. Printed in Mexico

Empresas del grupo:

México: Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V. – Dr. Isidoro Olvera (Eje 2 sur) No. 74, Col. Doctores, C.P. 06720, Del. Cuauhtémoc, Ciudad de México – Tel.: (52-55) 5575-5022 – Fax: (52-55) 5575-2420 / 2490. Sin costo: 01-800-020-4396 – E-mail: atencionalcliente@alfaomega.com.mx

Colombia: Alfaomega Colombiana S.A. – Calle 62 No. 20-46, Barrio San Luis, Bogotá, Colombia, Tels.: (57-1) 746 0102 / 210 0415 – E-mail: cliente@alfaomega.com.co

Chile: Alfaomega Grupo Editor, S.A. – Av. Providencia 1443. Oficina 24, Santiago, Chile
Tel.: (56-2) 2235-4248 – Fax: (56-2) 2235-5786 – E-mail: agechile@alfaomega.cl

Argentina: Alfaomega Grupo Editor Argentino, S.A. – Av. Córdoba 1215, piso 10, CP: 1055, Buenos Aires, Argentina, – Tel./Fax: (54-11) 4811-0887 y 4811 7183 – E-mail: ventas@alfaomegaeditor.com.ar

Dedicatoria

Me es muy grato dedicar el libro
a la memoria de mi padre y mis muy apreciados amigos:
C. José Elías Palacios Castro
(Abogado, Contador y Profesor de Matemáticas)
C. Humberto Santiago Zúñiga.
(Policía Municipal en Cd. Valles SLP)
C. Luis Rodolfo Escudero Sánchez.
(M.C. Ing. Industrial y Profesor del ITST en SLP)

Raymundo Palacios Figueroa

Hay hombres que luchan un día y son buenos.
Hay otros que luchan un año y son mejores.
Hay quienes luchan muchos años, y son muy buenos.
Pero hay los que luchan toda la vida, esos son los imprescindibles.

Bertolt Brecht (1898-1956)
Dramaturgo y poeta alemán.

Agradecimientos

Mis más sinceros agradecimientos a los profesionales
que me apoyaron en la realización de este proyecto,
por su tiempo y paciencia; por escucharme y aconsejarme
y sobre todo por la gran amistad incondicional que me brindaron:

C. Antonio Marbán Paz. Ingeniero Topógrafo–Hidrólogo.
Egresado de la facultad de Ingeniería de la UASLP.
Profesor de tiempo completo del área básica
del Instituto Tecnológico de Ciudad Valles S.L.P. desde 1983.

C. José Luis Álvarez Lara. Lic. Físico–Matemático.
Egresado de la facultad de Ciencias de la UASLP.
Trabajó desde 1992 en diferentes áreas de la refinación TAR 623
(Terminal de Almacenamiento y Reparto en Cd. Valles SLP).
Encargado de nóminas, desde 1992 al 2012.
Supervisor y encargado de servicios médicos
para los trabajadores de Pemex, desde 2012 al 2013.

Raymundo Palacios Figueroa

Acerca del autor

Raymundo Palacios Figueroa

Nació en Cd. Valles, San Luis Potosí (México), obtuvo su título de licenciatura en la Universidad Tecnológica General Mariano Escobedo, en Nuevo León. Es autor de un libro para matemáticas que está dirigido a alumnos de primaria, el cual se titula "Matemáticas paso a paso". Actualmente imparte clases particulares de matemáticas, física e investigación de operaciones.

Contenido

CAPÍTULO 4

MÉTODO GRÁFICO

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD APLICADO AL MÉTODO GRÁFICO

CAPÍTULO 6

MÉTODO SÍMPLEX Y SUS DERIVADOS

Objetivos

a) Entender el significado de la investigación de operaciones, así como también conocer sus orígenes y sus aplicaciones.

b) Saber la diferencia entre un sistema y un modelo en el contexto de una organización.

c) Comprender los siguientes métodos algebraicos:
   1. Reducción.
   2. Sustitución.
   3. Igualación.
   4. Kramer.
   5. Matriz inversa.
   6. Gauss—Jordan.

d) Dominar el lenguaje propio de la programación lineal: función objetivo, restricción, región factible, solución óptima, precio dual, variables artificiales, etc...

e) En el contexto del método gráfico y el método simplex saber formular, solucionar e interpretar un problema con ecuaciones lineales partiendo del enunciado.

f) Entender las leyes matemáticas que rigen la programación lineal, como son:
   1. Proporcionalidad.
   2. Aditividad.
   3. Divisibilidad.

g) En el contexto de la programación lineal entender los modelos gráficos acotados, no acotados y no factibles, como son:
   1. Acotado en una figura geométrica con una solución única.
   2. Acotado en una figura geométrica con soluciones múltiples.
   3. Acotado en una línea recta con solución única.
   4. No acotado sin solución.
   5. No factible sin solución.

h) Entender claramente el análisis de sensibilidad en el contexto del método gráfico y el método simplex.

i) Comprender la esencia gráfica y algebraica del método simplex, el algoritmo del método simplex y sus derivados, como son:
   1. Método de la M.
   2. Método de las dos fases.

j) Entender la teoría de la dualidad y el nexo que tiene con el análisis de sensibilidad.

k) Comprender la esencia matemática del problema de transporte y de asignación, comenzando con el enunciado y su formulación. Aprender los métodos que permiten solucionar estos problemas, como son:
   1. La regla de esquina noroeste (REN).
   2. El método del costo mínimo (MCM).
   3. El método de aproximación de Vogel (MAV).
   4. El método de pasos secuenciales (MPS).
   5. El método de distribución (MODI).
   6. El método húngaro.

l) Hacer uso de Microsoft Office Excel 2010 y Win QSB (*Linear and Integer Programming*) para solucionar problemas de programación lineal.
m) Dar ejemplos objetivos y reales del uso de la programación lineal en organizaciones.
n) Ejercitar el razonamiento, evitar la recepción pasiva de conocimientos y proporcionar la comunicación entre el profesor y los alumnos.

Prefacio

Las características pedagógicas de este libro están diseñadas para que el alumno aprenda parte de la programación lineal en forma "sencilla, práctica y amena".

Para lograr con el propósito, los modelos se explican en tres partes:

1. Formulación de un modelo (incluye traducir la definición del problema a un modelo cuantitativo, que represente la esencia del sistema que se encuentra bajo estudio).
2. Utilización de un *método matemático* (en nuestro caso usaremos sistemáticamente, el método gráfico, el método simplex y sus derivados. Así como también los seis métodos de transporte).
3. Interpretación objetiva del modelo incluyendo su análisis de sensibilidad (implica el desentrañamiento y argumentación del mismo).

Al finalizar los capítulos, el alumno percibirá la investigación de operaciones en el contexto de la programación lineal como una ciencia y como un arte.

a) Como ciencia, debido a la aplicación de métodos cuantitativos que se requieren para solucionar un modelo determinístico.
b) Como arte, debido a la sagacidad y creatividad personal para formular un modelo determinístico que represente la esencia del sistema, así como del éxito que se alcanza al aplicar una buena decisión objetiva, factible y óptima como resultado de la forma de interpretar la información que nos proporciona el mismo modelo.

Por otra parte:
En cada capítulo encontrará casos reales que describen cómo algunos especialistas hicieron uso exitosamente de los modelos de programación lineal en su organización. Estos casos se encuentran identificados con el título: Programación lineal en acción (PL en acción).

Se dio importancia al aspecto estético por lo que el diseño de las tablas, las gráficas y los dibujos permite un aprendizaje más vital, efectivo y motivacional.

NOTA: He procurado que toda la información que el estudiante necesite para estudiar esta obra se encuentre contenida obviamente en el mismo, sin embargo; recomiendo que haga uso de la bibliografía recomendada al final del libro.

Mensaje para el estudiante

Lograr que el alumno se convierta en un agente activo de su propio aprendizaje, siempre ha sido el objetivo fundamental de una didáctica científica. Hacer del aprendizaje un proceso dinámico y creativo, propicio para que usted mismo sea quien descubra los conocimientos y los transfiera en su vida social, como una forma de contribuir al desarrollo integral de su personalidad, es una de las metas que todo educador desea lograr en el aula o por medio de un libro, sin embargo; debe comprender (como estudiante) que un profesor no es eficazmente pedagógico en su totalidad para transmitir todo lo que sabe, debido a que cada catedrático aplica su propio método de enseñanza para aportar sus ideas, su conocimiento y su experiencia, de la misma forma en que usted tiene su propia forma de investigar, analizar y comprender un sistema cualquiera. Después de todo, el aprender es una experiencia y satisfacción personal que sólo puede lograrlo con su propio esfuerzo.

Para adquirir una buena educación,
el paso más importante es la voluntad
y el deseo de adquirirla.

M.C. Lic. Elías Emmanuel Palacios Figueroa

Plataforma de contenidos interactivos

Para tener acceso al material de la plataforma de contenidos interactivos de este libro, siga los siguientes pasos:

1. Ir a la página: http://libroweb.alfaomega.com.mx
2. Ir a la sección Catálogo y seleccionar la imagen de la portada del libro, al dar doble clic sobre ella, tendrá acceso al material descargable.

NOTA: Se recomienda respaldar los archivos descargados de la página web en un soporte físico.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN A LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

▷ 1.1 INTRODUCCIÓN

Iniciaremos con una explicación general sobre los orígenes y aplicaciones de la investigación de operaciones (IO) con el propósito de proporcionar una definición adecuada. Posteriormente, se describe la diferencia que hay entre un sistema y un modelo. Después se puntualiza por medio de ejemplos la distinción entre un modelo determinístico y un modelo estocástico, siendo ambos simbólicos. Se hace referencia a las siete fases que permiten con mayor facilidad modelar un sistema, los cuales son:

- Observaciones aplicadas al sistema.
- Definición del problema.
- Formulación del modelo.
- Solución del modelo.
- Validación del modelo.
- Modificación del modelo.
- La implementación del modelo.

Se explican conceptos que son componentes importantes en la estructura matemática de un modelo, como son:

- Datos.
- Variables de decisión.
- Parámetros.
- Restricciones.
- Función objetivo.
- Medidas de desempeño.

▷ 1.2 ORÍGENES DE LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Los aviones ingleses RAF fueron el único obstáculo de Adolf Hitler para poder invadir Inglaterra, considerados como la fuerza aérea más estoica de la Segunda Guerra Mundial. Su principal precursor, el primer ministro británico Winston Churchill, dijo un día refiriéndose a los pilotos de la RAF: *"Nunca en la historia de la guerra tantos tienen tanto que agradecer a tan pocos."*

La investigación de operaciones (IO), conocida también como la ciencia de la administración, nació en Inglaterra durante la Segunda Guerra Mundial, cuando la Alemania nazi tenía pensado dominar el espacio aéreo y terrestre de los británicos. En aquel momento histórico, el primer ministro Winston Churchill convocó a un equipo de científicos para estudiar y mejorar las estrategias de combate que les permitieran defenderse de los ataques alemanes.

El grupo era dirigido por el profesor y oficial naval Patrick M. S. Blackett, de la Universidad de Manchester. Este equipo estaba formado hasta agosto de 1940 por nueve profesionistas: un fisiólogo, dos físicos matemáticos, un astrónomo, un oficial del ejército, un topógrafo, un físico general y dos matemáticos. Después se integraron al equipo: químicos, bioquímicos, abogados, estadistas, entomólogos, psicólogos, arquitectos, paleontólogos y un astrónomo.

El establecimiento del equipo marcó la primera actividad formal de la IO militares, y su objetivo consistía en determinar la utilización más efectiva de los limitados recursos militares con los que contaban; las aplicaciones incluían:

a) Estudiar la manera en que la fuerza aérea de Inglaterra podría utilizar el radar recién descubierto para defender a los aliados de los ataques aéreos alemanes.
b) Mejorar la ubicación de los centros de recursos que proporcionaban el agua, el alimento, los refuerzos militares y los medios de transporte.
c) Mejorar la efectividad estratégica militar de nuevos tipos de bombardeos sobre la isla de Pantelleria (Mediterráneo en Italia).
d) Mejorar la efectividad estratégica militar de nuevos tipos de bombardeos submarinos en el Océano Atlántico y Océano Pacífico.

▷ 1.3 APLICACIONES DE LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

El 2 de septiembre de 1945, al finalizar la Segunda Guerra Mundial, los administradores utilizaron la investigación de operaciones en todo tipo de organizaciones (tanto en el

NOTA. El 10 de julio de 1943, a petición del presidente de Estados Unidos, Franklin D. Roosevelt, y el primer ministro británico, Winston Churchill, se invadió la isla italiana de Pantelleria (lugar de gran importancia estratégica en la zona del Mediterráneo). Después el ejército aliado invadió Sicilia y Roma. Cerca de unos 500 bombarderos aliados tomaron parte en la destrucción de los depósitos de armas, fábricas de municiones y aeródromos cercanos a la ciudad de Roma, protegiendo los edificios y los monumentos valiosos. Este hecho histórico fue posible gracias a la logística de la investigación de operaciones militares.

Figura 1.1

sector privado como en el público), con el propósito de optimizar la producción y la comercialización de sus productos y servicios hacia los consumidores (véase la Figura 1.1).

Un factor relevante en la evolución de la IO fue el descubrimiento y desarrollo de la computadora digital con alta capacidad de velocidad de cómputo, almacenamiento y recuperación de información, lo que permitió diseñar el uso de paquetes de computación como: LINDO, EXCEL, WinQSB, @RISK, TORA, STOM, etc., los cuales facilitan la enseñanza de los métodos de la IO y la toma de decisiones.

La Tabla 1.1 muestra algunos casos reales de organizaciones que han hecho uso de las técnicas de la investigación de operaciones.

Tabla 1.1

ORGANIZACIÓN	APLICACIÓN	AÑO	AHORRO ANUAL
YELLOW FREIGHT SYSTEM, INC.	Optimización del diseño de una red nacional de transporte y la programación de rutas de envío.	1992	17.3 millones de dólares.
AT&T	Desarrollo de un sistema basado en PC para guiar a los clientes del negocio en el diseño del centro de llamadas.	1993	750 millones de dólares.

(Continúa)

NOTA. En nuestros días ya es una práctica común e indispensable para cualquier tipo de organización utilizar los métodos cuantitativos de IO; sin embargo, no debemos olvidar que lo que ahora estudiamos fácilmente en los libros de texto alguna vez costó "esfuerzo, sangre y lágrimas", como lo dijo W. Churchill.

Tabla 1.1 (Continuación)

ORGANIZACIÓN	APLICACIÓN	AÑO	AHORRO ANUAL
DELTA AIRLINES	Maximización de ganancias a partir de la asignación de los tipos de aviones en 2500 vuelos nacionales.	1994	100 millones de dólares.
DIGITAL EQUIPMENT CORP.	Reestructuración de toda la cadena de proveedores en los centros de distribución de las plantas, sitios potenciales y áreas de mercado.	1995	800 millones de dólares.
CHINA	Selección y programación óptima de proyectos masivos, para cumplir con las necesidades futuras de energías del país.	1995	450 millones de dólares.
PROCTER AND GAMBLE	Rediseño del sistema de producción y distribución norteamericano, para reducir costos y mejorar la logística de llegada al mercado.	1997	200 millones de dólares.
TACO BELL	Programación óptima de empleados para proporcionar el servicio a clientes deseados con un costo mínimo.	1998	13 millones de dólares.

▷ 1.4 ¿QUÉ SE ENTIENDE POR INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES?

La investigación de operaciones (IO) es el título que se le da a un grupo de disciplinas involucradas en la solución óptima de problemas a través de la manipulación matemática. Los modelos de la IO han sido diseñados con la ayuda de diversos métodos determinísticos y estocásticos, los cuales permiten resolver las dificultades que puede enfrentar una organización.

La IO se caracteriza básicamente por lo siguiente:

a) Ayuda a determinar la cantidad de producción que debe llevar a cabo una organización.
b) Ayuda a implementar la forma en que se debe llevar a cabo la comercialización de productos y servicios emanados de una organización.
c) Participa indiscutiblemente en la toma de decisiones económicas y financieras que afectan de manera relevante la producción, la distribución y el intercambio de productos y servicios.

NOTA. A finales del siglo XX, con los trabajos desarrollados por Frederick W. Taylor, inician los fundamentos para el uso de los métodos cuantitativos aplicativos a la administración científica; sin embargo, la investigación moderna para el uso de métodos cuantitativos en la toma de decisiones se originó en agosto de 1940, durante la Segunda Guerra Mundial.

En forma general:

Podemos afirmar que la IO nos permite utilizar una metodología sistemáticamente cuantitativa, en el contexto del método científico, a fin de investigar, analizar y predecir el comportamiento de sistemas a base de modelos simbólicos, los cuales se encuentran formulados y solucionados por la colaboración de grupos interdisciplinarios que intervienen objetivamente en la toma de decisiones, lo que permite manufacturar y comercializar más fácilmente cualquier tipo de producto y servicio emanado de una organización. (Véase la Figura 1.2)

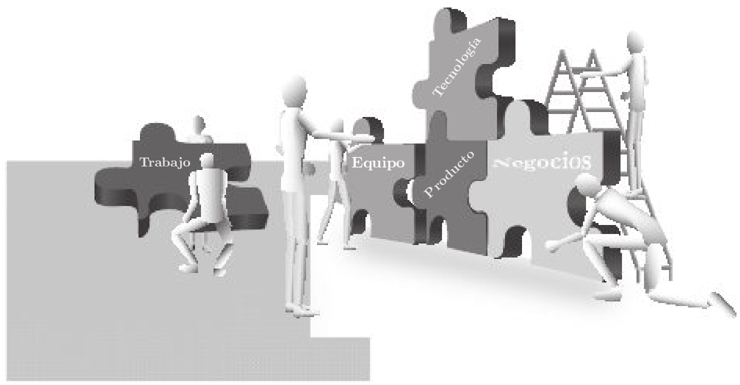


Figura 1.2

▷ 1.5 DIFERENCIA ENTRE UN SISTEMA Y UN MODELO

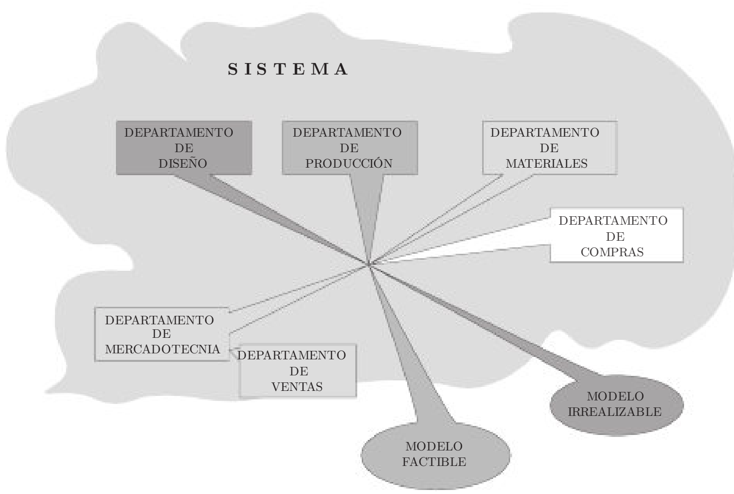


Figura 1.3

Un sistema, en el contexto de una organización, se puede definir como un conjunto de actividades laboralmente clasificadas, coordinadas y jerarquizadas bajo un control de calidad que son aplicadas a los diferentes departamentos que la conforman, los cuales trabajan interdependientemente y en equipo con el fin de obtener un producto o un servicio que deberá satisfacer las necesidades del consumidor. (Véase la Figura 1.3)

Por ejemplo, un sistema podría ser una empresa que manufactura y comercializa celulares. La clasificación y la coordinación en cada uno de los departamentos pueden estar jerarquizadas de la siguiente manera:

El departamento de mercadotecnia tendría la responsabilidad de saber cuáles son las necesidades de los consumidores con respecto a un celular; para saberlo requiere analizar factores como: detección de productos competitivos, pronósticos de ventas e intensidad campaña publicitaria y capacidad de instalaciones de distribución. A continuación, el departamento de diseño se encargaría de establecer si es posible diseñar físicamente el celular; en el caso de que sea factible su elaboración se emite la orden al departamento de producción, el cual requiere hacer un análisis de los siguientes factores: horas-máquina disponibles, horas-hombre disponibles, sucesión específica de operaciones en las máquinas, inventarios en proceso, número de artículos defectuosos producidos, tasa de inspección, etc. Posteriormente se solicita la materia prima al departamento de materiales, lo que implica realizar un estudio de cantidad límite disponible de almacenamiento de material, logística de entrega del material comprado, etc.; sin embargo, si este departamento no cuenta con los materiales apropiados, los pide al departamento de compras, por lo que es preciso realizar un análisis de: calidad e inspección de la materia prima, recursos económicos y análisis financieros, etc. Cuando el producto es terminado, el departamento de ventas se hace responsable de comercializar el producto.

Una vez entendido el concepto de sistema, podemos comprender qué es un modelo desde el punto de vista de la investigación de operaciones.

Un modelo representa una abstracción relativa y selectiva de aquellos factores dominantes (restricciones y parámetros) que se encuentran involucrados en la solución de un problema en una organización, el cual ayuda a los administradores a establecer una decisión objetiva, óptima y factible que permita lograr la meta deseada.

Por ejemplo, supongamos que la organización desea mejorar la calidad en la fabricación de celulares. Para lograr este propósito se deben identificar en el sistema aquellos factores dominantes que ocasionan un nivel de producción no óptimo. Una vez reconocidos, el equipo de IO debe diseñar un modelo factible que permita solucionar el problema. Por ejemplo, un estudio cuidadoso del número de artículos defectuosos producidos y la calidad e inspección de la materia prima puede mejorar la calidad en la producción; de ser así, el equipo de IO solucionará el contratiempo diseñando un modelo cuantitativo en términos de las tasas de producción de celulares y la calidad de la materia prima adquirida.

En general, no existen reglas predeterminadas para efectuar niveles de abstracción que nos permitan identificar aquellos factores dominantes que intervienen en la formulación de un modelo, cuya solución e interpretación nos ayude a establecer buenas decisiones; por lo tanto, para que un modelo pueda representar eficazmente un sistema, depende también en gran medida de la experiencia, la creatividad e imaginación del equipo de IO.

NOTA. Si los administradores consideraran todos los factores en forma explícita para que un modelo los ayudara a determinar el nivel de producción de celulares, se enfrentarían a una tarea cuyo modelo sería irrealizable. Razón por la cual se investiga, analiza, comprende y abstrae únicamente el objetivo que se desea alcanzar; incluyendo los factores dominantes que se involucran para poder construir un modelo matemático, cuya solución e interpretación les permita establecer una decisión adecuada con respecto a la cantidad de celulares que se deben manufacturar a fin de comercializarlos.

En conclusión, podemos afirmar que los modelos de investigación de operaciones bajo el marco de un análisis lógico y congruente son utilizados básicamente por tres razones:

a) Los modelos exigen una definición explícita del objetivo que se desea lograr.
b) Los modelos obligan a pensar cuidadosamente en los factores dominantes (restricciones y parámetros) que intervienen en la formulación de un problema.
c) Ayudan a implantar una decisión objetiva, óptima y factible en la solución de un problema, lo cual facilita el trabajo en equipo.

▷ 1.6 CLASIFICACIÓN DE MODELOS[1]

Hay tres tipos de modelos que son utilizados por los ingenieros:

Modelos físicos o icónicos:
Permiten materializar las propiedades físicas del objeto. Ejemplos de ellos son: la maqueta de un avión, de una casa, de un parque de diversiones, etcétera.

Modelos análogos:
Utilizan un medio diferente para representar físicamente las propiedades reales de un objeto. Por ejemplo: el velocímetro de un automóvil que utiliza una aguja sobre una escala graduada para medir la velocidad a la cual se desplaza el móvil; el diagrama análogo de un mapa que representa las calles de una ciudad, etcétera.

Modelos simbólicos:
Utilizan datos, parámetros y restricciones sujetas a un objetivo que se desea alcanzar. Por ejemplo: un modelo económico puede ayudar a tomar una decisión entre comprar una casa o alquilar un departamento, pues debe considerarse el pago inicial, las tasas hipotecarias, el flujo de efectivo, la plusvalía, la devaluación, etcétera.

En general, estos tres tipos de modelos tienen algo en común:

Representan una abstracción cuidadosamente seleccionada de la realidad de un sistema

Desde el punto de vista de la OI, los modelos simbólicos se dividen en dos tipos: determinísticos y estocásticos:

Modelos determinísticos:
Nombrados así, debido a que se conocen con certeza todos los datos necesarios para obtener una solución óptima, lo que asegura relativamente la incertidumbre con respecto a las variables involucradas. Un ejemplo de modelo determinístico es la asignación de la tripulación de una aerolínea para cada uno de los vuelos del mes próximo conociendo los horarios de vuelo, el personal disponible, las restricciones legales sobre horas de trabajo,

1 Parte de la información contenida en este subcapítulo fue obtenida de: G.D. Eppen, F.J. Gould, C.P. Schmidt, Jeffrey H. Moore y Larry R. Weatherford. *Investigación de Operaciones en la Ciencia de la Administración*, 5a. ed., Editorial Pearson Prentice Hall, pág. 18 y 19.

las reglas del sindicato, etc. Generalmente, los modelos determinísticos se usan para la toma de decisiones internas de una organización.

Modelos estocásticos:
Llamados así, debido a que no se conocen con certeza todos los datos necesarios para obtener una solución óptima, lo cual ocasiona que las variables involucradas se comporten relativamente de manera aleatoria. Estos problemas son denominados también modelos *Probabilísticos.*

Un ejemplo es la decisión de establecer una compañía de Internet mediante la venta pública de acciones de capital antes de saber si el mercado para nuestra oferta será favorable (mercado en alza) y rendirá un alto precio de las acciones, o desfavorable (mercado sostenido) y el precio será bajo. Estos modelos incorporan la incertidumbre a través de probabilidades en las variables aleatorias; en este caso, la condición futura del mercado de valores. Además, tienden a reportar su mayor utilidad cuando intervienen en ellos muchas entradas inciertas y hay pocas restricciones.

En forma general, podemos asegurar que no existe un modelo completamente determinístico (ausente de incertidumbre en todas sus variables) ni totalmente estocástico o probabilístico (con incertidumbre en todas sus variables). (Véase la Figura 1.4)

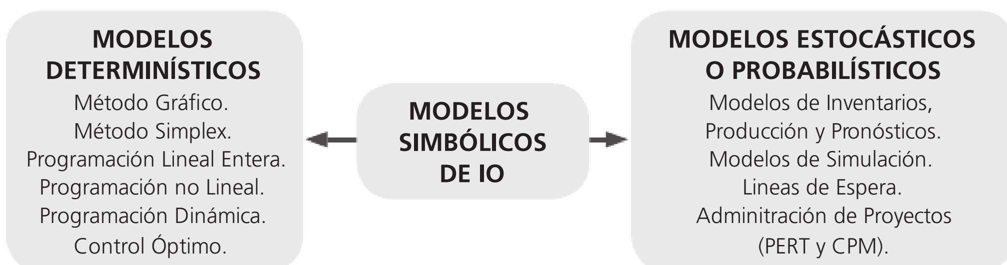


Figura 1.4 Ejemplos de clasificación de modelos de investigación de operaciones.

▷ 1.7 FASES PARA MODELAR UN SISTEMA

Si cada individuo percibe, admira y opina de manera diferente con respecto a las pinturas de Picasso o con respecto a las esculturas de Miguel Ángel, entonces cada sujeto tiene una forma particular de investigar, analizar y comprender un sistema cualquiera; por lo tanto, no existen reglas o métodos específicos que permitan entender, solucionar y aplicar un modelo. Lo que nos lleva a pensar que en la complejidad del mundo real existen diferentes caminos correctos para idealizar y construir un modelo óptimo a partir de un sistema. Por consiguiente, concluimos que para establecer un modelo simbólico, sólo se pueden ofrecer lineamientos generales para implementar la IO en la práctica, los cuales comprenden las fases de la Figura 1.5.

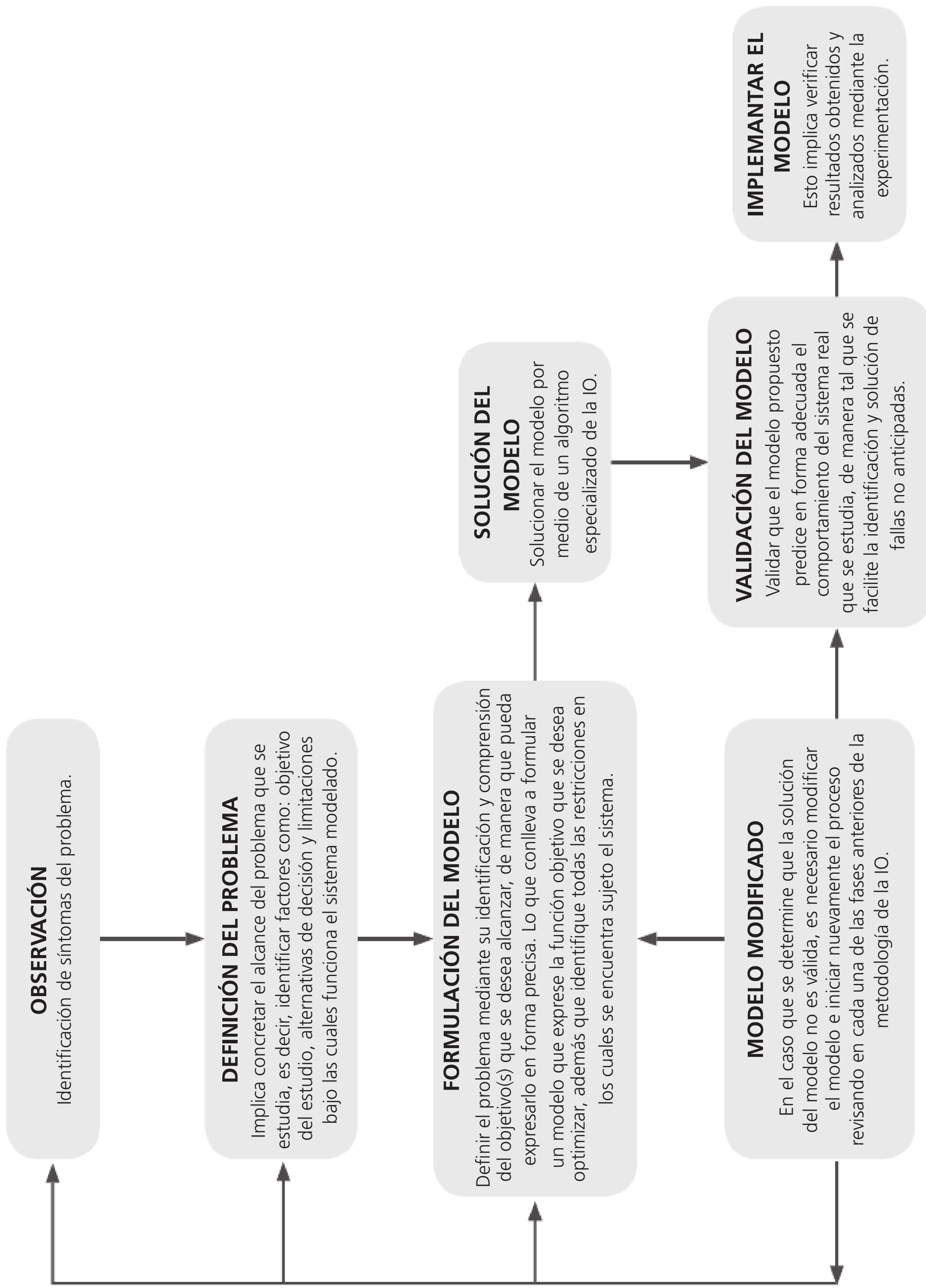

OBSERVACIÓN
Identificación de síntomas del problema.
DEFINICIÓN DEL PROBLEMA
Implica concretar el alcance del problema que se estudia, es decir, identificar factores como: objetivo del estudio, alternativas de decisión y limitaciones bajo las cuales funciona el sistema modelado.
FORMULACIÓN DEL MODELO
Definir el problema mediante su identificación y comprensión del objetivo(s) que se desea alcanzar, de manera que pueda expresarlo en forma precisa. Lo que conlleva a formular un modelo que exprese la función objetivo que se desea optimizar, además que identifique todas las restricciones en los cuales se encuentra sujeto el sistema.
SOLUCIÓN DEL MODELO
Solucionar el modelo por medio de un algoritmo especializado de la IO.
VALIDACIÓN DEL MODELO
Validar que el modelo propuesto predice en forma adecuada el comportamiento del sistema real que se estudia, de manera tal que se facilite la identificación y solución de fallas no anticipadas.
IMPLEMANTAR EL MODELO
Esto implica verificar resultados obtenidos y analizados mediante la experimentación.
MODELO MODIFICADO
En el caso que se determine que la solución del modelo no es válida, es necesario modificar el modelo e iniciar nuevamente el proceso revisando en cada una de las fases anteriores de la metodología de la IO.

Figura 1.5

La primera fase es tradicional al método científico, la *observación*:

La observación se usa para identificar hechos y síntomas relativos a un sistema, puede hacerse con una ojeada casual o con un examen concentrado, detallado y prolongado que se base en los requerimientos del problema que se estudia. El administrador capacitado debe ser muy sensible a la presencia de contratiempos, pero debe cerciorarse de que se identifique el principal y no sólo uno de sus síntomas.

La segunda fase consiste en *definir el problema*:

Es una función que todo el equipo de OI debe realizar, el cual implica estudiar, definir e identificar la principal causa del problema:

a) La descripción de alternativas de decisión.
b) La determinación del objetivo del estudio.
c) La especificación de las limitaciones bajo las cuales funciona el sistema.

La tercera fase consiste en *formular el modelo*:[2]

Se debe seleccionar o aislar del sistema aquellos aspectos de la realidad que sean relevantes dentro del ámbito del problema, estableciendo los objetivos que se desean alcanzar y las restricciones bajo las cuales se encuentra sujeto el sistema modelado. Ejemplo:

a) Como objetivos: Podemos buscar satisfacer la demanda de varios artículos a un costo de producción mínimo o maximizar las ganancias al comercializar dichos artículos; sin embargo, debemos aclarar que no es posible que un mismo modelo satisfaga ambas condiciones a la vez, del mismo modo que es absurdo tratar de obtener el mayor rendimiento con la menor inversión o el mayor bien para el mayor número de personas; por consiguiente, debemos clasificar jerárquicamente los objetivos que se desean alcanzar y tratar de solucionarlos.
b) Como restricciones: Podemos buscar obtener la cantidad de materia prima requerida para llevar a cabo la elaboración de uno a más artículos, la cantidad de horas-hombre disponibles con las que cuenta el departamento de producción, el costo por transportar los artículos al lugar donde se comercializarán, el costo por la publicidad, etcétera.

En general, en todo tipo de modelos determinísticos y estocásticos se involucran variables exógenas y endógenas que deben ser identificadas y definidas en la formulación de un modelo simbólico. Considere la Figura 1.6.

NOTA. Algunos constructores de modelos prefieren emplear el término variable exógena no controlada o variable aleatoria, en lugar de parámetro. Esto les permite una definición más restrictiva de parámetro, para caracterizar la incertidumbre fundamental de una variable exógena no controlada.

2 Parte de la información contenida en la tercera fase denominada FORMULAR MODELO, fue obtenida de: G.D. Eppen, F.J. Gould, C.P. Schmidt, Jeffrey H. Moore y Larry R. Weatherford. Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa, 5a edic., Editorial Pearson Prentice Hall, Educación, pág. 12 y 13.

Figura 1.6

Las variables exógenas son identificadas como elementos de entrada bajo las cuales trabaja el modelo. Estas se dividen en: variables de decisión y variables incontrolables (llamados parámetros). Las primeras pueden ser controladas por los administradores, por ejemplo: el precio en el que se deben vender los artículos, la ubicación de las instalaciones en donde se realizará su comercialización, etc. Las segundas son las variables que se encuentran bajo el control de otras personas o del medio ambiente, por ejemplo, los precios que cobran por comercializar artículos similares, el cambio constante de la materia prima en cada mes, etcétera.

Las variables endógenas están divididas en: medidas de desempeño y variables de consecuencia. Las primeras permiten evaluar hasta qué punto se han alcanzado los objetivos deseados, por ejemplo, los ingresos, la participación del mercado, el costo total, la moral del trabajador, la satisfacción del cliente y el rendimiento sobre la inversión (razón por la cual las medidas de desempeño se llaman a menudo función objetivo). Las segundas permiten entender e interpretar los resultados que proporciona el modelo, por ejemplo, la subdivisión de los ingresos, el número de artículos obtenidos, etcétera.

En resumen, los modelos cuantitativos se inician por medio de la evaluación e interpretación de datos numéricos, los cuales operan con respecto a un marco de referencia conceptual; a partir de estos datos, podemos deducir las ecuaciones matemáticas que relacionan entre sí todas las variables exógenas y endógenas implicadas en un modelo simbólico.

Conclusión: un modelo simbólico define el objetivo que desea lograr y los factores dominantes que intervienen (restricciones y cambios de incertidumbre que existen en sus respectivos parámetros).

Con base en este marco de referencia conceptual se puede elegir el mejor método para construir un modelo determinístico o estocástico.

La cuarta fase consiste en *solucionar el modelo*:

Implica encontrar los valores de las variables dependientes asociadas a los componentes controlables del sistema; es decir, obtener el objetivo que se desea alcanzar, las restricciones bajo las cuales se encuentre sujeto el problema y los cambios de incertidumbre que existen en sus respectivos parámetros; a esto se le conoce como *Análisis de Sensibilidad* y es muy necesario cuando los principios del sistema no pueden estimarse con exactitud.

La quinta fase consiste en *validar el modelo*:

Un modelo es válido cuando proporciona una predicción confiable del funcionamiento del sistema. Para comprobar la eficiencia de este modelo es necesario comparar las variables exógenas del actual con respecto a uno pasado en una situación similar. Si el actual, comparado con el anterior, reproduce resultados relativamente similares en el contexto de las variables endógenas, es válido para iniciar la fase de implementación. La ventaja de utilizar esta técnica de validación es que se pueden encontrar fallas en el modelo actual con respecto al modelo pasado y viceversa, lo cual origina modificaciones que permiten introducir alternativas de solución y estimar el desempeño histórico de un modelo actual.

La sexta fase consiste en *modificar el modelo*:
En el caso de que no suceda lo ya indicado, es necesario modificar el modelo. Lo cual implica que deberá iniciar nuevamente el proceso revisando cada una de las fases anteriores de la metodología de la OI

En la última y séptima fase se lleva a cabo la *implementación del modelo*:
Esto implica verificar los resultados obtenidos y analizarlos mediante la experimentación. Esta etapa es crítica, porque sólo aquí es donde se cosecharán los beneficios del estudio, los cuales son respaldados por la toma de decisiones al mundo real.

▶ RESUMEN

Se proporcionó una panorámica sobre el uso de los modelos cuantitativos para la toma de decisiones, con especial énfasis en su papel como herramienta para el equipo de investigación de operaciones.

Se explicó que un modelo es una representación abstracta y selectiva de aquellos factores dominantes involucrados en la solución de problemas en una organización, el cual ayuda a los administradores a establecer una decisión objetiva, óptima y factible que permita lograr la meta deseada.

También se comentó que un modelo implementado se encuentra sujeto a decisiones administrativas en un contexto cuantitativo; es decir, las decisiones son números o datos cuantitativos.

Además, se manifestó que para implementar un modelo en la práctica, sólo se pueden ofrecer lineamientos generales, los cuales implican generalmente siete pasos:

1. Observaciones aplicadas al sistema.
2. Definición del problema.
3. Formulación del modelo.
4. Solución del modelo.
5. Validación del modelo.
6. Modificación del modelo.
7. Implementación del modelo.

En conclusión, podemos afirmar que este método (fases para modelar un sistema) es una herramienta científica cuya médula espinal sustenta la base del equipo de investigación de operaciones, el cual tiene como objetivos: observar, investigar, analizar, solucionar y predecir el comportamiento de sistemas con base en modelos matemáticos, los cuales son aplicados en cualquier tipo de organización.

▶ EVALUACIÓN

1. ¿Cuáles fueron las principales aplicaciones de la OI durante la Segunda Guerra Mundial?
2. Defina la IO.
3. Describa cómo pueden ayudar los modelos simbólicos a una organización.
4. Explique la diferencia entre sistema y modelo.
5. Defina modelo determinístico y modelo estocástico. Dé un ejemplo de cada uno.
6. ¿Qué se entiende por modelo cuantitativo óptimo?
7. Defina cada uno de los siguientes conceptos: datos, parámetros, medidas de desempeño, variables de decisión, variables exógenas y endógenas.
8. ¿Por qué la OI se concibe como una ciencia y como un arte?
9. ¿Qué tipos de modelos son utilizados por los ingenieros? Dé un ejemplo de cada uno.
10. Explique las cinco fases que contribuyen a modelar simbólicamente un sistema, basándose en la Figura 1.7.

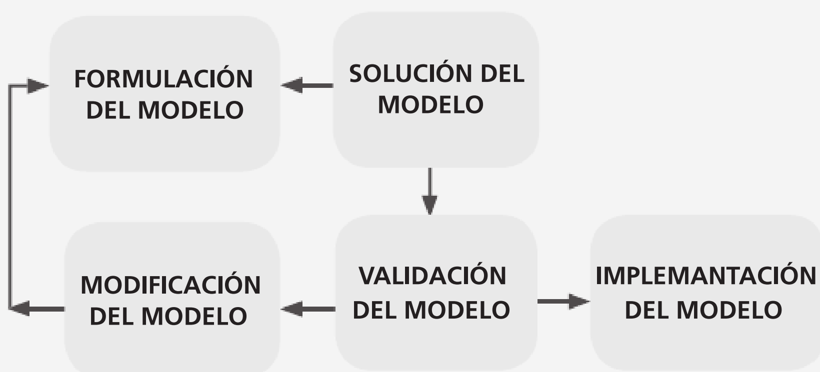


Figura 1.7

▶ PL EN ACCIÓN (Administración de ingresos en American Airlines)[3]

Una de las grandes historias de éxito en los métodos cuantitativos es la del grupo de 12 analistas de investigación de operaciones de American Airlines, reunido en 1982 por Thomas M. Cook. Bajo su guía el grupo de IO creció a una plantilla

3 PL en ACCIÓN fue obtenido de: David R. Anderson, Dennis J. Sweeney y Thomas A. Williams. *Métodos Cuantitativos para los Negocios.* Editorial Thomson, 9a. ed., la cual es proporcionada por: Peter Horner, "The sabre Stoy", OR/MS Today (junio del 2000). Pág. 199. Basado a su vez en: Mark J. Tedone, "Repaireble Part Management", ***Interfaces*** 19, núm. 4 (julio/agosto de 1989), pp. 61-68.

de 75 profesionales que elaboraban modelos y realizaban estudios para apoyar la toma de decisiones de la administración ejecutiva. En la actualidad, el grupo de IO se llama Sabre y emplea 10 000 profesionales en todo el mundo.

Una de las aplicaciones más significativas elaboradas por el grupo de IO ocurrió debido a la desregulación de la industria de aerolíneas en Estados Unidos, a fines de la década de 1970; como resultado de ella, varias aerolíneas de bajo costo fueron capaces de invadir el mercado vendiendo pasajes a una fracción del precio cobrado por transportadores establecidos como American Airlines. Enfrentando la cuestión de cómo competir, el grupo de IO sugirió ofrecer clases de tarifas suficientes (tarifa con descuento y tarifa completa) y en el proceso crearon un área nueva, métodos cuantitativos a los que hace referencia como administrador de producción y de ingresos.

El grupo de IO utilizó técnicas de pronóstico y optimización para determinar cuántos boletos se deben vender con descuentos y cuántos mantener con la tarifa completa. Aunque la implementación inicial fue relativamente burda, el grupo continuó mejorando los modelos de pronósticos y optimización que guían al sistema para obtener mejores datos. Thomas M. Cook cuenta al menos con cuatro generaciones básicas de administración de ingresos durante su ejercicio. Cada una produjo más de 100 millones de dólares de incremento en la utilidad sobre su predecesora. En la actualidad, el sistema de administración de ingresos en American Airlines genera casi 1 000 millones de dólares anuales de incremento en sus ingresos.

Hoy en día, casi cualquier tipo de organización de clase nacional o mundial utiliza alguna clase de sistema de administración de ingresos, un atributo más a los esfuerzos pioneros del grupo de IO en American Airlines y su líder.

▶ GLOSARIO

Definición del problema.—Proceso que implica concretar el alcance del problema que se estudia; es decir, identifica factores como: objetivo del estudio, alternativas de decisión y limitaciones bajo las cuales funciona el sistema modelado.

Formulación de modelo.—Proceso de definir el problema mediante su identificación y comprensión del objetivo(s) que se desea optimizar, lo que implica identificar todas las restricciones bajo las cuales se encuentra sujeto el sistema.

Función objetivo.—Expresión matemática que define lo que se va a maximizar o minimizar.

Implementación del modelo.—Proceso que implica verificar y analizar resultados obtenidos mediante la experimentación.

Investigación de operaciones.—Metodología sistemática cuantitativa que es utilizada para investigar, analizar y predecir el comportamiento de sistemas a base de modelos simbólicos, los cuales se encuentran formulados y solucionados por la colaboración de grupos interdisciplinarios.

Modelo.—Es una representación abstracta y selectiva de aquellos factores dominantes que se encuentran involucrados para solucionar un problema que enfrenta una organización, el cual ayuda a los administradores a establecer una decisión objetiva, óptima y factible que permite lograr el objetivo deseado.

Modelos análogos.—Utilizan un medio diferente para representar físicamente las propiedades reales de un objeto.

Modelos determinísticos.—Nombrados así, debido a que se conocen con certeza todos los datos necesarios para obtener una solución óptima, lo que asegura relativamente la falta de incertidumbre con respecto a las variables involucradas.

Modelos estocásticos.—Llamados así, debido a que no se conocen con certeza todos los datos necesarios para obtener una solución óptima, lo que causa que las variables involucradas se comporten relativamente de manera aleatorias. Estos problemas son denominados también modelos *probabilísticos*.

Modelos físicos o icónicos.—Permiten materializar las propiedades físicas del objeto. Por ejemplo: la maqueta de un avión, de una casa, de un parque de diversiones, etcétera.

Modelo modificado.—Proceso de modificar el modelo revisando en cada una de las fases de la metodología de la (IO).

Modelos simbólicos.—Utilizan datos, parámetros y restricciones que se encuentran sujetos bajo un objetivo que se desea alcanzar.

Parámetros.—Un número o símbolo de un modelo que debe tener un valor numérico proporcionado por el usuario.

Restricciones.—Limitaciones o requisitos impuestos a la solución del problema.

Solución del modelo.—Proceso de solucionar un modelo por medio de un algoritmo matemático IO, el cual permite encontrar el objetivo que se desea alcanzar bajo un conjunto de restricciones.

Sistema.—Conjunto de actividades laborales que se encuentran clasificadas, coordinadas y jerarquizadas bajo un control de calidad aplicado a los diferentes departamentos que conforman la organización, los cuales trabajan interdependientemente y en equipo con el fin de obtener un producto o un servicio que deberá satisfacer las necesidades del consumidor al ser comercializado.

Solución de problemas.—Proceso de identificar la diferencia entre el estado actual de las cosas y el deseado y luego tomar una acción para reducir o anular la diferencia.

Toma de decisiones.—Proceso de definir un problema, identificar alternativas, determinar los criterios, evaluar alternativas y elegir una objetiva, óptima y factible.

Variables de consecuencia.—Variables que permiten entender e interpretar los resultados que proporciona el modelo.

Variables endógenas.—Variables que son reconocidas por los resultados de salida que deberán ser producidos por el modelo.

Variables exógenas.—Variables que son identificadas como elementos de entrada bajo los cuales trabaja el modelo.

Variables de decisión.—Variables que los administradores pueden controlar.

Variables de desempeño.—Variables que permiten evaluar hasta qué punto se han alcanzado los objetivos deseados.

Variables incontrolables denominados parámetros.—Variables que se encuentran bajo el control de otras personas responsables de tomar decisiones o del medio ambiente.

CAPÍTULO 2

TEMAS FUNDAMENTALES DE GEOMETRÍA ANALÍTICA Y ÁLGEBRA MATRICIAL

▷ 2.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presentan algunos temas de geometría analítica y álgebra matricial que son indispensables para comprender la materia de programación lineal (como son: el método gráfico y el método símplex), que se imparten en las instituciones educativas a nivel superior.

Con el fin de facilitar el aprendizaje en los capítulos que conforman esta obra, se expone por medio de ejemplos la siguiente información:

a) Coordenadas rectangulares y pendiente de la recta.
b) Definición, tipos y multiplicación de matrices.
c) Definición del concepto de álgebra e importancia que tiene en la solución de problemas.
d) Explicación de los seis métodos algebraicos que permiten esclarecer sistemas de ecuaciones lineales, los cuales, para su mejor comprensión e interpretación, se representan gráficamente en un plano cartesiano, estos son:

- Método de reducción.
- Método de sustitución.
- Método de igualación.
- Método de Kramer.
- Método de la matriz inversa.
- Método de Gauss-Jordan.

▷ 2.2 COORDENADAS RECTANGULARES Y PENDIENTE

Coordenadas rectangulares

El sistema de coordenadas rectangulares consta de un plano divido en cuatro regiones, llamados cuadrantes [(I, II, III y IV ver la Figura 2.1]. Los cuadrantes se encuentran formados por dos rectas que se cruzan perpendicularmente, en el origen O. La recta horizontal X'OX se llama eje X, y la recta Y'OY se nombra eje Y. La distancia de un punto al eje X se llama *abscisa* y tiene valor positivo cuando el punto se encuentran situado a la derecha de O, y negativas en caso contrario. La distancia de un punto al eje Y se llama *ordenada* y es positiva cuando el punto está arriba de O, y negativa en sentido opuesto. Tanto la ordenada como la abscisa constituyen las coordenadas en un punto cualquiera (P), que se encuentra representado en un plano rectangular por (X, Y).

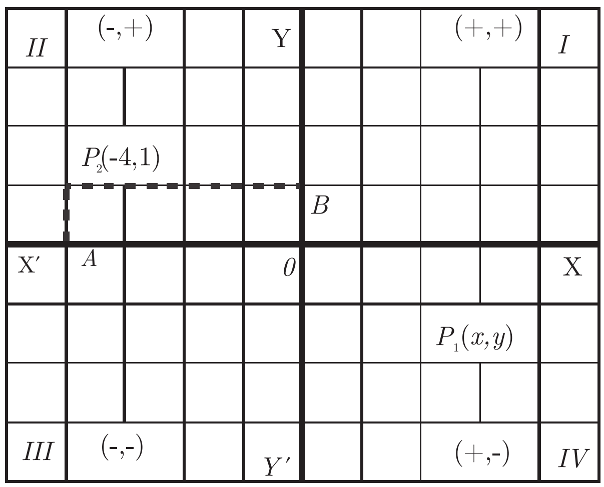


Figura 2.1

Es evidente que a cada punto P del plano cartesiano le corresponde un solo par (abscisa y ordenada) de coordenadas (X, Y). Recíprocamente, un par (abscisa y ordenada) de coordenadas (X, Y) cualquiera determinan un solo punto P en el plano coordenado. En conclusión, un sistema coordenado rectangular en el plano establece una correspondencia biunívoca entre cada punto del plano y un par coordenado de números reales.

La ubicación de un punto por medio de sus coordenadas se llama *trazado del punto*; por ejemplo (Ver Figura 2.1), para trazar el punto (-4, 1), indicamos primero el punto *A* sobre el eje X, que está a cuatro unidades a la izquierda de O; después, a partir de *A*, sobre una paralela al eje Y, contaremos una unidad hacia arriba del eje X, obteniendo así las coordenadas del punto P_2 (-4, 1).

Pendiente de la recta:

Una recta es una sucesión infinita de puntos alineados en una misma dirección (→), la cual puede ser trazada determinando dos puntos (P_1 — P_2.) Ahora bien, la recta puede estar dibujada en forma *a*) paralela al eje X y perpendicular al eje Y, o *b*) paralela al eje Y y perpendicular al eje X, o *c*) tener inclinación; es decir, la recta tiene pendiente. (Ver la Figura 2.2)

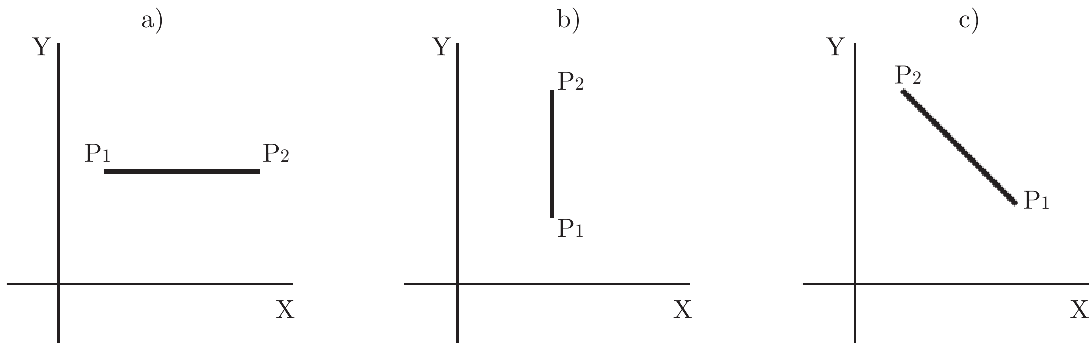


Figura 2.2

De acuerdo con lo anterior, podemos definir a la recta como el lugar geométrico (coordenadas rectangulares) en donde se trazan dos puntos diferentes P_1 (x_1, y_1) y P_2 (x_2, y_2) que permiten establecer su longitud y su posible pendiente.

La pendiente o pendiente angular de una recta se define como la tangente de su ángulo de inclinación, y se designa comúnmente con la letra m. Por lo tanto, la podemos escribir como $m = \text{tag } \alpha$. (Ver la Figura 2.3)

La pendiente de la recta L es positiva, si el ángulo α es agudo (*menos de* 90°); si el α' es obtuso (*mayor de* 90°) la pendiente será negativa. Cualquier recta que sea paralela al eje Y será perpendicular al eje X, y su ángulo de inclinación será 90°. Como 90° no está definida, la pendiente de una recta paralela al eje Y no existe; por consiguiente, toda recta perpendicular al eje X no tiene pendiente. (Ver la Figura 2.2 b))

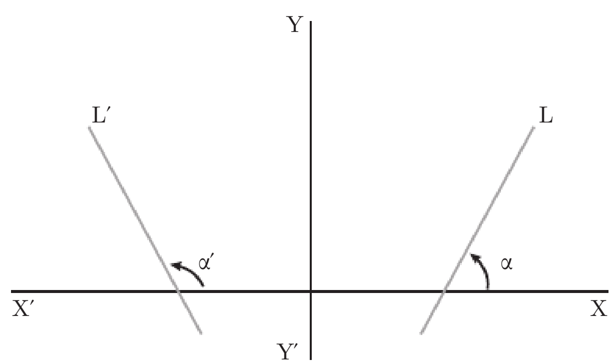


Figura 2.3

Si $P_1 (x_1, y_1)$ y P_2 (x_2, y_2) son dos puntos cualesquiera de la recta, entonces la pendiente de la recta es:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},\ x_1 \neq x_2$$

Demostración. De la Figura 2.4, consideremos que los puntos P_1 y P_2 determinan la recta y α la pendiente. Ahora bien, tracemos por P_1 y P_2 las perpendiculares P_1A_1 y P_2A_2 al eje X, y por P_2 tracemos una paralela al eje X que corte a P_1A_1 en B. El ángulo $P_1P_2B = \alpha$, por trigonometría obtenemos:

$$m = tg\,\alpha \;\overline{BP_1}\big/\overline{BP_2}$$

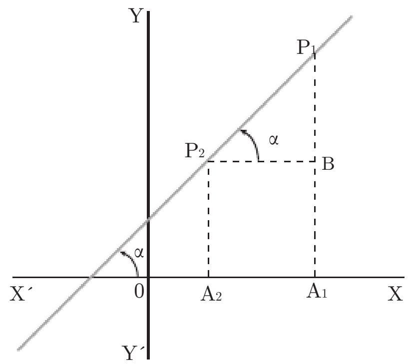


Figura 2.4

Las coordenadas de los puntos A_1, A_2, y B son $A_1\,(x_1,0)$ y $A_2\,(x_2,0)$ y B $(x_1,\ x_2)$. Por lo tanto, tenemos:

$\overline{BP_1} = y_1 - y_2, \overline{P_2B} = \overline{A_2A_1} = x_1 - x_2$, Sustituyendo estos valores en $tg\,\alpha = \overline{BP_1}\big/\overline{BP_2}$

Obtenemos demostrar: $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\ si\ x_1 \neq x_2$

Ejercicio:

(Ver la Figura 2.5)

Determinar la pendiente de la recta, sabiendo que sus coordenadas rectangulares son las siguientes: $P_1\,(2,1)\ y\ P_2\,(0,3)$

Aplicamos la fórmula $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, sustituimos valores $m = \dfrac{1-3}{2-0} = \dfrac{-2}{2} = -1$

Tenemos que la pendiente (m) es negativa; es decir, su ángulo α es obtuso (*mayor de* 90°).

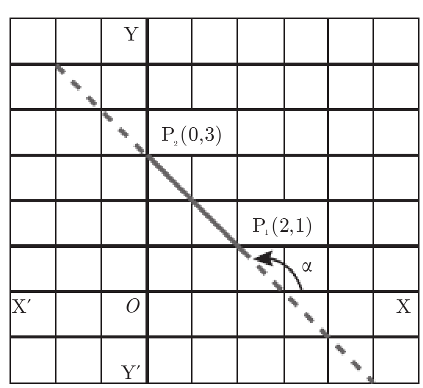


Figura 2.5

▷ 2.3 DEFINICIÓN, TIPOS Y MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

◢ ¿Qué es una matriz?

Denominamos matriz a una ordenación de números colocados en filas y columnas, encerrados entre paréntesis, corchetes o barras.

Ejemplos:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{6} \\ 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C=\begin{vmatrix} 2 & \frac{3}{4} & 8 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{9} \end{vmatrix}$$

Cada uno de los números que conforman la matriz es llamado *elemento*. Un elemento se distingue de otro por la posición que ocupa; es decir, el renglón (*fila*) y la *columna* a la que pertenece. El número de filas y columnas de una matriz se denomina *dimensión de la matriz*. (Véase la Figura 2.6)

$$B=\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{6} \\ 2 & -3 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

El elemento 1 pertenece al renglón 3 y a la columna 2. La matriz es de dimensión 3x2, es decir; 3 filas y 2 columnas.

$$(1.1)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

La matriz 1.1 se representa por « matriz $[a_{ij}]$, mxn », o bien, « matriz $A=[a_{ij}]$, mxn »
Los subíndices $\boldsymbol{i}$ de la matriz A, indican las filas, y los subíndices $\boldsymbol{j}$ de la misma matriz, representan las columnas.

Figura 2.6

◢ Tipos de matrices:

Existen diferentes tipos de matrices, pero sólo se hará referencia a las que necesitamos para comprender los temas que se tratan en esta obra.

1. Matriz cuadrada: Llamamos matriz cuadrada cuando contiene el mismo número de filas como de columnas en sus elementos; es decir, $m = n$.

Ejemplo:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Se le denomina *traza* de la matriz A a la suma de los elementos que conforma la *diagonal principal* ($a_{11}=2$, $a_{22}=1$ y $a_{33}=5$).

2. Matriz triangular superior: Una matriz cuadrada cuyos elementos $a_{ij} = 0$ para $i > j$ se llama matriz triangular superior.
Ejemplo:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

3. Matriz triangular inferior: Una matriz cuadrada cuyos elementos $a_{ij} = 0$ para $i < j$ se llama matriz triangular inferior.
Ejemplo:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Matriz triangular diagonal: A la matriz cuyos elementos superiores e inferiores son nulos, se le conoce como matriz diagonal.
Ejemplo:

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Matriz unidad o identidad: A la matriz diagonal cuyos elementos adquieren valores numéricos de unos (1) en su *diagonal principal*, se denomina matriz unidad. La matriz unidad se representa con la letra mayúscula I.
Ejemplo:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Matriz invertible: Una matriz cuadrada A de orden n es *invertible*, *no singular*, *no degenerada,* si existe una matriz cuadrada de orden n, llamada *matriz inversa*; representada como A^{-1}, tal que $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$, donde I_n es la *matriz identidad* de orden n. Una matriz *no invertible* es singular o degenerada si, y sólo si, su determinante es nulo.

Más adelante se soluciona un problema algebraico, con el fin de hacer referencia a la matriz inversa. En este problema se aplica el método de Gauss-Jordan para solucionarlo[1].

Multiplicación de matrices:

Analizaremos primero la multiplicación de una matriz por un escalar y después el producto de dos matrices.

1 En el método de Gauss-Jordan se coloca a la izquierda la matriz dada y a la derecha la matriz identidad. Luego, por medio del uso de operaciones de renglones, se intenta formar en la izquierda la matriz identidad y a la derecha la matriz inversa.

1. Multiplicación de una matriz por un escalar:

Dada una matriz A de m filas y n columnas. Es decir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ se escribe genéricamente como } A = \left[a_{ij}\right]_{m\,x\,n}$$

La multiplicación de A por un escalar k, que se denota como $k.A$, $k\ x\ A$ o simplemente kA:

$$kA = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ se escribe genéricamente como } kA = \left[k.a_{ij}\right]_{m\,x\,n}$$

En el caso particular de multiplicación por enteros, se puede considerar como sumar o restar la misma matriz tantas veces como indique el escalar:

$$n\,x\,A = \overbrace{A + \cdots + A}^{n}$$

Propiedades del producto de una matriz por un escalar:

Sean A y B matrices y también c y d escalares, la multiplicación de matrices por escalares cumple con las siguientes propiedades (Ver Tabla 1):

Tabla 2.1

	PROPIEDADES
Elemento neutro	Existe el elemento neutro uno, de manera que $1.A^{-1} = A^{-1}$.
Propiedad asociativa	$(c.d).A = c.(d.A)$
Propiedad distributiva	
-De escalar	$c.(A+B) = c.A+c.B$
-De matriz	$(c+d).A=c.A+d.A$

Ejemplo:

Realizar el producto de la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2/5 & 0 \end{bmatrix}$ por 2

$$kA = \left[k.a_{ij}\right]_{m\,x\,n} = 2\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2/5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 4/10 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Multiplicación de dos matrices:

Dadas dos matrices A y B, tales que el número de columnas de la matriz A es igual al número de filas de la matriz B, es decir:

$$A = \left[a_{ij}\right]_{m\,x\,n} \text{ y } B = \left[b_{ij}\right]_{n\,x\,p}$$

La multiplicación de A por B se indica como $A.B$, $A\ x\ B$ o simplemente AB, el resultado del producto es un nueva matriz:

$C = AB\left[c_{ij}\right]_{m\,x\,p}$; donde cada elemento c_{ij} está definido por:

$$c_{ji} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rj}$$ Por ejemplo:

$$C = AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{11} b_{22} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} \\ a_{31} b_{11} + a_{32} b_{21} & a_{31} b_{12} + a_{32} b_{22} \end{bmatrix}$$

Propiedades del producto de matrices:

Si las matrices A y B están bien definidas (es decir, el número de columnas y filas en sus elementos permiten realizar las multiplicaciones), se cumple con las siguientes propiedades de matrices (Ver Tabla 2.2):

Tabla 2.2

	PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE MATRICES
No es conmutativa	$A \cdot B \neq B \cdot A$
Elemento neutro	Si A es un matriz cuadrada de tamaño m, entonces la matriz Identidad I_{mxm} es elemento neutro de manera que: $I.A = A.I = A$
Propiedad asociativa	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
Propiedad distributiva con respecto a la suma	$C \cdot (A+B) = C \cdot A + C \cdot B$

Sin embargo:
$\boldsymbol{AB = 0}$ ***no implica*** necesariamente que $\boldsymbol{A = 0}$ **o** $\boldsymbol{B = 0}$,
$\boldsymbol{AB = BA}$ no implica necesariamente que $\boldsymbol{B = C}$

Ejercicio:

Realizar el producto de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ por la matriz $B = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

$$C = A.B \begin{bmatrix} (2*9) + (6*0) & (2*1) + (6*8) \\ (5*9) + (4*0) & (5*1) + (4*8) \\ (7*9) + (3*0) & (7*1) + (3*8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18+0 & 2+48 \\ 45+0 & 5+32 \\ 63+0 & 7+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 50 \\ 45 & 37 \\ 63 & 31 \end{bmatrix}$$

Una fábrica de juguetes se dedica al ensamblaje de trenes de madera. Para ensamblar un tren se requiere de 7 tornillos, 6 tuercas y 8 abrazaderas; y para un carrito se necesita de 5 tornillos, 9 tuercas y 4 abrazaderas. Si un trabajador armó el día lunes 28 trenes y 21 carros, y otro armó el día martes 32 trenes y 18 carros, ¿cuantos tornillos, tuercas y abrazaderas se necesitaron en total?

1. Coloquemos los datos en las Tablas 2.3 y 2.4:

Tabla 2.3

	Tren	Carro
Tornillos	7	5
Tuercas	6	9
Abrazaderas	8	4

Tabla 2.4

Lunes	Martes	
28	32	Trenes
21	18	Carros

Realizamos la multiplicación de matrices:

$$C = A.B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 9 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 28 & 32 \\ 21 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (7*28)+(5*21) & (7*32)+(5*18) \\ (6*28)+(9*21) & (6*32)+(9*18) \\ (8*28)+(4*21) & (8*32)+(4*18) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 301 & 314 \\ 357 & 354 \\ 308 & 328 \end{bmatrix}$$

Interpretando los datos de la matriz C:

Para ensamblar 28 trenes y 21 carros el lunes, se requirieron 301 tornillos, 357 tuercas y 308 abrazaderas.

Para ensamblar 32 trenes y 18 carros el martes, se requirieron 314 tornillos, 354 tuercas y 328 abrazaderas.

En total se necesitaron 615 tornillos, 711 tuercas y 636 abrazaderas.

▷ 2.4 IMPORTANCIA DEL ÁLGEBRA EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

El álgebra es una ciencia cuyo objetivo es simplificar y generalizar las cuestiones relativas a los números por medio de la utilización de letras llamadas literales.

Un problema algebraico es toda cuestión en la que se tiene que hallar una o más cantidades desconocidas llamadas incógnitas, relacionadas con otras cantidades conocidas denominados datos.

NOTA. Arthur Cayley nació el 16 de agosto en 1821 en Richmond, Surrey, Inglaterra. Falleció en 1895. Es considerado un gran matemático creativo. Uno de sus grandes descubrimientos fue la teoría matricial, la cual fue publicada en 1858. Setenta y siete años después, Heisenberg y Max Born reconocieron al álgebra matricial como el instrumento preciso que necesitaban para desarrollar sus trabajos de mecánica cuántica matricial.

"En la teoría de la matemática, como en todo lo demás, la belleza puede ser percibida pero no explicada". Arthut Cayley.

Lo primero que debe hacerse para resolver un problema es representar la incógnita utilizando generalmente las últimas letras del alfabeto y luego expresar la relación que hay entre los datos y las incógnitas por medio de ecuaciones.

Por ejemplo:

Un empresario quiere invertir dos capitales en una financiera durante un año. Por el primer capital obtendrá 8% y por el segundo obtendrá 12%. Sabiendo que el segundo capital excede al primero en $7 500 pesos, ¿qué montos son por ahorros y qué montos son por interés, si al término del plazo se sabe que obtiene $49 100 en total?

S O L U C I Ó N

Representamos el primer capital por la incógnita X.
Este capital genera durante un año un interés de 8%, es decir, X(8/100).
El segundo capital excede al primero por $7 500 pesos, es decir X + 7 500.
Este capital genera 12% de interés durante un año, es decir, (X + 7500) (12/100).
Los dos capitales con sus intereses suman $49 100.
El problema queda expresado matemáticamente de la siguiente manera:
$X + [X\,(8/100)] + (X + 7\,500) + [(X + 7\,500)\ (12/100)] = 49\,100.$
Solucionamos el problema y obtenemos $X = 18\,500$.

Por el primer capital ($X = 18\,500$) se genera 8%, es decir: [18,500 (0.08) = 1 480]
Por el segundo capital ($X + 7\,500 = 26\,000$) se genera 12%, es decir:
[26 000 (0.12) = 3 120].

Visto en forma financiera: (revise la Tabla 2.5)

Tabla 2.5

Montos iniciales		Tasa de interés	Interés	Montos + interés
X =	18 500	8%	1 480	19 980
X + 7,500 =	26 000	12%	3 120	29 120
Sumas =	**44 500**		**4 600**	**49 100**

▷ 2.5 MÉTODO DE REDUCCIÓN, SUSTITUCIÓN, IGUALACIÓN, KRAMER y MATRIZ INVERSA

Por ejemplo, un empresario posee un prestigioso taller de carpintería, en el cual se fabrican lujosas mesas y sillas utilizando madera de cedro. Él sabe que para elaborar una mesa se requieren 2 tablones de madera y 6 horas de mano de obra. Y para fabricar una silla se necesitan 4 tablones de madera y 2 horas de mano de obra; sin embargo, él está consciente de que la producción se encuentra condicionada a 40 tablones de madera por 30 horas de mano de obra. Elabore un modelo cuantitativo que nos permita saber cuántas unidades de cada artículo se pueden producir en la fábrica.

Elaboremos una tabla para visualizar y analizar mejor los datos: (Tabla 2.6)

Tabla 2.6

	MADERA DE CEDRO	MANO DE OBRA
MESA	2	6
SILLA	4	2
CANTIDAD	40	30

Sean X y Y la cantidad mesas y sillas por unidad a manufacturar.

El problema se encuentra sujeto a la cantidad de madera de cedro y horas de trabajo disponibles para elaborar mesas y sillas.

La información de la Tabla 2.6 nos lleva a establecer un sistema de ecuaciones simultáneas de la siguiente manera:

a) $2X+4Y=40$ Madera de cedro
b) $6X+2Y=30$ Mano de obra

El siguiente paso consiste en resolver el sistema de ecuaciones simultáneas por medio de un método matemático. Utilizaremos el *Método de Reducción*:

a) $2X + 4Y = 40$

b) $6X + 2Y = 30$

Para resolver el sistema de ecuaciones simultáneas es necesario hallar el conjunto de valores que satisfagan cada una de las ecuaciones.

1. Multipliquemos la ecuación b) por -2, para igualar los coeficientes de Y en las dos ecuaciones:

c) $-12X - 4Y = -60$.

2. Se suma la nueva ecuación c) con la ecuación a) para obtener:

$$\begin{array}{lr} \text{a)} & 2X + \cancel{4Y} = 40 \\ \text{c)} & -12X - \cancel{4Y} = -60 \\ \hline \text{d)} & -10X + \quad = -20 \end{array}$$

, despejamos y obtendremos que $X = 2$.

Sustituimos el valor de $X = 2$ en cualquiera de las dos ecuaciones dadas y despejamos Y. Elijamos la ecuación a) $2X + 4Y = 40$ y obtendremos que el valor de $Y = 9$.

3. Comprobemos si los valores obtenidos son los correctos, sustituyéndolos en cualquiera de las ecuaciones a) $2X + 4Y = 40$ o b) $6X + 2Y = 30$.

a) $2(2) + 4(9) = 40$

b) $6(2) + 4(9) = 30$

La solución del modelo cuantitativo nos indica elaborar la cantidad de 2 mesas y 9 sillas.

También se puede resolver el problema usando el *Método de Sustitución*:

$2X + 4Y = 40$ Madera de cedro
$6X + 2Y = 30$ Mano de obra

1. Para resolver el sistema de ecuaciones, primero despéjese de la ecuación a) o b) cualquier incógnita X o Y. Despejemos de la ecuación a) la incógnita X:
$X = (40-4Y)/2$

2. Sustitúyase la expresión $X = (40 - 4Y)/2$ en la ecuación $6X + 2Y = 30$:

$6(40 - 4Y)/2 + 2Y = 30$. Obtenemos una ecuación con una incógnita, pues hemos eliminado la X. Resolvemos esta ecuación simplificándola de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 3(40 - 4Y) + 2Y &= 30 \\ 120 - 12Y + 2Y &= 30 \\ -12Y + 2Y &= 30 - 120 \\ -10Y &= -90 \\ Y &= 9 \text{ sillas} \end{aligned}$$

3. Sustitúyase la expresión $Y = 9$ en cualquiera de las ecuaciones a) o b), por ejemplo, en b)

$6X + 2Y = 30$ se obtiene:

$$\begin{aligned} 6X + 2(9) &= 30 \\ 6X + 18 &= 30 \\ 6X &= 30 - 18 \\ 6X &= 12 \\ X &= 2 \text{ mesas} \end{aligned}$$

Igualmente, podemos resolver el problema aplicando el *Método de Igualación*:

a) $2X + 4Y = 40$ Madera de cedro

b) $6X + 2Y = 30$ Mano de obra

1. Despejemos en ambas ecuaciones a) o b) cualquiera de las dos incógnitas X o Y:

Despejando Y en la ecuación $2X + 4Y = 40 \Rightarrow Y= (40 - 2X)/4$
Despejando Y en la ecuación $6X + 2Y = 30 \Rightarrow Y= (30 - 6X)/2$

2. Ahora se igualan entre sí los dos valores de X que hemos obtenido:

$(40 - 2X)/4 = (30–6X)/2$. Resolvemos esta ecuación simplificándola de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 2(40 - 2X) &= 4(30 - 6X) \\ 80 - 4X &= 120 - 24X \\ -4X + 24X &= 120 - 80 \\ 20X &= 40 \\ X &= 2 \text{ mesas} \end{aligned}$$

3. Sustitúyase la expresión $X = 2$ en la cualquiera de las ecuaciones a) o b); por ejemplo, en a)

$2X + 4Y = 40$ se obtiene:

$$\begin{aligned} 2(2) + 4Y &= 40 \\ 4Y &= 40 - 4 \\ 4Y &= 36 \\ Y &= 9 \text{ sillas} \end{aligned}$$

Del mismo modo, podemos llegar a este resultado empleando el *Método de Kramer*:

El método Kramer utiliza operaciones aritméticas basadas en determinantes para solucionar sistemas de ecuaciones lineales que conforman una matriz cuadrada.

Denominamos matriz a una disposición rectangular de números encerrados entre corchetes, la cual se encuentra conformada por medio de columnas y renglones. (Véase la Figura 2.7)

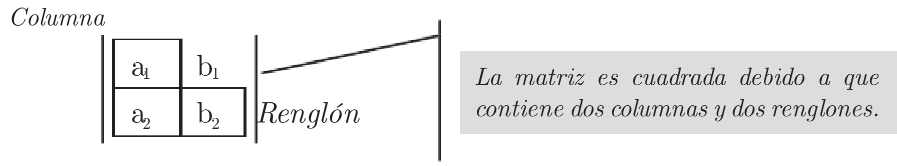


Figura 2.7

Para aplicar el método de Kramer se procede de la siguiente manera:

$$\text{Sea el sistema: } \left| \begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array} \right.$$

El valor de la incógnita X es una fracción cuyo denominador es la determinante formada por los coeficientes de las incógnitas X y Y (determinante del sistema) y cuyo numerador es la determinante que se obtiene sustituyendo en la determinante del sistema la columna de los coeficientes de la incógnita X que se halla por la columna de los términos independientes (C_1 y C_2) de las ecuaciones dadas.[1] (Véase la Figura 2.8)

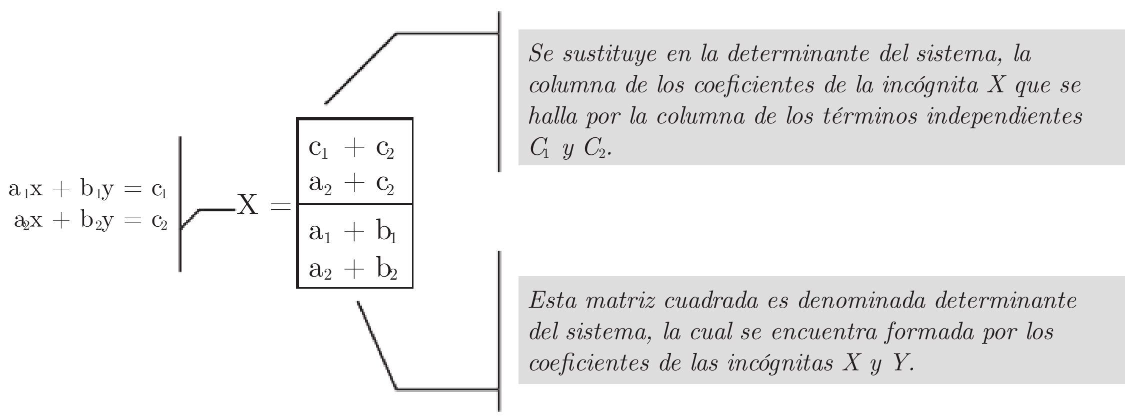


Figura 2.8

Del mismo modo:

El valor de la incógnita Y es una fracción cuyo denominador es la determinante formada por los coeficientes de las incógnitas X y Y (determinante del sistema) y cuyo numerador es la determinante que se obtiene sustituyendo, en la determinante del sistema, la columna de los coeficientes de la incógnita Y que se halla por la columna de los términos independientes (C_1 y C_2) de las ecuaciones dadas.[2] (Véase la Figura 2.9)

[1 y 2] Aurelio Baldor, Álgebra, 10a. ed., Editorial Publicaciones Cultural, pág. 346.

$$\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{array} \quad X = \frac{\begin{array}{l} a_1 + c_1 \\ a_2 + c_2 \end{array}}{\begin{array}{l} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{array}}$$

Se sustituye en la determinante del sistema, la columna de los coeficientes de la incógnita Y que se halla por la columna de los términos independientes C_1 y C_2.

Esta matriz cuadrada es denominada determinante del sistema, la cual se encuentra formada por los coeficientes de las incógnitas X y Y.

Figura 2.9

Resolver por determinantes:

$$\begin{array}{ll} \text{a)}\ 2X + 4Y = 40 & \text{Madera de cedro} \\ \text{b)}\ 6X + 2Y = 30 & \text{Mano de obra} \end{array}$$

Mesas Sillas

Para hallar el valor de las incógnitas X y Y, aplicamos el método de Kramer:

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 40 & 4 \\ 30 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{(40)(2)-(30)(4)}{(2)(2)-(6)(4)} = \frac{-40}{-20} = 2 \text{ Mesas}$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 40 \\ 6 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{(2)(30)-(6)(40)}{(2)(2)-(6)(4)} = \frac{-180}{-20} = 9 \text{ Sillas}$$

Igualmente, podemos llegar al mismo resultado utilizando el *Método de la Matriz Inversa*:

Pasos para obtener la inversa de una matriz:

Del sistema M: $\left| \begin{array}{l} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{array} \right.$ se pueden establecer tres matrices A, X y D:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad X = \begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \end{vmatrix}$$

A la matriz A se le conoce como *matriz de coeficientes*, la matriz X es llamada *matriz de variables*, y a la matriz D se le denomina *matriz de constantes.*

Si realizamos el producto de la matriz A con la matriz X obtenemos: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x + b_1y \\ a_2x + b_2y \end{vmatrix}$

Si al producto AX lo igualamos con los coeficientes de la matriz D obtenemos: $\begin{vmatrix} a_1x + b_1y \\ a_2x + b_2y \end{vmatrix} \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \end{vmatrix}$

Siendo así, el sistema M se puede expresar como AX = D.

Por otra parte, en aritmética se define el inverso multiplicativo de un número $a \neq 0$ como un segundo número a^{-1}, tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Esto nos sugiere una definición correspondiente para las matrices; es decir, si existe una matriz cuadrada expresada como A, entonces existe su inversa expresada como A^{1}.

En conclusión:

Si A es una matriz cuadrada y su inversa es A^{1}, entonces, $A\ A^{-1} = A^{-1}\ A = I$

Donde A^{-1} es denominada *matriz inversa* de la matriz de coeficientes A y I es llamada *matriz identidad.*

> Observe que el índice -1 no es un exponente. El A^{-1} simplemente se establece para denotar la inversa de A. Es claro que si existe A^{-1}, entonces A y A^{-1} son inversas entre sí.

Se denomina matriz identidad a una matriz cuadrada que tiene el mismo número de renglones y columnas, cuya diagonal principal se encuentra formada por unos. (Véase la Figura 2.10)

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Nombrada
Diagonal principal

Figura 2.10

La importancia práctica de la matriz inversa radica en el hecho de que un sistema de ecuaciones lineales, expresado algebraicamente por AX = D, se puede resolver fácilmente si se cuenta con la matriz A^{1}; de este modo, si se multiplican por la izquierda ambos miembros de la igualdad por A^{1} se obtiene:

$$A^{-1}\ A\ X \quad A^{-1}\ D$$

Como $I = A^{-1}\ A$, tenemos $I\ X = A^{1}\ D$

Si realizamos el producto de $I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ por $X = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$, tenemos $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1x + 0y \\ 0x + 1y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$

Como usted puede observar, la ecuación I X = X la podemos expresar como $X = A^{1}\ D$

$\boxed{I\ X = A^{-1}\ D}$

Ahora considere el problema de determinar la $A^{-1} = \begin{vmatrix} x & z \\ y & w \end{vmatrix}$ para una matriz $A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$
Como A A^{-1} = I, tenemos entonces:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & z \\ y & w \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Realizamos las operaciones correspondientes e igualando las ecuaciones en ambos lados de la ecuación, se obtienen las siguientes ecuaciones lineales:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ \ \end{vmatrix}$$

1) $a_1x + b_1y = 1$

$$\begin{vmatrix} & \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ \\ 0 \end{vmatrix}$$

2) $a_2x + b_2y = 0$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z \\ w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \ \end{vmatrix}$$

3) $a_1z + b_1w = 0$

$$\begin{vmatrix} & \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z \\ w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ \\ 1 \end{vmatrix}$$

4) $a_2z + b_2w = 1$

Como se puede observar, los coeficientes de la matriz A (a_1, a_2, b_1 y b_2) son los mismos, excepto porque en la ecuación (1 y 2) aparecen las incógnitas (x, y) y en la ecuación (3 y 4) están las incógnitas (z,w). Esto nos sugiere utilizar las matrices para resolver el resto del sistema en una sola lista de operaciones como se ve en la Figura 2.11.

$$\left| \begin{array}{cc:cc} a_1 & b_1 & 1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

La línea punteada representa los signos de las igualdades, la cual se encuentra separada del lado izquierdo por la matriz de coeficientes, y del lado derecho por la matriz identidad.
Este sistema matemático es llamado matriz aumentada.
Es decir: [A | I].

Figura 2.11

Para encontrar la matriz inversa (A^{-1}) es necesario convertir los valores de los coeficientes de la matriz (A) en una matriz identidad (I), de tal manera que los valores de la matriz identidad (I) obtengan los valores de la matriz inversa (A^{-1}).

Ahora podemos solucionar el problema del pequeño taller de carpintería, cuyo sistema de ecuaciones lineales fue formulado en la Figura 2.12.

$$\begin{aligned} &a)\ 2\boxed{X} + 4\boxed{Y} = 40 \text{ Madera de cedro} \\ &b)\ 6\boxed{X} + 2\boxed{Y} = 30 \text{ Mano de obra} \end{aligned}$$

Mesas Sillas

Figura 2.12

$$\left|\begin{array}{cc|cc} a_1 & b_1 & 1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 1 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{c} R_a \\ R_b \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{c} R_a \\ R_b \end{array}$$

Multiplicamos el renglón R_a por $\frac{1}{2}$ con la finalidad de hacer al valor numérico 2 igual a 1. Fórmula: $R_a(\frac{1}{2})$.

$$\left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1/2 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{c} R_a \\ R_b \end{array}$$

Multiplicamos al renglón R_b por 1/6 y le restamos el renglón R_a, con la finalidad de hacer al valor numérico 6 igual a 0. Fórmula: $R_b\,(1/6) - R_a$.

$$\left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -5/3 & -1/2 & 1/6 \end{array}\right| \begin{array}{c} R_a \\ R_b \end{array}$$

Multiplicamos al renglón R_b por -3/5, con la finalidad de hacer al valor numérico -5/3 igual a 1. Fórmula: $R_b\,(-3/5)$.

$$\left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3/10 & -1/10 \end{array}\right| \begin{array}{c} R_a \\ R_b \end{array}$$

Al renglón R_a le restamos R_b multiplicado por 2, con la finalidad de hacer al valor numérico 2 igual a 0. Fórmula: $R_a - R_b\,(2)$.

$$\left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/10 & 1/5 \\ 0 & 1 & 3/10 & -1/10 \end{array}\right|$$

Hemos convertido todos los valores de los coeficientes de la matriz del sistema (A)en una matriz identidad (I), de tal manera que los valores de la matriz identidad (I) adquieran los valores buscados de la matriz inversa (A^{-1}).

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} x & z \\ y & w \end{vmatrix}, \text{ entonces } A^{-1} = \begin{vmatrix} -1/10 & 1/5 \\ 3/10 & -1/10 \end{vmatrix}$$

La matriz inversa señala que x = -1/10, y = 3/10 y z = 1/5, w= -1/10, lo cual demuestra que la matriz del lado derecho de la línea vertical es exactamente igual a la A^{-1}.

Para demostrar que los valores de la matriz inversa son correctos, debemos multiplicar la matriz del sistema (A) por su inversa (A^{-1}) a fin de obtener una matriz identidad (I). Es decir:

$$A^{-1}A = I = \begin{vmatrix} x & z \\ y & w \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1/10 & 1/5 \\ 3/10 & -1/10 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1/5+6/5 & 2/5-2/5 \\ 3/5-3/5 & 6/5-1/5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Otra forma de comprobar los resultados obtenidos x = − 1/10, y = 3/10 y z = 1/5, w = − 1/10:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} \qquad \boxed{2x + 4y = 1} \qquad \begin{vmatrix} 2(-1/10) + 4(3/10) = 1 \\ -1/5 + 6/5 = 1 \\ 1 = 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix} \qquad \boxed{6z + 2w = 0} \qquad \begin{vmatrix} 6(-1/10) + 2(3/10) = 0 \\ 3/4 - 3/4 = 0 \\ 0 = 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} z \\ w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix} \qquad \boxed{6z + 4w = 0} \qquad \begin{vmatrix} 2(1/5) + 4(-1/10) = 0 \\ 2/5 - 2/5 = 0 \\ 0 = 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} z \\ w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} \qquad \boxed{6z + 2w = 1} \qquad \begin{vmatrix} 6(1/5) + 2(-1/10) = 0 \\ -6/5 - 1/5 = 1 \\ 1 = 1 \end{vmatrix}$$

Una vez comprobados los resultados, vamos a obtener la cantidad de mesas y sillas que debe fabricar el taller de carpintería a fin de optimizar su producción:
Recuerde la fórmula X = A^{-1} D donde:

$$X = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{vmatrix} -1/10 & 1/5 \\ 3/10 & -1/10 \end{vmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} 30 \\ 40 \end{vmatrix}$$

Realizando las operaciones correspondientes:

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1/10 & 1/5 \\ 3/10 & -1/10 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 40 \\ 30 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (-1/10)(40) + (1/5)(30) \\ (3/10)(40) + (-1/10)(30) \end{vmatrix} = \begin{matrix} 2\,Mesas \\ 9\,Sillas \end{matrix}$$

Verificando resultados: a) 2(2 Mesas) + 4(9 Sillas) = 40 Madera de cedro
b) 6(2 Mesas) + 2(9 Sillas) = 30 Mano de obra

Representemos gráficamente el problema

Solucionar gráficamente un sistema de ecuaciones lineales consiste en *hallar las coordenadas del punto de intercepción* en donde se cruzan las rectas.

Como $X = 2$ y $Y = 9$ satisface las dos ecuaciones simultáneas $2x + 4y = 40$ y $6x + 2y = 30$, deducimos que el vértice A (2,9) son necesariamente las coordenadas de intercepción en donde se cruzan las dos rectas.

Para graficar las rectas que conforman este sistema de ecuaciones simultáneas, se procede de la siguiente manera:

1. De la ecuación lineal $2X + 4Y = 40$, consideramos a $X = 0$.
2. Despejamos a Y, para obtener $Y = 40/4 = 10$.
3. Así obtenemos la coordenada N(0, 10).
4. Ahora consideramos a $Y = 0$.
5. Despejamos a X para obtener $X = 40/2 = 20$.
6. Así obtenemos la coordenada M(20, 0).

Las coordenadas que permiten graficar la ecuación lineal $2X + 4Y = 40$ son N(0, 10) y M(20, 0).

Las coordenadas que permiten esquematizar la ecuación lineal $6X + 2Y = 30$ son 0(0, 15) y P(5, 0) como se ve en la Figura 2.13.

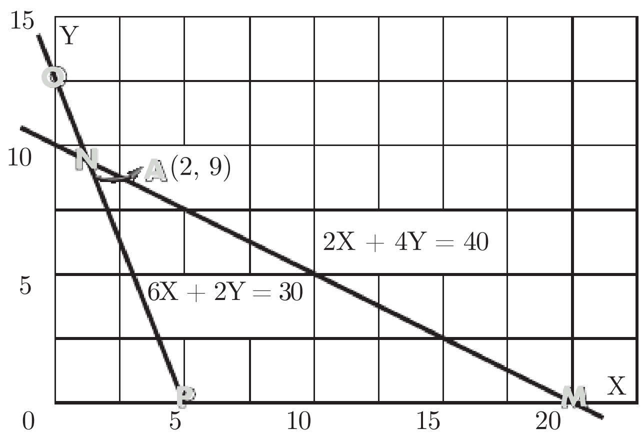


Figura 2.13

Resumen de la matriz inversa

Los pasos para resolver sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de la matriz inversa:

a) Se forma una matriz aumentada cuyos componentes se encuentran constituidos del lado izquierdo por la matriz de coeficientes y del lado derecho por medio de la matriz identidad. Es decir: [A | I].

b) Por medio de operaciones aritméticas obtenemos la matriz inversa (A^{-1}). Para lograr el objetivo, es necesario convertir la matriz de coeficientes (A)en una matriz identidad (I), de tal manera que los valores de la matriz identidad (I) obtengan los valores de la matriz inversa (A^{1}).

c) Se comprueba que los valores de la matriz inversa son los correctos, para esto debemos multiplicar la matriz de coeficientes (A) por su inversa (A^{1}) a fin de obtener una matriz identidad (I) y viceversa; es decir, A^{1} A = A A^{-1} = I.

d) Multiplicamos la matriz inversa (A^{1}) por la matriz de constantes (D), para obtener las incógnitas buscadas (X); es decir, X = A^{1} D.

▷ 2.6 MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

Ahora usaremos el método de Gauss-Jordan para solucionar un problema que implica costos de publicidad. Pero antes suponga que tenemos un sistema de ecuaciones lineales:

$$\text{Del sistema M: } \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{array}, \text{ se pueden establecer dos matrices A y D:}$$

$$\text{Matriz } A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{Matriz } D = \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{vmatrix}$$

Se forma una matriz aumentada cuyos componentes están constituidos del lado izquierdo por la matriz de coeficientes (A) y del lado derecho por la matriz de constantes D. Es decir:

$$[A|D] = \left| \begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{ccc|} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right.$$

Por medio de operaciones aritméticas basadas en renglones, convertimos la matriz de coeficientes (A) en una matriz identidad (I), con el objetivo de encontrar los valores de las incógnitas x, *y* y *z* de la matriz de variables (X).

Entonces se obtiene:

$$X = \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{ccc|c} X & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & Y & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & Z & d_3 \end{array} \right|$$

Por consiguiente:
x = d_1 , y = d_2 y z = d_3

Ejemplo, un abogado considera la opción de anunciarse durante una semana en diferentes medios de comunicación. Las alternativas de publicidad incluyen la televisión, la radio y el periódico. Los costos por anuncio se muestran en la Tabla 2.7.

Tabla 2.7

	TELEVISIÓN	RADIO	PERIÓDICO
Mañana	\$2 000	\$300	\$500
Tarde	\$4 000	\$400	\$500
Noche	\$3 000	\$600	\$500
Financiamiento	\$260 000	\$40 000	\$50 000

¿Cuál es el costo que debe pagar el abogado por anunciarse en la mañana, tarde y noche?

Formulación del modelo

1. Se identifica las variables de decisión:

- Sea X el número de anuncios en la mañana.
- Sea Y el número de anuncios en la tarde.
- Sea Z el número de anuncios en la noche.

2. Se establece un sistema de ecuaciones simultáneas de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
2000X & + & 4000Y & + & 3000Z & = & 260000 & \text{Financiamiento para la televisión} \\
300X & + & 400Y & + & 600Z & = & 40000 & \text{Financiamiento para la radio} \\
500X & + & 500Y & + & 500Z & = & 50000 & \text{Financiamiento para el periódico} \\
\text{Mañana} & & \text{Tarde} & & \text{Noche} & & &
\end{array}
$$

3. Solucionamos el sistema de ecuaciones simultáneas utilizando el método de Gauss-Jordan de la siguiente manera:

	X	Y	Z	FINANCIAMIENTO	
Mañana	2000	4000	3000	260000	R_a
Tarde	300	400	600	40000	R_b
Noche	500	500	500	50000	R_c

Multipliquemos al renglón Ra por 1/2000, con la finalidad de hacer al valor numérico 2000 igual a 1. Fórmula: Ra (1/2000).

	X	Y	Z	FINANCIAMIENTO	
Mañana	1	2	1.5	130	R_a
Tarde	300	400	600	40000	R_b
Noche	500	500	500	50000	R_c

Al renglón R_b le restamos R_a multiplicado por 300, con la finalidad de hacer al valor numérico 300 igual a 0. Fórmula: $R_b - R_a$ (300).

	X	Y	Z	FINANCIAMIENTO	
Mañana	1	2	1.5	130	R_a
Tarde	0	−200	150	1000	R_b
Noche	500	500	500	50000	R_c

Al renglón R_c le restamos R_a multiplicado por 500, con la finalidad de hacer al valor numérico 500 igual a 0. Fórmula: $R_c - R_a$ (500).

	X	Y	Z	FINANCIAMIENTO	
Mañana	1	2	1.5	130	R_a
Tarde	0	−200	150	1000	R_b
Noche	0	−500	−250	−15000	R_c

Al renglón R_b lo multiplicamos por −1/200, con la finalidad de hacer al valor numérico −200 igual a 1. Fórmula: R_b (−1/200).

	X	Y	Z	FINANCIAMIENTO	
Mañana	1	2	1.5	130	R_a
Tarde	0	1	−.75	−5	R_b
Noche	0	−500	−250	−15000	R_c

Al renglón R_a le restamos R_b multiplicado por 2, con la finalidad de hacer al valor numérico 2 igual a 0. Fórmula: $R_a - R_b$ (2).

	X	Y	Z	FINANCIAMIENTO	
Mañana	1	0	3	140	R_a
Tarde	0	1	−.75	−5	R_b
Noche	0	−500	−250	−15000	R_c

Al renglón R_c le restamos R_b multiplicado por −500, con la finalidad de hacer al valor numérico −500 igual a 0. Fórmula: $R_c - R_b$ (−500).

	X	Y	Z	FINANCIAMIENTO	
Mañana	1	0	3	140	R_a
Tarde	0	1	−.75	−5	R_b
Noche	0	0	−625	−17500	R_c

Al renglón Rc lo multiplicado por -1/625, con la finalidad de hacer al valor numérico -625 igual a 1. Formula: Rc (-1/625).

	X	Y	Z	FINANCIAMIENTO	
Mañana	1	0	3	140	R_a
Tarde	0	1	−.75	−5	R_b
Noche	0	0	1	28	R_c

Al renglón R_a le restamos el R_c multiplicado por 3, con la finalidad de hacer al valor numérico 3 igual a 0. Fórmula: $R_a - R_c$ (3).

	X	Y	Z	FINANCIAMIENTO	
Mañana	1	0	0	56	R_a
Tarde	0	1	−.75	−5	R_b
Noche	0	0	1	28	R_c

Al renglón R_b le restamos el R_c multiplicado por −.75, con la finalidad de hacer al valor numérico −.75 igual a 0. Fórmula: $R_b - R_c$ (−.75).

	X	Y	Z	FINANCIAMIENTO	
Mañana	1	0	0	56	R_a
Tarde	0	1	0	16	R_b
Noche	0	0	1	28	R_c

Esta es la matriz aumentada obtenida desde nuestro modelo aplicando el Método Gauss—Jordan. Es decir: [A | D]

El método de Gauss-Jordan establece que el número de anuncios que deben repartirse en los tres respectivos horarios son los siguientes:

X = 56 anuncios le corresponden en la mañana, Y = 16 en la tarde y Z = 28 anuncios en la noche.

4. Comprobemos si los valores obtenidos son los correctos, sustituyéndolos en cualquiera de las tres ecuaciones: a) $2\,000X + 4\,000Y + 3\,000Z = 260\,000$, b) $300X + 400Y + 600Z = 40\,000$ y c) $500X + 500Y + 500Z = 50\,000$.

a) Financiamiento para la televisión:

$$\begin{aligned} 2\,000(56) + 4\,000(16) + 3\,000(28) &= 260\,000 \\ 112\,000 + 64\,000 + 84\,000 &= 260\,000 \\ 260\,000 &= 260\,000 \end{aligned}$$

b) Financiamiento para la radio:

$$\begin{aligned} 500(56) + 500(16) + 500(28) &= 50\,000 \\ 28\,000 + 8\,000 + 14\,000 &= 50\,000 \\ 50\,000 &= 50\,000 \end{aligned}$$

c) Financiamiento para el periódico:

$$\begin{aligned} 300(56) + 400(16) + 600(28) &= 40\,000 \\ 16\,800 + 6\,400 + 16\,800 &= 40\,000 \\ 40\,000 &= 40\,000 \end{aligned}$$

5. Ahora podemos obtener el costo por anunciarse en la mañana, tarde y noche:

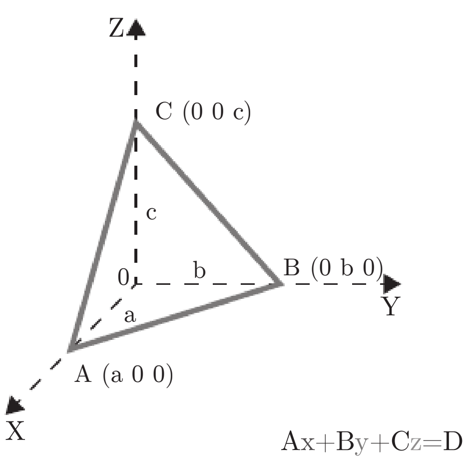
➢ Costo por anuncios comerciales en la:
Mañana: (56)($2 000 televisión + $300 radio + $500 periódico) = $156 800.
➢ Costo por anuncios comerciales en la:
Tarde: (16) ($4 000 televisión + $400 radio + $500 periódico) = $78 400.
➢ Costo por anuncios comerciales en la:
Noche: (28) ($3 000 televisión + $600 radio + $500 periódico) = $114 800.

Comprobación

Financiamiento = Costo por anunciarse en la mañana, tarde y noche:

$$\begin{gathered} \$260\,000 + \$40\,000 + \$50\,000 = \$156\,800 + \$78\,400 + \$114\,800 \\ \$350\,000 = \$350\,000 \end{gathered}$$

Ahora bien, vamos a graficar el sistema de ecuaciones lineales que conforma el modelo matemático, pero antes debe usted saber la información: (Véase la Figura 2.14)



Toda ecuación de primer grado con tres variables representa un plano.
Así, toda ecuación de la forma $Ax + By + Cz = D$ representa un plano.

Los segmentos OA, OB y OC son las trazas del plano sobre los ejes.

La traza del plano sobre el eje OY es OB = b, la traza sobre el eje OX es OA = a y la traza sobre el eje OZ es OC = c.

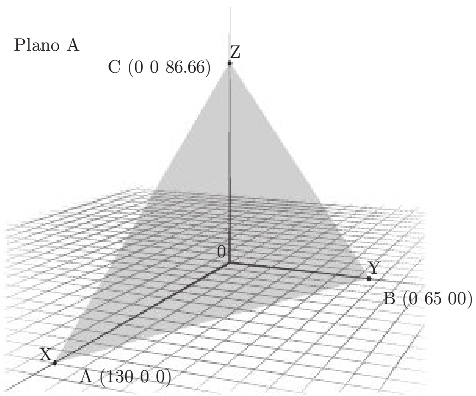
Los vértices A, B y C donde el plano intercepta a los ejes, tienen dos coordenadas nulas.

Figura 2.14

Ahora grafiquemos el sistema de ecuaciones lineales representado por:

$$\begin{aligned} 2\,000X + 4\,000Y + 3\,000Z &= 26\,000 \\ 300X + 400Y + 600Z &= 40\,000 \\ 500X + 500Y + 500Z &= 50\,000 \end{aligned}$$

Para representar gráficamente la ecuación vamos a hallar las trazas del plano representados sobre los tres ejes. (Véase la Figura 2.15)

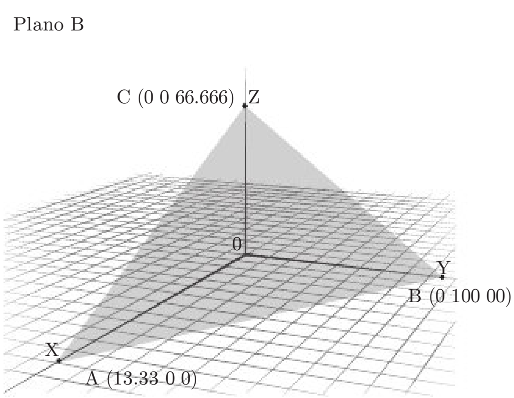


La traza sobre el eje OX se halla haciendo y = 0, z = 0 en la ecuación 2 000X + 4 000Y + 3 000Z = 260 000, por lo tanto, 2 000X = 260 000, despejamos y obtenemos X = 130, la traza en el punto A es (130 0 0).

La traza sobre el eje OY se halla haciendo x = 0, z = 0 en la ecuación 2 000X + 4 000Y + 3 000Z = 260 000, por lo tanto, 4 000Y = 260 000, despejamos y obtenemos Y = 65, la traza en el punto B es (0 65 0).

Figura 2.15

La traza sobre el eje OZ se halla haciendo x = 0, y = 0 en la ecuación 2 000X +40 00Y + 3 000Z = 260 000, por lo tanto, 3 000Z = 260 000, despejamos y obtenemos Z = 86.666, la traza en el punto C es (0 0 86.666). (Véase la Figura 2.16)

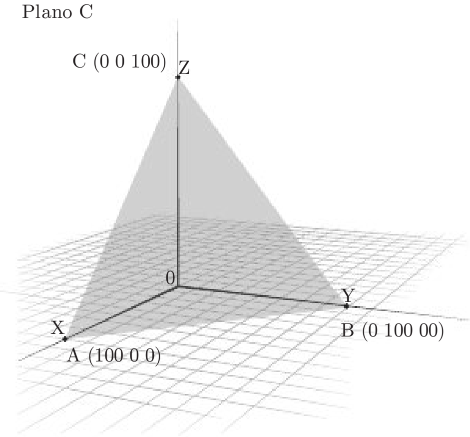


La traza sobre el eje OX se halla haciendo y = 0, z = 0 en la ecuación 300X + 400Y + 600Z = 40 000, por lo tanto, 300X = 40 000, despejamos y obtenemos X = 13.33, la traza en el punto A es (133.333 0 0).

La traza sobre el eje OY se halla haciendo x = 0, z = 0 en la ecuación 300X + 400Y + 600Z = 100, por lo tanto, 400Y = 40 000, despejamos y obtenemos Y = 100, la traza en el punto B es (0 100 0).

Figura 2.16

La traza sobre el eje OZ se halla haciendo x = 0, y = 0 en la ecuación 300X +400Y + 600Z = 40 000, por lo tanto, 600Z = 40 000, despejamos y obtenemos Z = 66.666, la traza en el punto C es (0 0 66.666). (Véase la Figura 2.17)

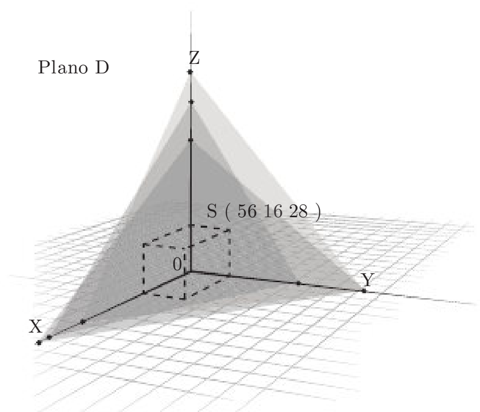


La traza sobre el eje OX se halla haciendo y = 0, z = 0 en la ecuación 500X + 500Y + 500Z = 50 000, por lo tanto, 500X = 50 000, despejamos y obtenemos X = 100, la traza en el punto A es (100 0 0).

La traza sobre el eje OY se halla haciendo x = 0, z = 0 en la ecuación 500X + 500Y + 500Z = 50 000, por lo tanto; 500Y = 50000 despejamos y obtenemos Y = 100, la traza en el punto B es (0 100 0).

Figura 2.17

La traza sobre el eje OZ se halla haciendo x = 0, y = 0 en la ecuación 500X+ 500Y + 500Z = 50000, por lo tanto, 500Z = 50 000, despejamos y obtenemos Z = 100, la traza en el punto C es (0 0 100). (Véase la Figura 2.18)



Si unimos los tres planos anteriores (A, B y C) obtenemos la figura D. Esta figura representa el sistema de ecuaciones lineales que fue resuelto utilizando el método de Gauss-Jordan, resultando así:

56 anuncios para la mañana.

16 anuncios para la tarde.

28 anuncios para la noche.

Los cuales representan el punto de solución S (56 16 28).

Figura 2.18

▶ RESUMEN

El álgebra lineal y matricial es una ciencia cuyo objetivo es simplificar y generalizar las cuestiones relativas a los números, por medio de la utilización de letras llamadas literales.

La importancia que tiene el álgebra en la resolución de problemas radica en su versatilidad de aplicaciones para solucionar problemas reales que una organización puede enfrentar; por ejemplo, modelos algebraicos que permiten ayudar a una organización a tomar decisiones objetivas con respecto a la forma en que debe llevar a cabo la producción y la comercialización de un determinado producto, en el contexto de un análisis económico y financiero.

En resumen, aprendimos prácticamente algunos temas y métodos matemáticos que se encuentran relacionados con la geometría analítica, el álgebra matricial y el álgebra lineal, los cuales son necesarios para comprender y solucionar métodos más complejos como el gráfico y el símplex.

▶ EVALUACIÓN

Problema 1

Solucione el siguiente problema utilizando el método de sustitución, el método de igualación, el método de eliminación y el método de Kramer:

Cierto capital está dividido en 3 partes, colocadas a interés simple durante 3 años, al 3%, 4% y 5%, respectivamente. Las partes del capital son tales que, al cabo de 3 años, los intereses de la primera y de la segunda generan $2 790, de la primera y tercera $3 300, de la segunda y tercera $3 390. ¿Cuáles son las 3 partes y cuál es el capital?

Problema 2

Solucione el siguiente problema por el método de matriz inversa:

La chef de un prestigioso restaurant elabora pasteles dietéticos de manzana y de piña. Para elaborar un pastel de manzana requiere (además de otros ingredientes) 2 kg de harina y 700 gramos de azúcar. Para hacer un pastel de piña es necesario 1 kg de harina y 400 gramos de azúcar. La chef cuenta con un saco que contiene 22 kg de harina y otro con 8 kg de azúcar. ¿Cuántos pasteles de cada uno le conviene elaborar?

Problema 3

Solucione el siguiente problema por el método de Gauss-Jordan

El dueño de una exitosa compañía abastecedora de artículos para el jardín comercializa tres clases de fertilizantes que contienen productos químicos X, Y y Z en diferentes porcentajes, según se muestra en la siguiente Tabla 2.8.

Tabla 2.7

PRODUCTOS QUÍMICOS	TIPO DE FERTILIZANTE		
	I	**II**	III
X	5%	7%	11%
Y	5%	11%	7%
Z	7%	3%	11%

¿En qué porcentajes debe mezclar los fertilizantes para obtener un 4% del fertilizante de X, un 5% del fertilizante de Y y un 3% del fertilizante de Z?

▶ PL EN ACCIÓN (Producción y distribución de té en Duncan Industries Limited)[4]

En la India, uno de los más grandes productores de té en el mundo, se venden aproximadamente mil millones de dólares de paquetes de té y té a granel. Duncan Industries Limited (DLI), el tercer productor de té en la India, vende alrededor de $37.5 millones de dólares de té, casi todo en paquetes.

DLI tiene 16 huertos de té, tres unidades mezcladoras, seis unidades empacadoras y 22 depósitos. El té de los huertos se envía a las unidades mezcladoras, las cuales combinan varios granos de té para producir mezclas como Sargam, Double Diamond y Runglee Runglio. El té mezclado se transporta a las unidades empacadoras, donde es colocado en paquetes de diferentes tamaños y formas para producir alrededor de 120 líneas de productos diferentes. Por ejemplo, la línea de té Sargam es empacada en cajas de cartón de 500 gramos, la línea Double Diamond es empacada en bolsas de polietileno de 100 gramos, etc.; luego se embarca el té a los depósitos que abastecen a los 11 500 distribuidores a través de los cuales se satisfacen las necesidades de aproximadamente 325 000 minoristas.

Cada mes, los gerentes de ventas proporcionan estimaciones de la demanda para el mes siguiente, para cada línea de té en cada depósito. Usando estimaciones, un equipo de gerentes ejecutivos determina las cantidades de té suelto de cada mezcla que embarcarán a cada unidad empacadora, la cantidad de cada línea de té que se empacará en cada unidad y las cantidades de té empacado de cada línea que se transportarán desde cada unidad empacadora hasta los diversos depósitos. Este proceso requiere de dos a tres días de cada mes y con frecuencia produce desabastos de líneas en demanda en depósitos específicos.

En consecuencia, se elaboró un modelo de programación lineal que implica aproximadamente 7 000 variables de decisión y 1 500 restricciones para minimizar el costo de flete de la compañía mientras se satisface la demanda, el abasto y todas las restricciones operativas. El modelo fue probado en datos del pasado y mostró que los desabastos podían prevenirse con poco o ningún costo adicional. Este modelo puede proporcionar a la administración la capacidad de ejecutar varios tipos de ejercicios que permiten revisar alternativas ante diversas situaciones posibles (o necesarias), con lo que la administración se convenció de los beneficios potenciales de usar técnicas de las ciencias de la administración para apoyar el proceso de la toma de decisiones.

4 PL EN ACCIÓN fue obtenido de: David R. Anderson, Dennis J. Sweeney y Thomas A. Williams. *Métodos Cuantitativos para los Negocios*, Editorial Thomson, 9a. Ed., pág. 314. Esta información se proporciona en: Nilotpal Chakravarti, "Tea Copany Steeped in OR", *OR/MS Today* (junio del 2000). Basado a su vez en: Nilotpal Chakravarti, "Ta Company Steeped in OR", *OR/MS Today* (abril de 2000).

GLOSARIO

Álgebra.—Ciencia que tiene por principio simplificar y generalizar las cuestiones relativas a los números, por medio de letras llamadas literales.

Determinante.—Conjunto de números colocados sistemáticamente dentro de un símbolo, representando un conjunto de operaciones. Todo determinante es nulo si son nulos todos los términos de un renglón o una columna, cuando dos renglones o dos columnas son proporcionales, o cuando dos filas o columnas son iguales. El orden del determinante lo da el número de filas y columnas.

Ecuaciones lineales.—Ecuaciones $(2X - 8Y + 3Z = -5)$ en las que las variables se ven afectadas por la primera potencia.

Ecuaciones simultáneas.—Sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$\begin{aligned} 2X + 4Y + 3Z &= 3 \\ 10X - 8Y - 9Z &= 6 \\ X + 7Y - 5Z &= 9 \end{aligned}$$

Para que el sistema tenga solución, el número de ecuaciones tiene que ser igual al número de incógnitas. Existen muchos métodos analíticos de solución. Como son: el método de sustitución, igualación, eliminación, Kramer, Gauss-Jordan y matriz inversa.

Matriz.—Ordenación de números colocados en filas y columnas, encerrados entre paréntesis, corchetes y/o barras.

Matriz cuadrada.—Matriz que tiene el mismo número de columnas y renglones en sus elementos.

Matriz triangular superior.—Matriz cuadrada cuyos elementos son $a_{ij} = 0$ para $i > j$.

Matriz triangular inferior.—Matriz cuadrada cuyos elementos son $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

Matriz triangular diagonal.—Matriz cuyos elementos superiores e inferiores son nulos.

Matriz unidad.—Matriz cuyos elementos en su diagonal principal adquieren valores de 1.

Matriz invertible, no singular, no degenerada.—Una matriz cuadrada A de orden n es invertible si existe una matriz cuadrada de orden n, llamada *matriz inversa*; representada como A^{1}, tal que: $A.A^{1} = A^{-1} = I_n$, donde I_n es una matriz identidad de orden n.

Pendiente o pendiente angular.—Es el ángulo de inclinación tangencial de una recta, la cual se designa como $m = \text{tag}\ \alpha$.

CAPÍTULO 3

FORMULACIÓN DE PROBLEMAS

▷ 3.1 INTRODUCCIÓN

Algunos matemáticos afirman que la primera referencia a la programación lineal (PL) se remonta al año de 1781, cuando el general francés Gaspard Monge describió el problema de la construcción y abastecimiento de fortificaciones militares de Napoleón. Para resolver el embrollo, el general utilizó el método de "cortar y llegar"; es decir, ir abasteciendo las diferentes trincheras desde los depósitos de materiales ya existentes. Después, en el contexto de la planificación óptima, el mismo modelo había sido estudiado y resuelto por el ruso Leonid Kantoróvich, quien en 1939 publicó una extensa monografía titulada "Métodos matemáticos de organización y planificación de la producción", en la que por primera vez se hizo referencia a una teoría matemática bien definida a la que hoy en día llamamos PL. Luego, entre 1941 y 1942, un joven holandés llamado Koopmans diseñó un modelo matemático que solucionaría los problemas de embarque de transporte que enfrentaba la marina holandesa. Pero debemos aclarar que Kantoróvich ya había trabajado con problemas de transporte, razón por la cual el origen de la solución de problemas de transporte se le atribuye a los dos (Koopmans-Kantoróvich). Sin embargo, muchos analistas consideran que la PL inició con el método de análisis de insumo-producto, desarrollado por el economista Vassily Leontief en 1936, el cual tiene por objeto encontrar las relaciones entre la materia prima y los procesos de producción, durante un periodo de tiempo en cuestión; esencialmente se trata de un análisis general del equilibrio estático y económico de las condiciones tecnológicas de la producción total de una organización, la cual se encuentra formulada por medio de ecuaciones lineales en una tabla denominada Matriz de Transportaciones Interdependientes. En un contexto paralelo, George J. Stiegler planteó el problema lineal de obtener una dieta adecuada con costo mínimo a partir de 77 alimentos, el cual considera 9 nutrientes, reconociéndose a él la estructura de optimizar una función lineal sujeta a restricciones lineales; no obstante, el matemático estadounidense John Von Neumann (1903-1957) desarrolló la teoría de la dualidad. En 1928 publicó su célebre trabajo: Teoría de Juegos y posteriormente en 1947 conjeturó la equivalencia de los problemas de programación y la teoría de matrices desarrollada en sus trabajos. En el mismo año (1947) el Dr. George Dantzig revolucionó la PL con su método símplex (algoritmo que sigue un procedimiento de solución sistemática que permite realizar una serie de pasos repetitivos que optimizan el objetivo deseado, el cual se encuentra condicionado a restricciones).

Para finalizar, Narendra Karmakar desarrolló en 1984 en los laboratorios Bell, en los Estados Unidos, un método alternativo al símplex, el cual, en comparación con éste, aporta un incremento notable en la rapidez para obtener soluciones en los problemas de PL; sin embargo, el método de Karmakar no mengua en absoluto el método símplex.

La programación lineal (PL) se define como una técnica que utiliza métodos cuantitativos, en el que una función objetivo claramente definida debe de maximizarse (utilidad) o minimizarse (tiempo o costos) cuando se consideran ciertas restricciones (recursos limitados y requerimientos).

La palabra "lineal" en PL se refiere a un modelo simbólico formulado por medio de un sistema de ecuaciones lineales. El término "programación" no tiene relación alguna ni con la programación para computadoras ni con el desarrollo del software correspondiente. Su origen está relacionado con procedimientos y programas de actividades para realizar eficazmente una tarea en términos matemáticos.

Desde su aparición a finales de la década de 1940, la PL ha demostrado ser una de las herramientas más efectivas en la investigación de operaciones (IO). Su éxito se debe a la flexibilidad para describir un gran número de situaciones reales en el terreno militar, en la agricultura, en el transporte, en la economía, en la salud, e incluso en la conducta psicológica y social del ser humano.

La utilidad de la PL como una herramienta determinística va más allá de sus aplicaciones inmediatas. De hecho, la PL forma el pilar en donde otras técnicas de la IO se apoyan, como son: la asignación de transbordo, la programación entera, la programación dinámica, las líneas de espera, los modelos de producción, inventarios y pronósticos, etcétera.

Primero se explicará la estructura matemática de los modelos de PL y luego la forma en que se deben formular estos modelos. Ejemplos:

1. Formulación basada en la fabricación de sofás tipo A y B.
2. Formulación basada en la dieta nutritiva para un caballo lusitano.

NOTA. Durante el año 1947, George Dantzig (con Marshall Wood y sus asociados), se ocupó de un proyecto de la Fuerza Aérea de los Estados Unidos, cuyo resultado fue la búsqueda de una técnica capaz de resolver los problemas de la planeación militar. La esencia de esas investigaciones consiste en considerar las interrelaciones entre las actividades de una gran organización como un modelo de programación lineal, y determinar el programa de optimización minimizando una función objetivo lineal. Dantzig indicó que ese nuevo enfoque tendría amplias aplicaciones en los problemas de los negocios, como ocurre actualmente.

3.2 ESTRUCTURA MATEMÁTICA DE MODELOS EN PROGRAMACIÓN LINEAL

La programación lineal (PL) es una herramienta cuantitativa basada en un sistema de ecuaciones lineales, la cual debe cumplir un objetivo específico que se encuentra sujeto a restricciones:

Maximizar (o minimizar) la función: $F = c_1x_1 + c_2y_2 + \ldots + c_rz_u$

Sujeta a restricciones: $R_1\ (k_{11}x_{11} + k_{12}y_{12} + \ldots + k_{1s}z_{1n}) + \ldots \leq (=, \geq)\ b_1$

$R_2\ (k_{21}x_{21} + k_{22}y_{22} + \ldots + k_{2s}z_{2n}) + \ldots \leq (=, \geq)\ b_2$

: :

$R_v\ (k_{p1}x_{m1} + k_{p2}ym_2 + \ldots + k_{ps}z_{mn}) + \ldots \leq (=, \geq)\ b_q$

Donde: $x_{mn} \geq 0$, $y_{mn} \geq 0, \ldots \ldots, z_{mn} \geq 0$

El primero se llama función objetivo o función de utilidad $F = c_1x_1 + c_2y_2 + \ldots + c_rz_u$ y establece el rendimiento máximo (medido en cantidades de plusvalía) o mínimo (medido en cantidades de tiempo o en costos).

El segundo es llamado función de restricción, el cual establece los requerimientos (≥) o limitaciones (≤ y =) bajo las cuales se encuentra sujeto lo que se desea maximizar o minimizar:

R_1, R_2 hasta $R_v\ (k_{p1}x_{m1} + k_{p2}y_{m2} + \ldots + k_{ps}z_{mn}) + \ldots \leq (=, \geq)\ b_q$

Las incógnitas x_{mn}, y_{mn} +... z_{mn} son llamadas variables de decisión, las cuales se encuentran identificadas como cantidades controladas por la administración. Las variables de decisión no pueden adquirir valores negativos ($x_{mn} \geq 0$, $y_{mn} \geq 0, \ldots \ldots z_{mn} \geq 0$). Las C_r y k_{ps}, son constantes cuyos valores numéricos (datos) son conocidos.

El modelo exige que la función de restricción debe satisfacer una condición expresada mediante una desigualdad o igualdad matemática (≤, = y ≥). Siendo b_1, b_2 hasta b_q parámetros cuyos valores numéricos (datos) se encuentran determinados. En otras palabras, en el lenguaje de los modelos de la programación lineal, una restricción es una igualdad o desigualdad matemática que debe ser satisfecha.

Una restricción matemática del tipo $R_v\ (k_{p1}x_{m1} + k_{p2}y_{m2} + \ldots + k_{ps}z_{mn}) = b_q$ se denomina ecuación porque es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas y que sólo es verdadera para determinados valores de las incógnitas. Las restricciones matemáticas del tipo $R_v\ (k_{p1}x_{m1} + k_{p2}y_{m2} + \ldots + k_{ps}z_{mn}) + \ldots \geq b_q$ y $R_v\ (k_{p1}x_{m1} + k_{p2}y_{m2} + \ldots + k_{ps}z_{mn}) + \ldots \leq b_q$ son denominadas desigualdade*s*, lo que indica que una cantidad es menor-igual o mayor-igual que otra.

3.3 FORMULACIÓN PL BASADO EN LA PRODUCCIÓN DE SOFÁS

Una exitosa fábrica de muebles de alta calidad elabora un sofá tipo A y otro tipo B en cuatro departamentos de la siguiente manera: (Ver la Tabla 1)

Tabla 3.1

DEPARTAMENTO	TIEMPO DISPONIBLE (HRS)	TIEMPO REQUERIDO (HRS)	
		SOFÁ (A)	SOFÁ(B)
CORTE	80	1	2
ARMADO	20	¾	½
TAPICERÍA	50	1	0
CUBIERTAS	10	0	1

La dueña desea saber cuántos sofás del tipo A y B debe fabricar para maximizar las ganancias. El precio de cada sofá A es de €10 y el del sofá B es de €25 por pieza.

Fomulación del modelo

Para describir en términos precisos el problema que enfrenta la empresaria, tenemos formular un modelo cuantitativo. Para lograr este propósito debemos responder las siguientes preguntas:

1. ¿Qué busca determinar el modelo?, dicho de otra manera, ¿cuáles son las variables de decisión (incógnitas) del problema?
2. ¿Cuál es el objetivo que se requiere alcanzar para determinar una solución óptima?
3. ¿Qué restricciones deben imponerse a las variables de decisión, a fin de satisfacer las limitaciones o requerimientos a los cuales se encuentra sujeto el sistema representado por el modelo?

Con base en estas preguntas comenzamos a solucionar el problema encontrando los valores para las variables X y Y que satisfagan las restricciones del sistema modelado, y que produzcan el mayor margen de ganancia para la función objetivo:

1. Se identifican las variables de decisión.

   Sea X la cantidad de sofás A y Y la cantidad de sofás B.
2. Se establece la finalidad del problema (maximizar las ganancias).

   La utilidad de cada sofá A es de €10 y la del sofá B es de €25. Es decir:

   Maximizar $Z = 10X + 25Y$.
3. Se establecen las restricciones a las cuales se encuentra sujeto el problema.

Para el departamento de corte se requiere de 1 hora de trabajo en el sofá A y 2 horas para el sofá B. El departamento cuenta con 80 horas disponibles. Matemáticamente lo que indica es lo siguiente: Sujeto a $X + 2Y \leq 80$.

Para el departamento de armado se requiere de 3/4 de hora de trabajo en el sofá A y de 1/2 hora para el sofá B. El departamento cuenta con 20 horas disponibles. Matemáticamente lo que indica es lo siguiente:
Sujeto a $3/4X + 1/2Y \leq 20$.

Para el departamento de tapicería se requiere solamente de 1 hora para el sofá A. El departamento cuenta con 50 horas disponibles. Matemáticamente lo que indica es lo siguiente: Sujeto a $X \leq 50$.

Para el departamento de cubiertas se requiere solamente de 1 hora en el sofá B. El departamento cuenta con 10 horas disponibles. Matemáticamente lo que indica es lo siguiente: Sujeto a Y$\leq$ 10.

La cantidad de elaboración en los sofás A y B no puede ser negativa, por lo tanto las restricciones se describen de la siguiente forma:

Para el caso de los sofás A tenemos X $\geq$ 0 y para el caso de los sofás B tenemos Y$\geq$ 0.

Una vez formulado el problema, se establece el sistema de ecuaciones lineales de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{lrl}
\text{Maximizar:} & Z = 10X + 25Y & \\
\text{Sujeto a:} & X + 2Y & \leq = 80 \text{ Departamento de corte} \\
 & 3/4X + 1/2Y & \leq = 20 \text{ Departamento de armado} \\
 & X \quad\quad & \leq = 50 \text{ Departamento de tapicería} \\
 & Y & \leq = 10 \text{ Departamento de cubiertas}
\end{array}
$$

Donde: X,Y $\geq =$ 0

El problema se solucionará en el capítulo 4, pág. 56, por medio del método gráfico.

▷ 3.4 MODELO DE PL BASADO EN UNA DIETA PARA UN CABALLO LUSITANO

Un veterinario le recomendó a uno de sus clientes que alimentara a su caballo lusitano durante tres meses con maíz, trigo y sorgo. Lamentablemente el dueño sólo puede conseguir estos tres alimentos mezclando dos costales que contienen estas cantidades en diferentes proporciones como se muestra en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2

	COSTAL X	COSTAL Y
MAÍZ	4 kg	0 kg
TRIGO	0 kg	3 kg
SORGO	1 kg	1.5 kg

La cantidad de estos alimentos que deberá comprar durante los tres meses se encuentra estimada en la Tabla 3.3.

Tabla 3.3

	MEZCLA
MAÍZ	12 o más kg
TRIGO	6 o más kg
SORGO	9 o menos kg

Al dueño le cuesta \$30 pesos el costal X y \$40 pesos el costal Y. ¿Cuántos costales puede comprar de X y Y al menor costo posible?

Formulación del modelo

1. Se identifican las variables de decisión.

Sea X y Y la cantidad de sacos que se deben comprar.

2. Se establece la finalidad del problema (minimizar el gasto).

El costo de cada saco X es de $30 y la del saco Y es de $40. Es decir:
Minimizar $Z = 30X + 40Y$.

3. Se establecen las restricciones en las cuales se encuentra sujeto el problema:

La cantidad de maíz que debe comprar durante los tres meses es de 12 o más kg. El costal X tiene sólo 4 kg de maíz; sin embargo, el costal Y no contiene maíz. Por lo tanto, la función objetivo estará sujeta a $4X \geq 12$.

La cantidad de trigo que debe comprar durante los tres meses es de 6 o más kg. El costal Y contiene sólo 3 kg de trigo; sin embargo, el costal X no contiene trigo. Por lo tanto, la función objetivo estará sujeta a $3Y \geq 6$.

La cantidad de sorgo que debe comprar durante los tres meses es de 9 o menos kg. El costal X contiene 1 kg de sorgo y el saco Y contiene 1.5 kg de sorgo. Por lo tanto, la función objetivo estará sujeta a $X + 1.5Y \leq 9$.

Una vez planteado el problema, se establece el sistema de ecuaciones lineales de la siguiente manera:

Minimizar:	$Z = 30X + 40Y$	
Sujeto a:	$4X + \quad \geq 12$	Cantidad de maíz
	$3Y \geq 6$	Cantidad de trigo
	$X + 1.5Y \leq 9$	Cantidad de sorgo
Donde:	$X, Y \geq 0$	

El problema se solucionará en el capítulo 4, pág. 76, por medio del método gráfico.

▶ RESUMEN

Se explicó que la programación lineal involucra la búsqueda de la región factible que optimiza la función objetivo. Más específicamente, se define de la siguiente manera:

Dado un conjunto de R_r desigualdades lineales o ecuaciones lineales con Z_{mn} variables, se requiere encontrar valores NO NEGATIVOS que satisfagan las restricciones y maximicen o minimicen alguna función lineal de las variables llamadas función objetivo:

$F = k_1 x_{11} + k_2 y_{12} + \cdots + k_u z_{mn}$

Independientemente de la forma en que definimos la programación lineal, tenemos que expresar un objetivo bien definido, que pueda servir para:

Maximizar la contribución

Utilizando los recursos disponibles; o bien,

Producir el ***costo más bajo posible***
Usando una cantidad limitada de factores productivos, o *determinar la mejor distribución de los factores productivos dentro de cierto periodo*.

En resumen, sin importar el producto o servicio que se desee manufacturar y comercializar, el problema de programación lineal deberá responder objetivamente a las siguientes preguntas:

1. ¿Qué busca determinar el modelo? Dicho de otra manera, ¿cuáles son las variables de decisión (incógnitas) del problema?
2. ¿Cuál es el objetivo que se requiere alcanzar para determinar la solución óptima?
3. ¿Qué restricciones deben imponerse a las variables de decisión, a fin de satisfacer las limitaciones o requerimientos bajo las cuales se encuentra sujeto el sistema representado por el modelo?

▶ EVALUACIÓN

Conteste Falso o Verdadero

En el contexto de la PL, un modelo es una representación exacta de la realidad que debe cumplir con un objetivo específico, el cual se encuentra sujeto a restricciones o requerimientos.	F o V
En el contexto de la PL, las decisiones finales de un equipo de IO se encuentran basadas exclusivamente en los datos numéricos que proporciona un modelo bien formulado.	F o V
Para formular un modelo de PL es indispensable establecer solamente las restricciones que se deben de imponer a las variables de decisión, a fin de satisfacer las limitaciones o requerimientos bajo los cuales se encuentra sujeto el sistema representado por el modelo.	F o V
Una restricción puede limitar los valores que la función objetivo puede asumir, pero no para las variables de decisión.	F o V

Opciones múltiples

En un modelo de maximización de programación lineal:

a) La función objetivo es maximizada.
b) Se maximiza la función objetivo y después se determina si el máximo se da en una decisión permisible.
c) La función objetivo es maximizada dentro del conjunto de decisiones permisibles.
d) Todo lo anterior.

La formulación del modelo es importante porque:

a) Nos capacita en el uso de las técnicas del álgebra.
b) En el contexto de los negocios, la mayoría de los administradores prefieren trabajar con modelos formales.
c) Obligan a los administradores a formular problemas claramente definidos.
d) Permiten a los administradores una mejor comunicación con los científicos de la administración y por lo tanto una mayor precisión de las políticas de contratación.

En un programa lineal se incluyen requerimientos de no negatividad porque:

a) Hacen el problema más fácil de resolver.
b) Hacen que el modelo corresponda más estrechamente al problema del mundo real.
c) Nada de lo anterior.
d) Tanto la opción *a*) como la *b*).

Formule los siguientes problemas utilizando la programación lineal:

Problema 1. *Capítulo* 3
Una empresa química fabrica dos aditivos que permiten la elaboración de dos detergentes. Uno es utilizado especialmente para la limpieza de artículos de vestuario y el otro para el lavado de utensilios de cocina. Para producir los dos aditivos se requiere mezclar tres materiales químicos, tal como se indica en la Tabla X:

Tabla 3.4

MATERIALES	ADITIVO PARA LIMPIEZA DE VESTUARIOS	ADITIVO PARA LIMPIEZA DE UTENSILIOS DE COCINA
MATERIAL A	.2	.65
MATERIAL B	No contiene material B	.15
MATERIAL C	.4	.3

Para llevar a cabo la producción, se dispone de 14 toneladas del material A, 3 del material B y 12 del material C. Además, el gerente analizó las cifras de producción, y determinó una utilidad de €37 por cada tonelada que se produzca a base de aditivo utilizado como detergente para limpieza de artículos de vestuario, y €48 por cada tonelada producida de base de aditivo utilizado como detergente para limpieza de utensilios. Formule un problema de programación lineal (PL) que determine la cantidad de aditivo que es conveniente producir de acuerdo a su uso, a fin de maximizar la ganancia total.

Problema 2. *Capítulo* 3
Se ofrece a los estudiantes de Administración un curso de álgebra matricial que se imparte en 12 horas clase y otro de programación lineal (PL) que se imparte en 20 horas clase. El departamento de matemáticas solicitó que el curso de álgebra

matricial se divida en 5 o más temas, y el curso de PL se divida en 8 o más temas. En el verano se dispone de no más de 400 horas clase. Los cursos son impartidos por dos asesores, el que imparte los temas relacionados con el álgebra matricial cobra $2 400 pesos y el que imparte los temas de PL cobra $7 650 pesos. Para que se lleven estos dos cursos se deben inscribir más de 21 alumnos.

Formule un modelo de PL que determine la cantidad mínima de cursos de álgebra matricial y de PL que se puedan impartir en la Universidad.

▶ PL EN ACCIÓN (Modelo de recolección de madera en MedWestvaco Corporation)[1]

MeadWestvaco Corporation es una importante compañía productora de papel de alta calidad para periódicos, libros, impresos comerciales y formas para negocios, también produce pulpa y madera, diseña y manufactura sistemas de empaque para bebidas y otros productos de consumo, además es líder mundial en la producción de cartón recubierto y contenedores para empaques. El departamento de Análisis de Decisiones de MaeadWestvaco elabora e implementa los análisis cuantitativos basados en métodos cuantitativos y recomendaciones personales.

MeadWestvaco usa modelos cuantitativos para auxiliar a la administración de largo alcance del bosque maderable de la compañía. Mediante el empleo de programas lineales de gran escala se elaboraron planes de recolección de madera para cubrir un horizonte de tiempo considerable. Estos modelos consideran las condiciones del mercado de madera, los requerimientos de la misma pulpa de papel, las capacidades de recolección y los principios generales de administración de bosques. Dentro de estas restricciones, el modelo llega a una recolección óptima y a un calendario de compra basado en el flujo de efectivo descontado. Los calendarios alternativos reflejan cambios en las diversas suposiciones concernientes al crecimiento del bosque, la disponibilidad de madera y las condiciones económicas generales.

También se usan métodos cuantitativos en la elaboración de las entradas para los modelos de programación lineal. Los precios de la madera y suministros, al igual que los requerimientos de la fábrica de papel, deben pronosticarse a lo largo del horizonte de tiempo y se usan técnicas de muestreo avanzadas para evaluar las propiedades de la tierra y para proyectar el crecimiento de los bosques. El calendario de recolección se elabora posteriormente.

[1] PL EN ACCIÓN fue obtenido de: David R, Anderson, Dennis J. Sweeney y Thomas A. Williams. ***Métodos Cuantitativos para los Negocios***. Editorial Thomson, 9a. ed., pág. 225. La cual es proporcionada por: Dr. Edward P. Winkofsky de MeadWestvaco Corporatión. Basado a su vez en: Dr. Edward P. Winkofsky de MeadWestvaco Corporation.

GLOSARIO

Restricción.—Ecuación o desigualdad que descarta ciertas combinaciones de variables de decisión como soluciones factibles.

Restricciones de no negatividad.—Conjunto de desiguales que requieren que todas las variables sean no negativas.

Formulación del problema.—Proceso de traducir una declaración verbal de un programa en una declaración matemática llamada modelo matemático.

Formulación de modelo.—Proceso de definir el problema mediante su identificación y comprensión del objetivo(s) que se desean optimizar, lo que implica ubicar todas las restricciones a las cuales se encuentra sujeto el sistema.

Función objetivo.—Expresión matemática que define lo que se va a maximizar o minimizar en un modelo de programación lineal.

Programa lineal.—Modelo matemático con una función objetivo lineal, un conjunto de restricciones lineales y variables no negativas.

Parámetros.—Son constantes cuyos valores numéricos (datos) son conocidos.

Variables de decisión.—Son variables que se encuentran identificadas como cantidades controladas por la administración. Se encuentran bajo el control de otras personas responsables de tomar decisiones o del medio ambiente.

CAPÍTULO 4

MÉTODO GRÁFICO

▷ 4.1 INTRODUCCIÓN

El método gráfico es una técnica analítica que se utiliza para solucionar problemas formulados con ecuaciones lineales de primer grado, las cuales contienen un máximo de dos o tres variables de decisión.

Adquirir el conocimiento de este método sistemático es significativo para comprender cómo funciona el proceso de optimización en la programación lineal (PL), como es el caso del método símplex. También permite presentar el concepto de análisis de sensibilidad de manera más lógica y comprensible; sin embargo, no es relevante y factible utilizar esta técnica descriptiva para solucionar los problemas que puede enfrentar una organización, ya que, para llevar a cabo la elaboración y la comercialización de productos y servicios en un segmento de un mercado real, el modelo determinístico con seguridad estará formulado con más de tres variables de decisión. Por consiguiente, es impráctico e imposible utilizar el método gráfico para solucionar modelos que se encuentran diseñados con más de tres variables decisión.

▷ 4.2 MODELO DE PL BASADO EN EL TIEMPO DE FABRICACIÓN DE SOFÁS

Retomemos el mismo problema basado en la elaboración de dos tipos de sofás. La fábrica de muebles desea saber la cantidad de sofás A y de sofás B que se deben fabricar con la finalidad de maximizar la contribución total.

La formulación del problema se expresó matemáticamente (capítulo 3, pág. 47) de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar:} \quad Z = 10X + 25Y$$

$$\begin{array}{lrll}
\text{Sujeto a:} & X + 2Y & \leq 80 & \text{Departamento de corte} \\
 & 3/4X + 1/2Y & \leq 20 & \text{Departamento de armado} \\
 & X & \leq 50 & \text{Departamento de tapicería} \\
 & Y & \leq 10 & \text{Departamento de cubiertas}
\end{array}$$

$$\text{Donde: } X, Y \geq 0$$

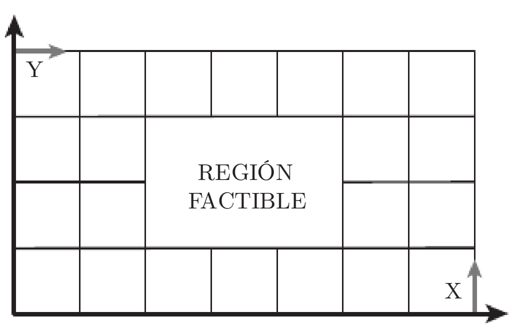
Ahora que el problema fue formulado, el segundo paso consiste en resolver el modelo. Para lograr tal objetivo es necesario encontrar valores para las variables de decisión que satisfagan todas las restricciones y al mismo tiempo proporcionen el mejor valor posible para la función objetivo. Esto se logra usando métodos matemáticos que permitan solucionar el problema de manera sistemática. En este caso utilizaremos el método gráfico.

◢ Solución del modelo

Consideraremos una restricción a la vez, para determinar qué valores de X y Y satisfacen todas las restricciones a las que se encuentra sujeto el modelo gráfico.

Comencemos con las restricciones de no negatividad $X \geq 0$ y $Y \geq 0$.

Estas desigualdades nos permiten establecer geométricamente el área factible para la función objetivo y sus respectivas restricciones, las cuales están a la derecha del eje Y y encima del eje X (Véase la Figura 4.1):



Entendemos como región factible al conjunto de valores que adquieren las variables de decisión en un programa lineal que satisface todas las restricciones

Figura 4.1

Una vez establecida la región factible donde realizaremos nuestro análisis, se prosigue a graficar las siguientes restricciones que la delimitarán aún más; para esto es necesario considerar las desigualdades como ecuaciones en forma de igualdades:

$$\begin{array}{lrrl}
\text{Sujeto a:} & X + 2Y \leq 80, & X + 2Y & = 80 \\
 & 3/4X + 1/2Y \leq 20, & 1/3X + 1/2Y & = 20 \\
 & X \leq 50, & X & = 50 \\
 & Y \leq 10, & Y & = 10
\end{array}$$

Cada ecuación es una línea recta, la cual necesitamos graficar. Para esto, y en el caso que sea necesario, debemos darle un valor de cero a X para encontrar el valor de Y en la ecuación y viceversa. Es decir: (Véase la Figura 4.2)

$X + 2Y \leq 80$, $X + 2Y = 80$
Si $X = 0$, entonces $Y = 80/2 = 40$
Si $Y = 0$, entonces $X = 80$

Las coordenadas en los vértices A y B son A(0, 40) y B(80, 0)

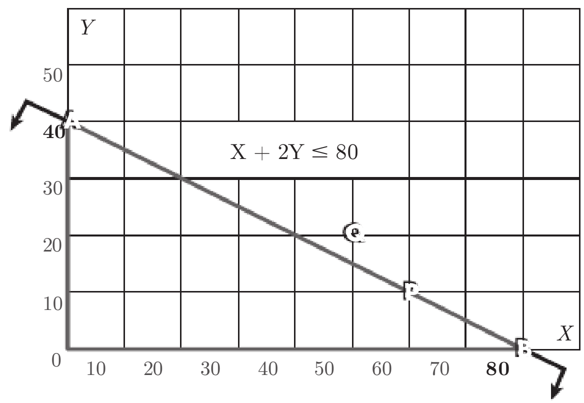


Figura 4.2

La desigualdad $X + 2Y \leq 80$ limita aún más la región factible establecida por las restricciones de no negatividad ($X \geq 0$ y $Y \geq 0$). Las coordenadas que se encuentran dentro de esta área triangular (Véase la Figura 4.2) satisface infinitas soluciones (lo que implica el sentido de la flechas), lo cual no sucede para aquellas coordenadas que se encuentran fuera de dicha región triangular.

Analicemos los valores de las coordenadas ubicadas en los puntos P(60, 10) y Q(50, 20).

$X + 2Y \leq 80$ evaluado en el punto P(60, 10):
$60 + 2(10) \leq 80 \Rightarrow 80 \leq 80$ cumple con la condición.

$X + 2Y \leq 80$, evaluado en el punto Q(50, 20):
$50 + 2(20) \leq 80 \Rightarrow 90 \leq 80$ no cumple con la condición, porque queda en el exterior de la región.

Por lo tanto, el punto Q no pertenece dentro de la región factible de la desigualdad $X + 2Y \leq 80$.

El área $X + 2Y \leq 80$ se encuentra condicionada por la desigualdad $X \leq 50$, la cual limita más la región factible, cuyas coordenadas deben satisfacer infinitas soluciones de las dos desigualdades.

Analicemos los valores de las coordenadas ubicadas en los puntos O(10, 20) y P(60, 10). (Véase la Figura 4.3)

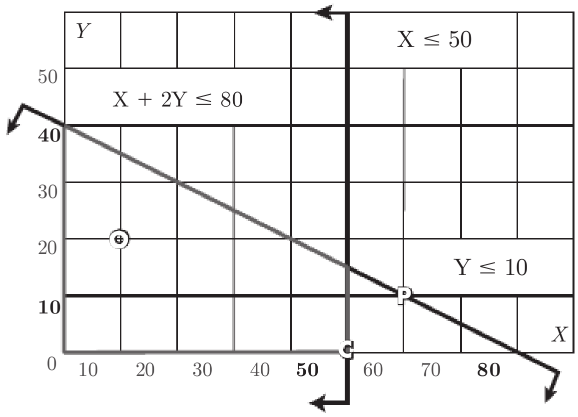


Figura 4.3

X + 2Y ≤ 80, evaluado en el punto P(60, 10): 60 + 2(10) ≤ 80 ⇒ 80 ≤ 80 cumple con la condición. X ≤ 50, evaluado en el punto P(60, 10): 60 ≤ 50 no cumple con la condición.	X + 2Y ≤ 80, evaluado en el punto O(10, 20): 10 + 2(20) ≤ 80 ⇒ 50 ≤ 80 cumple con la condición. X ≤ 50, evaluado en el punto O(10, 20): 10 ≤ 50 cumple con la condición.

El punto P ya no pertenece dentro de la región factible establecida por las desigualdades:
X ≤ 50 y X + 2Y ≤ 80 lo que no sucede con el punto O.
La coordenada de la ecuación X ≤ 50, o bien X = 50 es C(50, 0).

Esta área se encuentra aún más limitada por la desigualdad Y ≤ 10, con coordenadas D(0, 10) Lo que indica que cualquier coordenada que pertenezca al dominio de la región, deberá satisfacer las tres restricciones del sistema. Analicemos los valores de las coordenadas ubicadas en los puntos O(10, 20) y R(40, 5). (Véase la Figura 4.4)

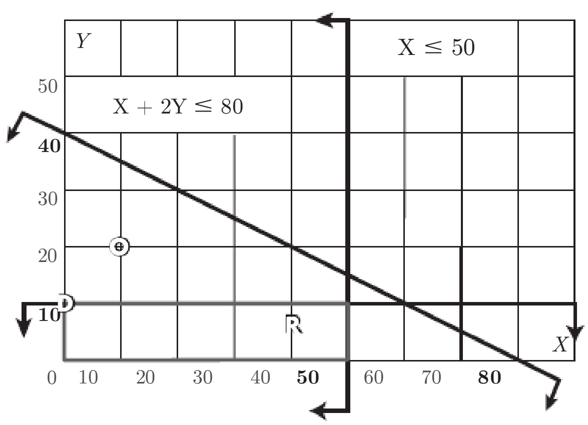


Figura 4.4

$X + 2Y \leq 80$, evaluado en el punto O(10, 20): $10 + 2(20) \leq 80 \Rightarrow 50 \leq 80$ cumple con la condición.	$X + 2Y \leq 80$, evaluado en el punto R(40, 5): $40 + 2(5) \leq 80 \Rightarrow 50 \leq 80$ cumple con la condición
$X \leq 50$, evaluado en el punto O(10, 20): $10 \leq 50$ cumple con la condición.	$X \leq 50$, evaluado en el punto R(40, 5): $40 \leq 50$ cumple con la condición.
$Y \leq 10$, evaluado en el punto O(10, 20): $20 \leq 10$ no cumple con la condición.	$Y \leq 10$, evaluado en el punto R(40, 5): $5 \leq 10$ cumple con la condición.

El punto O ya no pertenece dentro de la región factible establecida por las desigualdades:
$X \leq 50$ y $X + 2Y \leq 80$ y $Y \leq 10$; lo que no sucede con el punto R.
La coordenada de la $Y \leq 10$, o bien $Y = 10$ es D(0, 10).

Del mismo modo, esta región se encuentra aún más limitada por la última desigualdad $3/4X+ 1/2Y \leq 20$. Lo cual indica que cualquier coordenada que pertenezca al dominio de la región factible, deberá satisfacer las cuatro restricciones del sistema modelado. Evaluaremos los valores de las coordenadas en los puntos R(40, 5) y V(5, 5): (Véase la Figura 4.5)

$3/4X + 1/2Y \leq 20$, $3/4X + 1/2Y = 20$
Si $X = 0$, entonces $Y = 2(20) = 40$
Si $Y = 0$, entonces $X = 4(20)/3 = 26.66$
Con coordenadas E(0, 40) y F(26.66, 0)

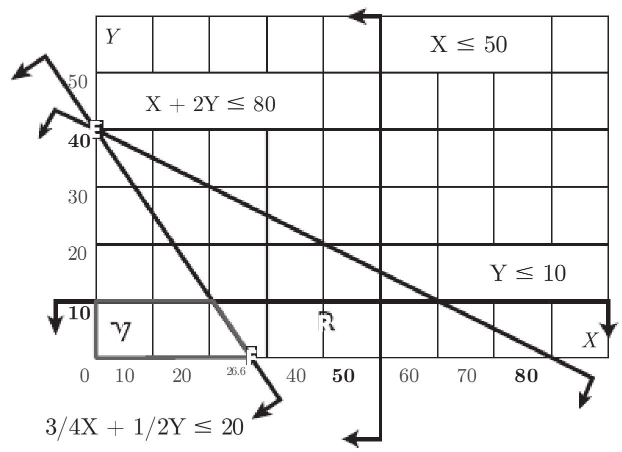


Figura 4.5

$X + 2Y \leq 80$, evaluado en el punto V(5, 5): $5 + 2(5) \leq 80 \Rightarrow 15 \leq 80$ cumple con la condición.	$X + 2Y \leq 80$, evaluado en el punto R (40,5): $40 +2(5) \leq 80 \Rightarrow 50 \leq 80$ cumple con la condición.
$X \leq 50$, evaluado en el punto V(5, 5): $5 \leq 50$ cumple con la condición.	$X \leq 50$, evaluado en el punto R (40,5): $40 \leq 50$ cumple con la condición.
$Y \leq 10$, evaluado en el punto V(5, 5): $5 \leq 10$ cumple con la condición.	$Y \leq 10$, evaluado en el punto R (40,5): $5 \leq 10$ cumple con la condición.
$3/4X + 1/2 Y \leq 20$, evaluado en el punto V(5, 5): $3/4(5) + 1/2(5) \leq 20 \Rightarrow 6.5 \leq 20$ cumple con la condición.	$3/4X + 1/2Y \leq 20$, evaluado en el punto R(40, 5): $3/4(40) + 1/2(5) \leq 20 \Rightarrow 32.5 \leq 20$ no cumple con la condición.

El punto R ya no pertenece dentro de la región factible establecida por las desigualdades $X \leq 50$, $X + 2Y \leq 80$, $Y \leq 10$ y $3/4 X + 1/2Y \leq 20$; lo que no sucede con el punto V.

De esta forma, se obtiene la región factible, donde buscaremos obtener los valores de las coordenadas que nos dará la solución óptima: (Veáse la Figura 4.6)

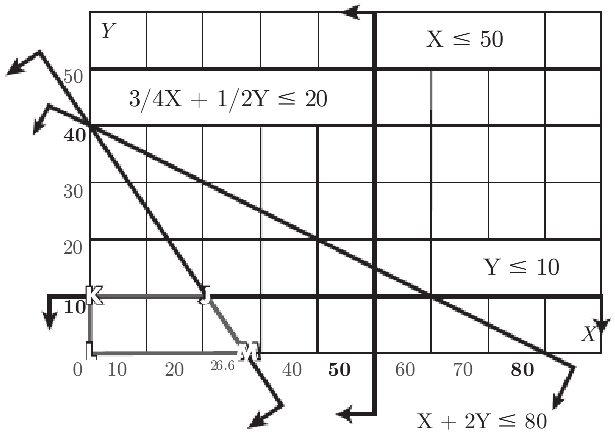


Figura 4.6

Cada punto contenido en el dominio de la región factible representa coordenadas de infinitas soluciones. Pero sólo uno de los vértices situados en la frontera: K, L, M y J de la Figura 4.7 determinará las coordenadas que nos proporcionarán la solución óptima[1].

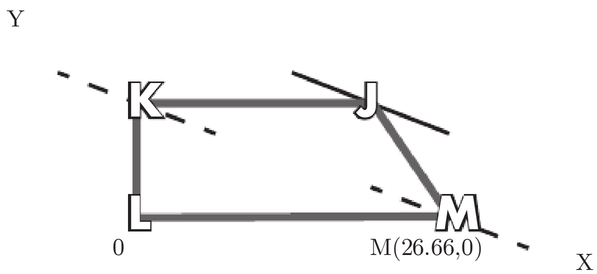


Figura 4.7

El análisis comienza en el origen del vértice L(0, 0). Si sustituimos las coordenadas del vértice L en la función objetivo (10X + 25Y = Z) no se obtienen ganancias, pues partimos del origen.

Ahora bien, si desplazamos la función objetivo (10X + 25Y = Z) hasta el vértice K(0, 10) se obtienen ganancias por 10(0) + 25(10) = €250.

Luego, si desplazamos la función objetivo (10X + 25Y = Z) hasta el vértice M(26.66, 0) se obtienen ganancias por 10(26.66) + 25(0) = €266.6.

Nos queda por último desplazar la pendiente de la función objetivo hasta el vértice J. Pero antes debemos de encontrar sus coordenadas.

1 Generalmente, la mayoría de los autores descubre la solución óptima empezando con una coordenada arbitraria que se encuentra en los límites de la región factible, consecutivamente, trazan la recta de la función objetivo y luego trasladan la recta paralelamente eligiendo valores arbitrarios, según sea la lógica que se aplique para obtener la optimización de la función objetivo.

Observe que las dos rectas que interceptan al vértice J son $3/4X + 1/2Y = 20$ y $Y = 10$. Ahora bien, debemos resolver este sistema de ecuaciones simultáneas utilizando un método analítico. Usaremos el método de eliminación por sustitución:

Sustitúyase la expresión $Y = 10$ en la ecuación $3/4\ X + 1/2Y = 20$, obtenemos que el valor de la incógnita es $X = [\ 20 - 1/2\ (\ 10\ )\ ]/3/4 = 20$.

Por lo tanto, el vértice buscado es J (20,10). Sustituyendo estas coordenadas en la función objetivo ($10X + 25Y = Z$), obtenemos una utilidad máxima de $10\ (20) + 25(10) =$ €450.

Como usted puede observar, la máxima ganancia se obtendrá si trasladamos la función objetivo hasta las coordenadas del vértice J; por consiguiente, la contribución a la utilidad corresponde a elaborar $X = 20$ sofás A y $Y = 10$ sofás B.

Como anteriormente indicamos, la solución óptima ocurre únicamente en un vértice extremo de la gráfica. Con base en este teorema podemos establecer un enfoque alternativo para solucionar el problema. Para esto es necesario sustituir las coordenadas en cada uno de los vértices extremos de la región factible en la función objetivo:

Maximizar:	Z=	10X + 25Y		
En la coordenada **L**)	Z=	10 (0)	+ 25(0)	= €0 euros.
En la coordenada **K**)	Z=	10 (0)	+ 25(10)	= €250 euros.
En la coordenada **J**)	Z=	10 (20)	+ 25(10)	= €450 euros.
En la coordenada **M**)	Z=	10 (26.66)	+ 25(0)	= €266.6 euros.

4.2.1 RESTRICIONES REDUNDANTES Y ACTIVAS

El problema que se propuso pertenece al dominio de programas lineales factibles con restricciones redundantes, debido a que existen dos desigualdades que no son necesarias para solucionar el problema en el sentido de que la región factible es exactamente la misma si incluye o no estas dos restricciones.
Observe la Figura 4.8.

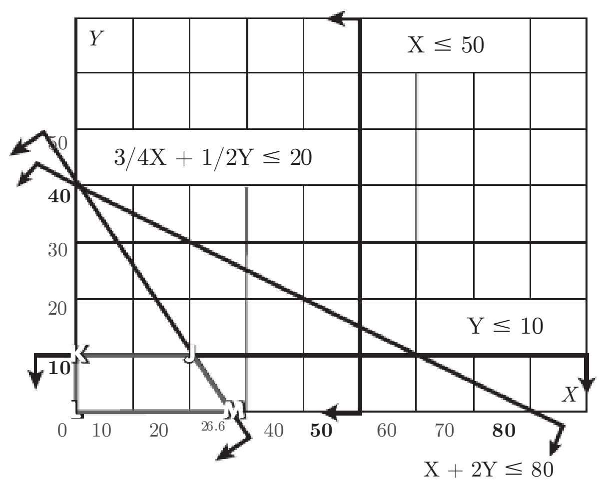


Figura 4.8

NOTA.Para resolver un sistema de ecuaciones simultáneas es necesario hallar el conjunto de valores que satisfagan simultáneamente cada una de las ecuaciones.

Observe que la región factible es exactamente la misma si incluye o no las restricciones $X \leq 50$ y $X + 2Y \leq 80$; por lo tanto, estas dos restricciones son redundantes. No le concierne necesariamente saber si una restricción es redundante o no al formular y solucionar un problema de programación lineal. El único efecto que ocasiona es que aumente el tamaño de éste, por lo que puede ocasionar que un programa de computadora se tome tiempo extra para resolver el problema; no se preocupe por las restricciones redundantes, si piensa que necesita una restricción, inclúyala en la formulación. (Véase la Figura 4.9)

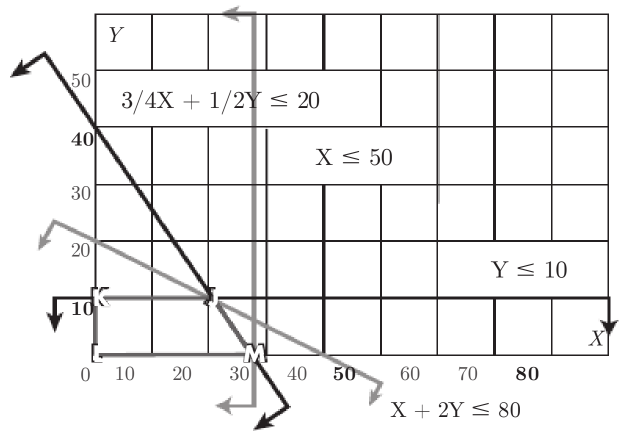


Figura 4.9

Recuerde, la coordenada J(20, 10) indica que la fábrica puede producir un máximo de 20 sofás del tipo A y 10 sofás del tipo B. Si sustituimos esta coordenada en la desigualdad $X + 2Y \leq 80$ obtendríamos un resultado analizado en horas de $20 + 2(10) \leq 40$ de horas, lo que nos dice que tenemos 40 horas de sobra en el departamento de corte; por lo tanto, podemos trasladar la desigualdad paralelamente hasta el vértice J sin afectar el diseño original de la región factible. Por otro lado, las coordenadas M(26.66, 0) demuestran que la industria puede elaborar un máximo de 26.66 sofás del tipo A sin producir ningún sofá del tipo B. Si sustituimos estos valores en la desigualdad $X \leq 50$ lograríamos un resultado de 26.66 analizado en horas para el departamento de tapicería; por lo tanto, podemos trasladar la desigualdad 23.34 unidades hasta el vértice M, pues es lo que tenemos en tiempo extra; pero, si trasladamos 30 unidades la desigualdad $X \leq 50$ hasta el vértice J afectaríamos el diseño original de la región factible, mas no la solución óptima. Es decir: (Veáse la Figura 4.10)

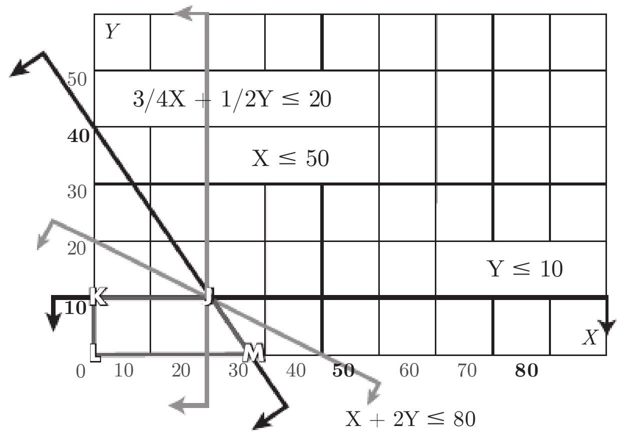


Figura 4.10

Evaluemos los valores óptimos de las variables de decisión en cada una de las restricciones: (Véase Tabla 4.1)

Tabla 4.1

VALORES ÓPTIMOS	RESTRICCIONES EN EL VÉRTICE J	EVALUACIÓN Y RESULTADO	
X = 20 y Y = 10	X + 2Y ≤ 80	20 + 2(10) ≤ 8 ⇒ 40 ≤ 80	40 horas de sobra en el departamento de corte.
	¾X + ½Y ≤ 20	3/4(20) + 1/2(10) ≤ 20 ⇒ 20 ≤ 20	0 horas de sobra en el departamento de armado.
	X ≤ 50	20 ≤ 50	30 horas de sobra en el departamento de tapicería.
	Y ≤ 10	10 ≤ 10	0 horas de sobra en el departamento de cubiertas.

DEMOSTRACIÓN:

Valores óptimos X = 20 y Y = 10

Departamento de corte:

$X + 2Y + H_1 = 80$, despejamos $H_1 = 80 - X - 2Y$, se sustituye $H_1 = 80 - 20 - 2(10) = 40$

Departamento de armado:

$3/4X + 1/2Y + H_2 = 20$, despejamos $H_2 = 20 - 3/4X - 1/2Y$, se sustituye $H_2 = 20 - 3/4(20) - 1/2(10) = 0$

Departamento de tapicerías:

$X + H_3 = 50$, despejamos $H_3 = 50 - X$, se sustituye $H_3 = 50 - 20 = 30$

Departamento de cubiertas:

$Y + H_4 = 10$, despejamos $H_4 = 10 - Y$, se sustituye $H4 = 10 - 10 = 0$

La restricción $3/4X + 1/2Y \leq 20$ evaluada en el vértice J(20, 10) indica que la mediana empresa de mueblería no puede elaborar más sofás del tipo A y B por falta de tiempo en el departamento de armado. Igualmente sucede para la restricción evaluada en el mismo vértice J. Cuando ocurre esta condición denominamos a las desigualdades $3/4X + 1/2Y \leq 20$ y $Y \leq 10$ como ***Restricciones activas***, o en forma equivalente, ***Restricciones obligatorias.***

La restricción $X + 2Y \leq 80$ evaluada también en el vértice J (20, 10) nos indica que existe un sobrante de 40 horas en el departamento de tapicería. Igualmente sucede para la restricción $X \leq 50$ evaluada en el mismo vértice J. Cuando sucede esta condición denominamos a la desigualdades $X + 2Y \leq 80$ y $X \leq 50$ como ***Restricciones inactivas***.

La variable de holgura con frecuencia se agrega a una ***Restricción inactiva*** o ***Activa*** en un problema de programación lineal para representar la capacidad no usada. Ésta no contribuye a la ganancia, así que las variables de holgura tienen coeficiente de cero en la función objetivo. De manera más general, las variables de ***Holgura*** representan la diferencia entre el lado derecho y el lado izquierdo de una restricción del tipo $\leq$. Por consiguiente, podemos reformular el problema de la siguiente forma:

Maximizar: $Z = 10X + 25Y + 0H_1 + 0H_2 + 0H_3 + 0H_4$

$$\begin{array}{lllll}
\text{Sujeto a:} & X + 2Y + 1H_1 & & & = 80 \text{ Departamento de corte} \\
& 3/4X + 1/2Y & + 1H_2 & & = 20 \text{ Departamento de armado} \\
& X & & +1H_3 & = 50 \text{ Departamento de tapicería} \\
& Y & & + 1H_4 & = 10 \text{ Departamento de cubiertas}
\end{array}$$

Donde: $X, Y, 0H_1, 0H_2, 0H_3, 0H_4 \geq 0$

Una restricción del tipo $\leq$ puede ser convertida en igualdad sumándole una variable de holgura no negativa al lado izquierdo.

Siempre que todas las restricciones en un programa lineal se expresen como igualdades, se dice que están escritas en ***Forma estándar***.

4.2.2 ADITIVIDAD, PROPORCIONALIDAD y DIVISIBILIDAD

Todos los problemas determinísticos formulados con restricciones lineales, tienen las siguientes propiedades matemáticas: aditividad, proporcionalidad y divisibilidad. (Véase la tabla 4.2)

Tabla 4.2

DESIGUALDADES	DEPARTAMENTO	TIEMPO DISPONIBLE (HRS)	TIEMPO REQUERIDO (HRS)	
			SOFÁ (A)	SOFÁ (B)
$X+2Y \leq 80$	CORTE	80	1	2
$X \leq 50$	TAPICERÍA	50	1	0

La aditividad estipula que la contribución total de todas las variables en la función objetivo y sus requerimientos en las restricciones deberá ser la suma directa de las contribuciones o requerimientos individuales de cada variable.

Para ilustrar la propiedad de aditividad, tenemos como ejemplo la restricción $X + 2Y \leq 80$, la cual muestra que la producción de sofás A y sofás B en el departamento de corte se encuentra restringida en 80 horas laborales. Esta restricción satisface la propiedad de aditividad, porque la contribución de X que se encuentra restringida a 1 hora de producción se suma a la contribución Y restringida a 2 horas de producción.

En caso de que la restricción se estableciera de la siguiente manera $(1X)(2Y) \leq 80$, tendríamos que la desigualdad no satisface la propiedad de aditividad, porque las contribuciones restringidas al tiempo de elaboración (1X) (2Y) no se suman unas con otras.

En el modelo matemático de la empresa, la utilidad total es igual a la suma de dos componentes individuales; sin embargo, si los dos productos compiten por la misma parte del mercado en forma tal que un aumento de ventas en los sofás del tipo A afecte negativamente en la venta de sofás del tipo B, tendríamos que la propiedad de aditividad ya no se satisface.

Se entiende por proporcionalidad a la propiedad matemática de restricción mediante la cual si el valor de una variable se multiplica por cualquier constante, su contribución a la restricción se multiplica por esa misma constante.

Observemos el ejemplo de la restricción $X + 2Y \leq 80$. La solución determinó una producción de $Y = 10$ sofás del tipo B. En este caso, se establece una contribución de $Y = 2Y = 2(10) = 20$.

Si el valor de $Y = 10$ se multiplica por cualquier constante, digamos k, entonces tenemos:

$$\text{Contribución de } Y = 2Y = 2(10k) = 20k.$$

Como se puede observar, si el valor de Y se multiplica por cualquier constante k, la contribución de Y a la restricción también se multiplica por k.

Como esta misma propiedad es también cierta para X, esta restricción $X + 2Y \leq 80$ sí satisface la propiedad de proporcionalidad.

En caso de que la restricción estuviera establecida como $X^2 + 2Y \leq 80$, ya no cumpliría con la proporcionalidad, debido a que X toma el valor de 20:

$$\text{Contribución de } X = X^2 = 20^2 = 400$$

Si el valor de $X = 20$ se multiplica por una constante k, entonces:

$$\text{Contribución de } X = X^2 = (k*20)^2 = k^2 * 20^2 = k^2 * 400$$

Como se puede observar, si el valor de X se multiplica por una constante k, la contribución de X a la restricción se multiplica por k^2, por consiguiente, la proporcionalidad no se mantiene.

Si la empresa ofrece alguna clase de descuento por la venta de cierta cantidad de sofás del tipo A o B, la utilidad ya no será proporcional a las cantidades producidas de X y Y.

Sobre las bases de las propiedades de aditividad y proporcionalidad, existen dos clasificaciones de problemas determinísticos:

a) Problema determinístico de restricciones lineales (en el que todas las restricciones satisfacen tanto la propiedad de aditividad como la proporcionalidad).
b) Problema determinístico de restricciones no lineales (en las que alguna restricción no satisface al menos una de las propiedades de aditividad y proporcionalidad).

Ahora analicemos la propiedad denominada divisibilidad. Esta propiedad matemática asume en teoría que una variable de decisión acepta cualquier valor fraccional dentro de cierto intervalo.

Por ejemplo, las variables $X = 20$ y $Y = 10$ representan la cantidad de sofás A y sofás B que en teoría puede producir una fábrica mediana de muebles; entonces, decimos que estas variables son divisibles. Por el contrario, si las variables, o al menos una, tomara un valor de $X = 20.444$ y $Y = 10$, decimos que la variable X no es divisible porque no es posible elaborar $X = 20.444$ sofás A; por lo tanto, debemos asignar valores enteros a estas variables. Para solucionar estos problemas podemos utilizar modelos determinísticos con variables enteras (o discretas) como es el caso de la programación lineal entera.

▷ 4.3 MODELO DE PL BASADO EN UNA DIETA NUTRITIVA PARA UN CABALLO

Retomemos el problema basado en la alimentación recomendada para un caballo lusitano durante tres meses (con maíz, trigo y sorgo mezclando dos costales que contienen estas cantidades en diferentes proporciones). El objetivo consistía en minimizar los costos.

El problema fue planteado (Capítulo 3, pág. 49) de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar:} \quad Z = 30X + 40Y$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{Sujeto a:} & 4X & \geq & 12 \text{ Cantidad de maíz} \\ & 3Y & \geq & 6 \text{ Cantidad de trigo} \\ & X + 1.5Y & \leq & 9 \text{ Cantidad de sorgo} \end{array}$$

$$\text{Donde: } X \geq 0,\ Y \geq 0$$

Para resolver el problema es necesario encontrar valores para las variables de decisión que satisfagan todas las restricciones y que, al mismo tiempo, proporcionen el mejor valor posible para la función objetivo.

Solución del modelo

Grafiquemos cada una de las restricciones. Para hacerlo, consideramos las desigualdades disponibles como ecuaciones en forma de igualdades, excepto las restricciones de no negatividad: (Véanse las Figuras 4.11, 4.12 y 4.13)

$X + 1.5Y \leq 9$, $X + 1.5Y = 9$
Si $X = 0$, entonces $Y = 9/1.5 = 6$
Si $Y = 0$, entonces $X = 9$
Las coordenadas son (0, 6) y (9, 0)

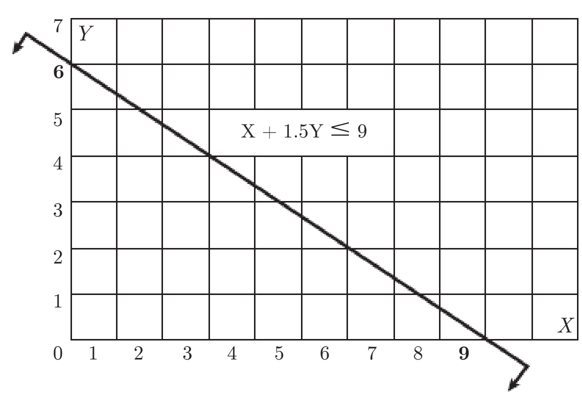
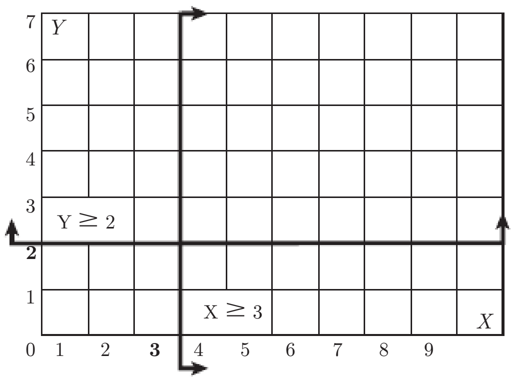


Figura 4.11



$4X \geq 12$, $4X = 12$
$4X = 12$, despejamos $X = 3$
Las coordenadas son (3, 0)
$3Y \geq 6$, $3Y = 6$
$3Y = 6$, despejamos $Y = 2$
Las coordenadas son (0, 2)

Figura 4.12

Uniendo las tres gráficas nos queda de la siguiente manera:

La región factible se encuentra determinada por el triángulo.

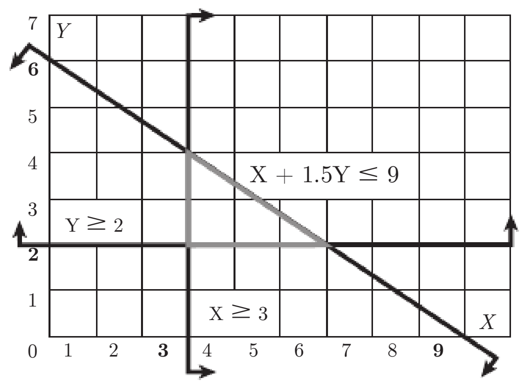
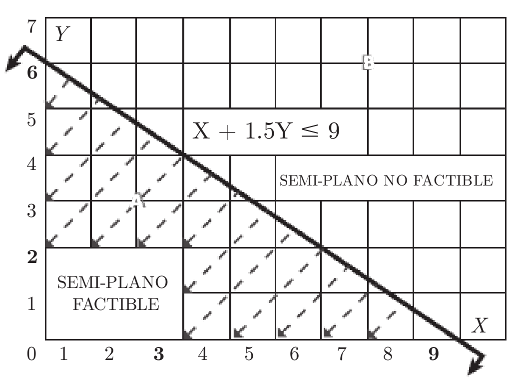


Figura 4.13

Para determinar la región factible se lleva a cabo el siguiente análisis:



El punto A situado en el área indicada con flechas es denominado semiplano factible, lo que indica que cualquier coordenada que se encuentre dentro del dominio de este espacio, cumple con la restricción $X + 1.5Y \leq 9$; sin embargo, las coordenadas que sitúan el punto B, y cualquier otra coordenada que se encuentre en el semiplano no factible no cumplen con la restricción. (Véase la Figura 4.14)

Figura 4.14

Demostrémoslo
Las coordenadas B(7, 6) no satisfacen la desigualdad:
$X + 1.5Y \leq 9 \Rightarrow 1(7) + 1.5\ (6) \leq 9 \Rightarrow 16 \leq 9$.
Sin embargo, las coordenadas A(2, 3) sí satisfacen la desigualdad:
$X + 1.5Y \leq 9 \Rightarrow 1(2) + 1.5(3) \leq 9 \Rightarrow 6.5 \leq 9$.
(Véase la Figura 4.15)

La desigualdad $X + 1.5Y \leq 9$ es “cortada” por las desigualdades $X \geq 3$ y $Y \geq 2$. Lo que ocasiona que la región factible se reduzca en la forma de un triángulo rectángulo. Las coordenadas del punto A(2, 3) ya no se encuentran dentro del dominio del semiplano de la región factible, debido a que sólo cumple con dos restricciones establecidas por el problema, lo que no sucede con las coordenadas del punto C(5, 2)

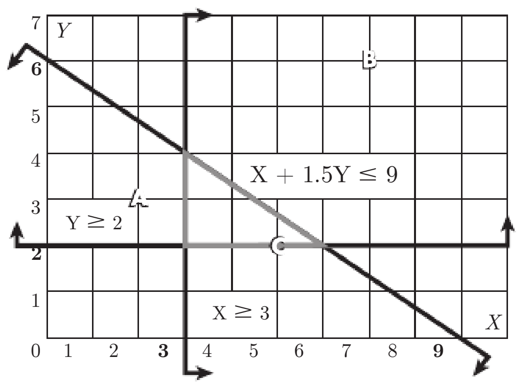


Figura 4.15

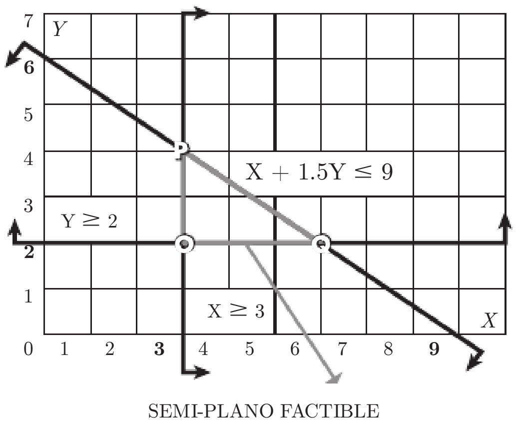
El punto A(2, 3) satisface las restricciones $Y \geq 2$ y $X + 1.5Y \leq 9$, pero no para la restricción

$X \geq 3$. El punto B(7, 6) satisface las restricciones $Y \geq 2$ y $X \geq 3$, pero no la restricción $X + 1.5\ Y \leq 9$; sin embargo, el punto C(5, 2) satisface las tres restricciones.

Demostrémoslo: (Véase la Tabla 4.3)

Tabla 4.3

COORDENADAS	ECUACIÓN	SUSTITUCIÓN Y RESULTADO	CUMPLE CON LAS RESTRICCIONES	
A(2, 3)	$X + 1.5Y \leq 9$	$1(2) + 1.5(3) \leq 9 \Rightarrow 6.5 \leq 9$	SI	SEMI-PLANO NO FACTIBLE
	$X \geq 3$	$2 \geq 3$	NO	
	$Y \geq 2$	$3 \geq 2$	SI	
B(7, 6)	$X + 1.5Y \leq 9$	$1(7) + 1.5(6) \leq 9 \Rightarrow 16 \leq 9$	NO	SEMI-PLANO NO FACTIBLE
	$X \geq 3$	$7 \geq 3$	SI	
	$Y \geq 2$	$6 \geq 2$	SI	
C(5, 2)	$X + 1.5Y \leq 9$	$1(5) + 1.5(2) \leq 9 \Rightarrow 8 \leq 9$	SI	SEMI-PLANO NO FACTIBLE
	$X \geq 3$	$5 \geq 3$	SI	
	$Y \geq 2$	$2 \geq 2$	SI	



Una vez obtenida el área de la región factible, buscaremos los valores de las coordenadas que nos darán la solución óptima. Cada punto contenido en el dominio del semiplano factible representa coordenadas de infinitas soluciones, pero sólo uno de los vértices situados en la frontera O, P y Q determina las coordenadas que nos proporcionarán la mejor solución. (Véase la Figura 4.16)

Figura 4.16

La solución óptima ocurre en uno de los vértices extremos (O P Q) del semiplano de la región factible; por consiguiente, es necesario resolver cada uno de los sistemas formados por la intersección de dichas ecuaciones y evaluarlas en la función objetivo, con el fin de saber cuáles son las coordenadas que nos proporcionarán la solución.

En el vértice O hacen intersección las ecuaciones lineales $X = 3$ y $Y = 2$, en este caso, por lógica, las coordenadas del vértice O son (3, 2).

En el vértice P hacen intersección las ecuaciones lineales $X = 3$ y $X + 1.5Y = 9$. Resolviendo el sistema por el método de sustitución:

Se sustituye $X = 3$ en la ecuación $X + 1.5Y = 9 \Rightarrow 3 + 1.5Y = 9$, despejamos $Y = (9 - 3)/1.5 = 4$, el vértice P es (3, 4).

En el vértice Q hacen intersección las ecuaciones lineales $Y = 2$ y $X + 1.5Y = 9$. Resolviendo el sistema por el método de sustitución:

Se sustituye $Y = 2$ despejamos $X + 1.5Y = 9 \Rightarrow X + 1.5(2) = 9$, despejamos $X = 9 - 3 = 6$, el vértice Q es (6, 2).

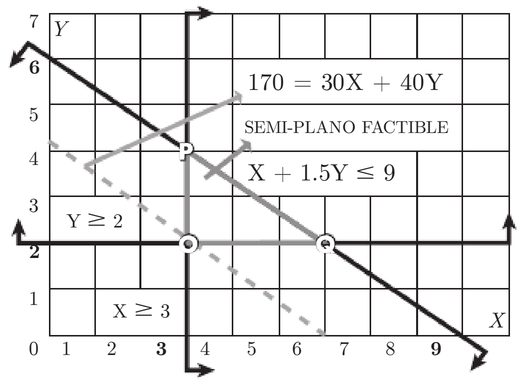
Ahora evaluaremos los tres vértices O, P y Q en la función objetivo ($Z = 30X + 40Y$): (Véase la Tabla 4.4).

Tabla 4.4

PUNTO EXTREMO	FUNCIÓN OBJETIVO	EVALUACIÓN Y RESULTADO	
O (3 , 2)	Z = 30X + 40Y	30(3)+ 40(2) = 170	Solución óptima
P (3, 4)	Z = 30X + 40Y	30(3)+ 40(4) = 250	Solución factible
Q (6, 2)	Z = 30X + 40Y	30(6)+ 40(2) = 260	Solución factible

Por lo tanto, el vértice buscado es O(3,2). Lo que significa que la contribución a la utilidad corresponde a mezclar 3 costales de X con 2 costales de Y. Si sustituimos estos valores en la función objetivo $30X + 40Y = Z$ obtenemos el costo de $30(3) + 40(2) = 170$ pesos.

Ahora tracemos la función objetivo, damos a la variable Y el valor de cero y despejamos X para obtener $X = 170/30 = 5.666$, proporcionamos el valor de cero a la variable X para obtener $Y = 170/40 = 4.25$, de esta forma encontramos que las coordenadas de la función objetivo son 5.66 para X y 4.25 para Y.



En este caso las coordenadas se pudieron haber calculado por simple observación; sin embargo, en muchos casos no será fácil confiar en la simple inspección, por lo tanto será inevitable utilizar los métodos como el de sustitución, igualación, etc., para solucionar sistemas de ecuaciones lineales. (Véase la Figura 4.17)

Figura 4.17

Como información adicional

Un granjero desea saber cuánto maíz, trigo y sorgo sobra. Para contestar esta pregunta es necesario evaluar los valores óptimos de las variables de decisión en cada una de las restricciones: (Véase la Tabla 4.5)

Tabla 4.5

VALORES ÓPTIMOS	RESTRICCIONES EN EL VÉRTICE O	EVALUACIÓN Y RESULTADO		
X = 3 y Y = 2	$X \geq 3$		$3 \geq 3$	No hay sobrantes de maíz.
	$Y \geq 2$		$2 \geq 2$	No hay sobrantes de trigo
	$X + 1.5Y \leq 9$	$3 + 1.5(2) \leq 9 \Rightarrow$	$6 \leq 9$	Hay un sobrante de 3kg de sorgo

Demostración:

Valores óptimos $X = 3$ y $Y=2$.

Maíz:

$X - E1 = 3$, despejamos $E1 = -3 + X$, sustituimos $E1 = -3 + 3 = 0$

Trigo:
$Y - E_2 = 2$, despejamos $E_2 = -2 + Y$, sustituimos $E_2 = 2 + 2 = 0$
Sorgo:
$X + 1.5Y + H_3 = 9$, despejamos $H_3 = 9–X–1.5Y$ sustituimos, $H_3 = 9–3–1.5\ (2) = 3$

La capacidad no usada en la restricción $X + 1.5\ Y \leq 9$ es de 3 kg de sorgo, lo que implica una holgura. Como usted puede observar, no hay sobrantes de maíz ni de trigo en las restricciones $X \geq 3$ y $Y \geq 2$, en este caso no le agregamos una holgura sino le restamos una variable de excedente del lado izquierdo de la desigualdad $X \geq 3$ a fin de convertir la restricción en una igualdad $X = 3$. Entonces podemos reformular el problema de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lllllll} \text{Minimizar:} & Z = 30X + 40Y + 0E_1 + 0E_2 + 0H_3 \\ \text{Sujeto a:} & 4X - & & 1E_1 & & = & 12 \text{ Cantidad de maíz} \\ & & 3Y - & & 1E_2 & = & 6 \text{ Cantidad de trigo} \\ & X + & 1.5Y + & & 1H_3 & = & 9 \text{ Cantidad de sorgo} \\ \text{Donde:} & X, Y, E_1, E_2, H_3 \geq 0 \end{array}$$

Una restricción del tipo $\geq$ puede restarle una variable de excedente al lado izquierdo de la desigualdad para convertir la restricción en una forma de igualdad.

Al igual que a las variables de holgura, a las variables de excedente se les da un coeficiente de cero en la función objetivo debido a que no tiene efecto en su valor; es decir, no contribuyen a minimizar los costos.

Siempre que todas las restricciones en un programa lineal se expresen como igualdades se dice que están escritas en su ***Forma estándar***.

▷ 4.4 MODELOS GRÁFICOS ACOTADOS, NO ACOTADOS Y NO FACTIBLES

Todo programa lineal cae en una de las siguientes situaciones que no se traslapan:

Primer caso: El problema tiene una solución óptima.

Segundo caso: El problema carece de una solución óptima porque es no acotado.

Tercer caso: El problema carece de solución óptima porque es no factible.

En la práctica, un programa lineal correctamente formulado siempre tiene una solución óptima. Ahora bien, cuando un problema se encuentra mal formulado o cuando existen errores al introducir, por ejemplo, datos del problema en un software, la solución siempre cae en los casos 2 y 3.

En este capítulo explicaremos estos tres casos por medio de ejemplos en el contexto del método gráfico.

4.4.1 MODELO GRÁFICO ACOTADO EN UNA FIGURA GEOMÉTRICA CON SOLUCIÓN ÚNICA

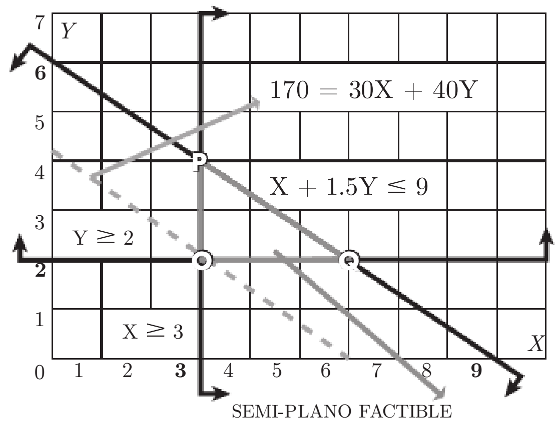


Figura 4.18

Se denomina modelo gráfico acotado en una figura geométrica con solución única a un problema que se encuentra restringido bajo un área factible, en el cual la función objetivo alcanza sólo un valor óptimo en uno de los extremos de los vértices de la región gráfica. (Véase la Figura 4.18)

Como podemos observar, el área factible se encuentra acotada gráficamente por medio de las tres desigualdades:

Del vértice Q al vértice P, el área factible se encuentra acotada por la desigualdad $X + 1.5\ Y \leq 9$. Del vértice P al vértice O el área factible se encuentra acotada por la desigualdad $Y \geq 2$. Del vértice O al vértice Q el área factible se encuentra acotada por la desigualdad $X \geq 3$. La función objetivo logra la solución óptima sólo en las coordenadas del vértice O.

El problema se encuentra clasificado en el ***Primer caso***

4.4.2 MODELO GRÁFICO ACOTADO EN UNA FIGURA GEOMÉTRICA CON SOLUCIONES MÚLTIPLES

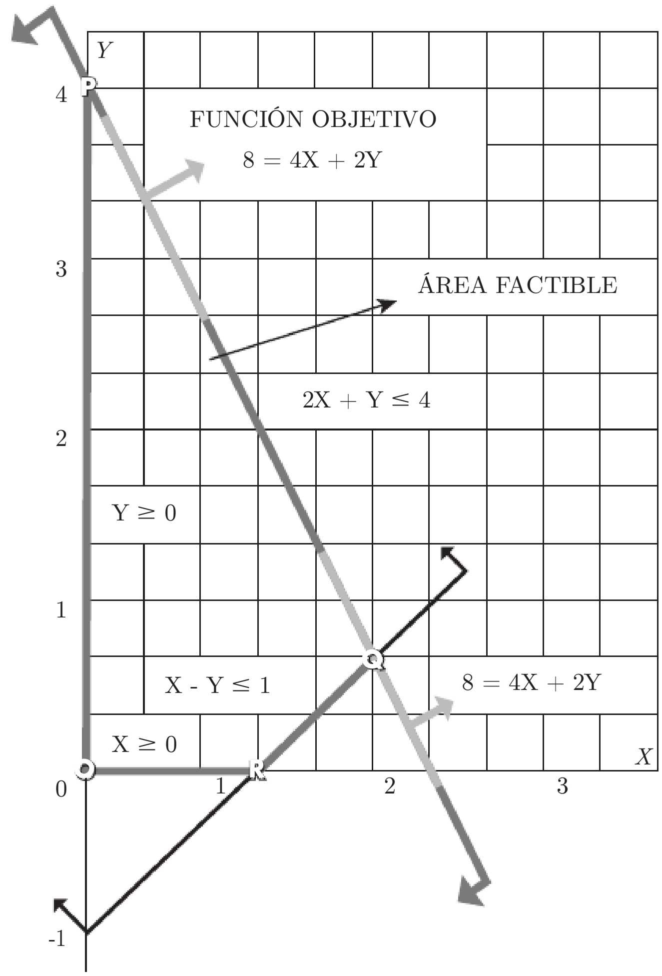


Figura 4.19

Se denomina modelo gráfico acotado en una figura geométrica con soluciones múltiples a un problema que se encuentra restringido bajo un área factible en la cual la función objetivo alcanza infinitos valores óptimos que corresponden a los puntos del segmento situado entre dos vértices de la región factible. (Véase la Figura 4.19)

En estos casos la función objetivo es paralela a una de las restricciones.

La función objetivo alcanza el valor máximo en los vértices Q y P. Por lo tanto, en todos los puntos del segmento QP existen infinitas soluciones:

Maximizar la función $Z = F(X, Y) = 4X + 2Y$. Sujeta a las restricciones $2X + Y \leq 4$, $X \geq 0$.

Los valores de la función objetivo en cada uno de los vértices son:

$F(O) = F(0, 0) = 0$; $F(R) = F(1, 0) = 4$; $F(Q) = F(5/3, 2/3) = 8$; $F(P) = F(0, 4) = 8$

El problema se encuentra clasificado en el ***Primer caso***

4.4.3 MODELO GRÁFICO ACOTADO EN UNA LÍNEA RECTA CON SOLUCIÓN ÚNICA

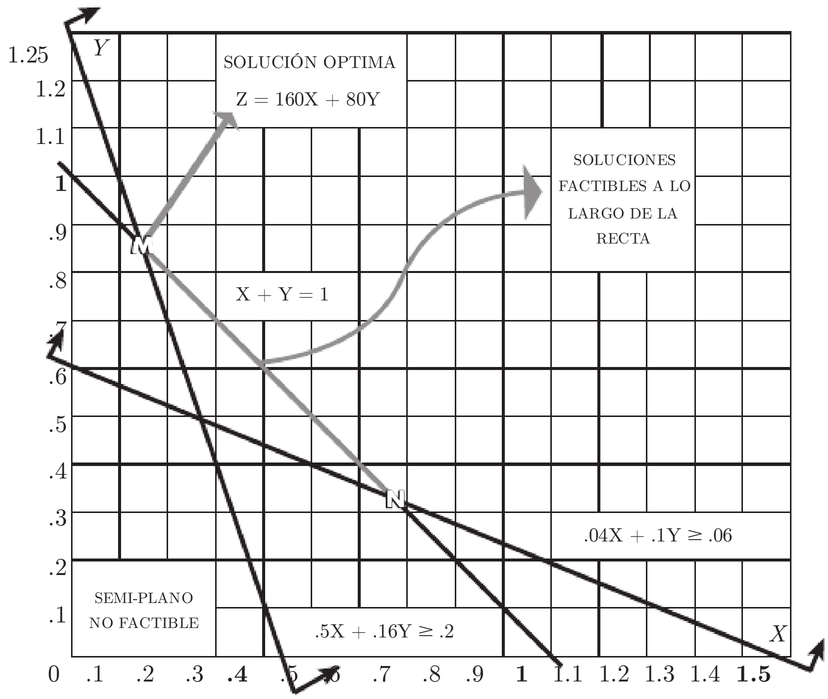


Figura 4.20

Se denomina modelo gráfico acotado en una recta con solución única a un problema que se encuentra restringido bajo un área factible en la cual la función objetivo alcanza sólo un valor óptimo en uno de los extremos de los vértices. En estos casos, la función objetivo es paralela a una de las restricciones. (Véase la Figura 4.20)

El problema se encuentra clasificado en el ***Primer caso***.

4.4.4 MODELO GRÁFICO NO ACOTADO SIN SOLUCIÓN

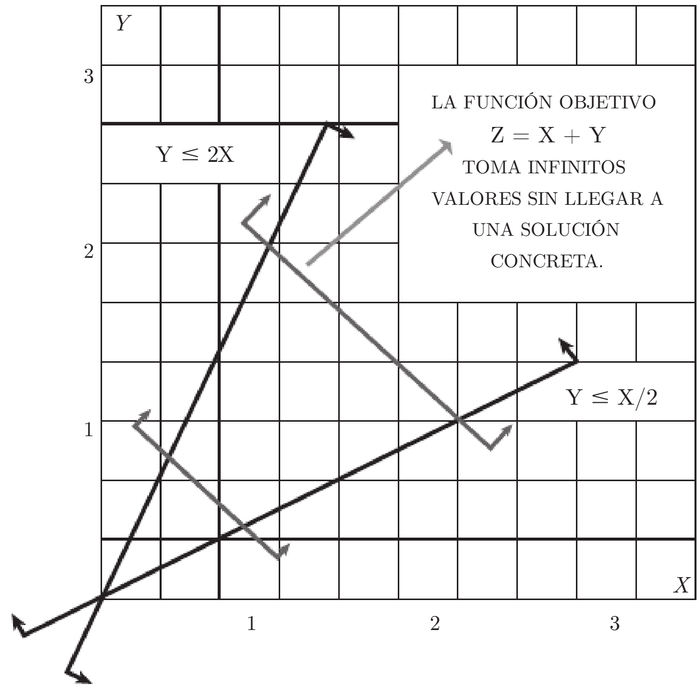


Figura 4.21

Se denomina modelo gráfico no acotado sin solución a un problema que se encuentra restringido bajo un área factible no acotada, donde la función objetivo toma infinitos valores sin llegar a una solución específica y por consiguiente no óptima. Estos tipos de modelos no acotados son "patológicos". Tal vez el modelo fue mal formulado debido a que no se incluyó una o varias restricciones importantes, o tal vez a causa de errores al introducir los datos en un programa de software.

Maximizar la función $Z = X + Y$, sujeta a las restricciones: $Y \leq 2X$, $Y \leq X/2$, $X \geq 0$ y $Y \geq 0$.

La función crece indefinidamente para valores crecientes de X y Y sin llegar a una solución concreta y por lo tanto no óptima. (Véase la Figura 4.21)

El problema se encuentra clasificado en el ***Segundo caso.***

4.4.5 MODELO GRÁFICO NO FACTIBLE SIN SOLUCIÓN

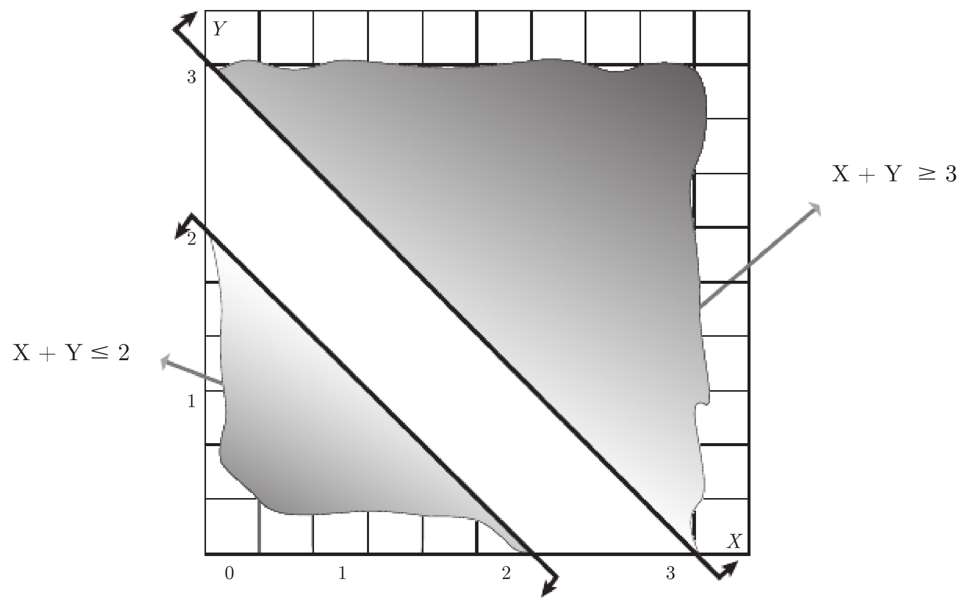


Figura 4.22

Se denomina modelo gráfico no factible sin solución a un problema que es inconsistente en sus restricciones; es decir, el modelo carece de una combinación de valores para las variables de decisión que satisfaga simultáneamente todas las restricciones. (Véase la Figura 4.22)

Maximizar la función $Z = 3/4X + 1/2Y$, sujeta a las restricciones: $X + Y \geq 3$, $X + Y \leq 2$, $X \geq 0$ y $Y \geq 0$.

Como podemos observar, la infactibilidad depende solamente de las restricciones y no tiene nada que ver con la función objetivo. Las zonas coloreadas que aparecen en la figura son únicamente soluciones de alguna de las inecuaciones. Obviamente, estos tipos de modelos gráficos no factibles carecen de solución, esta "patología" no se presenta si el modelo ha sido formulado correctamente o por causa de errores al momento de introducir los datos numéricos en un programa de software.

El problema se encuentra clasificado en el ***Tercer caso***.

MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL BASADO EN LA FABRICACIÓN DE CALZADO

Un zapatero fabrica tres estilos de calzado: botas para el uso de los hombres, zapatillas para el uso de las mujeres y tenis para el uso de los niños. La ganancia, el costo del material y el tiempo por fabricar los tres tipos de calzado se encuentran establecidos de acuerdo a la Tabla 4.6.

Tabla 4.6

ELABORACIÓN POR PAR DE CALZADO	GANANCIA	COSTO DEL MATERIAL	TIEMPO EN HORAS
Para hombre	$210	$150	5
Para mujer	$160	$110	4
Para niños	$120	$ 80	3

Por problemas físicos en su columna, el zapatero no puede trabajar más de 120 horas al mes. Además, la demanda de los tres tipos de calzado se encuentra restringida en la Tabla 4.7 que contiene los siguientes datos:

Tabla 4.7

ELABORACIÓN POR PAR DE CALZADO	NECESIDAD DE CALZADO EN UN MES
Para hombre	Mayor o igual a 9
Para mujer	Igual a 6
Para niños	Menor o igual a 12

¿Qué cantidad de cada estilo le conviene elaborar más al zapatero durante el transcurso del mes, con el objeto de maximizar las ganancias cuando se sabe que él sólo cuenta con $2750 pesos para el gasto de la materia prima?

Formulación del modelo

1. Se identifican las variables de decisión:

- ➢ Sea X_1 el número de pares de destinados para el uso de los hombres (botas).
- ➢ Sea X_2 el número de pares de destinados para el uso de las mujeres (zapatillas)
- ➢ Sea X_3 el número de pares de destinados para el uso de las niños (tenis).

2. Se establece la finalidad del problema: (Véase la Tabla 4.8)

Tabla 4.8

ELABORACIÓN POR PAR DE CALZADO	GANANCIA
Para hombre	$210
Para mujer	$160
Para niños	$120

Maximizar las utilidades $Z = 210X_1 + 160X_2 + 120X_{3.}$

3. Se establecen las restricciones del modelo: (Véase la Tabla 4.9)

Tabla 4.9

ELABORACIÓN POR PAR DE CALZADO	COSTO DEL MATERIAL	TIEMPO EN HORAS
Para hombre	\$150	5
Para mujer	\$110	4
Para niños	\$80	3
El zapatero cuenta	\$2750	120

Sujeto al costo del material $150X_1 + 110X_2 + 80X_3 \leq 2750$.
Sujeto al tiempo en horas $5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \leq 120$.
Sujeto a la demanda que tiene los tres estilos de calzado al mes: (Véase la Tabla 4.10)

Tabla 4.10

ELABORACIÓN POR PAR DE CALZADO	NECESIDAD DE CALZADO EN UN MES
Para hombre	Mayor o igual a 9
Para mujer	Igual a 6
Para niños	Menor o igual a 12

Necesidad de calzado en un mes para hombres, mujeres y niños es: $X_1 \geq 9, X_2 = 6$ y $X_3 \leq 12$. Una vez planteado el problema, se establece el modelo matemático que permita maximizar las utilidades del zapatero:

$$
\begin{array}{llrcrcrcrl}
\text{Maximizar:} & Z = & 210X_1 & + & 160X_2 & + & 120X_3 & & & \\
\text{Sujeto a:} & & 150X_1 & + & 110X_2 & + & 80X_3 & \leq & 2750 & \text{Costo del material} \\
 & & 5X_1 & + & 4X_2 & + & 3X_3 & \leq & 120 & \text{Tiempo disponible en horas} \\
 & & X_1 & & & & & \geq & 9 & \text{Demanda de botas} \\
 & & & & X_2 & & & = & 6 & \text{Demanda de zapatillas} \\
 & & & & & & X_3 & \leq & 12 & \text{Demanda de tenis}
\end{array}
$$

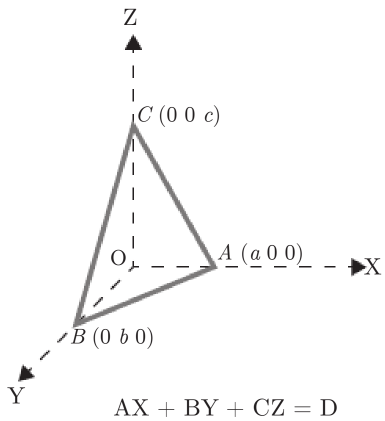
Donde: $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$ y $X_3 \geq 0$

Solución del modelo

Grafiquemos cada una de las restricciones; para hacerlo, consideramos las desigualdades disponibles como ecuaciones en forma de igualdades, excepto las restricciones de no negatividad:

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{Restricciones:} & 150X & + & 110Y & + & 80Z & \leq & 2750 \\
 & 5X & + & 4Y & + & 3Z & \leq & 120 \\
 & X & & & & & \geq & 9 \\
 & & & Y & & & = & 6 \\
 & & & & & Z & \leq & 12
\end{array}
\quad , \quad
\begin{array}{rcrcrcr}
150X & + & 110Y & + & 80Z & = & 2750 \\
5X & + & 4Y & + & 3Z & = & 120 \\
X & & & & & = & 9 \\
 & & Y & & & = & 6 \\
 & & & & Z & = & 12
\end{array}
$$

Para poder graficar las restricciones anteriores, es necesario explicar primero lo que es un plano:



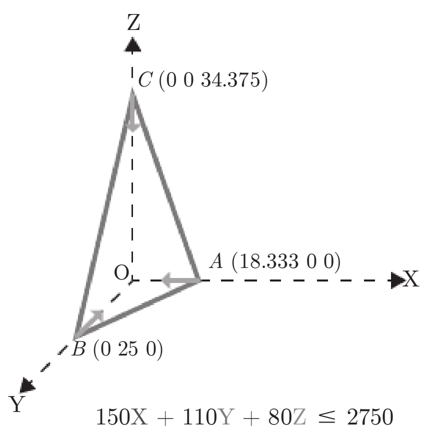
Toda ecuación de primer grado con tres variables representa un plano. Así, toda ecuación de la forma AX + BY + CZ = D representa un plano.
Los segmentos OA, OB y OC son trazas del plano sobre los ejes.

En la Figura 4.23, la traza del plano sobre el eje OX es OA = a la traza sobre el eje OY es OB = b y la traza sobre el eje OZ es OC = c.

Los puntos A, B y C donde el plano intersecta los ejes, tienen dos coordenadas nulas. [1]

Figura 4.23

Ahora podemos calcular las coordenadas en los vértices A, B y C. (Véase la Figura 4.23)



Para representar gráficamente esta ecuación vamos a hallar las trazas del plano que ella representa sobre los tres ejes.

La traza sobre el eje OX se halla haciendo Y = 0 y Z = 0 en la ecuación dada, es decir, 150X = 2750, despejando obtenemos X = 18.333.

La traza en el punto A es (18.333 0 0).

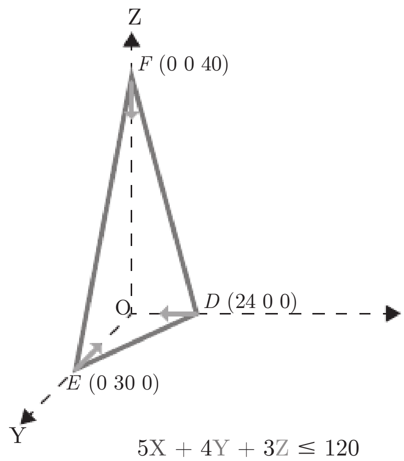
La traza sobre el eje OY se halla haciendo X = 0 y Z = 0 en la ecuación dada, es decir, despejando obtenemos X = 24

La traza en el punto B es (0 25 0)

Figura 4.24

La traza sobre el eje OZ se halla haciendo X = 0 y Y = 0 en la ecuación dada; es decir, 80Z = 2750, despejando obtenemos Z = 34.375. La traza en el punto C es (0 0 34.375). (Véase la Figura 4.24)

1 La de la gráfica 1 fue obtenida de: A. Baldor. *Álgebra*. Publicaciones Culturales 1a. Ed., 1983, pág. 350.



La traza sobre el eje OX se halla haciendo Y= 0 y Z = 0 en la ecuación dada, es decir; 5X = 120 despejando obtenemos X = 24.

La traza en el punto D es (24 0 0).

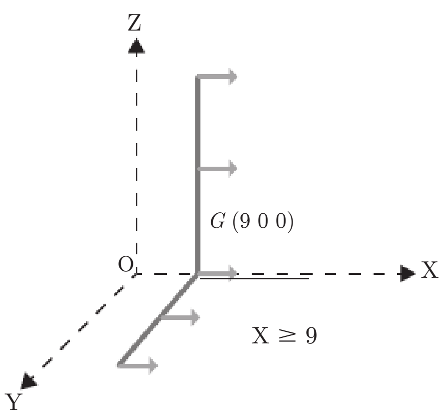
La traza sobre el eje OY se halla haciendo X = 0 y Z = 0 en la ecuación dada, es decir; 4Y = 120 despejando obtenemos Y = 30.

La traza en el punto E es (0 30 0).

La traza sobre el eje OZ se halla haciendo X = 0 y Y = 0 en la ecuación dada, es decir; 3Z = 120 despejando obtenemos Z = 40.

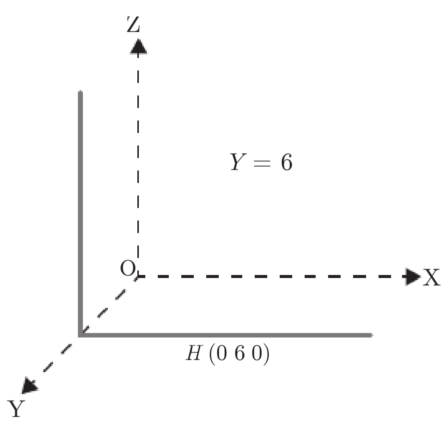
La traza en el punto F es (0 0 40).

Figura 4.25



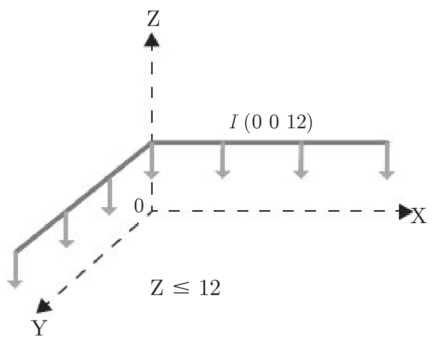
Como la ecuación X = 9 no contiene incógnitas en Y y Z, deducimos que la traza sobre el eje OX queda determinada en el punto G (9 0 0). (Véase la Figura 4.26)

Figura 4.26



Como la ecuación Y = 6 no contiene incógnitas en X y Z, deducimos que la traza sobre el eje OY queda terminada en el punto H (0 6 0). (Véase la Figura 4.27)

Figura 4.27

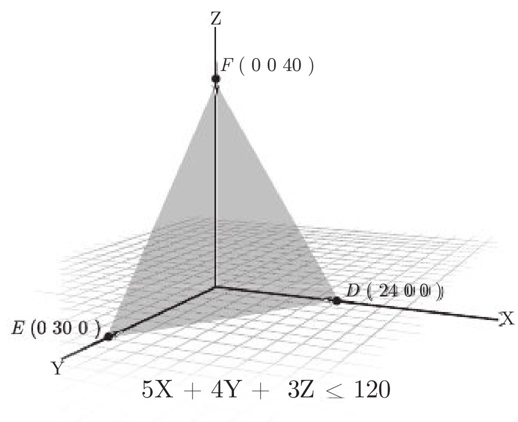


Como la ecuación Z = 12 no contiene incógnitas en X y Y, deducimos que la traza sobre el eje OZ queda determinada en el punto I (0 0 12). (Véase la Figura 4.28)

Figura 4.28

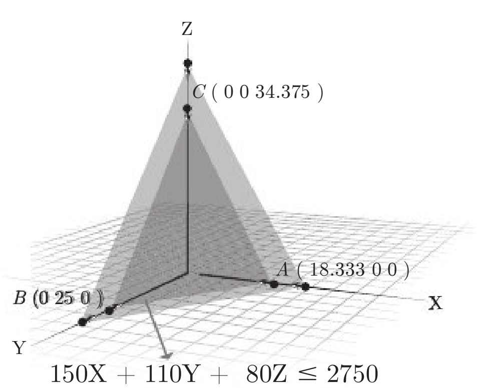
Después de haber graficado las cinco restricciones en las cuales se encuentra condicionado el sistema modelado, proseguimos a encontrar el área factible donde buscaremos la solución óptima.

El análisis se realiza respectivamente del siguiente modo:



Comencemos con la desigualdad que representa el tiempo disponible con el que cuenta el zapatero para elaborar los tres calzados; es decir, $5X + 4Y + 3Z \leq 120$, plano triangular es: ΔDEF ~(24 30 40). (Véase la Figura 4.29).

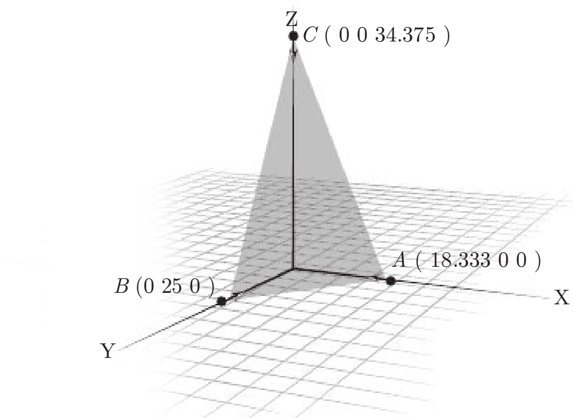
Figura 4.29



El plano triangular ΔDEF ~ (24 30 40) se encuentra aún más restringido por el plano triangular ΔABC ~ (18.333 25 34.375), su ecuación es $150X + 110Y + 80Z \leq 2750$, la cual representa el costo de la materia prima que requiere el zapatero. (Véase la Figura 4.30).

Figura 4.30

Puesto que las coordenadas de la desigualdad $5X + 4Y + 3Z \leq 120$ se encuentran condicionadas por los vértices de la desigualdad $150X + 110Y + 80Z \leq 2750$, éstas dejan de ser factibles para buscar el valor óptimo; por lo tanto, las descartamos por ser restricciones redundantes, razón por la cual estudiaremos exclusivamente el área expresada por la desigualdad $150X + 110Y + 80Z \leq 2750$. (Véase la Figura 4.31).



$150X + 110Y + 80Z \leq 2750$

Figura 4.31

La desigualdad $150X + 110Y + 80Z \leq 2750$ es cortada en las coordenadas G (0 9 0) por el plano $X \geq 9$, lo que implica que el plano triangular ΔABC (18.333 25 34.375) se encuentra restringido aún más por la restricción que representa la cantidad de calzado para el uso del hombre (botas). (Véase la Figura 4.32).

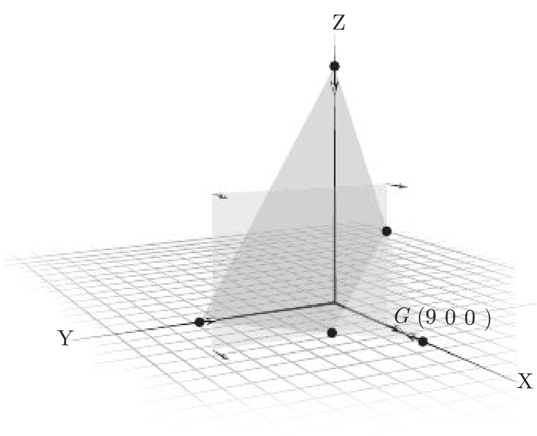


Figura 4.32 vista A

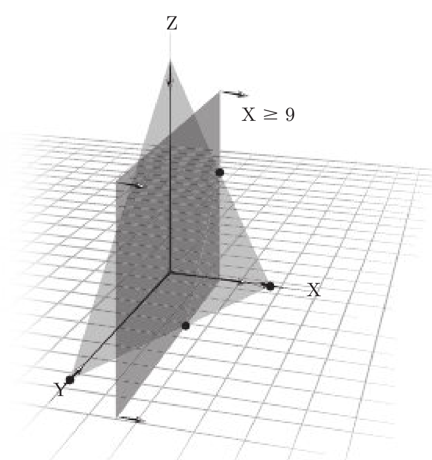


Figura 4.32 vista B

Debido al corte realizado por la restricción $X \geq 9$, la nueva área queda dibujada de la siguiente manera: (Véanse las Figuras 4.34 y 4.35).

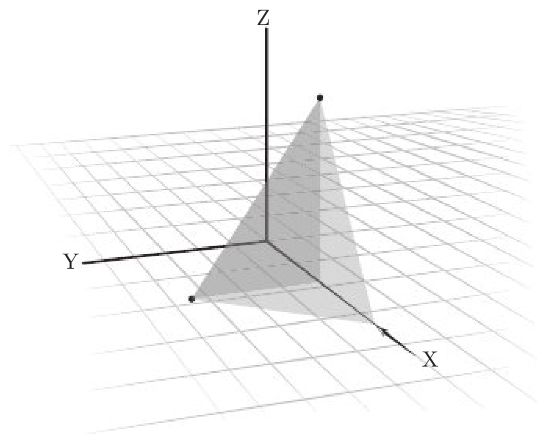


Figura 4.34

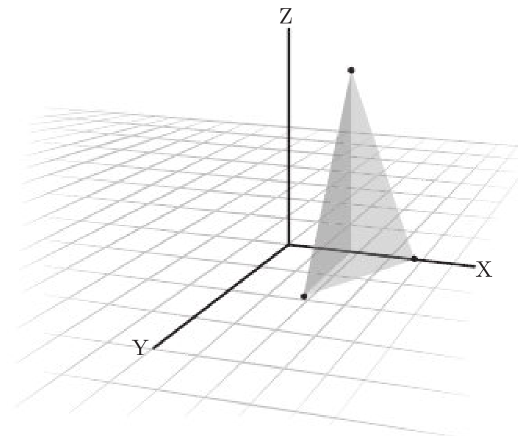


Figura 4.35

El prisma es cortado por el plano $Z \leq 12$ en las coordenadas I (0 0 12) de I, lo que implica que la nueva área factible se encuentra aún más restringida por la cantidad de calzado que el zapatero debe elaborar para los niños (tenis). (Véase la Figura 4.36).

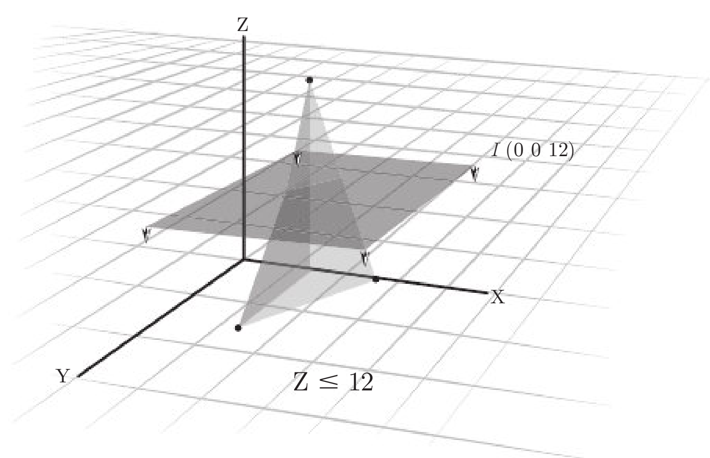


Figura 4.36

Posteriormente es cortado por la igualdad Y = 6 con coordenadas H (0 6 0), lo que implica una nueva área aún más restringida por la cantidad de zapatillas que el zapatero debe fabricar. (Véanse las Figuras 4.37 y 4.38).

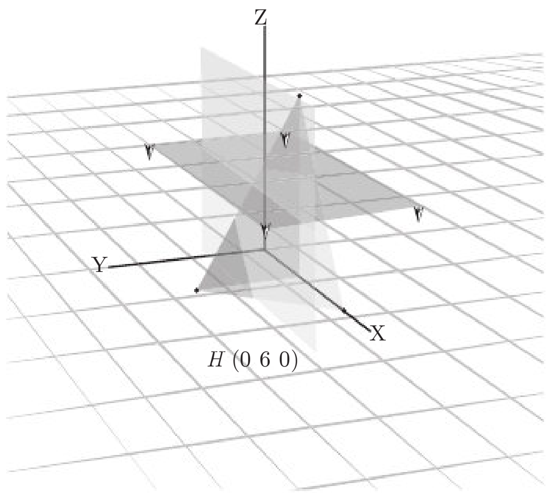


Figura 4.37 vista A

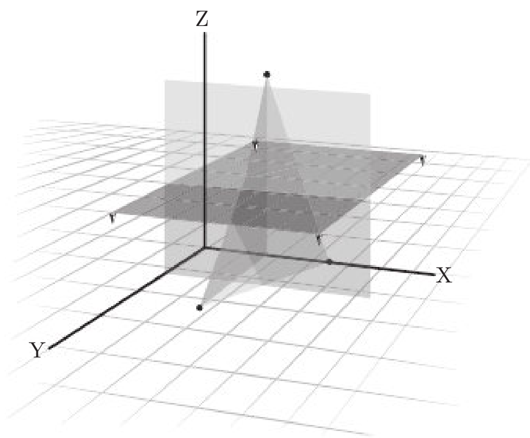


Figura 4.38 vista B

Descartamos la desigualdad Z <= 12 por ser una desigualdad evidentemente redundante, por lo que expresamos el área nueva gráficamente de la siguiente manera: (Véanse las Figuras 4.39 y 4.40).

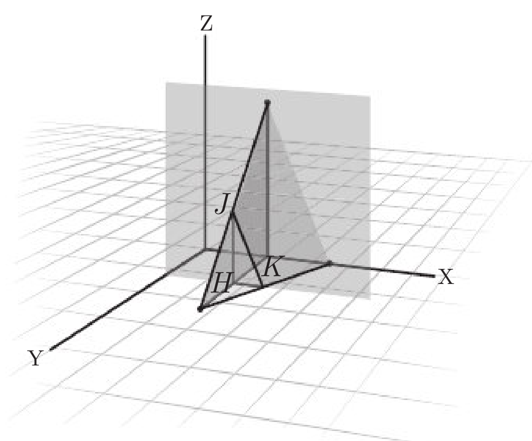


Figura 4.39 vista A

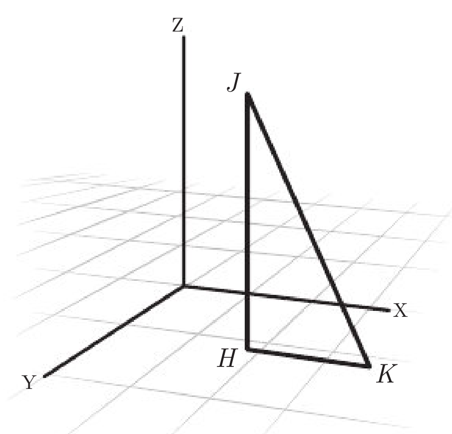
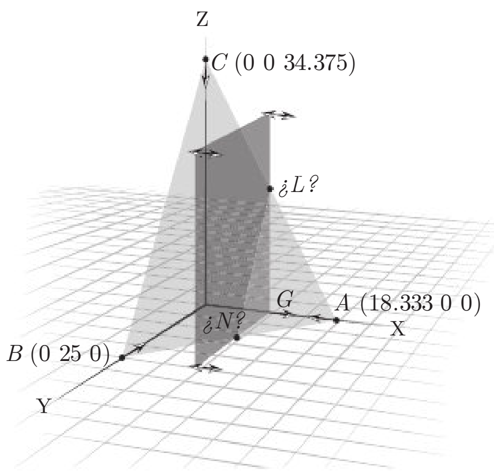


Figura 4.40 vista B

Los vértices H, J y K de las Figuras 4.39 o 4.40, representan el área factible en donde buscaremos la solución óptima.

Antes de encontrar la solución óptima debemos encontrar las coordenadas en cada uno de los tres extremos de los vértices del área factible.

El análisis se realiza relativamente del siguiente modo:
Escogemos la restricción que representa el costo del material. Es decir, $150X + 110Y + 80Z \leq 2750$ (Véase la Figura 4.41).



El plano ΔABC ~ (18.333 25 34.375) fue cortado por el plano de la desigualdad $X \geq 9$ en las coordenadas G (9 0 0) de la siguiente manera:

Figura 4.41

Debemos encontrar las coordenadas en los vértices N y L. Por ángulos semejantes encontraremos primero las coordenadas para el vértice L: (Véanse las Figuras 4.42 y 4.43).

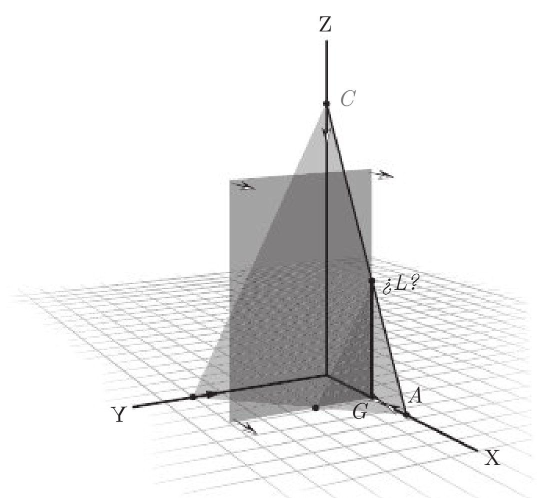


Figura 4.42 vista A

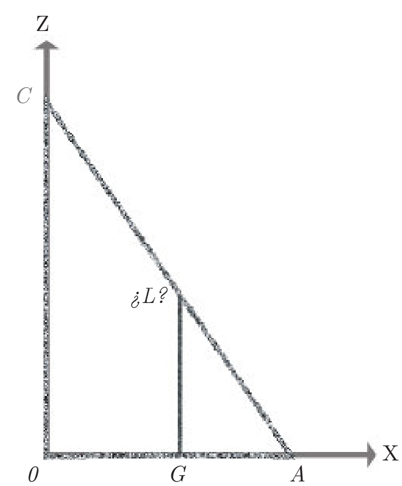


Figura 4.43 vista B

Pero antes obtendremos la distancia de GA, restamos la distancia que hay de OA – OG:

$$GA = 18.333 - 9 = 9.333$$

Por ángulos semejantes obtenemos la distancia de GL:

$$\frac{OC}{GL}=\frac{OA}{GA}\therefore GL=\frac{(OC)(GA)}{OA}\therefore GL=\frac{(34.375)(9.333)}{18.333}=17.5$$

Las coordenadas en el vértice L son: 9 para X, 0 para Y y 17.5 para Z. Sigamos:

Ahora, por ángulos semejantes encontraremos las coordenadas para el vértice N: (Véanse las Figuras 4.44 y 4.45).

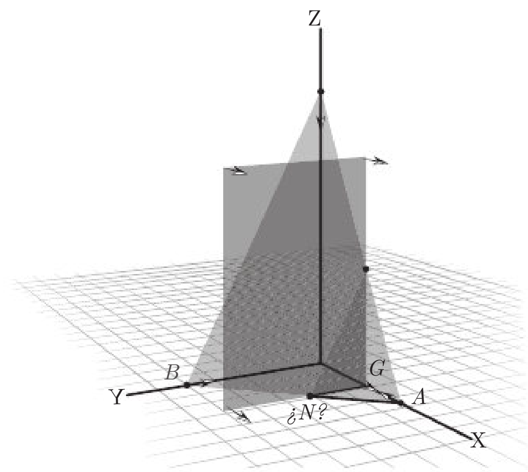


Figura 4.44

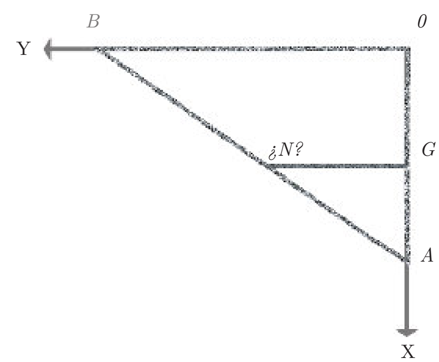
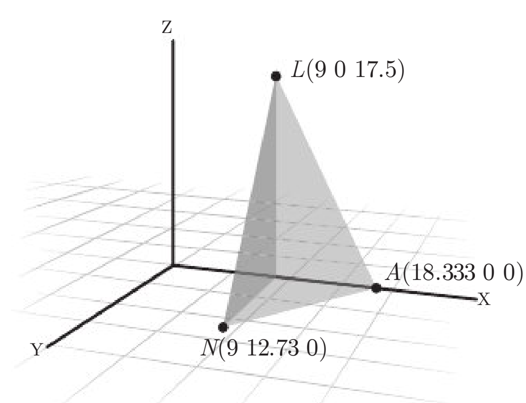


Figura 4.45

Por ángulos semejantes obtenemos la distancia de GN:

$$\frac{OB}{GN}=\frac{OA}{GA}\therefore GN=\frac{(GA)(OB)}{OA}\therefore GN=\frac{(9.333)(25)}{18.333}=12.73$$

Las coordenadas en el vértice N son: 9 para X, 12.73 para Y y 0 para Z. (Véase la Figura 4.46).



El prisma representado por la gráfica 24, es cortado por el plano Y=6 en las coordenadas H (9 6 0). (Veáse Figura 4.47).

Figura 4.46

Como antes lo mencionamos, los vértices H, K y J representan el área factible en donde buscaremos la solución óptima. Nos falta encontrar las coordenadas en los vértices K y J; encontremos primero el valor de distancia de HN:

HN = GN − GH = 12.73 − 6 = 6.73.

Nota. El 6 se obtiene del vértice H con respecto al eje Y. Recordemos las coordenadas de H (9 6 0).

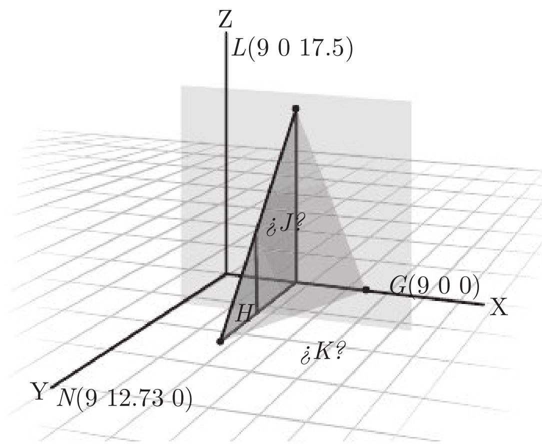
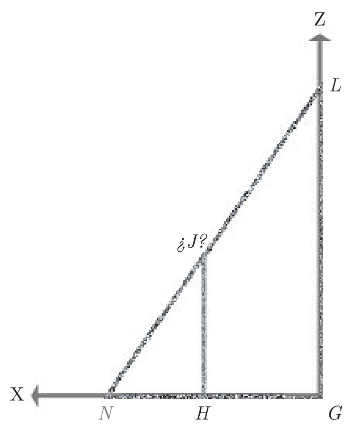


Figura 4.47

Por ángulos semejantes obtenemos la distancia de HJ: (Véase la Figura 4.48).



$$\frac{GL}{HJ} = \frac{GN}{HN} \therefore HJ = \frac{(GL)(HN)}{GN}$$

$$HJ = \frac{(17.5)(6.73)}{12.73} = 9.25$$

Las coordenadas en el vértice J son: 9 para X, 6 para Y y 9.25 para Z.

Figura 4.48

Nos falta encontrar las coordenadas en los vértices K, pero primero el valor de distancia de GA: (Véase la Figura 4.49)

GA = OA − OG = 18.33 − 9 = 9.33

Nota. El 6 se obtiene del vértice H con respecto al eje Y. Recordemos que las coordenadas de H, A, G y N son: H (9 6 0), A (18.33 0 0), G (9 0 0) y N (9 12.73 0).

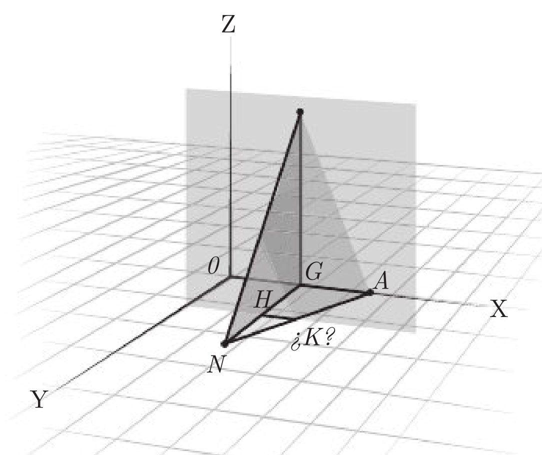


Figura 4.49

Por ángulos semejantes obtenemos la distancia de HK: (Véase la Figura 4.50).

$$\frac{GA}{HK}=\frac{GN}{HN} \therefore HK=\frac{(GA)(HN)}{GN}$$

$$HJ=\frac{(9.33)(6.73)}{12.73}=4.9325+9=13.9325$$

Le sumamos nueve unidades, porque desde el origen sobre el eje X hasta Y suman 9 unidades.

Las coordenadas en el vértice K son 13.9325 para X, 6 para Y y 0 para Z.

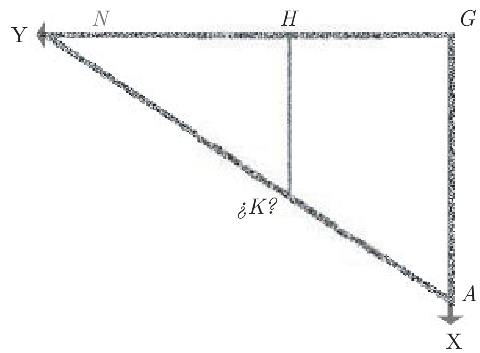


Figura 4.50

Aplicaremos el teorema que nos permite encontrar la máxima utilidad buscada:

TEOREMA:
Si existe una solución única que optimice la función objetivo en un problema lineal (método gráfico), ésta se encuentra en un punto extremo (vértice) de la región factible acotada, nunca en el interior de dicha región. La Figura 4.51 muestra el área factible.

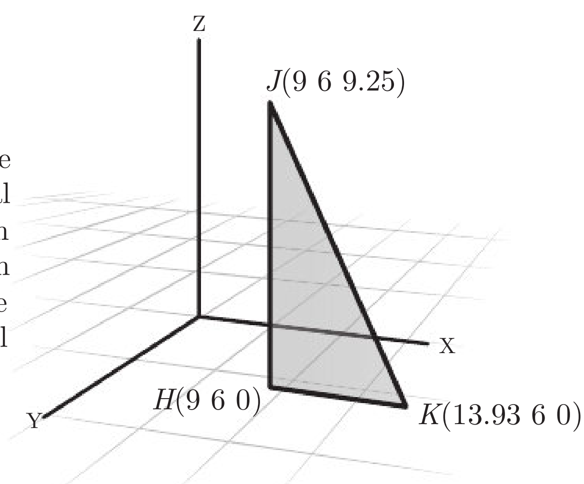


Figura 4.51

Sustituimos cada una de las coordenadas en la función objetivo:

Maximizar la (F.O) Z = 210X + 160Y+120Z.

Vértice K: 210(13.9325) + 160(6)+120(0) = $3885.825.

Vértice H: 210(9) + 160(6) + 120(0) = $2850.

Vértice J: 210(9) + 160(6) + 120(9.25) = $3960.

Como podemos observar, las coordenadas del vértice J proporcionan al zapatero la máxima ganancia de $3960, con la condición de fabricar 9 pares de botas para el uso de los hombres, 6 pares de zapatillas para el uso de las mujeres y 9.25 (por lógica sólo 9 pares) para niños. Por último, nos falta graficar la función objetivo: (Véanse las Figuras 4.52 y 4.53).

Función objetivo $210X + 160Y + 120Z = 3960$

Si hacemos a $Y = 0$ y $Z = 0$, el valor de X es $X = 3960/210 = 18.86$
Si hacemos a $X = 0$ y $Z = 0$, el valor de Y es $Y = 3960/160 = 24.75$
Si hacemos a $Y = 0$ y $X = 0$, el valor de Z es $Z = 3960/120 = 33$

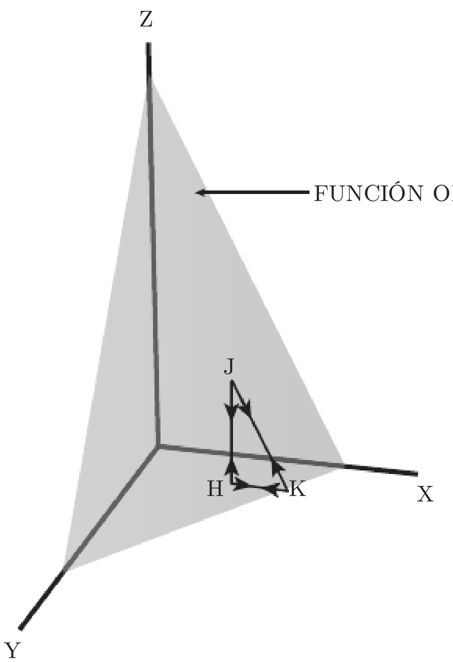


Figura 4.34

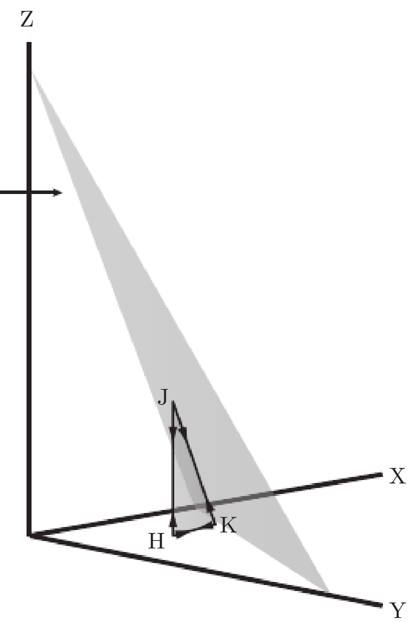


Figura 4.35

Observe usted: la función objetivo toca el vértice J; sin embargo, ni el vértice H ni el K tocan la función objetivo, es por esta razón que las coordenadas del vértice J nos proporcionan la máxima ganancia al ser evaluadas en la función objetivo.

Otra forma para confirmar que el problema se encuentra correctamente solucionado:

Preguntémonos, ¿cuánto tiempo tarda el zapatero en fabricar los tres tipos de calzado, cuando él sólo cuenta con 120 horas al mes para elaborar los tres tipos de calzado? (Véase la Tabla 4.11).

Tabla 4.11

ELABORACIÓN POR PAR DE CALZADO AL MES	TIEMPO EN HORAS	TIEMPO TOTAL EN HORAS
X_1 = 9 Botas	5	45
X_2 = 6 Zapatillas	4	24
X_3 = 9 Tenis	3	27
Tiempo disponible al mes 120 horas		96

El zapatero cuenta con $120 - 96 = 24$ horas de trabajo para seguir elaborando calzado. Además, la demanda en el consumo de calzado al mes es la siguiente: (Véase la Tabla 4.12).

Tabla 4.12

ELABORACIÓN POR PAR DE CALZADO	DEMANDA EN EL CONSUMO
$X_1 = 9$	≥ 9
$X_2 = 6$	$= 6$
$X_3 = 9$	≤ 12

Lo que nos indica que se pueden fabricar 3 pares de tenis, pues tiempo es lo que sobra; sin embargo, hay que considerar que el zapatero también se encuentra sujeto al costo de la materia prima, y él sólo dispone de \$2750. (Véase la Tabla 4.13).

Tabla 4.13

ELABORACIÓN POR PAR DE CALZADO AL MES	COSTO DEL MATERIAL	COSTO TOTAL DEL MATERIAL
X_1 = 9 BOTAS	\$150	\$1350
X_2 = 6 ZAPATILLAS	\$110	\$660
X_3 = 9 TENIS	\$80	\$720
El Sr. zapatero dispone de \$2750		\$2730

\$2750 − \$2730 = \$24 pesos de sobra, lo que no alcanza ni para un par de tenis.

▶ RESUMEN

Aprendimos a solucionar problemas de programación lineal aplicando el método gráfico. Se demostró que la solución óptima se encuentra en un vértice extremo de la región factible acotada, nunca en el interior de dicha región. También se comprobó que en ciertos problemas la función objetivo alcanza infinitas soluciones óptimas a lo largo del segmento que determina los vértices de la región factible. Asimismo, se demostró que cuando un problema lineal involucra una restricción de igualdad en su formulación, éste alcanza una solución óptima en una de las coordenadas de los extremos de los vértices. Además, comentamos que un programa lineal correctamente formulado siempre tiene una solución óptima en la práctica, en el caso contrario, el modelo determinístico se encuentra mal formulado o existen errores al introducir los datos del problema en un software. En concreto, la solución de un problema bien o mal formulado cae siempre en uno de los tres los casos que no se traslapan nunca:

1. **Primer caso:** El problema tiene una solución óptima.
2. **Segundo caso:** El problema carece de una solución óptima porque es no acotado.
3. **Tercer caso:** El problema carece de solución óptima porque es no factible.

Excedente y holgura son términos que se usan para designar la diferencia no negativa entre los dos miembros de una desigualdad:

a) Se denomina EXCEDENTE cuando hay una diferencia entre el lado derecho y el lado izquierdo en una desigualdad del tipo$\geq$. A este tipo de ecuaciones se les nombra RESTRICCIONES INACTIVAS. Para convertir esta desigualdad en igualdad sólo es necesario restarle una variable de excedente no negativa al lado izquierdo de la restricción.
b) Para una restricción del tipo $\leq$ la diferencia entre el lado derecho y el lado izquierdo se denomina HOLGURA. Para convertir esta desigualdad en igualdad sólo es necesario sumarle una variable de holgura no negativa del lado izquierdo la restricción.

En la representación estándar de un programa lineal, los coeficientes de función objetivo para las variables de holgura son cero. Esta condición implica que las variables que representan recursos no usados, no afectan el valor de la función objetivo; sin embargo, en algunas aplicaciones algunos o todos los recursos no usados pueden comercializarse y contribuir a la utilidad. En ellos las variables de holgura correspondientes se vuelven variables de decisión que representan la cantidad de recursos que se van a vender. Para cada una de estas variables, un coeficiente no cero en la función objetivo reflejaría la ganancia asociada con la venta de una unidad de recurso correspondiente.

También aprendimos que las restricciones redundantes no afectan a la región factible, como resultado, pueden eliminarse de un modelo de programación lineal sin afectar a la solución óptima; sin embargo, si el modelo de programación lineal se va a resolver con posterioridad, los cambios en algunos de los datos podrían modificar una restricción que antes era redundante en una restricción que sí confina la región factible. Por tanto, recomendamos mantener todas las restricciones en el modelo de programación lineal aunque una o más puedan ser redundantes.

Se explicó también las propiedades de aditividad y proporcionalidad:

a) La proporcionalidad requiere que la contribución de cada variable en la función objetivo o el uso de los recursos sea directamente proporcional al nivel (valor) de la variable.
b) La aditividad requiere que la función objetivo sea la suma directa de las contribuciones individuales de las variables; en forma análoga, el primer miembro o lado izquierdo de cada restricción debe ser la suma de los usos individuales de cada variable del recurso correspondiente.

Afirmamos que sobre las bases de las propiedades de aditividad y proporcionalidad, existen dos clasificaciones de problemas determinísticos:

a) Problema determinístico de restricciones lineales (en las que todas las restricciones satisfacen tanto la propiedad de aditividad como la proporcionalidad).
b) Problema determinístico de restricciones no lineales (en las que alguna restricción no satisface al menos una de las propiedades de aditividad y proporcionalidad).

▶ EVALUACIÓN

Solucione por medio del método gráfico los siguientes problemas:

Problema 1. *Capítulo* 4
Una empresa química denominada L&R fabrica dos aditivos que permiten la elaboración de dos detergentes. Uno es utilizado especialmente para la limpieza de artículos de vestuario y el otro para el lavado de utensilios de cocina. Para producir los dos aditivos se requiere mezclar tres materiales químicos, tal como se indica en la Tabla X:

Tabla X

MATERIALES	ADITIVO PARA LIMPIEZA DE VESTUARIOS	ADITIVO PARA LIMPIEZA DE UTENSILIOS DE COCINA
Material A	.2	.65
Material B	No contiene material B	.15
Material C	.4	.3

Para llevar a cabo la producción se dispone de 14 toneladas del material A, 3 del material B y 12 del material C. Además, el gerente analizó las cifras de producción, y determinó una utilidad de €37 por cada tonelada que se produzca a base de aditivo utilizado como detergente para limpieza de artículos de vestuario, y €48 por cada tonelada producida de base de aditivo empleado como detergente para limpieza de utensilios. Determine la cantidad de aditivo que es conveniente producir de acuerdo a su uso, a fin de maximizar la ganancia total.

Problema 2. *Capítulo* 4.
Se ofrece a los estudiantes de Administración un curso de álgebra matricial que se imparte en 12 horas clase y otro de programación lineal (PL) que se imparte en 20 horas clase. El departamento de matemáticas solicitó que el curso de álgebra matricial se divida en 5 o más temas, y el curso de PL se divida en 8 o más temas. En el verano se dispone de no más de 400 horas clases. Los cursos son impartidos por dos asesores, el que imparte los

temas relacionados con el álgebra matricial cobra $2400 y el que imparte los temas de PL cobra $7650. Para que se realicen estos dos cursos se deben inscribir más de 21 alumnos.

Encuentre la cantidad mínima de cursos de álgebra matricial y PL que se pueden impartir en la Universidad.

▶ PL EN ACCIÓN (Programación lineal para el control de tráfico en la autopista Hanshin)[1]

La autopista Hanshin fue la primera carretera urbana de cuota en Osaka, Japón. Aunque en 1964 su longitud era de sólo 2.3 kilómetros, en la actualidad es una red de autopistas urbanas de 200 kilómetros. La autopista beneficia al área de Hanshin (Osaka-Kobe), la segunda zona de mayor población de Japón. En promedio 828 000 vehículos la usan cada día. En 1990, Hanshin Expressway Public Corporation comenzó a usar un sistema de control de tráfico automatizado para maximizar la cantidad de vehículos que fluían en la red de autopistas.

El sistema de tránsito automatizado se basa en dos métodos de control: 1) limitar la cantidad de autos que entran a la autopista en cada rampa de entrada y 2) proporcionar a los conductores información de tránsito actualizada y precisa, incluyendo tiempo de recorrido esperado e información sobre actividades. El enfoque usado para limitar la cantidad de vehículos depende de si la autopista se encuentra con una operación normal o estable, o si ha ocurrido algún evento inusual, como un accidente o una descompostura.

En la primera fase de estabilidad, el sistema Hanshin usa un modelo de programación lineal para maximizar la cantidad de vehículos que entran al sistema, mientras previene congestionamientos de tránsito y efectos adversos en las redes de caminos circundantes. Los datos que se dirigen al modelo de programación lineal se recolectan con detectores instalados cada 500 metros a lo largo de la autopista y en todas las rampas de entrada y salida. Cada cinco minutos se usan los datos recolectados en tiempo real de los detectores para actualizar los coeficientes de modelo, y un nuevo programa lineal calcula la cantidad máxima de vehículos que puede admitir la autopista.

El sistema de control de tránsito automatizado demostró tener éxito. De acuerdo con las encuestas, el tránsito disminuyó en 30% la longitud de las proporciones congestionadas de la autopista y en 20% la duración. Además de su rentabilidad extrema, los conductores lo consideran un servicio indispensable.

1 PL EN ACCIÓN fue obtenido de: David R. Anderson, Dennis J. Sweeney y Thomas A. Williams. *Métodos Cuantitativos para los Negocios*. Editorial Thomson, 9a. ed., pág. 259. Basado a su vez en: T. Yoshito, T.Sasaki y T. Hasegawa, "The Traffic-Cointrol Systemon the Hanshin Expressway", *Interfaces* (enero/febrero de 1995): 94-108.

▶ GLOSARIO

Aditividad.—Establece que la contribución total de todas las variables en la función objetivo y sus requerimientos en las restricciones, deberán ser la suma directa de las contribuciones o requerimientos individuales de cada variable.

Divisibilidad.—Propiedad matemática que asume en teoría que una variable de decisión acepta cualquier valor fraccional dentro de cierto intervalo.

Proporcionalidad.—Propiedad matemática de restricciones, mediante la cual si el valor de una variable se multiplica por cualquier constante, su contribución a la restricción se multiplica por la misma.

Método gráfico.—Método analítico que permite resolver problemas de programación lineal en un plano cartesiano. Los problemas se encuentran formulados por medio de ecuaciones lineales establecidas con dos y tres variables de decisión. El sistema consta de una función objetivo que se debe maximizar (utilidad) o minimizar (tiempo costo), sujeta a restricciones. La solución consiste en graficar las restricciones y posteriormente encontrar el vértice cuyas coordenadas nos permitan encontrar la solución óptima; es decir, maximizar o minimizar la función objetivo.

Región factible.—Solución que satisface todas las restricciones.

Restricciones redundantes.—Son restricciones que no son necesarias para solucionar un problema de programación lineal, en el sentido de que la región factible es exactamente la misma si incluye o no estas restricciones.

Vértice óptimo.—Vértice cuyas coordenadas permiten maximizar o minimizar óptimamente la función objetivo.

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD APLICADO AL MÉTODO GRÁFICO

▷ 5.1 INTRODUCCIÓN

Vivimos en un mundo dominado, de manera relativa y cambiante, por la producción, la distribución e intercambio de productos y servicios entre proveedores y consumidores. Razón por la cual a una organización nadie le garantiza:

1. Que los precios de la materia prima utilizada en la producción no cambien con el transcurso del tiempo.
2. Que la oferta y la demanda en la venta de un producto o un servicio no varíen.
3. Que el costo de distribución del producto disminuya o aumente.

El análisis de sensibilidad permite estudiar estos cambios, examinando de manera cuantificada todos los coeficientes de las variables que originaron y dieron en su momento una solución óptima a un problema que enfrentaba una organización[1].

Aplicando el análisis de sensibilidad podemos responder preguntas como las siguientes:

a) ¿Cómo se verá afectada la solución óptima si cambiamos uno o dos coeficientes de las variables de la función objetivo?
b) ¿Cómo se verán afectadas la solución óptima y la región factible, si modificamos cualquier valor derecho de una o más restricciones?

Coeficientes de la función objetivo

$\uparrow$

Maximizar (o minimizar) la función: $F = c_1x_1 + c_2y_2 + \dots + c_{rzu}$

Sujeta a restricciones:

$$
\begin{array}{ll}
R_1\ (k_{11}x_{11} + k_{12}y_{12} + \dots + k_{1s}z_{1n}) + \dots \leq & (=, \geq)\ b_1 \\
R_2\ (k_{21}x_{21} + k_{22}y_{22} + \dots + k_{2s}z_{2n}) + \dots \leq & (=, \geq)\ b_2 \\
\vdots & \vdots \\
R_v\ (k_{p1}x_{m1} + k_{p2}y_{m2} + \dots + k_{ps}z_{mn}) + \dots \leq & (=, \geq)\ b_q
\end{array}
$$

Donde: $x_{mn} \geq 0$, $y_{mn} \geq 0, \dots\dots z_{mn} \geq 0$

$\uparrow$

Valor derecho

---

1 El análisis de sensibilidad se denomina con frecuencia análisis de posoptimalidad, debido a que se aplica cuando ya se ha obtenido la solución óptima.

▷ 5.2 y 5.2.1 CAMBIOS EN LOS COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

Recordemos el problema basado en la elaboración de dos tipos de sofás en el que se deseaba saber la cantidad que debería fabricarse de sofás A y B, con la finalidad de maximizar la contribución total. El problema fue formulado y solucionado inicialmente de la siguiente manera:
Formulación (capítulo 3, pág. 47) y solución gráfica (capítulo 4, pág. 56):

$$\begin{array}{rll}
\text{Maximizar:} & Z = 10X + 25Y & \\
\text{Sujeto a:} & X + 2Y \leq 80 & \text{Departamento de corte} \\
 & 3/4X + 1/2Y \leq 20 & \text{Departamento de armado - - - - - - - 2} \\
 & X \leq 50 & \text{Departamento de tapicería} \\
 & Y \leq 10 & \text{Departamento de cubiertas - - - - - 4} \\
\text{Donde:} & X,\ Y \geq 0 &
\end{array}$$

Solución gráfica:

Las coordenadas en O(0, 18) -intersección en la función óptima con el eje Y.
Las coordenadas en P (45, 0) -intersección en la función óptima con el eje X.
La pendiente de la función objetivo es:
$m = \Delta Y/\Delta X = 18/-45 = -0.40$

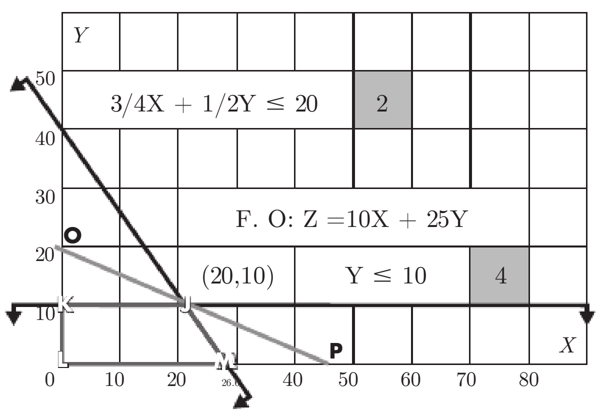


Figura 5.1

Observe que en la Figura 5.1 no se consideraron las restricciones referentes a los departamentos de corte y tapicería, debido a que estas son restricciones redundantes; es decir, no son necesarias para obtener la solución óptima. Ésta se basó en contribuciones a la ganancia de €10 para el sofá del tipo A y de €25 para el sofá de tipo B, lo que nos lleva a producir 20 sofás de tipo A ($X = 20$) y 10 sofás de tipo B ($Y = 10$), aportando una utilidad máxima de €450.

Ahora bien, suponga que la demanda de sofás de tipo B disminuye drásticamente hasta un 40% en su precio, debido a que 12 industrias nuevas deciden fabricar y comercializar el mismo producto, lo que ocasiona que aumente la oferta. Preguntémonos:

1. ¿Cómo se verá afectada la solución óptima si cambiamos un coeficiente de cualquier variable de la función objetivo?

2. ¿Puede utilizarse el análisis de sensibilidad para determinar si elaborar 20 sofás de tipo A(X = 20) y 10 sofás de tipo B(Y = 10) aún es la mejor opción?

De ser así, no es necesario formular y resolver un nuevo problema de programación lineal si sólo se ha modificado la función objetivo (Z = 10X + 25Y) en Z = 10X + 15Y en; de manera tal, que la administración puede cuestionar el beneficio de mantener la solución óptima original (X = 20 sofás del tipo A y Y = 10 sofás del tipo B). Para responder a esta cuestión, comencemos con el análisis de sensibilidad usando el procedimiento de solución gráfica, para demostrar cómo un cambio en un coeficiente de la función objetivo puede afectar o no la solución óptima.

Sustituyamos los valores X = 20 y Y = 10 en Z= 10 (20) + 15(10) = €350. Ahora grafiquemos la ecuación lineal 10X + 15Y = €350.

Las coordenadas en O ahora son:
O(0, 23.33) -intersección con el eje Y.

Las coordenadas en P ahora son:
P(35, 0) -intersección con el eje X.

La pendiente de función objetivo cambia:
m = ΔY/ΔX = 23.33/–35 = – 0.657

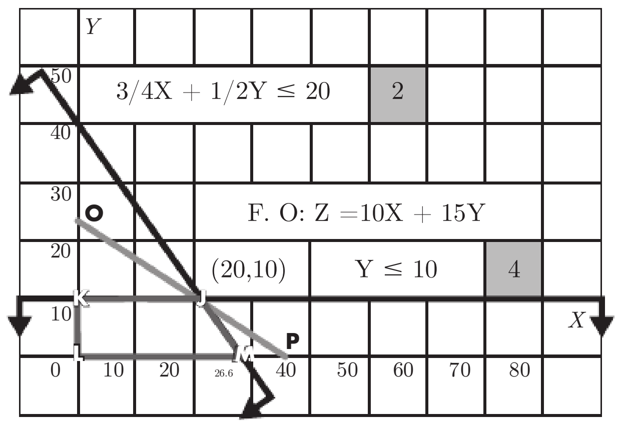
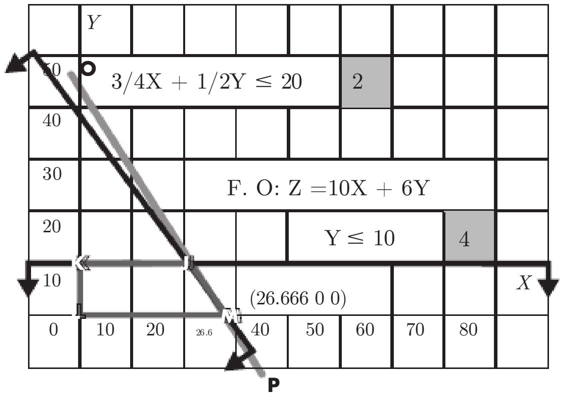


Figura 5.2

Observaciones: La pendiente de la función objetivo cambia en la Figura 5.2 (m =–.657) con respecto a la pendiente en la Figura 5.1(m =–.40). Se aleja de la desigualdad Y≤ 10 y se acerca a la desigualdad 3/4 X + 1/2 Y ≤ 20 haciéndose más negativa. La contribución a la ganancia disminuyó un 40%; sin embargo, las coordenadas del vértice J que proveen la solución óptima aún son X = 20 y Y = 10.

Ahora, supongamos que una mayor reducción en el precio causa que la contribución a la ganancia del sofá tipo B disminuya drásticamente de €15 hasta €6. ¿Podrá mantenerse aún la solución óptima, si la función objetivo (Z = 10X + 15Y) cambia en Z = 10X + 6Y? (Véase la Figura 5.3).



Las coordenadas en O ahora son:
O (0, 44.445) -intersección con el eje Y.

Las coordenadas en P ahora son:
P (26.66, 0) -intersección con el eje X.

La pendiente de la función objetivo cambia:
$m = \Delta Y/\Delta X = 44.445/-26.667 = -1.66$

Re-evaluando para en M:
Para M(26.666,0)... se tiene 10(26.667) + 6(0) = €266.67.

Figura 5.3

Observaciones: La pendiente de la función objetivo en la Figura 5.3 ($m = -1.66$) se vuelve más negativa con respecto a la pendiente de la función objetivo en la Figura 5.2 ($m = -0.657$), ocasionando que cambien las coordenadas del vértice J por las del vértice M, ahora la empresa recibe una mayor utilidad.

Conclusiones: Podemos determinar que existen rangos en los coeficientes de la función objetivo que nos permiten evaluar el límite superior e inferior en el cual operan los coeficientes de la función objetivo, sin cambiar las coordenadas del vértice J que nos proporciona la mejor solución óptima.

Para calcular los límites superiores e inferiores en los que operan los coeficientes de la función objetivo, se deben tener en cuenta dos condiciones:

1. La recta de la función objetivo (Z = 10X + 25Y) debe ser paralela a la restricción 3/4X + 1/2Y ≤ 20. Es decir, cuando ambas rectas tengan la misma pendiente.
2. La recta de la función objetivo (Z = 10X + 25Y) debe tener la misma pendiente a la restricción Y ≤ 10.

Lo que implica que los coeficientes en ambas condiciones deberán satisfacer las siguientes igualdades:

Primera condición: Igualando los coeficientes de la función objetivo (Z = 10X + 25Y) con los coeficientes de la restricción 3/4X + 1/2Y ≤ 20.

$$\frac{\text{Coeficiente de X en 1}}{\text{Coeficiente de Y en 1}} = \frac{\text{X}}{\text{Coeficiente de Y en función de objetivo}}$$

$$\frac{3/4}{1/2} = \frac{X}{25} \therefore X = 25\left(\frac{3/4}{1/2}\right) \therefore X = 37.5$$

Las coordenadas en O ahora son:
O(0, 40) -intersección con el eje Y.

Las coordenadas en P ahora son:
P(26.66, 0) -intersección con el eje X.

La pendiente de función objetivo es:
m = ΔY/ ΔX = 40/−26.667 = −1.5

(Véase la Figura 5.4)

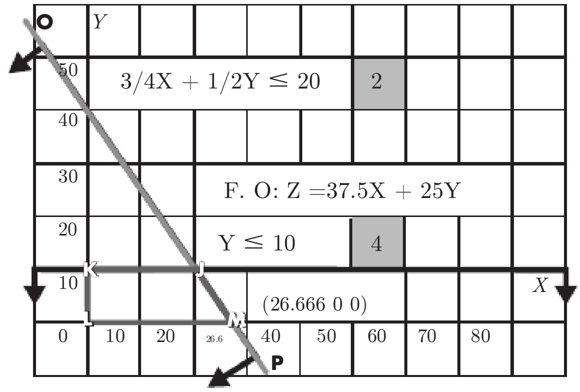
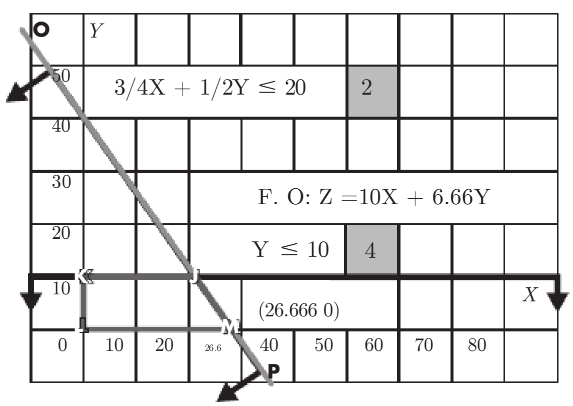


Figura 5.4

La contribución a la utilidad del sofá tipo A toma el valor de €37.5; por consiguiente, la función objetivo cambia por Z = 37.5X + 25Y, lo que nos permite obtener una ganancia de Z = 37.5(20) + 25(10) = €1000. Observe que la pendiente de la función objetivo toca el vértice J y el M a la vez; sin embargo, evaluamos sólo el vértice J, debido a que no cambia la producción de 20 sofás de tipo A(X = 20) y 10 sofás de tipo B(Y = 10). Sigamos para encontrar el coeficiente de Y. (Véase la Figura 5.5)

$$\frac{\text{Coeficiente de X en 1}}{\text{Coeficiente de Y en 1}} = \frac{\text{Coeficiente de X en función de objetivo}}{\text{Y}}$$

$$\frac{3/4}{1/2} = \frac{10}{Y} \therefore Y = 10\left(\frac{1/2}{3/4}\right) \therefore Y = 6.66$$



Las coordenadas en O ahora son:
O(0, 40) -intersección con el eje Y.
Las coordenadas en P ahora son:
P(26.66, 0) -intersección con el eje X.
La pendiente de función objetivo es:
$m = \Delta Y/\Delta X = 40/-26.666 = -1.5$

Figura 5.5

La contribución a la utilidad del sofá tipo B toma el valor de €6.66; entonces, la función objetivo cambia por Z = 10X + 6.66 Y, lo que nos permite obtener una ganancia de Z = 10(20) + 6.66(10) = €266.6. Observe que la pendiente de la función objetivo toca el vértice J y M a la vez. Pero sólo evaluamos el vértice J debido a que no cambia la producción de 20 sofás de tipo A(X = 20) y 10 sofás de tipo B(Y = 10).

Segunda condición: Igualando los coeficientes de la función objetivo (Z = 10X + 25Y) con los coeficientes de la restricción Y≤ 10.

$$\frac{\text{Coeficiente de X en 4}}{\text{Coeficiente de Y en 4}} = \frac{\text{X}}{\text{Coeficiente de Y en función de objetivo}}$$

$$\frac{0}{1} = \frac{X}{25} \therefore X = 25\left(\frac{0}{1}\right) \therefore X = 0$$

Las coordenadas en O ahora son:
O(0, 10) -intersección con el eje Y.

Las coordenadas en P ahora son:
P(20, 10) -intersección con el eje X.

La pendiente de función objetivo es:
$m = \Delta Y/\Delta X = 0/20 = 0$

(Véase la Figura 5.6)

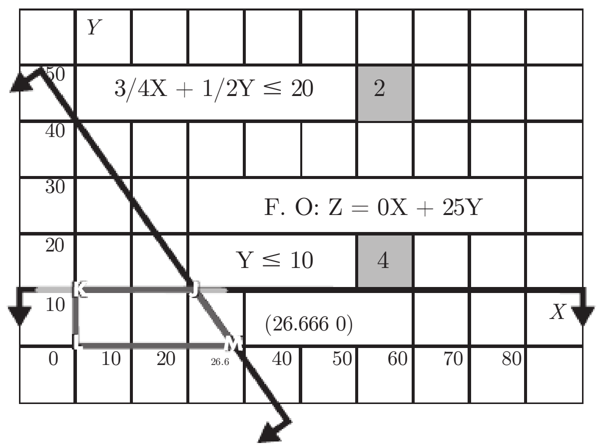


Figura 5.6

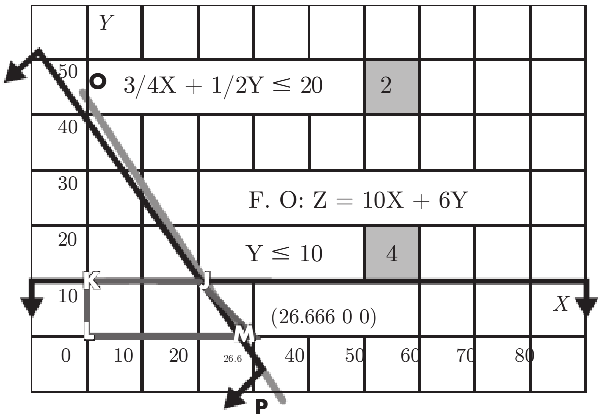
La contribución a la utilidad del sofá tipo A adquiere el valor de €0. Ahora la función objetivo cambia por Z = 0X + 25Y, lo que nos permite obtener una ganancia de Z = 0(20) + 25(10) = €250. Observe que sólo evaluamos las coordenadas del vértice J debido a que no cambia la producción de 20 sofás de tipo A(X = 20) y 10 sofás de tipo B (Y = 10). Sigamos:

$$\frac{\text{Coeficiente de X en 4}}{\text{Coeficiente de Y en 4}} = \frac{\text{Coeficiente de X en función de objetivo.}}{\text{Y}}$$

$$\frac{0}{1} = \frac{10}{Y} \therefore Y = 10\left(\frac{1}{0}\right) \therefore Y = \text{Sin límite}$$

El valor Y = sin límite, significa que la contribución económica para el sofá tipo B adquiere valores hasta el infinito; por consiguiente, la ganancia total adquiere valores infinitos. Para el valor Y = 6.66, significa que la contribución económica sólo existe para este valor. Es decir:

a) Cualquier valor menor de Y = 6.66 cambia el vértice J(20, 10), cuyas coordenadas nos permiten obtener una solución óptima. Por ejemplo, para Y = 6. (Véase la Figura 5.7)



Las coordenadas en O ahora son:
O(0, 44.444) -intersección con el eje Y.

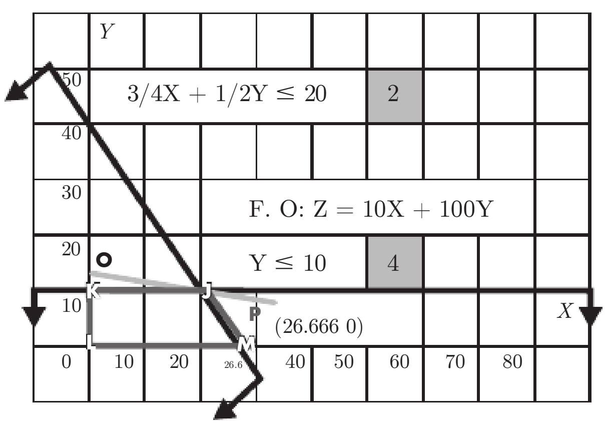
Las coordenadas en P ahora son:
P(26.666, 0) -intersección con el eje X.

La pendiente de función objetivo es:
$m = \Delta Y / \Delta X = 44.444/-26.666 = -1.66$

Z = 10(26.666) + 6(0) = € 266.666 euros

Figura 5.7

b) Cualquier valor mayor de Y = 6.66 no cambia el vértice J(20,10), cuyas coordenadas nos permiten obtener un solución óptima; sin embargo, la solución óptima toma valores interminables. Es decir, no tiene límite, lo que es ilógico. Por ejemplo, para Y = 100. (Véase la Figura 5.8)



Cuando <u>Y</u> toma valores mayores que 6.66, la producción del sofás tipo B tiende hasta el infinito, lo mismo pasa con la utilidad Z.

Entonces cuando Y >0 la F.O (Z) $\rightarrow \infty$ porque:

$Z \rightarrow [(10X + 20(\infty)] \rightarrow \infty$

Z = 10 (20) + 100 (10) = € 1200 euros.

Figura 5.8

Los rangos en los coeficientes de la función objetivo quedan determinados de la siguiente manera: (Véase la Tabla 5.1)

Tabla 5.1

VARIABLE	LÍMITE INFERIOR	COEFICIENTES FUNCIÓN OBJETIVO	LÍMITE SUPERIOR
X	0	10	37.5
Y	6.66	25	Sin límite

En la función objetivo $Z = 10X + 25Y$, el coeficiente actual de X es 10, el cual puede llegar a ser paralelo a la restricción que representa el departamento de armado $3/4X + 1/2Y \leq 20$; es decir, ocurren óptimos alternativos si el valor aumenta a 37.5. Entonces, la solución óptima actual permanece vigente en tanto que el incremento de X sea ≤ 27.5. Esto es lo que se llama aumento permisible del coeficiente de X.

Los valores de disminución permisible y aumento permisible se calculan así:

Disminución permisible = Valor actual – Límite inferior.
Aumento permisible = Límite superior – Valor actual.

Los rangos en los coeficientes de la función objetivo quedan determinados de la siguiente manera: (Véase la Tabla 5.2)

Tabla 5.2

VARIABLE	LÍMITE INFEROR	COEFICIENTES FUNCIÓN OBJETIVO	LÍMITE SUPERIOR	DISMINUCIÓN PERMISIBLE	AUMENTO PERMISIBLE
X	0	10	37.5	10	27.5
Y	6.66	25	Sin límite	18.34	Sin límite

Podemos calcular los límites inferiores y superiores de otra manera:

Departamento de cubiertas

$Y \leq 10$ igualando la desigualdad:
$Y = 10$
Esta es una ecuación lineal cuya pendiente toma el valor de cero.
Interpretación matemática de $Y = 10 + 0X$

Departamento de armado

$3/4X + 1/2Y \leq 20$ Igualando la desigualdad:
$3/4X + 1/2Y = 20$ Despejamos Y:
$1/2Y = 20 - 3/4X$
$Y = 2(20 - 3/4X)$
$Y = 40 - 3/2\,X$

Entonces su pendiente es: $m = -\dfrac{3}{2}$

De las dos pendientes la menor es –3/2, por lo que las pendientes de nuestras rectas de isoutilidad deben estar entre los valores:

$$-\frac{3}{2} \leq m \leq 0$$

NOTA. Se denomina recta de ISO-utilidad a la recta que representa todas las posibles combinaciones de bienes y servicios que proporcionan a un consumidor idéntica utilidad o satisfacción. Las posibles combinaciones están dadas por los cambios de la pendiente que representa la función objetivo.

Nuestro objetivo es determinar cuánto pueden valer los coeficientes de la función objetivo de manera que la solución óptima no se altere; para esto planteamos coeficientes generales en la función, de modo que el nuevo coeficiente de la variable X sea C_xy el de Y sea C_y:

$$Z = CxX + CyY \text{ despejamos Y tenemos:}$$

$$CyY = Z - CxX$$

$$Y = \frac{Z - CxX}{Cy}$$

$$Y = \frac{Z}{Cy} - \frac{Cx}{Cy}X$$

Entonces su pendiente es: $M = -\frac{Cx}{Cy}$

Podemos deducir que:

$$-\frac{3}{2} '' -\frac{Cx}{Cy} \leq 0$$

Ahora podemos resolver la desigualdad para los coeficientes C_x y C_y que nosotros deseamos analizar en la expresión $Z = 10X + 25Y$

Para el coeficiente de Cx

$$Cy = 25$$

$$-\frac{3}{2} \leq -\frac{Cx}{25} \leq 0$$

$$-\frac{3}{2} \leq -\frac{Cx}{25} \quad y \quad -\frac{Cx}{25} \leq 0$$

$$-37.5 \leq -Cx \quad y \quad -Cx \leq 0$$

$$37.5 \geq Cx \quad y \quad Cx \geq 0$$

$$0 \leq Cx \leq 37.5$$

En conclusión:
El coeficiente de la variable X puede estar comprendido entre 0 y 37.5, manteniendo constante el coeficiente de la variable Y, sin cambiar el vértice J(20, 10) cuyas coordenadas nos permiten obtener una solución óptima.

Para el coeficiente de Cy:

$$Cx = 10$$

$$-\frac{3}{2} \leq -\frac{10}{Cy} \leq 0$$

$$-\frac{3}{2} \leq -\frac{10}{Cy} \quad y \quad -\frac{10}{Cy} \leq 0$$

$$\frac{3}{2} \geq \frac{10}{Cy} \quad y \quad \frac{10}{Cy} \geq 0$$

$$3Cy \geq 20 \quad y \quad 10 \geq 0Cy$$

$$Cy \geq 6.667 \quad y \quad \infty \geq Cy$$

$$6.667 \leq Cy \leq \infty$$

En conclusión:
El coeficiente de la variable Y puede estar comprendido entre 6.66 y ∞, manteniendo constante el coeficiente de la variable X, sin cambiar el vértice J(20, 10) cuyas coordenadas nos permiten obtener una solución óptima.

5.2.2 CAMBIOS SIMULTÁNEOS EN LOS COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

El análisis de sensibilidad aplicado a los coeficientes de la función objetivo, se basa en la suposición de que un sólo coeficiente de la función objetivo cambia a la vez y que todos los otros aspectos del problema original permanecen inalterados; sin embargo, con la regla del 100% es posible realizar cambios simultáneos en los coeficientes de la función objetivo.

Apliquemos de manera práctica la regla del 100%.

Supongamos que el departamento de administración revisa los datos tanto del precio como del costo para los dos productos que elabora la mediana empresa de carpintería. Como resultado, la contribución a la ganancia para el sofá tipo A se incrementó en €18 por pieza y la del sofá tipo B disminuyó en €21 por pieza. Por lo tanto, el sofá tipo A tiene un incremento de €18 − €10 = €8, y para el sofá tipo B una disminución de €25 − €21 = €4; es decir, la función objetivo (Z = 10X + 25Y) cambia en Z = 18X + 21Y.

Tabla 5.3

VARIABLE	LÍMITE INFEROR	COEFICIENTES FUNCIÓN OBJETIVO	LÍMITE SUPERIOR	DISMINUCIÓN PERMISIBLE	AUMENTO PERMISIBLE
X	0	10	37.5	10	27.5
Y	6.66	25	Sin límite	18.34	Sin límite

En la Tabla 5.3 vemos que el aumento permisible para el coeficiente del sofá tipo A es de €27.5, por lo que el aumento en el coeficiente de la función objetivo para el sofá tipo A expresado en porcentaje es de (€8 / €27.5) 100% = 29.09% de su aumento permisible.

Expresado de otra forma:

$$\text{€}27.5 \longrightarrow 100\%$$
$$\text{€}8 \qquad X$$

$$X = (\text{€}8)\ (100\%)\ /\ \text{€}27.5 = 29.09\%$$

Del mismo modo, en la Tabla 1 observamos que la reducción permisible para el sofá tipo B es de €10, la disminución en el coeficiente de la función objetivo para el sofá tipo B expresado en porcentaje es de (€4 / €10) 100 % = 40% de su disminución permisible.

Aplicando la regla del 100%:

> Para todos los coeficientes de la función objetivo que se cambian, sume los porcentajes de los aumentos y las disminuciones permisibles. La solución óptima no variará si la suma de los porcentajes es menor o igual al 100%.

NOTA Las columnas Disminución permisible y Aumento permisible indican cuánto puede aumentar o disminuir el valor actual del coeficiente de la función objetivos sin cambiar la solución óptima.

Entonces tenemos que la suma del porcentaje del aumento permisible del sofá tipo A y la disminución permisible del sofá tipo B es de 29.09% + 40% = 69.09 %. Así, la regla del 100% indica que si la contribución a la ganancia del sofá del tipo A aumenta en €18 por pieza y la contribución a la ganancia del sofá del tipo B disminuye en €21 por pieza, la producción de 20 sofás del tipo A(X = 20) y 10 del tipo B(Y = 10) se mantendrá como una solución óptima; por lo tanto, la contribución a la ganancia total es ahora Z = 18(20) + 21(10) = €570.

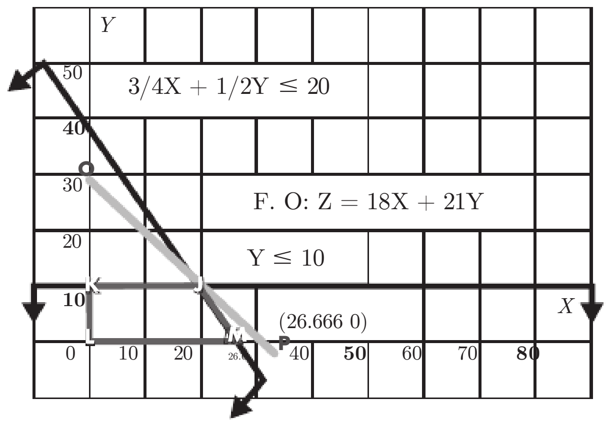


Figura 5.9

5.2.3 CAMBIO EN EL VALOR DERECHO DE LAS RESTRICCIONES OBLIGATORIAS

Ahora utilizaremos el análisis de sensibilidad para saber cómo se verá afectada la solución óptima si cambiamos el valor numérico del lado derecho de una restricción, considerando que todos los demás aspectos del problema permanecen como se plantearon originalmente. Por ejemplo:

Suponga que el departamento de armado cuenta con 6 horas menos. Ahora el lado derecho de la segunda restricción cuenta con 20 – 6 = 14 horas disponibles; por consiguiente, el modelo de programación lineal cambia:

Maximizar:	$Z = 10X + 25Y$	
Sujeto a:	$X + 2Y \leq 80$	Departamento de corte
	$3/4X + 1/2Y \leq 14$	Departamento de armado ------ r^2
	$X \leq 50$	Departamento de tapicería
	$Y \leq 10$	Departamento de cubiertas
Donde:	$X, Y \geq 0$	

NOTA En un programa lineal de dos variables, la pendiente de la función objetivo no cambiará en absoluto si ambos coeficientes se modifican en el mismo porcentaje.

La solución gráfica queda determinada de la siguiente manera: (Véase la Figura 5.10)

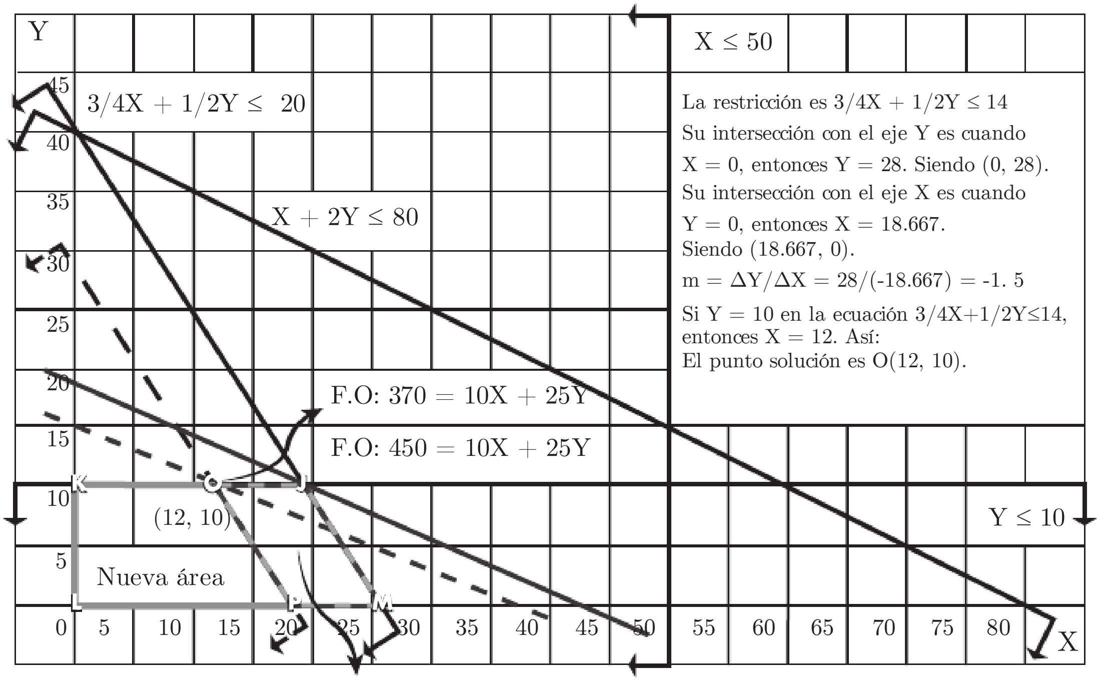


Figura 5.10

La solución muestra que el vértice O(12,10) en la Figura 5.10 es la nueva solución óptima.

El valor de la solución óptima cambia de €450 a €370, por lo que las 6 horas restantes que le fueron quitadas al departamento de armado ocasionaron una disminución en la ganancia de €450 − €370 = €80.

Supongamos que al departamento de armado le reducen 15 horas en vez de 6. Ahora el lado derecho de la segunda restricción cuenta con 20 − 15 = 5 horas disponibles; por consiguiente, el modelo de programación lineal cambia: (Véase la Figura 5.11)

Maximizar:	$Z = 10X + 25Y$	
Sujeto a:	$X + 2Y \leq 80$	Departamento de corte
	$3/4X + 1/2Y \leq 5$	Departamento de armado ------ r_2
	$X \leq 50$	Departamento de tapicería
	$Y \leq 10$	Departamento de cubiertas
Donde: $X, Y \geq 0$		

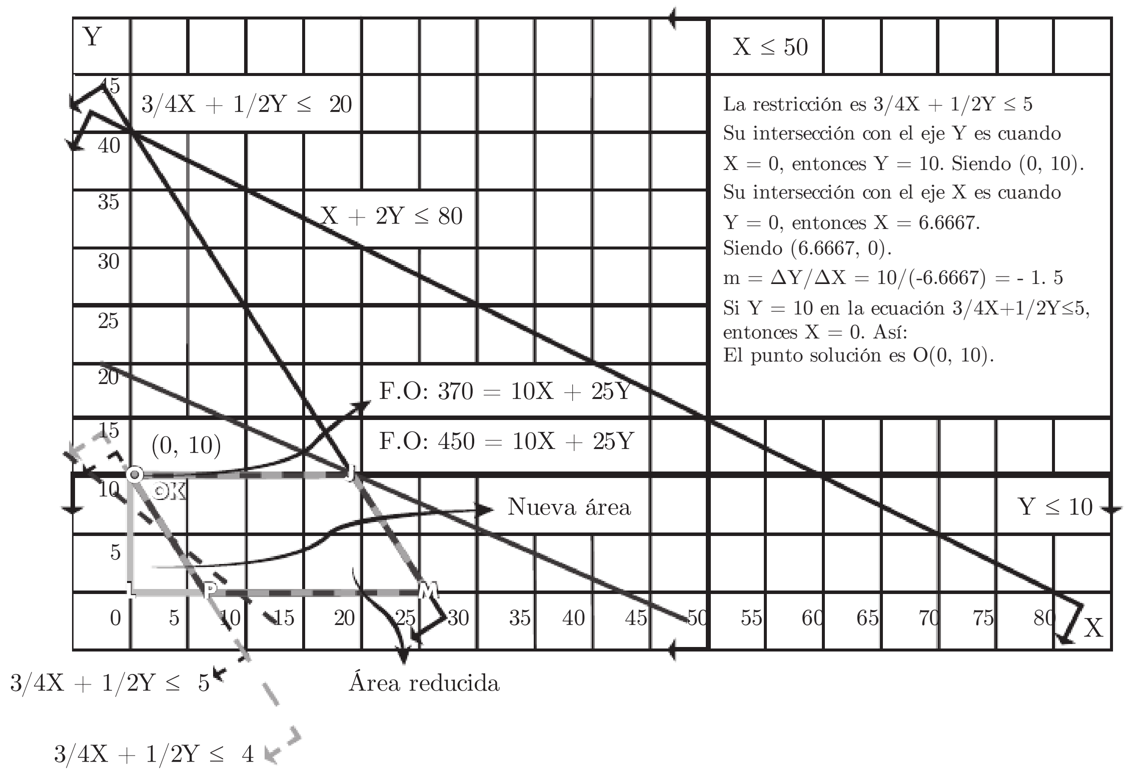


Figura 5.11

De acuerdo con la Figura 5.11 el valor de la solución óptima se encuentra ubicado ahora en el vértice OK(0, 10), produciendo una disminución en la ganancia de €450 – €250 = €200. Esto fue posible por las 15 horas restantes que le fueron quitadas al departamento de armado.

Ahora bien, tome en cuenta el siguiente análisis:

De acuerdo con las Figuras 5.10 y 5.11, si dividimos €80/6 horas, obtenemos €13.333/horas; igualmente, si dividimos €200/15 horas obtenemos 13.333 euros/horas. Esto significa que por cada hora que le quitemos al departamento de armado conseguimos una disminución en la solución óptima de €13.333.

Con este análisis llegamos al concepto del precio dual, el cual nos dice lo que sucederá al valor de la solución óptima si hacemos un cambio de una unidad en el lado derecho de una restricción. Frecuentemente, los precios duales proporcionan información económica que ayuda a tomar decisiones para la adquisición de recursos adicionales.

Por otra parte:

Para determinar los rangos donde es aplicable el precio dual analizamos nuevamente la Figura 5.11. Recuerde que la restricción $3/4X + 1/2Y \leq 20$ fue transportada desde el vértice J (20, 10) hasta el vértice OK(0, 10) debido a una disminución de 15 horas de producción en el departamento de armado. Ahora bien, si en vez de restringir 15 horas de producción restringimos 16; es decir, 20 - 16 = 4, observamos que esta restricción $3/4X + 1/2\ Y \leq 4$ queda situada fuera de los límites de la restricción $Y \leq 10$. Con base en estas observaciones podemos afirmar que existe un rango cuyo límite inferior y superior es aplicable el precio dual, en este caso el límite inferior queda determinado por las coordenadas del vértice OK (0,10) en donde las dos restricciones $Y \leq 10$ y $3/4X + 1/2Y \leq 5$ hacen intercepción. Por lo tanto, el mínimo valor que puede tomar el término independiente de la restricción $3/4X + 1/2Y \leq 20$ evaluado en el vértice OK(0, 10) es $3/4(0) + 1/2(10) \leq 5$.

Ahora supongamos que al departamento de armado se le aumentan 22.5 horas de producción; en este caso el lado derecho de la restricción cuenta con $20 + 22.5 = 42.5$ horas disponibles, por consiguiente, el modelo de programación lineal cambia: (Véase la Figura 5.12)

Maximizar: $Z = 10X + 25Y$

Sujeto a: $X + 2Y \leq 80$ Departamento de corte
$3/4X + 1/2Y \leq 45.5$ Departamento de armado ------ r2
$X \leq 50$ Departamento de tapicería
$Y \leq 10$ Departamento de cubiertas

Donde: $X, Y \geq 0$

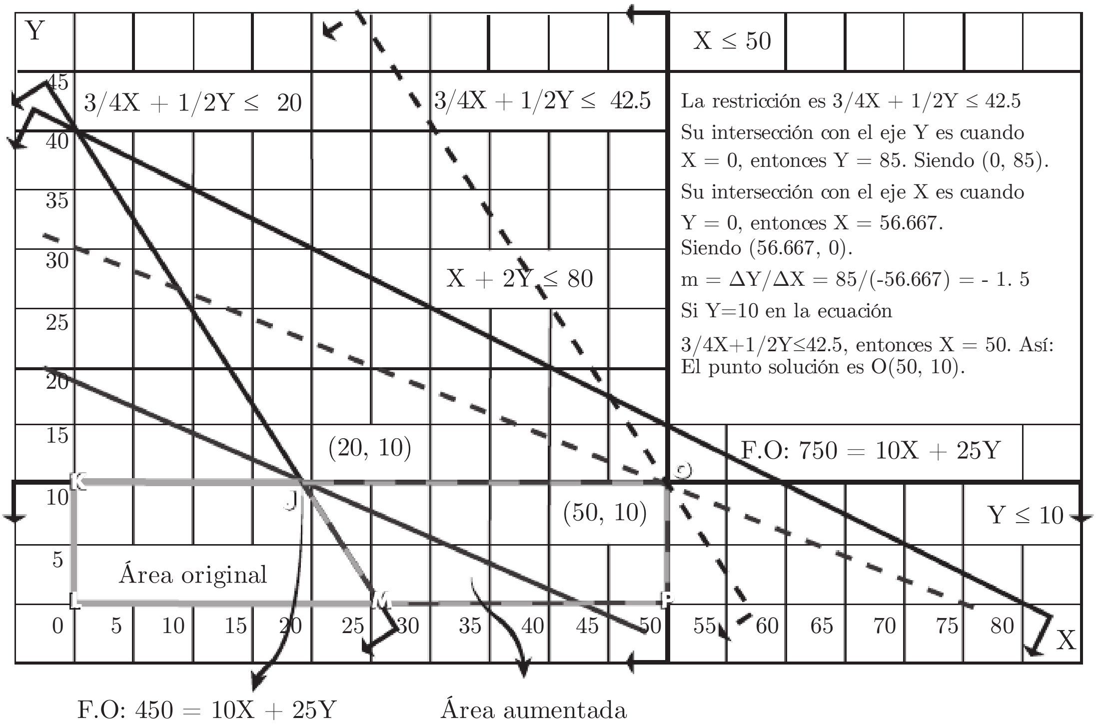


Figura 5.12

La restricción $3/4X + 1/2Y \leq 20$ fue transportada desde el vértice J(20, 10) hasta el vértice O(50, 10). El valor de la solución óptima cambia de €450 a €750, por lo que las 22.5 horas que le fueron agregadas al departamento de armado ocasionaron un aumento en la ganancia de €750 − €450 = €300. Si observamos la Figura 5.12, nos damos cuenta de que el precio dual (€300/22.5 horas = €13.333/horas) queda determinado por las desigualdades, $X \leq 50$ y $Y \leq 10$; por consiguiente, el límite superior de horas que el departamento de producción de armado puede aceptar es de $3/4(50) + 1/2(10) \leq 42.5$.

El rango cuyo límite inferior y límite superior en que el precio dual es aplicable para la desigualdad $3/4X + 1/2Y \leq 20$ queda determinado de la siguiente manera:

$$\text{Rango: } 5 \leq r_2 \leq 42.52$$

Supongamos que al departamento de cubiertas le agregamos 30 horas de producción. Ahora el lado derecho cuenta con 10 + 30 = 40 horas disponibles; entonces, el modelo de programación lineal cambia: (Véase la Figura 5.13)

$$\begin{aligned}
&\text{Maximizar: } Z = 10X + 25Y \\
&\text{Sujeto a: } X + 2Y \leq 80 \quad \text{Departamento de corte} \\
&3/4X + 1/2Y \leq 20 \quad \text{Departamento de armado} \\
&X \leq 50 \quad \text{Departamento de tapicería} \\
&Y \leq 40 \quad \text{Departamento de cubiertas ------ } r_4 \\
&\text{Donde: } X, Y \geq 0
\end{aligned}$$

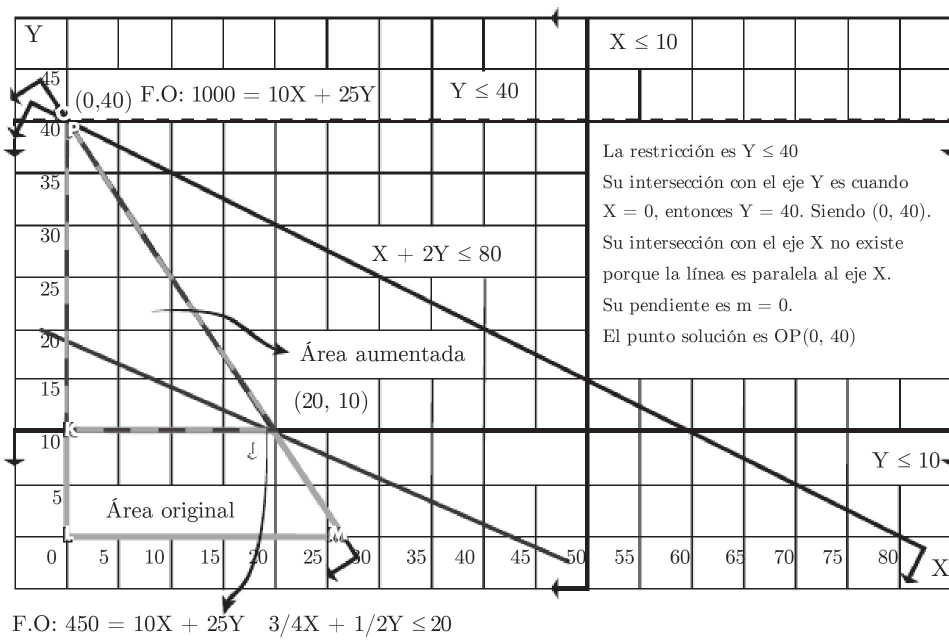


Figura 5.13

La restricción Y ≤ 10 es transportada desde el vértice J(20, 10) hasta el vértice OP(0, 40). El valor de la solución óptima cambia de €450 a €1000, por lo que las 30 horas que le fueron agregadas al departamento de cubiertas ocasionaron un aumento en la ganancia de €1000 − €450 = €550. Si observamos la gráfica 4, nos damos cuenta que el precio dual (€550/30 horas = €18.333/horas) queda determinado por las desigualdades 3/4X + 1/2Y≤ 20 y X + 2Y ≤ 80. Por lo tanto, el límite superior que puede tomar el término independiente de la restricción Y ≤ 10 evaluado en el vértice OP(0, 40) corresponde a Y≤ 40.

NOTA Algunos textos asocian el término precio sombra con cada restricción. El concepto de un precio sombra se relaciona estrechamente con el concepto de precio dual. El precio sombra asociado con una restricción es el cambio en el valor de la solución óptima por unidad de aumento en el lado derecho de la restricción. Generalmente, el precio dual y el precio sombra son los mismos para todos los programas lineales de maximización. En los programas lineales de minimización, el precio sombra es el negativo del precio dual correspondiente. (Información obtenida de: David R. Anderson, Dennis J. Sweeney y Thomas A. Williams. *Métodos Cuantitativos para los Negocios*. 9a. ed. Editorial Thomson. “Notas y Comentarios”, pág. 294.

Ahora bien, supongamos que al departamento de cubiertas le disminuyen 5 horas de producción, en este caso el lado derecho cuenta con $10 - 5 = 5$ horas disponibles; por consiguiente, el modelo de programación lineal cambia: (Véase la Figura 5.14)

Maximizar: $Z = 10X + 25Y$

Sujeto a: $X + 2Y \leq 80$ Departamento de corte
$3/4X + 1/2Y \leq 20$ Departamento de armado
$X \leq 50$ Departamento de tapicería
$Y \leq 5$ Departamento de cubiertas ------ r_4

Donde: $X, Y \geq 0$

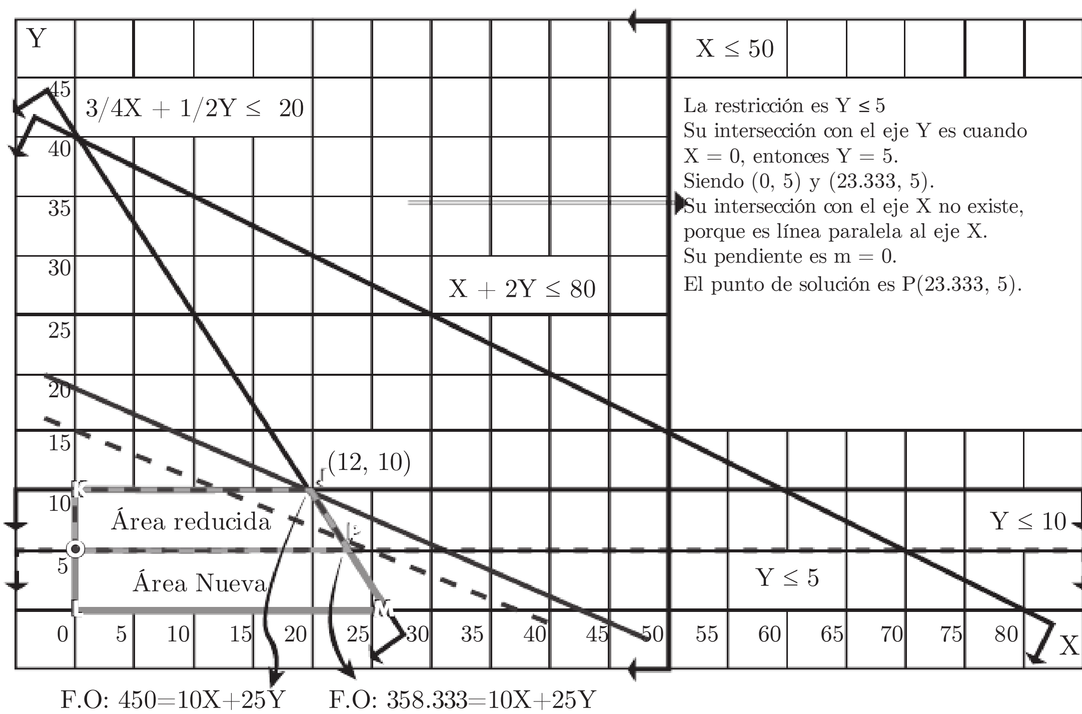


Figura 5.14

La restricción $Y \leq 10$ es transportada desde el vértice J(20, 10) hasta el vértice P (23.333, 5). Es decir, en $Z = 10X + 25Y$ para cada vértice de: K, J, O y P.

Para K(10,0), se tiene que $Z = 10(10) + 25(0) = 100$.
Para J(20,10), se tiene que $Z = 10(20) + 25(10) = \underline{450}$.
Para O(0,5), se tiene que $Z = 10(0) + 25(5) = 125$.
Para P(23.333,5), se tiene que $Z = 10(23.33) + 25(5) = \underline{358.33}$.

El valor de la solución óptima disminuye en €450 – €358.333 = €91.667. Si observamos la Figura 5.14, nos damos cuenta de que el precio dual (€91.667/5 horas = €18.333/horas) queda determinado por la desigualdad $3/4X + 1/2Y \leq 20$; por lo tanto, el límite inferior que puede tomar el término independiente de la restricción $Y \leq 10$ evaluado en el vértice M (23.333,0) corresponde a $Y \leq 0$. Es decir, la desigualdad $Y \leq 10$ la podemos transportar hasta el vértice M siempre que $X \geq 0$ y $Y \geq 0$.

El límite inferior y superior, en el cual se establece el precio dual, queda determinado de la siguiente manera:

$$\text{Rango: } 0 \leq r_4 \leq 40$$

Los rangos del lado derecho de las restricciones obligatorias o activas quedan determinadas de la siguiente manera: (Véase la Tabla 5.4)

Tabla 5.4

RESTRICCIONES OBLIGATORIAS	LÍMITE INFERIOR	VALOR ÓPTIMO	LÍMITE SUPERIOR	PRECIO DUAL
ARMADO	5	20	42.5	13.333
CUBIERTAS	0	10	40	18.333

Con base en la información establecida en la Tabla 1, podemos determinar cuánto puede disminuir o aumentar el valor actual del lado derecho de las restricciones obligatorias sin cambiar el precio dual.

Disminución permisible = Valor óptimo - Límite inferior.

Aumento permisible = Límite superior - Valor óptimo.

Rangos de lado derecho en las restricciones obligatorias o activas: (Véase la Tabla 5.5)

Tabla 5.5

RESTRICCIONES OBLIGATORIAS	LÍMITE INFERIOR	VALOR ÓPTIMO	LÍMITE SUPERIOR	DISMINUCIÓN PERMISIBLE	AUMENTO PERMISIBLE	PRECIO DUAL
ARMADO	5	20	42.5	15	22.5	13.333
CUBIERTAS	0	10	40	10	30	18.333

5.2.4 CAMBIOS SIMULTÁNEOS DEL LADO DERECHO EN LAS RESTRICCIONES

El análisis de sensibilidad del lado derecho se basa en la suposición de que un solo valor del lado derecho cambia a la vez; sin embargo, en algunos casos podemos estar interesados en lo que sucede si dos o más valores del lado derecho se modifican simultáneamente sin alterar el precio dual en restricciones obligatorias. La regla del 100% nos permite realizar este análisis. (Véase la Tabla 5.6)

Tabla 5.6

RESTRICCIONES OBLIGATORIAS	LÍMITE INFERIOR	VALOR ÓPTIMO	LÍMITE SUPERIOR	DISMINUCIÓN PERMISIBLE	AUMENTO PERMISIBLE	PRECIO DUAL
ARMADO	5	20	42.5	15	22.5	13.333
CUBIERTAS	0	10	40	10	30	18.333

Observe la información contenida en la Tabla 5.6, con los valores de disminución permisible y aumento permisible podemos ver cuánto puede aumentar o disminuir el valor actual del lado derecho de las restricciones obligatorias sin cambiar el precio dual.

Ejemplo:

Suponga que el departamento de investigación de operaciones decide disminuir 3 horas de producción al departamento de armado y aumentar 15 horas de producción al departamento de cubiertas. El nuevo modelo de programación lineal se formula de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar:} \quad Z = 10X + 25Y$$

$$\begin{array}{lrl}
\text{Sujeto a:} & X + \quad 2Y & \leq 80 \text{ Departamento de corte} \\
 & 3/4X + 1/2Y & \leq 17 \text{ Departamento de armado} \\
 & X \qquad\quad & \leq 50 \text{ Departamento de tapicería} \\
 & Y & \leq 25 \text{ Departamento de cubiertas}
\end{array}$$

$$\text{Donde: } X,\ Y \geq 0$$

De acuerdo con la Tabla 3, la disminución permisible en el departamento de armado es de 15 horas de producción; por consiguiente, su porcentaje es (3/15) (100%) = 20% de disminución permisible.

Formulado de otra forma:

$$\begin{array}{lcr}
15 \text{ horas} & \longrightarrow & 100\% \\
3 \text{ horas} & & X \\
\hline
\end{array}$$

$$X = (3)\ (100\%)/15 = 20\%$$

Del mismo modo, el aumento permisible en el departamento de cubiertas es de 30 horas de producción; luego, su porcentaje es (15/30) (100%) = 50% de su aumento permisible.

Ahora podemos plantear la regla del 100%:

> Para todos los valores del lado derecho que se cambian, los precios duales no varían si la suma de los porcentajes de los aumentos y las disminuciones permisibles es menor o igual a 100%.

Si sumamos los porcentajes para los dos valores del lado derecho, observamos que es igual a 20% + 50% = 70%. Por lo tanto, la regla del 100% nos dice que el precio dual para el departamento de armado es de €13.333 por cada hora de producción que se agrega o que se quite; del mismo modo, el precio dual para el departamento de cubiertas es de €18.333 por cada hora de producción que se agrega o que se quite. Por lo tanto, las 3 horas quitadas al departamento de armado y las 15 horas adicionales al departamento de cubiertas mejorarán el valor en la función objetivo en 15(18.333) − 3(13.333) = 274.995 − 39.999 = €234.996. Si lo sumamos con los €450 nos da un total de €685. También podemos obtener el mismo valor de la siguiente manera: 17(13.333) + 25(18.333) = 226.661 + 458.325 = €685.

NOTA La condición conocida como degeneración puede causar una sutil diferencia en la forma en que interpretamos los cambios en los coeficientes de la función objetivo más allá de los puntos extremos del rango del coeficiente objetivo. Esto ocurre cuando el precio dual es igual a cero para una de las restricciones confinantes. La degeneración no afecta la interpretación de los cambios hacia el interior del rango; sin embargo, cuando está presente, los cambios más allá de los puntos extremos del rango no necesariamente significan que una solución diferente será óptima. (Información obtenida de: David R. Anderson, Dennis J. Sweeney y Thomas A. Williams. *Métodos Cuantitativos para los Negocios*. 9a.ed., Editorial Thomson. "Notas y Comentarios", pág. 298).

5.3. y 5.3.1 CAMBIOS EN LOS COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

Recuerde el problema del veterinario que recomendó alimentar a un caballo con maíz, trigo y sorgo durante tres meses. La formulación (capítulo 3, pág. 57) y la solución gráfica (capítulo 4, pág. 76) fue la siguiente: (Véase la Figura 5.15)

Minimizar: $Z = 30X + 40Y$

Sujeto a:
$4X \geq 12$ Cantidad de maíz
$3Y \geq 6$ Cantidad de trigo
$X + 1.5Y \leq 9$ Cantidad de sorgo

Donde: $X, Y \leq 0$

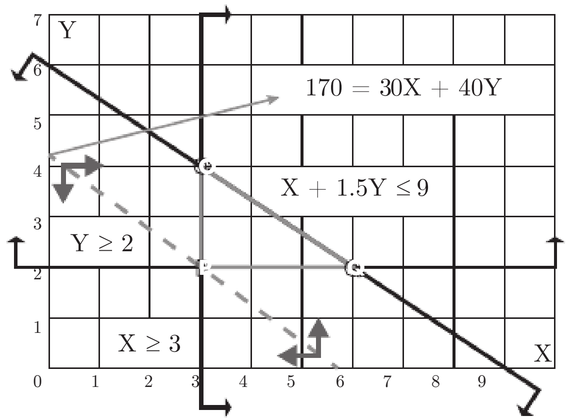


Figura 5.15

La solución del problema nos indica que debemos comprar y mezclar 3 costales de X y 2 costales de Y, el costo mínimo que se deberá pagar es de $Z = 30(3) + 40(2) = \$170$.

Ahora bien, calcularemos los límites superiores e inferiores en los cuales operan los coeficientes de la función objetivo. Condiciones:

1. La recta de la función objetivo ($Z = 30X + 40Y$) debe ser paralela a la restricción $X \geq 3$. Es decir, cuando ambas rectas tengan la misma pendiente.
2. La recta de la función objetivo ($Z = 30X + 40Y$) debe tener la misma pendiente a la restricción $Y \geq 2$.

Los coeficientes en ambas condiciones deberán satisfacer las siguientes igualdades:

Primera condición: Igualando los coeficientes de la función objetivo $Z = 30X + 40Y$ con las de la restricción $X \geq 3$.

$$\frac{\text{Coeficiente de X en 1}}{\text{Coeficiente de Y en 1}} = \frac{\text{X}}{\text{Coeficiente de Y en función objetivo}}$$

$$\frac{1}{0} = \frac{X}{40} \therefore \text{X} = 40\left(\frac{\text{X}}{\text{Coeficiente de Y en función objetivo}}\right) \therefore \text{X} = \text{No existe límite}$$

El costo del costal X toma un valor que no existe; es decir, tiende hasta el infinito. Como resultado, la función objetivo cambia por $Z = \infty(X) + 40Y = \infty$. Ahora, el costo que deberá pagar es no factible. Esto es posible si trasladamos la pendiente de la función objetivo hasta tocar el vértice con la ecuación lineal $X \geq 3$. Sigamos:

$$\frac{\text{Coeficiente de X en 1}}{\text{Coeficiente de Y en 1}} = \frac{\text{Coeficiente de X en función objetivo}}{\text{Y}}$$

$$\frac{1}{0} = \frac{30}{Y} \therefore\ y = 30\left(\frac{0}{1}\right) \therefore Y = 0$$

El costo del costal Y adquiere el valor de cero, por consiguiente, la función objetivo cambia por Z = 30X + 0Y. Por lo tanto, el costo que deberá pagar ahora disminuye en Z = 30(2) + 0(2) = $60. Esto es posible si trasladamos la pendiente de la función objetivo hasta tocar el vértice P (3, 5) con la ecuación lineal X≥ 3.

Segunda condición: Igualando los coeficientes de la función objetivo Z = 30X + 40Y con las de la restricción Y≥2.

$$\frac{\text{Coeficiente de X en 2}}{\text{Coeficiente de Y en 2}} = \frac{\text{X}}{\text{Coeficiente de Y en función objetivo}}$$

$$\frac{1}{0} = \frac{X}{40} \therefore X = 40\left(\frac{0}{1}\right) X = 0$$

El costo del costal X toma el valor de cero, por lo tanto, la función objetivo cambia por Z = 0X + 40Y. Entonces, el costo que deberá pagar ahora disminuye en Z = 0(2) + 40(2) = $80. Esto es posible si trasladamos la pendiente de la función objetivo hasta tocar el vértice Q (6, 2) con la ecuación lineal Y≥ 2. Sigamos:

$$\frac{1}{0} = \frac{X}{40} \therefore X = 40\left(\frac{0}{1}\right) \therefore X = 0$$

El costo del costal Y adquiere un valor que no existe, es decir, tiende hasta el infinito. Por lo tanto, la función objetivo cambia por Z = 30X +∞(Y) = ∞. Entonces, el costo que deberá pagar es ahora no factible. Esto es posible si trasladamos la pendiente de la función objetivo hasta tocar el vértice Q (6,2) con la ecuación lineal Y≥ 2.

Los rangos en los coeficientes de la función objetivo quedan determinados de la siguiente manera: (Véase la Tabla 5.7).

Tabla 5.7

VARIABLE	LÍMITE INFERIOR	COEFICIENTE FUNCIÓN OBJETIVO	LÍMITE SUPERIOR
X	0	30	Sin límite (∞)
Y	0	40	Sin límite (∞)

NOTA El coeficiente de X no puede tomar un valor de cero; por lo tanto, no es posible que disminuya el costo hasta $170 - $80 = $90. Del mismo modo, si el coeficiente de Y toma un valor de cero, el costo disminuye hasta $170 - $60 = $110, lo cual no es posible, a menos que los costales X y Y fueran regalados. Igualmente, los coeficientes de X y Y no pueden adquirir valores finitos. Con base en lo expresado, podemos determinar que no es conveniente cambiar la pendiente de la función objetivo.

Ahora calculemos los valores de disminución permisible y aumento permisible:

Disminución permisible = Coeficiente de la función objetivo − Límite inferior.
Aumento permisible= Límite superior − Coeficiente de la función objetivo.

Los rangos en los coeficientes de la función objetivo quedan determinados de la siguiente manera: (Véase la Tabla 5.8)

Tabla 5.8

VARIABLE	LÍMITE INFERIOR	COEFICIENTES FUNCIÓN OBJETIVO	LíMITE SUPERIOR	DISMINUCIÓN PERMISIBLE	AUMENTO PERMISIBLE
X	0	30	Sin límite (∞)	30	Sin límite (∞)
Y	0	40	Sin límite (∞)	40	Sin límite (∞)

De acuerdo con la información contenida en la Tabla 5.8, no es relevante realizar ningún cambio en algunos de los dos coeficientes de la función objetivo ($Z = 30X + 40Y$), pues sus límites inferiores adquieren valores de cero y sus límites superiores no existen. En consecuencia, realizar un cambio en cualquiera de los coeficientes de la función objetivo ocasionará que su pendiente cambie de vértice y al mismo tiempo se modifiquen sus valores óptimos.

5.3.2 CAMBIOS SIMULTÁNEOS EN LOS COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

Habíamos comentado que el análisis de sensibilidad se basa en la suposición de que un solo coeficiente de la función objetivo cambia a la vez, y que todos los otros aspectos del problema original permanecen inalterados. Por lo tanto, el rango en los coeficientes de la función objetivo únicamente es aplicable para cambios de un solo coeficiente a la vez; sin embargo, en algunos casos podríamos interesarnos en lo que sucedería si dos o más coeficientes de la función objetivo variaran simultáneamente. También habíamos establecido que tales cambios simultáneos son posibles con la ayuda de la regla del 100% que dice:

> Para todos los coeficientes de la función objetivo que se cambian, sume los porcentajes de los aumentos y las disminuciones permisibles. La solución óptima no variará si la suma de los porcentajes es menor o igual a 100%.

Ya habíamos explicado que la pendiente de la función objetivo no debe cambiar para este tipo de problemas, pues sus límites inferiores adquieren valores de cero y sus límites superiores no existen; sin embargo, en un programa lineal de dos variables, la pendiente de la función objetivo no cambiará en absoluto si ambos coeficientes se modifican en un mismo porcentaje.

Ejemplo:

Si aumentamos en 26% el coeficiente de X, debemos disminuir en 26% el coeficiente de Y. Tenemos que la función objetivo (Z = 30X + 40Y) cambia por:

Coeficiente para X es (26%) (30)/100% = 7.8 Coeficiente para Y es (26%) (40)/100% = 10.4

$$Z=7.8X+10.4Y$$

Calculemos sus pendientes: $m=-\dfrac{Cx}{Cy}$

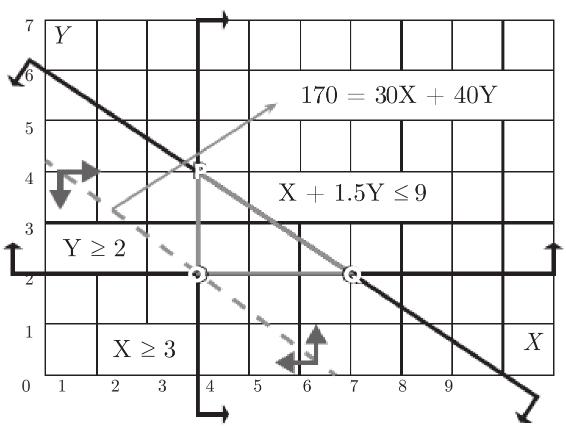
Pendiente de $Z=30X+40Y \therefore m=-30/40=-.75$

Pendiente de $Z=7.8X+10.4Y \therefore m=-7.8/10.4=-.75$

Como podemos observar, si modificamos en un mismo porcentaje los coeficientes de la función objetivo, su pendiente no cambia en absoluto.

5.3.3 CAMBIOS DEL LADO DERECHO EN LAS RESTRICCIONES OBLIGATORIAS

Ahora utilizaremos el análisis de sensibilidad para saber cómo afecta la solución óptima si cambiamos el valor numérico del lado derecho de una restricción, considerando que todos los demás aspectos del problema permanecen como se plantearon originalmente.
Analicemos la Figura 5.16.



Minimizar: Z = 30X + 40Y

Sujeto a: 4X ≥ 12 Cantidad de maíz -- r_1

3Y ≥ 6 Cantidad de trigo

X+1.5Y ≤ 9 Cantidad de sorgo

Donde: X, Y ≤ 0

Figura 5.16

De la Figura 5.17, observemos la desigualdad Y ≥ 2 e imaginemos que la podemos desplazar sobre el valor de la ordenada hacia abajo y hacia arriba, luego preguntémonos ¿cuáles son los límites de desplazamiento de la desigualdad Y ≥ 2 y su respectivo precio dual?

Primero desplazamos la desigualdad Y ≥ 2 hacia abajo y observamos cuál es su límite.

Grafiquemos:

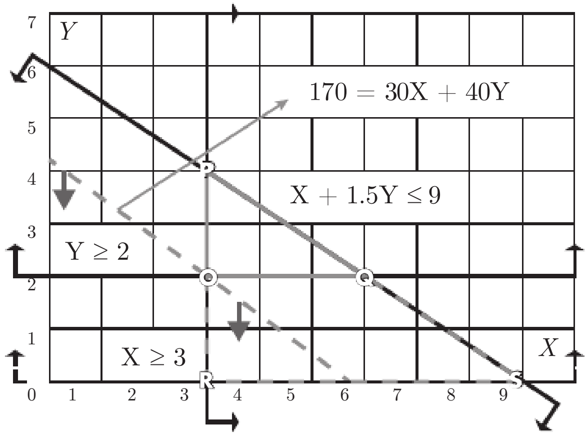


Figura 5.17

El vértice R(3, 0) nos indica el límite inferior en el cual podemos desplazar la desigualdad $Y \geq 2$. Es decir, el desplazamiento inicia desde el vértice O(3, 2) hasta el valor que toma la ordenada, que es 0. En este caso el límite inferior irá desde 2 hasta el 0.

Nos falta calcular el precio dual, pero antes recordemos su significado. El precio dual asociado con una restricción es el cambio en el valor de la solución óptima por unidad de aumento o disminución en el lado derecho de la restricción.

Recordemos que las coordenadas del vértice O(3, 2) representan el costo mínimo que se debe de pagar; es decir, $Z = 30(3) + 40(2) = \$170$. Ahora bien, como desplazamos la desigualdad $Y \geq 2$ desde el vértice O(3, 2) hasta el vértice R(3, 0) el costo mínimo cambia por $Z = 30(3) + 40(0) = \$90$, por lo que la disminución es $\$170 - \$90 = \$80$. Del mismo modo, el valor del lado derecho de la restricción $Y \geq 2$ disminuyó en 2 unidades $(2 - 0 = 2)$; entonces, tenemos que el precio dual es $\$80/2 = \$40$ por kilogramo de trigo que se le quitará al caballo.

Ahora desplacemos la desigualdad $Y \geq 2$ hacia arriba y observamos cuál es su límite. (Véase la Figura 5.18)

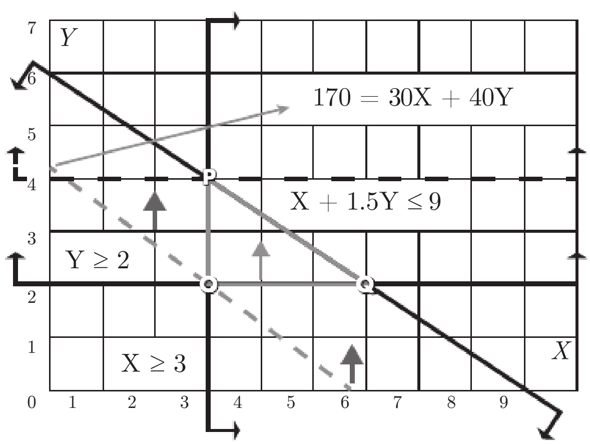


Figura 5.18

El vértice P(3, 4) indica el límite superior en el cual podemos desplazar la desigualdad Y $\geq$ 2. El desplazamiento inicia sobre la ordenada del vértice O(3, 2). Entonces, el límite superior va desde 2 a 4.
Del mismo modo, las coordenadas del vértice O(3, 2) representan el costo mínimo que se debe pagar; es decir, Z = 30(3) + 40(2) = \$170. Ahora bien, como desplazamos la desigualdad Y $\geq$ 2 desde el vértice O(3, 2) hasta el vértice P(3, 4) el costo mínimo cambia Z = 30(3) + 40(4) = \$250, por lo que el aumento es \$250 −\$170 = \$80. Del mismo modo, el valor del lado derecho de la restricción Y $\geq$ 2 aumentó en 2 unidades (4 − 2 = 2); entonces, tenemos que el precio dual es ahora de \$80/2 = \$40 por kilogramo adicional que se requiera para alimentar al caballo.

Considerando el desplazamiento sobre la ordenada desde el vértice R(3, 0) hasta el vértice P(3, 4), podemos determinar que el rango comprendido entre 0 y 4 establece el límite inferior y superior entre los cuales el precio dual es aplicable para la desigualdad Y$\geq$ 2:

$$\text{Rangos referentes al trigo: } 0 \leq r_2 \leq 4$$

Nuevamente, observemos en la Figura 5.19 la desigualdad X$\geq$3 e imaginemos que la podemos desplazar sobre el valor de la abscisa hacia atrás y hacia delante, luego preguntémonos ¿cuáles son los límites de desplazamiento de la desigualdad X$\geq$3?

Primero desplazamos la desigualdad X$\geq$3 hacia atrás y observamos cuál es su límite. Grafiquemos:

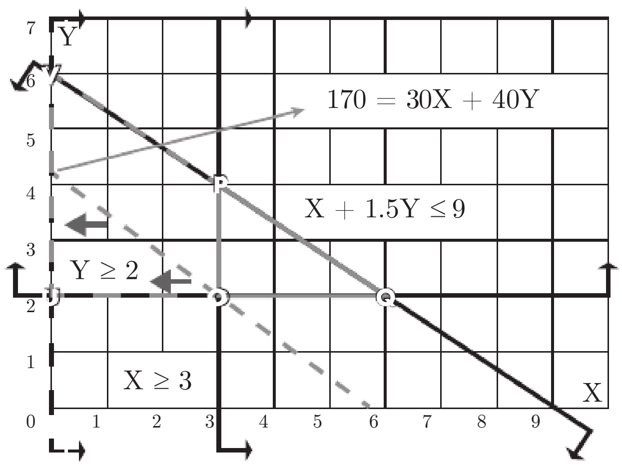


Figura 5.19

La abscisa de las coordenadas del vértice U(0, 2) nos indica el límite inferior en el cual podemos desplazar la desigualdad X $\geq$ 3. Por lo tanto, el "límite inferior retrocede" con respecto a la abscisa del vértice O(3, 2). Es decir, desde 3 hasta 0.

Calculemos ahora el precio dual:

Recordemos que las coordenadas del vértice O(3, 2) representan el costo mínimo que se debe pagar, es decir, Z = 30(3) + 40(2) = \$170. Ahora bien, como desplazamos la desigualdad $X \geq 3$ desde el vértice O(3, 2) al vértice U(0, 2) el costo mínimo cambia por $Z = 30(0) + 40(2) = \$80$, por lo que la disminución es ahora de $\$170 - \$80 = \$90$. Del mismo modo, el valor del lado derecho de la restricción $X \geq 3$ disminuyó en 3 unidades $(3 - 0 = 3)$; entonces, tenemos que el precio dual es de $\$90/3 = \$30$ por kilogramo de maíz que se disminuirá para alimentar al caballo. Ahora desplacemos la desigualdad $X \geq 3$ hacia delante y observemos por qué valor se encuentra limitado. (Véase la Figura 5.20)

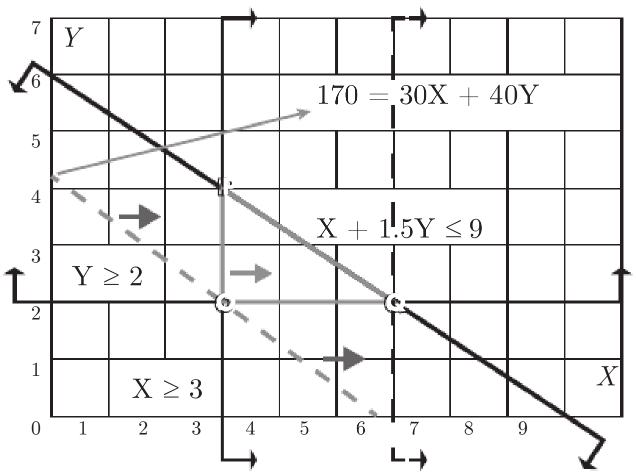


Figura 5.20

La abscisa de las coordenadas del vértice Q(6, 2) nos indica el límite superior en el cual podemos desplazar la desigualdad $X \geq 3$. Por lo tanto, el desplazamiento inicia con la abscisa del vértice O(3, 2). Es decir, desde 3 hasta 6.

$Z = 30(3) + 40(2) = \$170$. Ahora bien, como desplazamos sobre el valor de la abscisa la desigualdad $X \geq 3$ desde el vértice O(3, 2) hasta el vértice Q(6, 2), el costo mínimo cambia por $Z = 30(6) + 40(2) = \$260$, por lo que el aumento es de $\$260 - \$170 = \$90$. Del mismo modo, el valor de lado derecho de la restricción $Y \geq 2$ aumentó en 3 unidades $(6 - 3 = 3)$; entonces, tenemos que el precio dual es ahora de \$90/3 \$30 por kilogramo de maíz adicional que se requiere para alimentar al caballo.

Como la desigualdad $X \geq 3$ se desplaza sobre las abscisas desde los vértices U (0,2) y V (0,6) hasta la abscisa del vértice Q(6, 3), podemos determinar el límite inferior y superior en el cual el precio dual es aplicable. Es decir: [0,6].

$$\text{Rango referente al maíz: } 0 \leq r_1 \leq 6$$

Nuevamente observemos la desigualdad $X + 1.5Y \leq 9$ en la gráfica 6 e imaginemos que la podemos desplazar lateralmente hacia abajo y lateralmente hacia arriba, luego preguntémonos ¿cuáles son los límites de desplazamiento de la desigualdad $X + 1.5Y \leq 9$ y su respectivo precio dual?

Primero, desplazamos lateramente hacia delante la desigualdad $X + 1.5Y \leq 9$ y observamos cuál es su límite. (Véase la Figura 5.21)

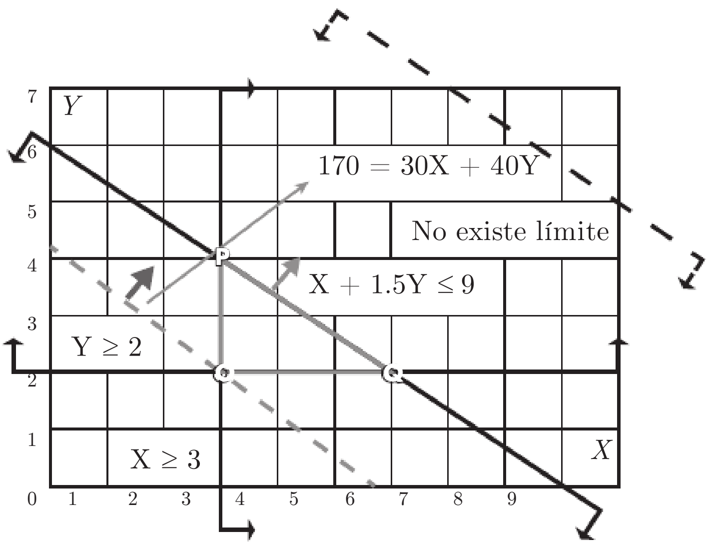


Figura 5.21

Como podemos observar, podemos desplazar la desigualdad X + 1.5Y≤ 9 lateralmente hacia adelante cuantas veces queramos, pues no existe otra desigualdad que lo impida. Lo que nos permite afirmar que la desigualdad X + 1.5Y≤ 9 no tiene un límite máximo de desplazamiento lateralmente hacia delante, pues tiende hasta el infinito(∞).

Ahora desplacemos lateramente hacia atrás la desigualdad X + 1.5Y≤ 9 y observamos cuál es su límite. (Véase la Figura 5.22)

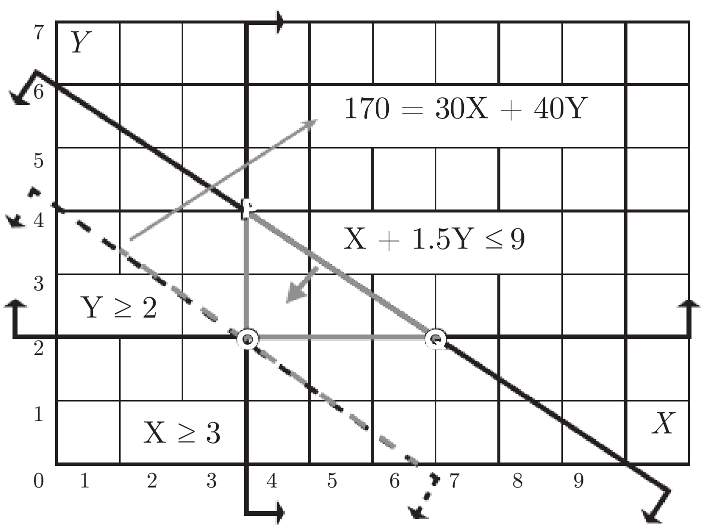


Figura 5.22

La desigualdad X + 1.5Y≤ 9 coincide con la recta que representa la función objetivo (Z = 30X + 40Y) y obviamente con las coordenadas del vértice O(3, 2), que representa la solución óptima.

No podemos seguir desplazando lateramente hacia atrás la desigualdad X + 1.5Y≤ 9 debido a que se encuentra limitada por las desigualdadesY≥2 y X ≥3. Así, su límite inferior queda determinado por la desigualdad X + 1.5Y≤ _ ; sustituyendo las coordenadas que representan la solución óptima, tenemos 3 + 1.5(2)≤ 6. Lo cual significa que los costales de X y Y deben contener como mínimo 6 kilogramos de sorgo.

Con respecto al precio dual, su valor obviamente es cero.

Ahora podemos determinar que el rango comprendido entre [6,∝] establece el límite inferior y superior en el cual el precio dual es aplicable para la desigualdad X + 1.5Y≤ 9:

Rango referente al sorgo: $6 \leq r_3 \leq \infty$

Debido a que el precio dual adquiere el valor de \$0, si aumentamos o disminuimos el valor derecho con respecto a la desigualdad X + 1.5Y ≤ 9, no es necesario considerarla.

Los rangos del lado derecho quedan determinados de la siguiente manera: (Véase la Tabla 5.9)

Tabla 5.9

RESTRICCIONES OBLIGATORIAS	LÍMITE INFERIOR	VALORES ÓPTIMOS	LíMITE SUPERIOR	PRECIO DUAL
Maíz	0	3	6	30
Trigo	0	2	4	40

Con base en la información establecida en la Tabla 1, podemos determinar cuánto puede disminuir o aumentar el valor actual del lado derecho de las restricciones sin cambiar el precio dual.

Disminución permisible = Valor óptimo − Límite inferior.
Aumento permisible = Límite superior − Valor óptimo.

Rangos del lado derecho en las restricciones obligatorias o activas:
Observemos los valores de la Tabla 5.10:

Tabla 5.10

RESTRICCIONES OBLIGATORIAS	LÍMITE INFERIOR	VALORES ÓPTIMOS	LÍMITE SUPERIOR	DISMINUCIÓN PERMISIBLE	AUMENTO PERMISIBLE	PRECIO DUAL
Maíz	0	3	6	3	3	30
Trigo	0	2	4	2	2	40

El rango de desplazamiento de la restricción obligatoria (X≥ 3) que representa el maíz se encuentra comprendido en los límites [0,6]; sin embargo, no podemos hacer ningún cambio con respecto al valor derecho de esta desigualdad, pues ocasionaríamos una alteración en la solución óptima. Observe que la disminución permisible y el aumento permisible adquieren el valor de 3, que es el mismo que representa al maíz. Esta misma condición se aplica para el caso de la restricción que representa el trigo.

En conclusión:

Los rangos establecidos por la disminución permisible y el aumento permisible, nos permiten saber qué tanto podemos disminuir o aumentar los valores derechos en las restricciones obligatorias. Del mismo modo, nos permiten saber si son posibles tales disminuciones o aumentos.

Los cambios simultáneos del lado derecho de las restricciones obligatorias son definitivamente imposibles de realizar.

Nota precautoria sobre la interpretación de precios duales

Frecuentemente, los precios duales proporcionan información económica que ayuda a tomar decisiones para la adquisición de recursos adicionales. Cuando el lado derecho de la restricción representa la cantidad de un recurso disponible, el precio dual asociado comúnmente se interpreta como la cantidad máxima que uno debería estar dispuesto a pagar por una unidad adicional del recurso, pero hacerlo no siempre es lo correcto. Para ver la razón, necesitamos entender la diferencia entre costos sumergidos y costos relevantes.

1. Un costo sumergido es aquel que no se ve afectado por la decisión que se tome, se incurrirá en él sin importar qué valores asuman las variables de decisión.[3]
2. Un costo relevante es aquel que depende de la decisión que se elija, la cantidad de un costo relevante variará dependiendo de los valores de la variable de decisión.[3]

Reconsideremos el problema basado en la alimentación del caballo lusitano. La cantidad necesaria de sorgo es de 9 kg. Esta materia prima tiene un costo sumergido si debe pagarse sin importar la cantidad de kilogramos de sorgo contenidos en los costales X y Y que realmente se requieren para alimentar al caballo durante tres meses. Sería un costo relevante si el granjero sólo tuviera que pagar por la cantidad de costales X y Y necesarios para alimentar a su caballo con la cantidad de sorgo durante tres meses. Todos los costos relevantes deberían incluirse en la función objetivo de programación lineal; los costos sumergidos no deberían incluirse en esa función. Para la alimentación del caballo hemos supuesto que el granjero ya había pagado por el maíz, el trigo y el sorgo; por consiguiente, el costo por las materias primas para el granjero es un costo sumergido y no se ha incluido en la función objetivo.

Cuando el costo de un recurso es sumergido, el precio dual puede interpretarse como la cantidad máxima que la organización debería estar dispuesta a pagar por una cantidad adicional del recurso. Cuando su costo es relevante, el precio dual puede interpretarse como la cantidad por la cual el valor del recurso excede a su costo; por tanto, cuando el costo del recurso es relevante, el precio dual puede interpretarse como la prima máxima sobre el costo normal que la compañía debería estar dispuesta a pagar por una unidad del recurso.[3]

3 Información obtenida de: David R. Anderson, Dennis J. Sweeney y Thomas A. Williams. *Métodos Cuantitativos para los Negocios*. 9a. ed., Editorial Thomson, pág. 298.

RESUMEN

El análisis de sensibilidad se aplica después de que un modelo de programación lineal está resuelto. De manera más específica, el análisis de sensibilidad muestra:

1. Cómo uno o dos cambios simultáneos en los coeficientes de la función objetivo pueden afectar o no la solución óptima; es decir, cambios en el primer miembro de la restricción (lado izquierdo).
2. Cómo uno o dos cambios simultáneos del lado derecho de las restricciones pueden o no afectar a la solución óptima; es decir, cambios en el segundo miembro de la restricción (lado derecho).

Para el inciso a):

Se demostró gráficamente, por medio del análisis de sensibilidad, que existen rangos en los coeficientes de la función objetivo que nos permiten evaluar el límite superior e inferior en los cuales operan los coeficientes de la función objetivo, sin cambiar las coordenadas del punto de optimización encontrado; es decir, sin afectar un solo cambio en uno de los valores óptimos de la variables de decisión. Esto se logró por medio de un análisis aplicado en la información contenida en las columnas designadas como disminución permisible y aumento permisible.

Para el inciso b):

Se demostró que analizando tanto los límites inferiores y superiores, como la disminución permisible y el aumento permisible en el cual actúan los precios duales, es posible realizar uno o dos cambios simultáneos en los valores del lado derecho que conforman las restricciones activas sin afectar la solución óptima.

EVALUACIÓN

Realice el análisis de sensibilidad a los dos siguientes problemas, en el contexto del método gráfico:

Problema 1. *Capítulo* 5
Una empresa química denominada L&R fabrica dos aditivos que permiten la elaboración de dos detergentes. Uno es utilizado especialmente para la limpieza de artículos de vestuario y el otro para el lavado de utensilios de cocina. Para producir los dos aditivos se requiere mezclar tres materiales químicos, tal como se indica en la Tabla X:

Tabla X

MATERIALES	ADITIVO PARA LIMPIEZA DE VESTUARIOS	ADITIVO PARA LIMPIEZA DE UTENSILIOS DE COCINA
Material A	.2	.65
Material B	No contiene material B	.15
Material C	.4	.3

Para llevar a cabo la producción, se dispone de 14 toneladas del material A, 3 del material B y 12 del material C. El gerente analizó las cifras de producción y determinó una utilidad de €37 por cada tonelada que se produzca a base de aditivo utilizado como detergente para limpieza de artículos de vestuario, y €48 por cada tonelada producida de base de aditivo utilizado como detergente para limpieza de utensilios. Encuentre los datos necesarios para llenar la Tabla Y.

Tabla Y

VARIABLE	LÍMITE INFERIOR	COEFICIENTES FUNCIÓN OBJETIVO	DISMINUCIÓN PERMISIBLE	AUMENTO PERMISIBLE
X	—	—	—	—
Y	—	—	—	—

Problema 2. *Capítulo* 5
Se ofrece a los estudiantes de Administración un curso de álgebra matricial que se imparte en 12 horas clase y otro de programación lineal (PL) que se imparte en 20 horas clase. El departamento de matemáticas solicitó que el curso de álgebra matricial se divida en 5 o más temas, y el curso de PL se divida en 8 o más temas. En el verano se dispone de no más de 400 horas clases. Los cursos son impartidos por dos asesores, el que imparte los temas relacionados con el álgebra matricial cobra $2400 y el que imparte los temas de PL cobra $7650. Para que se lleven a cabo estos dos cursos se deben inscribir más de 21 alumnos. Encuentre los datos necesarios para llenar la Tabla Z.

Tabla Z

VARIABLE	LÍMITE INFERIOR	COEFICIENTES FUNCIÓN OBJETIVO	DISMINUCIÓN PERMISIBLE	AUMENTO PERMISIBLE
X	—	—	—	—
Y	—	—	—	—

▶ PL EN ACCIÓN (Evaluación de la eficiencia en Performance Analysis Corporation)

Performance Analysis Corporation se especializa en el uso de la ciencia administrativa para diseñar operaciones más eficientes y eficaces para una amplia variedad de tiendas en cadena. Una de sus aplicaciones usa metodología de programación lineal para proporcionar un modelo de evaluación para una cadena de restaurantes de comida rápida.

De acuerdo con el concepto de optimalidad de Pareto, un restaurante en una cadena dada es relativamente ineficiente si otros restaurantes de la misma cadena exhiben las siguientes características:

1. Operan en el mismo ambiente o peor.
2. Producen al menos el mismo nivel en todas las salidas.
3. Utilizan más uno de los recursos y menos uno de los otros.

Para detectar los restaurantes ineficientes Performance Analysis Corporation elaboró y resolvió un modelo de programación lineal. Las restricciones del modelo implican requerimientos concernientes a los niveles mínimos aceptables de salida y condiciones impuestas por elementos incontrolables en el ambiente, y por la función objetivo, que exige la minimización de los recursos necesarios para producir la salida. Resolver el modelo produce la salida para cada restaurante:

1. Una puntuación que evalúa el nivel de la llamada eficiencia técnica relativa lograda por el restaurante particular durante el periodo en cuestión.
2. La reducción en recursos controlables o el aumento de salidas durante el periodo en cuestión necesario para que un restaurante ineficiente sea calificado como eficiente.
3. Un grupo de colegas de otros restaurantes con los cuales pueda compararse cada restaurante en el futuro.

El análisis de sensibilidad proporciona información gerencial importante. Por ejemplo, para cada restricción concerniente a un nivel de salida aceptable mínimo, el precio dual indica al gerente cuánto aumentaría la medida de eficiencia una unidad más de salida.

Típicamente, el análisis identifica de 40% a 50% de los restaurantes con subdesempeño, dadas las condiciones planeadas con anterioridad concernientes a las entradas disponibles y las salidas productivas. Performance Analysis Corporation encuentra que si se eliminan simultáneamente todas las ineficiencias relativas identificadas, las ganancias corporativas generalmente aumentan de 5% a 10%. Este aumento es considerable dada la gran escala de las operaciones implicadas.

1 PL EN ACCIÓN fue obtenido de: David R. Anderson, Dennis J. Sweeney y Thomas A. Williams. *Métodos Cuantitativos para los Negocios*. 9a ed., Editorial Thomson, pág. 294. Información basada a su vez en Richard C. Morey de Performance Analysis Corporation.

GLOSARIO

Análisis de sensibilidad.—Término utilizado para estudiar y saber cómo afectan los cambios en los coeficientes de un problema de programación lineal en la solución óptima. Básicamente analiza los cambios en el coeficiente de una variable básica y los cambios en el valor independiente de una restricción.

Regla del 100%.—Regla que indica en qué casos los cambios simultáneos en dos o más coeficientes de la función objetivo no causarán un cambio en los valores óptimos para las variables de decisión. También puede aplicarse para indicar cuándo dos o más modificaciones en el lado derecho de las restricciones no causarán un cambio en cualquiera de los precios duales.

Precio dual y precio sombra.—Se entiende como precio dual al mejoramiento en el valor de la solución óptima por unidad de aumento en el valor independiente del lado derecho de una restricción. El precio dual y sombra son lo mismo para todos los problemas de maximización; sin embargo, en un problema de minimización, el precio sombra es el negativo del precio dual correspondiente. El precio dual y sombra proporcionan información económica que ayuda a tomar decisiones para la administración de recursos adicionales.

Costo sumergido.—Costo que no se afecta por la decisión tomada. Se incurrirá en él sin importar qué valores asuman las variables de decisión.

Costo relevante.—Costo que depende de la decisión que se tome. El monto que alcance un costo relevante dependerá de los valores de las variables de decisión.

Costo reducido.—Cantidad por la cual un coeficiente de la función.—objetivo tendría que mejorar (aumento para un problema de maximización, disminución para un problema de minimización) antes de que sea posible que la variable correspondiente tome un valor positivo en la solución óptima.

CAPÍTULO 6

MÉTODO SÍMPLEX Y SUS DERIVADOS

▷ 6.1 INTRODUCCIÓN

Se explicará la esencia gráfica y algebraica del método símplex, se describirá sistemáticamente su algoritmo, descubierto por George B. Dantzig en 1947, y se enseñarán los dos métodos especiales derivados del mismo método:

1. Método símplex de la M.
2. Método de las dos fases.

▷ 6.2 ESENCIA GRÁFICA Y ALGEBRAICA DEL MÉTODO SÍMPLEX

Los conceptos de álgebra matricial y de geometría analítica son la médula espinal que constituye el método símplex. El entendimiento de estos conceptos nos proporciona un conocimiento sólido e intuitivo sobre el funcionamiento del método símplex y su eficiencia; por lo tanto, antes de aprender este algoritmo es necesario estudiarlo y comprenderlo desde sus orígenes.

Retomemos el mismo problema formulado en el capítulo 3, pág. 47, basado en la elaboración de dos tipos de sofás.

El problema fue resuelto por medio del método gráfico (capítulo 4, pág. 56) de la siguiente manera: (Véase la Figura 6.1)

Maximizar: $Z = 10X + 25Y$

Sujeto a: $X + 2Y \leq 80$ Departamento de corte
$3/4X + 1/2Y \leq 20$ Departamento de armado
$X \leq 50$ Departamento de tapicería
$Y \leq 10$ Departamento de cubiertas

Donde: $X, Y \geq 0$

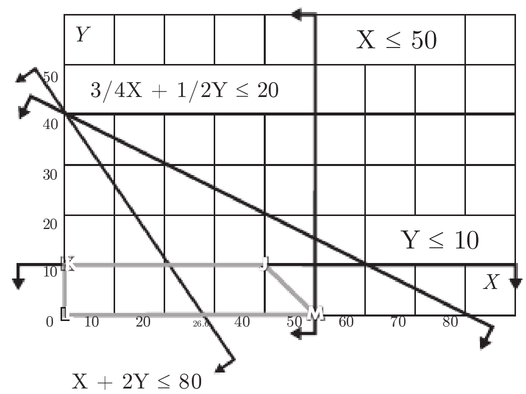


Figura 6.1

Recordemos que las restricciones $X \leq 50$ y $X + 2Y \leq 80$ son redundantes; es decir, no se requieren para solucionar el problema. Observe que en la Figura 6.1, las restricciones formuladas para los departamentos de corte y de tapicería se encuentran fuera de la región factible; por lo tanto, podemos reformular el problema de la siguiente manera antes de solucionarlo geométrica-algebraicamente:

Maximizar: $Z = 10X + 25Y$

Sujeto a: $3/4X + 1/2Y \leq 20$ Departamento de armado
$Y \leq 10$ Departamento de cubiertas

Donde: $X, Y \geq 0$

El primer paso consiste en formular el problema en su forma estándar, para esto es necesario convertir las dos desigualdades en ecuaciones, para lograrlo es necesario añadir una variable de holgura a cada desigualdad. La variable de holgura es utilizada para absorber el tiempo que no se usa en un departamento.

Sea: H_1 = tiempo no usado en el departamento de armado
H_2 = tiempo no usado en el departamento de cubiertas

Expresamos el problema en su forma estándar:

$$\text{Maximizar: } Z = 10X + 25Y + €0H_1 + €0H_2$$

$$\begin{array}{lllll} \text{Sujeto a:} & 3/4X + 1/2Y + & H_1 & & = 20 \text{ Departamento de armado} \\ & \quad\quad Y & + & H_2 & = 10 \text{ Departamento de cubiertas} \end{array}$$

$$\text{Donde: } X, Y \geq 0$$

La variable de holgura H_1 es igual a la cantidad total de tiempo disponible en el departamento de armado; es decir, 20 horas menos el número de horas empleadas en el procesamiento de fabricación de sofás tipo A y B; de manera similar, la variable de holgura H_2 es igual a la cantidad total de tiempo disponible en el departamento de cubiertas; es decir, 10 horas menos el número de horas empleadas en el procesamiento de producción de sofás tipo B. Las desigualdades originales para los dos departamentos pueden expresarse escribiendo ecuaciones para las variables de holgura, como sigue:

$$\begin{array}{ll} H_1 = 20 - 3/4X - 1/2Y & \text{Ecuación 1} \\ H_2 = 10 - Y & \text{Ecuación 2} \end{array}$$

El valor de estas ecuaciones muestra la relación entre las variables de la primera solución H_1 y H_2 tiempo no usado y las demás variables, por eso se les llaman ecuaciones de relación. La solución es la siguiente:

$$\begin{array}{ll} X = 0 \text{ sofás tipo A} & \\ Y = 0 \text{ sofás tipo B} & \\ H_1 = 20 - 3/4\ (0) - 1/2\ (0) & = 20 \text{ horas no usadas en el departamento de armado} \\ H_2 = 10 - 1(0) & = 10 \text{ horas no usadas en el departamento de cubiertas} \end{array}$$

Como las variables de holgura H_1 y H_2 no tienen valor, porque no hay ganancia o pérdida que se aplique al tiempo ocioso de un departamento, la función objetivo puede escribirse de modo que las incluya con contribuciones de cero ganancias:

$$\text{Contribución} = €10X + €25Y + €0H_1 + €0H_2$$

Aún estamos en la solución inicial, es decir, en el origen de la fase 1, como se muestra en el vértice L de la Figura 6.2:

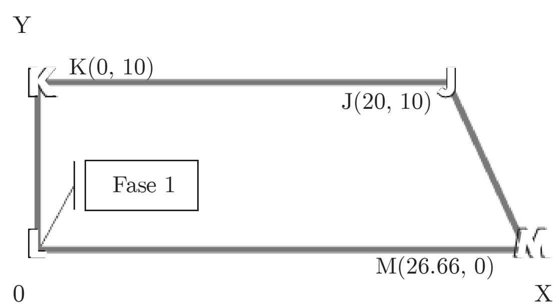


Figura 6.2

El vértice L(0, 0) refleja tan sólo la capacidad en tiempo no usado. Sustituyendo las capacidades de X, Y, H_1 y H_2 en la ecuación de contribución, obtenemos:

$$\text{Contribución} = €10(0) + €25(0) + €0(20) + €0(10) = €0$$

La solución inicial es geométrica-algebraicamente posible, aunque no es atractiva para la empresa desde el punto de vista económico. Pero, ¿es posible mejorar la primera solución? Para responder a esta pregunta, es necesario examinar los coeficientes de las variables de decisión de la función objetivo ($Z = 10X + 25Y$) y observar que la mayor contribución es generada por el coeficiente del sofá tipo B, es decir, €25 por unidad de sofá tipo B.

También lo podemos determinar y explicarlo del modo siguiente:

De la función objetivo ($Z = 10X + 25Y$) tenemos:
¿Si aumenta X? La tasa de mejoramiento es $Z = 10$.
¿Si aumenta Y? La tasa de mejoramiento es $Z = 25$.

Como $25 > 10$, entonces se elige la variable entrante Y para aumentar su valor, por lo tanto, Y es la variable básica entrante para la iteración 1.

Una vez afirmando que la producción de sofás tipo B genera una mayor contribución, debemos saber cuánto aumentará el valor de la variable básica entrante Y antes de detenerse. Proseguimos de la forma siguiente:

Considerando el valor $X = 0$ y despejando las holguras H_1 y H_2 de las restricciones asociadas a los departamentos de armado y cubiertas:

Si X=0 tenemos: $3/4X + 1/2Y + H_1 = 20 \quad H_1 = 20 - 1/2Y$ Departamento de armado
$Y + H_2 = 10 \quad H_2 = 10 - Y$ Departamento de cubiertas

Las variables no básicas (incluyendo la variable entrante) son no negativas, pero es necesario verificar cuánto puede crecer Y sin violar las restricciones de no negatividad ($X \geq 0$ y $Y \geq 0$) para las variables básicas:

$H_1 = 20 - 1/2Y \geq 0 \Rightarrow Y \leq 20\ 1/2 = 40$
$H_2 = 10 - \quad Y \geq 0 \Rightarrow Y \leq 10/ = 10 \leftarrow$ mínimo

En este caso, la variable Y puede crecer hasta 10, punto en el que H_2 disminuye a 0. Aumentar Y a más de 10 causaría que Y se volviera negativa, lo que viola la región factible. Estos cálculos reciben el nombre de *prueba del cociente mínimo.*

En cualquier iteración algebraica del método símplex se utiliza la prueba del cociente mínimo para determinar qué variable básica llega primero a cero cuando aumenta el valor de la variable básica entrante. Al disminuir hasta cero el valor de la variable básica, se convierte en variable no básica para la siguiente solución. Esta variable se llama no básica que sale para la iteración actual (ya que sale de la base). De esta manera, H_2 es la variable no básica que sale en la iteración 1.

Para encontrar los valores de H_1 y H_2 podemos razonar de la siguiente forma. Analizando la Tabla 1, nos damos cuenta de que el tiempo requerido para producir un sofá tipo B en el departamento de armado es de 1/2 hora (tenemos 20 horas disponibles); por lo tanto, la cantidad de unidades de sofá tipo B que se pueden fabricar es de 40 unidades. De manera similar, el tiempo disponible para fabricar un sofá tipo B en el departamento de cubiertas es de una hora (contamos con 10 horas); entonces, el número de sofás tipo B que se puede elaborar es de 10 unidades.

Departamento de armado: $\dfrac{\text{120 horas disponibles}}{\text{1/2 hora por unidades de sofá B}}$ = 40 unidades de sofás tipo B

Departamento de cubiertas: $\dfrac{\text{10 horas disponibles}}{\text{Una hora por unidad de sofá B}}$ =10 unidades de sofás tipo B

De lo anterior deducimos que el departamento de cubiertas es nuestro límite, porque delimita la producción en 10 unidades. Quisiéramos fabricar 40 unidades de sofás tipo B, pero el departamento de cubiertas no lo permite. Luego, se sustituyen los valores X = 0 y Y = 10 en las ecuaciones de holgura $H_1 = 20 - 3/4\ X - 1/2\ Y$ y $H_2 = 10 - Y$ para obtener el tiempo no usado en los dos departamentos:

X = 0 sofás tipo A
Y = 0 sofás tipo B
$H_1 = 20 - 3/4\ (0) - 1/2\ (10)$ = 15 horas disponibles en el departamento de armado
$H_2 = 10 - 1(10)$ = 0 horas disponibles en el departamento de cubiertas

Una vez obtenidos los valores de H_1 y H_2 calculemos la contribución total para la nueva solución básica factible. Contribución €10 (0) + €25 (10) + €0(15) + €0(0) = €250
Se obtuvo una ganancia de €250. Gráficamente estamos en el vértice K de la Figura 6.3:

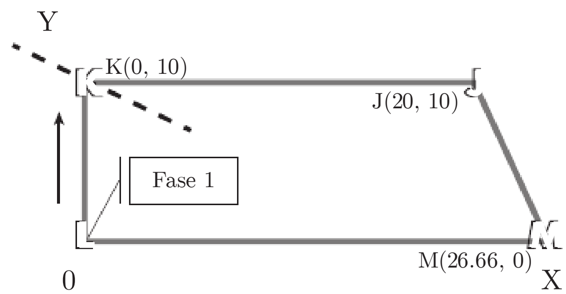


Figura 6.3

Una vez calculada la contribución total en la primera iteración, habrá que hacer varios cambios. Como se fabrican 10 sofás tipo B, el tiempo no usado del departamento de cubiertas es ahora cero. Las ecuaciones 1 y 2 deben cambiarse para que reflejen ese hecho. Primero, es necesario encontrar la solución para el sofá tipo B, o cambiar la ecuación 2. Se usa esa ecuación porque el tiempo sobrante del departamento de cubiertas es cero; por lo tanto, la variable de decisión Y sustituye a la holgura H_2 en la ecuación 2. Utilicemos el método de Gauss-Jordan que se explicó en el capítulo 2 para resolver el sistema original en la primera iteración:

Maximizar: $Z - 10X - 25Y = 0$
Sujeto a: Ecuación 1 $3/4X + 1/2Y + H_1 = 20$ Departamento de armado
Ecuación 2 $Y + H_2 = 10$ Departamento de cubiertas
Donde: $X, Y \geq 0$

	Z	X	Y	H_1	H_2		
Contribución total	1	-10	-25	0	0	0	R_a
Departamento armado	0	3/4	1/2	1	0	20	R_b
Departamento de cubiertas	0	0	1	0	1	10	R_c

Restemos al renglón R_b el renglón R_c multiplicado por 1/2, con la finalidad de hacer al valor numérico 1/2 igual a 0. Fórmula: $R_b - R_c\,(1/2)$.

	Z	X	Y	H_1	H_2		
Contribución total	1	-10	-25	0	0	0	R_a
Departamento armado	0	3/4	1/2	1	-1/2	15	R_b
Departamento de cubiertas	0	0	1	0	1	10	R_c

Sumemos al renglón R_a el renglón R_c multiplicado por 25, con la finalidad de hacer al valor numérico −25 igual a 0. Fórmula: $R_a + R_c\,(25)$.

	Z	X	Y	H_1	H_2		
Contribución total	1	-10	0	0	25	250	R_a
Departamento armado	0	3/4	0	1	-1/2	15	R_b
Departamento de cubiertas	0	0	1	0	1	10	R_c

Así tenemos:

Maximizar: $Z - 10X + 25\,H2 = 250$

Sujeto a: Ecuación 3 $\quad 3/4X + H_1 - 1/2H_2 = 15$ Departamento de armado

Ecuación 4 $\quad Y + H_2 = 10$ Departamento de cubiertas

Donde: $X, Y \geq 0$

Observe las ecuaciones 3 y 4. Las cantidades de nuestra segunda solución aparecen a la derecha del signo =; dicho de otro modo, al departamentos de armado le hemos restado la fabricación de 5 sofás tipo B.

Por último, despejemos la función objetivo anterior ($Z - 10X + 25H_2 = 250$) y analicémosla.

$Z = 250 + 10X - 25H_2$. Esta expresión matemática indica que se pueden obtener €250 más €10 por cada sofá tipo A que se elabore. Los − €25 H_2 significan que si tomamos una hora del departamento de cubiertas para producir otro sofá nos costará €25.

¿Es posible mejorar esta solución? Segunda Iteración:

Para responder a esta pregunta es necesario nuevamente examinar los coeficientes de las variables de decisión en la función objetivo en la primera iteración ($Z = 250 + 10X - 25\,H_2$), y darse cuenta de que la mayor contribución es generada por el coeficiente de la variable de decisión X, es decir, €10 por cada unidad de sofá tipo A. El valor numérico − 25 no se toma en consideración, debido a que el propósito es maximizar la función objetivo (Z) y no disminuir la contribución total.

Una vez afirmando que la mayor contribución la genera la producción de sofás tipo A, debemos saber cuánto aumentará el valor de la variable básica entrante X antes de detenerse.

$H_2 = 0$ tenemos: $3/4X + H_1 - 1/2H_2 = 15 \rightarrow H_1 = 15 - 3/4X$
$Y + H_2 = 10 \rightarrow$ Como no existe H_1, y H_2 es igual a cero, no se tome en consideración

La variable básica entrante (X) exige la producción de sofás tipo A. Ahora verifiquemos cuánto puede crecer X sin violar las restricciones de no negatividad ($X \geq 0$ y $Y \geq 0$) para la variable básica: $H1 = 15 - 3/4X = 0 \rightarrow H_1 = -15/3/4 = 20 \leftarrow$ mínimo.

Concluimos que la variable X puede crecer hasta 20, punto en el que H_1 ha llegado a 0, aumentar X a más de 20 causaría que X se volviera negativa, lo que viola la región factible. Recordemos nuevamente que estos cálculos reciben el nombre de *prueba del cociente mínimo*, los cuales son utilizados en cualquier iteración algebraica del método símplex para determinar qué variable básica llega primero a cero cuando aumenta el valor de la variable básica entrante.

Al disminuir hasta cero el valor de esta variable básica, se convierte en *variable no básica para la siguiente solución*; por lo tanto, esta variable se llama variable no básica que sale para la iteración actual (ya que está saliendo de la base). De esta manera, H_1 es la variable no básica que sale para la iteración 2.

Encontremos los valores de H_1 y H_2 analizando la Tabla 2. El tiempo requerido para producir un sofá tipo A en el departamento de armado es de 3/4 hora y tenemos 15 horas disponibles; por lo tanto, la cantidad de unidades de sofá tipo A que se pueden fabricar es de 20 unidades.

Departamento de armado: $\dfrac{\text{15 horas disponibles}}{\text{3/4 hora por unidades de sofá A}} = \text{20 unidades de sofás tipo A}$

El departamento de armado es nuestro límite, porque delimita la producción a 20 unidades. Ahora se sustituyen los valores $X = 20$ y $Y = 10$ en las ecuaciones 5 y 6:

Ecuación 5: $3/4X + H_1 = 15$, despejamos $H_1 = 15 - 3/4X$
Ecuación 6: $Y + H_2 = 10$, despejamos $H_2 = 10 - Y$

Para obtener el tiempo no usado en los dos departamentos se prosigue de la siguiente forma:

$X = 0$ sofás tipo A
$Y = 0$ sofás tipo B
$H_1 = 15 - 3/4(20) = 15 - 15 = 0$ No hay horas disponibles en el departamento de armado
$H_2 = 10 - 1(10) = 10 - 10 = 0$ No hay horas disponibles en el departamento de cubiertas

Maximizar: $Z - 10X + 25H_2 = 250$

Sujeto: Ecuación 3 $3/4X + H_1 - 3/4H_2 = 15$ Departamento de armado
Ecuación 4 $Y + H_2 = 10$ Departamento de cubiertas

Ahora calculemos la contribución total para la nueva solución factible. Despejemos la función objetivo: $Z - 10X + 25H_2 = 250$ a $Z = 250 + 10X - 25H_2$, y sustituyamos las variables de decisión obtenidas en la contribución total. Es decir:

Z = €250 + €10(20) − €25(0) = €450 Esquemáticamente, estamos en el vértice J de la Figura 6.4:

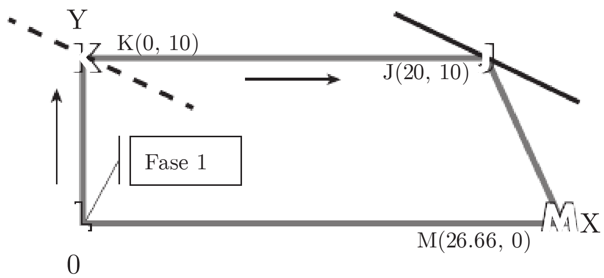


Figura 6.4

Hemos llegado a la solución óptima, pues no hay tiempo disponible en los departamentos de armado y cubiertas para elaborar más sofás. La cantidad máxima de producción es de 10 sofás del tipo B y de 20 sofás del tipo A. Las ecuaciones 3 y 4 deben cambiarse para que reflejen ese hecho. Primero es necesario encontrar la solución para el sofá tipo A o cambiar la ecuación 3. Se usa esa ecuación porque el tiempo sobrante del departamento de armado es cero; por lo tanto, la variable de decisión X sustituye a la holgura H_1 en la ecuación 3.

Nuevamente utilizamos el método de Gauss-Jordan:

Maximizar: $Z - 10X + 25H_2 = 250$

Sujeto a:

Ecuación 3 $\quad 3/4X + H_1 - 1/2H_2 = 15$ Departamento de armado

Ecuación 4 $\quad Y + H_2 = 10$ Departamento de cubiertas

	Z	X	Y	H_1	H_2		
Contribución total	1	-10	0	0	25	250	R_a
Departamento armado	0	3/4	0	1	-1/2	5	R_b
Departamento de cubiertas	0	0	1	0	1	10	R_c

Multipliquemos el Rb por 4/3 con la finalidad de convertir al valor numérico 3/4 igual a 1.
Fórmula: R_b (4/3).

	Z	X	Y	H_1	H_2		
Contribución total	1	-10	-0	0	25	250	R_a
Departamento armado	0	1	0	4/3	-2/3	20	R_b
Departamento de cubiertas	0	0	1	0	1	10	R_c

Sumemos el renglón Ra al renglón R_b multiplicado por 10, con la finalidad de hacer al valor numérico -10 igual a 0.
Fórmula: $R_a + R_b(10)$.

	Z	X	Y	H_1	H_2		
Contribución total	1	0	0	$13\frac{1}{3}$	$18\frac{1}{3}$	450	R_a
Departamento armado	0	1	0	4/3	-2/3	20	R_b
Departamento de cubiertas	0	0	1	0	1	10	R_c

Así tenemos:

$$\text{Maximizar:} \quad Z + 13\ 1/3\ H_1 + 18\ 1/3 H_2 = 450$$

$$\begin{array}{lllll} \text{Sujeto a:} & \text{Ecuación 5} & X & +4/3H_1 - 2/3H_2 = 20 & \text{Departamento de armado} \\ & \text{Ecuación 6} & Y & + \quad H_2 = 10 & \text{Departamento de cubiertas} \end{array}$$

$$\text{Donde: } X, Y \geq 0$$

Nótese lo que ha ocurrido a las ecuaciones 5 y 6. Las cantidades de nuestra tercera solución aparecen a la derecha del signo igual; dicho de otro modo, a todo el tiempo disponible en los departamentos de armado le hemos restado la fabricación de 20 sofás tipo A.

Por último, despejemos la función objetivo$\left(Z + 13\frac{1}{3}H_1 + 18\frac{1}{3}H_2 = 450\right)$ y analicémosla. $Z = 450 - 13\frac{1}{3}H_1 - 18\frac{1}{3}H_2$. Los coeficientes negativos de las variables H_1 y H_2 indican que si tratamos de incrementar estos valores$\left(-13\frac{1}{3}H_1\ y - 18\frac{1}{3}H_2\right)$ las ganancias disminuirán. El valor 450 indica la máxima utilidad obtenida (€450).

La función objetivo se trasladó adyacentemente desde el vértice L hasta el vértice J, originando una producción final de 20 sofás de tipo A y 10 sofás tipo B.

Hay que hacer una última comprobación para cerciorarse de que no se han violado las restricciones del problema. Las ecuaciones originales dadas al principio de esta sección, son las siguientes:

$$\text{Maximizar:} \quad Z = 10X + 25Y$$

$$\begin{array}{llll} \text{Sujeto a:} & X + 2Y & \leq 80 & \text{Departamento de corte} \\ & 3/4X + 1/2Y & \leq 20 & \text{Departamento de armado} \\ & X & \leq 50 & \text{Departamento de tapicería} \\ & Y & \leq 10 & \text{Departamento de cubiertas} \end{array}$$

$$\text{Donde: } X, Y \geq 0$$

Sustituyendo los valores máximos que pueden adquirir las variables X y Y en las restricciones anteriores, si X = 20 y Y = 10 tenemos:

$$\begin{array}{rl} X + 2Y \leq 80 & \text{Departamento de corte} \\ 20 + 2(10) \leq 80 & \\ 40 \leq 80 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 3/4X + 1/2Y \leq 20 & \text{Departamento de armado} \\ 3/4\ (20) + 1/2\ (10) \leq 20 & \\ 15 + 5 \leq 20 & \\ 20 \leq 20 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} X \leq 50 & \text{Departamento de tapicería} \\ 20 \leq 50 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} Y \leq 10 & \text{Departamento de cubiertas} \\ 10 \leq 10 & \end{array}$$

▷ 6.3 ALGORITMO DEL MÉTODO SÍMPLEX

El método símplex es un algoritmo iterativo que permite solucionar problemas de programación lineal; es decir, es un procedimiento de solución sistematizado que requiere de una serie de pasos repetitivos que optimizan [maximizar (ganancias) o minimizar (costos o tiempo)] un objetivo deseado, el cual se encuentra condicionado a restricciones.

Retomemos el problema formulado en el capítulo 3, pág. 47 y solucionado gráficamente en el capítulo 4, pág. 56, basado en la elaboración de dos tipos de sofás.

Resolvamos el problema utilizando ahora el algoritmo del método símplex.

Primero, es necesario que el problema se encuentre formulado y expresado en su forma estándar de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar: } Z = 10X + 25Y + €0H_1 + €0H_2$$

$$\text{Sujeto a: } 3/4X + 1/2Y + H_1 = 20 \text{ Departamento de armado}$$

$$Y + H_2 = 10 \text{ Departamento de cubiertas}$$

$$\text{Donde: } X, Y, H_1, H_2 \geq 0$$

Luego, la información es simplificada por medio de la utilización de una tabla denominada símplex I. (Véase la Tabla 6.1)

Tabla 6.1 Símplex I

C_j	Mezcla de productos	€10	€25	€0	€0	Cantidad en horas	Contribución por unidades de variables
		X (SOFÁ A)	Y (SOFÁ B)	H_1	H_2		
€0	H_1	3/4	1/2	1	0	20	
€0	H_2	0	1	0	1	10	
Coeficientes básicos	Variables básicas	Matriz de cuerpo		Matriz unidad			
	Z_j	€0	€0	€0	€0	€0	Contribución de pérdida por unidad
	$C_j - Z_j$	€10	€25	€0	€0		Contribución neta por unidad

Expliquemos la información contenida en la Tabla 6.1 símplex I.

1. La columna denominada coeficientes básicos (C_j) contiene la contribución por unidad para las variables de holgura H_1 y H_2. Adquieren al principio valores de cero debido a que no hay producción de sofás; en consecuencia, no se generan ganancias, tan sólo tiempo no usado.
2. La columna denominada variables básicas (mezcla de productos) contiene las variables de la solución que se usan para determinar la contribución total. En la solución inicial no se elaboran productos. Las holguras H_1 y H_2 representan todo el tiempo no usado en cada departamento, es decir, lo que se encuentra en la séptima columna (cantidad de horas). La solución inicial será una contribución de cero, porque no se están elaborando sofás tipo A y B, por lo tanto se representa \$0(\$0 x 20 + \$0 x 10) en el renglón de Z_j de la séptima columna.
3. La matriz de cuerpo representa los tiempos que se requieren para elaborar los sofás. Por ejemplo, para elaborar un sofá tipo A; se requieren 3/4 de hora en el departamento de armado y nada de tiempo en el departamento de cubiertas; de manera similar, para producir un sofá tipo B; se necesita de 1/2 hora en el departamento de armado y una hora en el departamento de cubiertas. En realidad, lo que tenemos en los coeficientes de la matriz de cuerpo es la tasa de sustitución.
4. La matriz unidad representa los coeficientes de las variables de holgura que se han añadido a las desigualdades originales para convertirlas en ecuaciones. Cualquier incógnita que aparezca en una ecuación debe hacerlo en todas las demás, aunque

con coeficiente cero, para no afectarla. Por ejemplo, el coeficiente 1 ubicado en la columna H_1 del primer renglón indica que para que quede disponible una hora de H_1, sería necesario prescindir de 20 horas. El cero ubicado en la columna H_2 del primer renglón indica que si queda una hora disponible en el departamento de cubiertas para otros fines, no tiene ningún efecto en H_1 (tiempo sobrante para armar los sofás). El mismo razonamiento se aplica al renglón H_2. Esencialmente, estamos analizando la tasa de sustitución; es decir, la adición sofás tipo A y B a la solución, y la retirada del tiempo sobrante en los departamentos de armado y cubiertas (H_1 y H_2).

5. Los dos últimos renglones [Zj y (Cj − Zj)] se usan para determinar si se puede mejorar la solución.

a) El valor del renglón Z_j debajo de la séptima columna (cantidad de horas), indica una solución inicial de contribución cero para la empresa. Los otros cinco valores de $0, son las cantidades en que se reducirá la contribución, si una unidad de las variables (X, Y, H_1 y H_2) se añade a la mezcla. Otra forma de definir el renglón Z_j para los cinco valores es la contribución por pérdida por unidad. Por ejemplo, si deseamos elaborar un sofá tipo B, los coeficientes 1/2 y 1 de la matriz cuerpo nos indican que debemos prescindir de 1/2 hora de tiempo no usado H_1 (departamento de armado), y 1 hora de tiempo no usado H_2 (departamento de cubiertas). Como al inicio el tiempo sobrante tiene un valor de $0 por hora, no puede haber reducción de la contribución.

b) El último renglón ($C_j - Z_j$) representa la contribución neta por unidad que se puede añadir en la producción de sofás. Como se observa en la Tabla símplex I, si se agrega una unidad de sofá A a la solución, la contribución a la misma es de €10. La contribución es de €15 por cada unidad de sofá B, y cero €0 para H_1 y H_2.

Prosigamos a utilizar el algoritmo del método símplex, el cual requiere de 3 pasos. Los dos primeros se encuentran indicados en la Tabla 6.2 símplex II y el tercero en la en la Tabla 6.3 símplex III:

Tabla 6.2 Símplex II

C_j	Mezcla de productos	€10	€25	€0	€0	Cantidad en horas	Contribución por unidades de variables	
		$X_{(\text{SOFÁ A})}$	$Y_{(\text{SOFÁ B})}$	H_1	H_2			
€0	H_1	3/4	1/2	1	0	20	20/1/2 = 40	
€0	H_2	0	1	0	1	10	10/1 = 10	Pivote
Coeficientes básicos	Variables básicas	Matriz de cuerpo		Matriz unidad				
	Z_j	€0	€0	€0	€0	€0	Contribución de pérdida por unidad	
	$C_j - Z_j$	€10	€25	€0	€0		Contribución neta por unidad	
			Pivote					

Primera iteración:

1. De la Tabla 6.2 símplex II, analizamos la contribución neta por unidad (C_j- Z_j) y escogemos el mayor valor numérico positivo que le permita a la empresa obtener una mayor contribución por unidad de producto. El número buscado es €25, porque representa la mayor contribución por unidad de sofá tipo B. Entonces, la variable que entra a la base es $Y_{(\text{SOFÁ B})}$. *A este primer paso se le conoce como la prueba de optamilidad.*
2. Luego, se dividen las 20 horas totales con las que cuenta el departamento de armado entre la 1/2 hora con las que requiere el mismo departamento para armar el sofá tipo B; asímismo, dividimos las 10 horas totales con las que cuenta el departamento de cubiertas entre la hora que requiere el mismo para realizar la cubierta del sofá tipo B.

   Departamento de armado: $\dfrac{\text{20 horas disponibles}}{\text{1/2 hora por unidades de sofá B}} = \text{40 unidades de sofás tipo B}$

   Departamento de cubiertas: $\dfrac{\text{10 horas disponibles}}{\text{Una hora por unidad de sofá B}} = \text{10 unidades de sofás tipo B}$

   Se elige la cantidad positiva más pequeña, a fin de encontrar la variable no básica de salida (H_2). *A este segundo paso se le conoce como prueba de factibilidad.*
3. Nuestro siguiente y último paso consiste en calcular todos los nuevos valores numéricos correspondientes a la matriz de cuerpo, a la matriz unidad, a la contribución de pérdida por unidad (Z_j) y a la contribución neta por unidad (C_j – Z_j). En la Tabla símplex III se muestran estos valores:

Tabla 6.3 Símplex III

C_j	Mezcla de productos	€10	€25	€0	€0	Cantidad en horas	Contribución por unidades de variables
		$X_{(\text{SOFÁ A})}$	$Y_{(\text{SOFÁ B})}$	H_1	H_2		
€0	H_1	3/4	0	1	-1/2	15	
€25	$Y_{(\text{SOFÁ B})}$	0	1	0	1	10	
Coeficientes básicos	Variables básicas	Matriz de cuerpo		Matriz unidad			
	Z_j	€0	€25	€0	€25	€250	Contribución de pérdida por unidad
	C_j – Z_j	€10	€0	€0	–€25		Contribución neta por unidad

Las operaciones aritméticas se realizan a partir de la Tabla 6.2 Símplex II, desde la primera columna de $X_{(\text{SOFÁ A})}$ hasta la columna de cantidad en horas. Utilizaremos el método Gauss-Jordan del siguiente modo:

Al primer renglón le restamos el segundo, multiplicado por 1/2.

Sustituyendo los datos correspondientes en la fórmula $H_1 - Y_{(\text{SOFÁ})}\left(\dfrac{1}{2}\right)$, obtenemos:

Para $X_{(\text{SOFÁ A})}$: $\dfrac{3}{4} - 0\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$ Para $Y_{(\text{SOFÁ B})}$: $\dfrac{1}{2} - 1\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$

Para $H_1 : 1 - 0\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ Para $H_2 : 0 - 1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

Cantidad en horas: $20 - 10\left(\frac{1}{2}\right) = 15$

Los cálculos correspondientes a la contribución por pérdida por unidad (Z_j), se calculan considerando los datos de la Tabla 6.3 símplex III:

Z_j para $X_{(\text{SOFÁ A})}$: $€0\left(\frac{3}{4}\right) + €25(0) = €0$ Z_j para $Y_{(\text{SOFÁ B})}$: $€0(0) + €25(1) = €25$

Z_j para H_1: $€0(1) + €25(0) = €0$ Z_j para $Y_{(\text{SOFÁ B})}$: $€0(0) + €25(1) = €25$

Z_j (Contribución total): $€0(15) + €25(10) = €250$

La contribución neta por unidad ($C_j - Z_j$), se calculan considerando los datos de la Tabla 6.3 símplex III:

C_j (Contribución por unidad) $- Z_j$ (Contribución de pérdida por unidad)
$C_j - Z_j$ para $X_{(\text{SOFÁ A})}$: $€10 - €0 = €10$ $C_j - Z_j$ para $Y_{(\text{SOFÁ B})}$: $€25 - €25 = €0$
$C_j - Z_j$ para H_1: $€0 - €0 = €0$ $C_j - Z_j$ para H_2: $€0 - €25 = -€25$

Hemos logrado maximizar la contribución total (Z_j) de €0 hasta €250; no obstante, no se ha llegado a la solución óptima, debido a que todos los valores que representan la contribución neta (Cj − Zj) por unidad deben adquirir un valor de cero o negativo. Observe la Tabla 6.3 símplex III y se dará cuenta de que existe un valor positivo de 10. La presencia de €10 en el último renglón de la columna $X_{(\text{SOFÁ A})}$, indica que la empresa aún tiene tiempo disponible en sus departamentos. Continuemos:

Segunda iteración:

Comencemos nuevamente con la Tabla 6.4 símplex III indicando los dos primeros pasos:

Tabla 6.4 Símplex III

C_j	Mezcla de productos	€10	€25	€0	€0	Cantidad en horas	Contribución por unidades de variables	
		$X_{(\text{SOFÁ A})}$	$Y_{(\text{SOFÁ B})}$	H_1	H_2			
€0	H_1	3/4	0	1	-1/2	15	15/3/4 = 20	Pivote
€25	$Y_{(\text{SOFÁ B})}$	0	1	0	1	10	10/0 = No es posible	
Coeficientes básicos	Variables básicas	Matriz de cuerpo		Matriz unidad				
	Z_j	€0	€25	€0	€25	€250	Contribución de pérdida por unidad	
	$C_j - Z_j$	€10	€0	€0	-25€25		Contribución neta por unidad	
		Pivote						

1. De la Tabla 6.4 símplex III, el mayor valor numérico positivo que le permite a la empresa mejorar la contribución por unidad de producto (Cj– Zj) es €10; entonces, la variable básica entrante es $X_{(SOFÁ\ A)}$.

   Recordemos que a este primer paso se le conoce como la prueba de optamilidad.

2. Luego, se dividen las 15 horas totales con las que cuenta el departamento de armado entre los 3/4 de hora que requiere para armar el sofá tipo A.Observe que en el caso del sofá tipo A no se puede realizar el proceso de cubierta, ya que tiene el valor de cero, por lo tanto la división no existe. Entonces la variable no básica de salida es H_1.

   Recordemos que a este segundo paso se le conoce como prueba de factibilidad.

3. Por último, calculamos todos los nuevos valores numéricos correspondientes a la matriz de cuerpo, a la matriz unidad, a la contribución de pérdida por unidad (Z_j) y a la contribución neta por unidad$(C_j - Z_j)$. En la Tabla 6.5 símplex IV se encuentran indicados estos valores:

Tabla 6.5 Símplex IV

C_j	Mezcla de productos	€10	€25	€0	€0	Cantidad productos terminados	Contribución por unidades de variables
		$X_{(SOFÁ\ A)}$	$Y_{(SOFÁ\ B)}$	H_1	H_2		
€10	H_1	1	0	4/3	–2/3	20	
€25	$Y_{(SOFÁ\ B)}$	0	1	0	1	10	
Coeficientes básicos	Variables básicas	Matriz de cuerpo		Matriz unidad			
	Z_j	€10	€25	€13 1/3	€18 1/3	€450	Contribución de pérdida por unidad
	$C_j - Z_j$	€0	€0	–€13 1/3	–€18 1/3		Contribución neta por unidad

Las operaciones aritméticas se realizan a partir de la Tabla 6.4 símplex III, desde la primera columna de $X_{(SOFÁ\ A)}$ hasta la de cantidad. Utilizaremos el método Gauss-Jordan del siguiente modo:

Todo el primer renglón multiplicado por $4/3$. Usando la fórmula $X_{(SOFÁ\ A)}\left(\frac{4}{3}\right)$ obtenemos:

Para $X_{(SOFÁ\ A)}$: $\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\right)=1$ Para $Y_{(SOFÁ\ B)}$: $(0)\left(\frac{4}{3}\right)=0$

Para H_1: $1\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}$ Para $H_2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{2}{3}$

Cantidad en horas: $15\left(\frac{4}{3}\right)= 20$

Los datos asociados a la contribución por pérdida por unidad (Z_j), se calculan basándose en los datos de la Tabla símplex IV:

Z_j para $X_{(\text{SOFÁ A})}$: €10(1) + €25(0) = €10 Para $Y_{(\text{SOFÁ B})}$: €10(0) + €25(1) = €25

Z_j para H_1: €10 $\left(\frac{4}{3}\right)$ + €25(0) = €13$\frac{1}{3}$ Para H_2: €10$\left(-\frac{2}{3}\right)$+€25(1) = €18 $\frac{1}{3}$

Z_j (Contribución total): €10(20) + €25(10) = €450

La contribución neta por unidad ($C_j - Z_j$) se calcula considerando la Tabla símplex IV:

C_j (Contribución por unidad) – Z_j (Contribución de pérdida por unidad)

$C_j - Z_j$ para X $_{(\text{SOFÁ A})}$: €10 – €10 = €0 $C_j - Z_j$ para Y $_{(\text{SOFÁ B})}$: €25–€25 = €0

$C_j - Z_j$ para H_1: H_2: €0 – €18 $\frac{1}{3}$ = – €18 $\frac{1}{3}$ $C_j - Z_j$ para : H_2: €0 – €18 $\frac{1}{3}$ = – €18 $\frac{1}{3}$

Observe que hemos llegado a la solución final en la Tabla 6.5 Símplex IV, debido a que todos los valores que representan la contribución neta ($C_j - Z_j$) por unidad toman el valor de cero o negativo; por consiguiente, hemos logrado maximizar la contribución total (Z_j) de €250 a €450. En conclusión, podemos afirmar que la empresa ya no cuenta con más recursos para seguir aumentando la contribución total.

De la Tabla 6.5 símplex IV, podemos obtener las restricciones (ecuaciones 5 y 6) y la función objetivo que se obtuvieron en el subcapítulo anterior ("esencia gráfica y algebraica del método símplex").

Maximizar: $Z + 13\frac{1}{3}H_1 + 18\frac{1}{3}H_2 = 450$

Sujeto a: $X + \frac{3}{4}H_1 - \frac{2}{3}H_2 = 20$ Departamento de armado

Ecuación $Y + H_2 = 10$ Departamento de cubiertas

Donde: X, Y $\geq$ 0

6.3.1 RECORDATORIO DEL MÉTODO SÍMPLEX

Expliquemos las condiciones (optimalidad y de factibilidad) que permiten seleccionar las variables de entrada y salida para el método símplex y sus derivados.

1. Condición de optimalidad. La variable de entrada para un problema de maximización se obtiene dependiendo de la forma en que tengamos el renglón que representa la contribución neta por unidad. Es decir, de la forma $C_j - Z_j$ o de la forma $Z_j - C_j$. Si elegimos la forma $C_j - Z_j$, entonces la variable no básica que se convertirá en variable básica de entrada será la que contenga el coeficiente más positivo en el renglón de $C_j - Z_j$. Los empates se eligen en forma arbitraria. La solución óptima se obtiene hasta que todos los coeficientes de las variables no básicas en el renglón $C_j - Z_j$ sean negativos o ceros. Sin embargo, si elegimos la forma Zj – Cj, entonces la variable no básica que se convertirá en variable básica de entrada será la que contenga el coeficiente más negativo en el renglón de $Z_j - C_j$. Los empates se eligen en forma arbitraria. La solución óptima se obtiene hasta que todos los coeficientes de las variables no básicas en el renglón $Z_j - C_j$ sean positivos o ceros.

De manera similar, la variable de entrada para un problema de minimización se obtiene dependiendo de la forma en que tengamos el renglón que representa la contribución neta por unidad. Es decir, de la forma $C_j - Z_j$ o de la forma $Z_j - C_j$. Si elegimos la forma $C_j - Z_j$, entonces la variable no básica que se convertirá en variable básica de entrada será la que contenga el coeficiente más negativo en el renglón de Cj-Zj. Los empates se eligen en forma arbitraria. La solución óptima se obtiene hasta que todos los coeficientes de las variables no básicas en el renglón $C_j - Z_j$. sean positivos o ceros. Sin embargo, si elegimos la forma Zj − Cj, entonces la variable no básica que se convertirá en variable básica de entrada será la que contenga el coeficiente más positivo en el renglón de $Z_j - C_j$. Los empates se eligen en forma arbitraria. La solución óptima se obtiene hasta que todos los coeficientes de la variables no básicas en el renglón $Z_j - C_j$ sean negativos o ceros.

2. Condición de factibilidad. En los problemas de maximización y de minimización, la variable de salida siempre es la variable básica asociada con la mínima razón no negativa con denominador estrictamente positivo. Los empates se rompen en forma arbitraria.

▷ 6.4 MÉTODO DE LA M

El método de la M se utiliza cuando se trata de resolver problemas de programación lineal sujetas a restricciones del tipo = y ≥.

Retomemos el problema solucionado gráficamente en el capítulo 4, pág. 65, basado en la elaboración de dos tipos de sofás, el cual había quedado formulado en el capítulo 3, pág. 55, de la siguiente manera:

Maximizar:	$Z = 10X + 25Y$		
Sujeto a:	$X + 2Y$	≤ 80	Departamento de corte
	$3/4X + 1/2Y$	≤ 20	Departamento de armado
	X	≤ 50	Departamento de tapicería
	Y	≤ 10	Departamento de cubiertas

Donde: $X, Y \geq 0$

Supongamos que se modifican dos restricciones de la siguiente manera:

Restricción basada en el departamento de armado ($3/4X + 1/2Y \leq 20$) cambiado por $3/4X + 1/2Y \geq 20$.

Restricción basada en el departamento de cubiertas ($Y \leq 10$) cambiado por $Y = 10$.

De manera tal que el problema queda formulado de la siguiente manera:

	Maximizar:	$Z = 10X + 25Y$		
(1)	Sujeto a:	$X + 2Y$	≤ 80	Departamento de corte
(2)		$3/4X + 1/2Y$	≥ 20	Departamento de armado
(3)		X	≤ 50	Departamento de tapicería
(4)		Y	$= 10$	Departamento de cubiertas

Donde: $X, Y \geq 0$

Ahora bien, si deseamos resolver este problema debemos observar que se poseen dos restricciones del tipo $=$ y $\geq$, lo que no es recomendable solucionar por el método del algoritmo tradicional, sino mediante la aplicación del método de la M, aplicando las siguientes reglas:

1. Observamos que existe una restricción del tipo $=$ en la ecuación 4, por lo que le sumamos una variable artificial. También observamos que existe una restricción del tipo $\geq$ en la inecuación 2 (o restricción 2), por lo que al tratarla como igualdad le restamos una variable de excedente y le sumamos una variable artificial.

2. Si se trata de un problema de maximización, se modifica la función objetivo agregándole una –M por cada variable artificial que se le añada a cada restricción.

El problema queda formulado de la siguiente manera:

Maximizar: $Z = 10X + 25Y - Ma_1 - Ma_2$

Sujeto a:

$$\begin{array}{lllll} X + 2Y + H_1 & & & = 80 & \text{Departamento de corte} \\ 3/4X + 1/2Y & - E_3 + a_1 & & = 20 & \text{Departamento de armado} \\ X & + H_2 & & = 50 & \text{Departamento de tapicería} \\ Y & & + a_2 & = 10 & \text{Departamento de cubiertas} \end{array}$$

Donde: $X, Y, a_1, a_2 \geq 0$

3. Para obtener los valores de Z_j, sumamos los renglones (o restricciones) que contienen las variables artificiales a_1 y a_2 y consecutivamente el resultado lo multiplicamos por –M:

$$\begin{array}{l} \left(\tfrac{3}{4}X + \tfrac{1}{2}Y - E_3 + a_1 = 20\right) \\ \left(Y + a_2 = 10\right) \\ \hline -M\left(\tfrac{3}{4}X + 1\tfrac{1}{2}Y - E_3 + a_1 + a_2 = -30\right) \\ -M\tfrac{3}{4}X - M1\tfrac{1}{2}Y + ME_3 - Ma_1 - Ma_2 = 30M \end{array}$$

Sumamos las dos restricciones que contienen las variables artificiales. Multiplicando por –M obtenemos: Ecuación representada por Z_j

4. Para obtener los valores de $Z_j - C_j$, a la ecuación la Z_j le restamos la función objetivo de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} -M\tfrac{3}{4}X - M1\tfrac{1}{2}Y + ME_3 - Ma_1 - Ma_2 = -30M \\ -\ 10X - 25Y + Ma_1 + Ma_2 = 0 \\ \hline \left(-M\tfrac{3}{4} - 10\right)X + \left(-M1\tfrac{1}{2} - 25\right)Y + ME_3 = -30M \end{array}$$

A la ecuación la Z_j le restamos la función objetivo

Ecuación representada por $Z_j - C_j$

5. Posteriormente, colocamos todos los datos en la Tabla 6.6 símplex I:

Tabla 6.6 Símplex I

Coeficientes básicos [C_j]	Variables básicas	10 $X_{(SOFÁ\ A)}$	25 $Y_{(SOFÁ\ B)}$	0 H_1	0 H_2	0 E_2	-M a_1	-M a_2	Cantidad en horas	Contribución por unidades de variables
0	H_1	1	2	1	0	0	0	0	80	
–M	a_1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	-1	1	0	20	
0	H_2	1	0	0	1	0	0	0	50	
–M	a_2	0	1	0	0	0	0	1	10	
	$Z_j - C_j$	–3/4M–10	–1 1/2M–25	0	0	M	0	0	-30M	

6. *Condición de optimalidad y de factibilidad.*
Del renglón ($Z_j - C_j$) se elige el valor numérico más negativo (–1 1/2M – 25) y se obtiene la variable básica que entra ($Y_{(SOFÁ\ B)}$). Luego, se dividen los valores ubicados en la columna llamada cantidad en horas entre los valores que contiene la columna de la variable básica que entró, y se elige la cantidad positiva más pequeña; de este modo, se obtiene la variable no básica que sale (a_2).
Lo expresado en el índice 6 se encuentra indicado en la Tabla 6.7 símplex II:

Tabla 6.7 Símplex II

Coeficientes básicos [C_j]	Variables básicas	10 $X_{(SOFÁ\ A)}$	25 a_2	0 H_1	0 H_2	0 E_2	-M a_1	-M a_2	Cantidad en horas	Contribución por unidades de variables	
0	H_1	1	2	1	0	0	0	0	80	80/2 = 40	
–M	a_1	3/4	1/2	0	0	-1	1	0	20	20/1/2 = 40	
0	H_2	1	0	0	0	0	0	0	50	No es posible	
25	$Y_{(SOFÁ\ B)}$	0	1	0	1	0	0	1	10	10/1 = 10	Pivote
	$Z_j - C_j$	–3/4M–10	–1 1/2M –25	0	0	M	0	0	-30M		
			Pivote								

7. Aplicamos el método de Gauss-Jordan para obtener los nuevos valores numéricos a lo largo de los renglones: H_1, a_1 y Zj – Cj:

De la Tabla 6.7 Símplex II.
Al renglón 1 le restamos el renglón cuatro multiplicado por 2.
Fórmula aplicada H_1 $Y_{(SOFÁ\ B)}(2)$, sustituyendo obtenemos:

Para $X_{(SOFÁ\ A)}$: 1 – 0(2) = 0 Para a_2: 2 – 1(2) = 0 Para H_1: 1 – 0(2) = 0

Para H_2: – 0 – 0(2) = 0 Para E_3: 0 – 0 (2) = 0 Para a_1: 0 – 0(2) = 0

Para a_2: 0 -1(2) =-2 Cantidad en horas: 80 - 10(2) = 60

Al renglón 2 le restamos el renglón cuatro multiplicado por 1/2.
Fórmula aplicada a_1 $Y_{(SOFÁ\ B)}(1/2)$, sustituyendo obtenemos:

Para $X_{(SOFÁ\ A)}$: $\frac{3}{4} - 0\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ Para a_2: $\frac{1}{2} - 1\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ Para H_1: $0 - 0\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

Para H_2: $0 - 0\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ Para E_3: $-1 - 0\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ Para a_1: $1 - 0\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

Para a_2: $0 - 1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ Cantidad en horas: $20 - 10\left(\frac{1}{2}\right) = 15$

De la Tabla 6.7 Símplex II.
Al renglón 5 le sumamos el renglón 4 multiplicado por 11 1/2M +25.
Fórmula aplicada $Z_j - C_j + Y_{(SOFÁ\ B)}$ (1 1/2M + 25), sustituyendo obtenemos:

Para $X_{(SOFÁ\ B)}$: −3/4M−10−0 (1 1/2M + 25) = −3/4M − 10

Para a_2: −1 1/2M − 25+1(1 1/2M+25) = 0 Para H_1: 0 + 0(1 1/2M + 25) = 0

Para H_2: 0 + 0(1 1/2M + 25) = 0 Para E_3: M + 0(1 1/2M + 25) = M

Para a_1: 0 + 0(1 1/2M + 25) = 0 Para a_2: 0 + 1(11/2M + 25) = 11 1/2M + 25

Cantidad en horas: −30M + 10(11/2M + 25) = −15M + 250
Estos valores o datos calculados se muestran en la Tabla 6.8 símplex III:

Tabla 6.8 Símplex III

Coeficientes básicos $[C_j]$	Variables básicas	10 $X_{(SOFÁ\ A)}$	25 a_2	0 H_1	0 H_2	0 E_2	-M a_1	-M a_2	Cantidad en horas	Contribución por unidades de variables
0	H_1	1	0	1	0	0	0	-2	60	
−M	a_1	$\frac{3}{4}$	0	0	0	-1	1	-1/2	15	
0	H_2	1	0	0	1	0	0	0	50	
25	$Y_{(SOFÁ\ B)}$	0	1	0	0	0	0	1	10	
	$Z_j - C_j$	−3/4M−10	0	0	0	M	0	1 1/2M+25	−15M+250	

1. *Condición de optimalidad y de factibilidad.*
Nuevamente se repite el proceso. Del renglón $Z_j - C_j$ se elige el valor numérico más negativo (− 3/4M − 10) y se obtiene la variable básica que entra $[X_{(SOFÁ\ A)}]$. Luego se divide el valor numérico ubicado en la columna llamada cantidad en horas entre el valor numérico de la columna óptima, y se elige la cantidad positiva más pequeña; luego, se obtiene la variable no básica que sale (a_1).

Lo expresado en el índice 1, se encuentra indicado en la Tabla 6.9 símplex IV:

Tabla 6.9 Símplex IV

Coeficientes básicos [C_j]	Variables básicas	10 a_1	25 a_2	0 H_1	0 H_2	0 H_2	-M a_1	-M a_2	Cantidad en horas	Contribución por unidades de variables	
0	H_1	1	0	1	0	0	0	-2	60	60/1 = 30	
10	$X_{(SOFÁ\ A)}$	3/4	0	0	0	-1	1	-1/2	15	15/ 3/4 = 20	Pivote
0	H_2	1	0	0	1	0	0	0	50	50/1 = 50	
25	$Y_{(SOFÁ\ B)}$	0	1	0	0	0	0	1	10	No es posible	
	$Z_j - C_j$	-3/4M-10	0	0	0	M	0	11/2M+25	-15M+250		
		Pivote									

Aplicamos el método de Gauss-Jordan para obtener los nuevos valores numéricos a lo largo de los renglones: $X_{(SÓFA\ A)}$, H_1, H_2 y $Z_j - C_j$.

De la Tabla 6.9 Símplex IV.
El renglón 2 se multiplica por 4/3. Aplicamos la $X_{(SOFÁ\ A)}$ (4/3), sustituyendo obtenemos:

Para a_1: $4/3\left(\frac{3}{4}\right) = 1$ Para a_2: $0\left(\frac{4}{3}\right) = 0$ Para H_1: $0\left(\frac{4}{3}\right) = 0$ Para H_2: $0\left(\frac{4}{3}\right) = 0$

Para E_3: $-1\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{3}$ Para a_1: $-1\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$ Para a_2: $-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{2}{3}$

Cantidad en horas: $15\left(\frac{4}{3}\right) = 20$

De la Tabla 6.9 Símplex IV.
Al renglón 1 le restamos el renglón 2.
Fórmula aplicada $H_1 - X_{(SOFÁ\ A)}$, sustituyendo obtenemos:
Para a_1: $1 - 1 = 0$ Para a_2: $0 - 0 = 0$ Para H_1: $1 - 0 = 1$ Para H_2: $0 - 0 = 0$
Para E_3: $0 - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$ Para a_1: $0 - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$ Para a_2: $-2 - \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}$

Cantidad en horas: 60 – 20 = 404

De la Tabla 6.9 Símplex IV.
Al renglón 3 le restamos el renglón 2.
Fórmula aplicada H_2 $X_{(SOFÁ\ A)}$, sustituyendo obtenemos:

Para a_1: $1 - 1 = 0$ Para a_2: $0 - 0 = 0$ Para H_1: $0 - 0 = 0$ Para H_2: $1 - 0 = 1$
Para E_3: $0 - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$ Para a_1: $0 - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$ Para a_2: $0 - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$

Cantidad en horas: 50 – 20 = 30

De la Tabla 6.9 Símplex IV.
Al renglón 5 le sumamos el renglón 2 multiplicado por 3/4M + 10:
Fórmula aplicada $Z_j - C_j + X_{(SOFÁ\ A)}$ (3/4M + 10), sustituyendo obtenemos:

Para $a_1: -\frac{3}{4}M - 10 + 1\left(\frac{3}{4}M + 10\right) = 10$ Para $a_2: 0 + 0\left(\frac{3}{4}M + 10\right) = 0$

Para $H_1: 0 + 0\left(\frac{3}{4}M + 10\right) = 0$ Para $H_1: 0 + 0\left(\frac{3}{4}M + 10\right) = 0$

Para $E_3: M - \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}M + 10\right) = -13\,\frac{1}{3}$ Para $a_1: 0 + \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}M + 10\right) = M + 13\,\frac{1}{3}$

Para $a_2: 1\frac{1}{2}M + 25 - \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}M + 10\right) = M + 18\,\frac{1}{3}$

Cantidad en horas: $15M + 250 + 20\left(\frac{3}{4}M + 10\right) = 450$

Estos valores o datos calculados se muestran en la Tabla 6.10 símplex V:

Tabla 6.10 Símplex V

Coeficientes básicos $[C_j]$	Variables básicas	10 a_1	25 a_2	0 H_1	0 H_2	0 E_3	-M a_1	-M a_2	Cantidad en horas	Contribución por unidades de variables
0	H_1	0	0	1	0	4/3	-4/3	-4/3	40	
10	$X_{(\text{SOFÁ A})}$	1	0	0	0	-4/3	4/3	-2/3	20	
0	H_2	0	0	0	1	4/3	-4/3	2/3	30	
25	$Y_{(\text{SOFÁ B})}$	0	1	0	0	0	0	1	10	
	$Z_j - C_j$	0	0	0	0	−13 1/3	M+13 1/3	M+18 1/3	450	

1. *Condición de optimalidad y de factibilidad.*
   Nuevamente se repite el proceso. Del renglón $Z_j - C_j$ se elige el valor numérico más negativo (−13 1/3) y se obtiene la variable básica que entra (E_3.) Luego, se divide el valor numérico ubicado en la columna llamada cantidad en horas entre el valor numérico de la columna óptima, y se elige la cantidad positiva más pequeña; de este modo, se obtiene la variable no básica que sale H_2.
   Lo expresado en el índice 1 se encuentra indicado en la Tabla 6.11 símplex VI:

Tabla 6.11 Símplex VI

Coeficientes básicos $[C_j]$	Variables básicas	10 a_1	25 a_2	0 H_1	0 H_2	0 H_2	-M a_1	-M a_2	Cantidad en horas	Contribución por unidades de variables	
0	H_1	0	0	1	0	4/3	-4/3	-4/3	40	40/4/3 = 30	
10	$X_{(\text{SOFÁ A})}$	1	0	0	0	-4/3	4/3	-2/3	20	No es posible	
0	E_3	0	0	0	1	4/3	-4/3	2/3	30	30/4/3 = 22.5	
25	$Y_{(\text{SOFÁ B})}$	0	1	0	0	0	0	1	10	No es posible	Pivote
	$Z_j - C_j$	0	0	0	0	−13 1/3	M+13 1/3	M+181/3	450		
						Pivote					

1. Aplicamos el método de Gauss-Jordan para obtener los nuevos valores numéricos a lo largo de los renglones: E_3, H_1, $X_{(SOFÁ\ A)}$, $Y_{(SOFÁ\ B)}$ y $Z_j - C_j$.

De la Tabla 6.11 símplex VI.
El renglón 3 se multiplica por 3/4.
Fórmula aplicada $E_3(3/4)$, sustituyendo obtenemos:

Para $a_1: 4/3\left(\frac{3}{4}\right) = 0$ Para $a_2: 0\left(\frac{3}{4}\right) = 0$ Para $H_1: 0\left(\frac{3}{4}\right) = 0$ Para $H_2: 1\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$

Para $H_2: \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right) = 1$ Para $a_1: -\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right) = -1$ Para $a_2: \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}$

Cantidad en horas: $30\left(\frac{3}{4}\right) = 22.5$

De la Tabla 6.11 símplex VI.
Al renglón 1 le restamos el renglón 3 multiplicado por 4/3.
Fórmula aplicada $H_1 - E_3\ (3/4)$, sustituyendo obtenemos:

Para $a_1: 0 - 0\left(\frac{4}{3}\right) = 0$ Para $a_2: 0 - 0\left(\frac{4}{3}\right) = 0$ Para $H_1: 1 - 0\left(\frac{4}{3}\right) = 1$

Para $H_2: 0 - \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\right) = -1$ Para $H_2: \frac{4}{3} - 1\left(\frac{4}{3}\right) = 0$ Para $a_1: -\frac{4}{3} + 1\left(\frac{4}{3}\right) = 0$

Para $a_2: -\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right) = -2$

Cantidad en horas: $40 - 22.5\left(\frac{4}{3}\right) = 10$

De la Tabla 6.11 símplex VI.
Al renglón 2 le sumamos el renglón 3 y lo multiplicamos por4/3.
Fórmula aplicada $X_{(SÓFA\ A)} + E_3\left(\frac{4}{3}\right)$ sustituyendo obtenemos:

Para $a_1: 1 + 0\left(\frac{4}{3}\right) = 1$ Para $a_2: 0 + 0\left(\frac{4}{3}\right) = 0$ Para $H_1: 0 + 0\left(\frac{4}{3}\right) = 0$

Para $H_2: 0 + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\right) = 1$ Para $H_2: -\frac{4}{3} + 1\left(\frac{4}{3}\right) = 0$ Para $a_1: \frac{4}{3} - 1\left(\frac{4}{3}\right) = 0$

Para $a_2: -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right) = 0$ Cantidad en horas: $20 + 22.5\left(\frac{4}{3}\right) = 50$

De la Tabla 6.11 símplex VI.
Al renglón 5 le sumamos el renglón 3 multiplicado por 13 1/3.
Fórmula aplicada $\left[Z_j - C_j\right] + E_3\left(13\frac{1}{3}\right)$ sustituyendo obtenemos:

Para $a_1: 0 + 0\left(13\frac{1}{3}\right) = 0$ Para $a_2: 0 + 0\left(13\frac{1}{3}\right) = 0$ Para $H_1: 0 + 0\left(13\frac{1}{3}\right) = 0$

Para $H_2: 0 + \frac{3}{4}\left(13\frac{1}{3}\right) = 10$ Para $H_2: -\frac{1}{3} + 1\left(13\frac{1}{3}\right) = 0$

Para $a_1: M + 13\frac{1}{3} - 1\left(13\frac{1}{3}\right) = M$ Para $a_2: M + 18\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(13\frac{1}{3}\right) = M + 25$

Cantidad en horas: $450 + 22.5\left(13\frac{1}{3}\right) = 750$

Estos valores o datos calculados se muestran en la Tabla 6.12 símplex VII:

Tabla 6.12 Símplex VII

Coeficientes básicos $[C_j]$	Variables básicas	10 a_1	25 a_2	0 H_1	0 H_2	0 H_2	-M a_1	-M a_2	Cantidad en horas	Contribución por unidades de variables
0	H_1	0	0	1	-1	0	0	-2	10	
10	$X_{(SOFÁ\ A)}$	1	0	0	1	0	0	0	50	
0	E_3	0	0	0	3/4	1	-1	1/2	22.5	
25	$Y_{(SOFÁ\ B)}$	0	1	0	0	0	0	1	10	
	$Z_j - C_j$	0	0	0	10	0	M	M+25	750	

M representa una penalización para el coeficiente objetivo de una variable artificial, la cual tiende al infinito (matemáticamente $M \rightarrow \infty$). Al usar esta penalización, el proceso de optimización obligará a las variables artificiales a adquirir valores de cero (siempre que el problema tenga una solución factible). En este caso, como estamos maximizando obtendremos valores de ceros o cantidades positivas. Hemos llegado a la solución óptima, pues todos los valores numéricos a lo largo del renglón (Z_j - C_j) son positivos o ceros, por lo tanto, no existe una variable básica que pueda hacer que (Z_j - C_j) se maximice más.

Por último, se sustituyen los valores y las ecuaciones originales, a fin de saber si los datos obtenidos cumplen con las restricciones del problema

Restricciones sujeto a:

$X + 2Y \leq 80$ Departamento de corte
$20 + 2(10) \leq 80$
$40 \leq 80$

$3/4X + 1/2Y \leq 20$ Departamento de armado
$3/4(20) + 1/2(10) \leq 20$
$15 + 5 \leq 20$
$20 \leq 20$

$X \leq 20$ Departamento de tapicería
$20 \leq 50$

$Y \leq 50$ Departamento de cubiertas
$10 \leq 10$

Ahora, resolvamos un problema de programación lineal basado en minimizar la función objetivo sujeta a restricciones del tipo $\geq$. Retomemos el problema de la alimentación del caballo lusitano que fue solucionado gráficamente en el capítulo 4, pág. 66.

El problema fue formulado en el capítulo 3, pág. 49, de la siguiente manera:

Minimizar: $Z = 30X + 40Y$.

(1) Sujeto a: $4X \geq 12$ Cantidad de maíz
(2) $3Y \geq 6$ Cantidad de trigo
(3) $X + 1.5Y \leq 9$ Cantidad de sorgo
Donde: $X, Y \geq 0$

Nuevamente utilizaremos el método de la M, debido a que el problema se encuentra sujeto a dos restricciones del tipo $\geq$.

Apliquemos las siguientes reglas para llegar a la solución del problema:

1. Observamos que existen dos restricciones del tipo $\geq$ en la inecuación 1 y 2, por lo que le restamos una variable de excedente y le sumamos una variable artificial.
2. Si se trata de un problema de minimización, se modifica la función objetivo agregándole una M por cada variable artificial que se le agrega a cada restricción.

Aplicando las reglas anteriores, el problema queda formulado de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{rlllllll}
\text{Minimizar:} & Z = 30X + 40Y + Ma_1 + Ma_2 & & & & & & \\
\text{Sujeto a:} & 4X & - E_1 & & + a_1 & & = 12 & \text{Cantidad de maíz} \\
 & 3Y & & -E_2 & & + a_2 & = 6 & \text{Cantidad de trigo} \\
 & X + 1.5Y & & & +H_3 & & = 9 & \text{Cantidad de sorgo} \\
\text{Donde:} & X, Y, H_1, H_2, H_3, a_1, a_2 \geq 0 & & & & & &
\end{array}
$$

3. Para obtener los valores de Z_j, sumamos los renglones o restricciones que contienen las variables artificiales (a_1 y a_2) y consecutivamente multiplicamos el resultado por M:

$$
\begin{array}{llllllll}
(4X & & -E_1 & & +a_1 & & = & 12) \\
(& 3Y & & -E_2 & & +a_2 & = & 6) \\
\hline
(4X+3Y & & -E_1 & -E_2 & +a_1 & +a_2 & = & 18)M \\
\end{array}
$$

Sumamos las dos restricciones que contienen las variables artificiales

Multiplicando por M y obtenemos:

$$M4X + M3Y - ME_1 - ME_2 + Ma_1 + Ma_2 = 18M$$

Ecuación representada por Z_j

4. Para obtener los valores de $Z_j - C_j$ a la ecuación Z_j le restamos la función objetivo de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{llllllll}
M4X & + M3Y & - ME_1 & - ME_2 & + \cancel{Ma_1} & + \cancel{Ma_2} & = & 18M \\
-30X & - 40Y & & & \cancel{-Ma_1} & \cancel{-Ma_2} & = & 0 \\
\hline
(M4 - 30)X & + (M3 - 40)Y & - ME_1 & - ME_2 & & & = & 18M
\end{array}
$$

Le restamos la función objetivo

Ecuación representada por $Z_j - C_j$

5. Luego, la información es simplificada por medio de la utilización de la Tabla símplex I.

Tabla 6.13 Símplex I

Coeficientes básicos $[C_j]$	Variables básicas	30 X	40 Y	0 E_1	0 E_2	0 H_3	+M a_1	+M a_2	Cantidad en horas	Contribución por unidades de variables
+M	a_1	4	0	-1	0	0	1	0	12	
+M	a_2	0	3	0	-1	0	0	1	6	
0	H_3	1	3/2	0	0	1	0	0	9	
	$Z_j - C_j$	4M–30	3M–40	–M	–M	0	0	0	18M	

6. *Condición de optimalidad y de factibilidad.*
Del renglón ($Z_j - C_j$) se elige el valor numérico más positivo y se obtiene la variable básica que entra (X). Luego, se divide el valor numérico ubicado en la columna llamada cantidad en horas entre el valor numérico de la columna óptima y se elige la cantidad positiva más pequeña; de este modo, encontrará el renglón que proporciona la variable no básica que sale (a_1.)

Lo expresado en el índice 6, se encuentra indicado en la Tabla 6.14 símplex II:

Tabla 6.14 Símplex II

Coeficientes básicos [C_j]	Variables básicas	30 a_1	40 Y	0 E_1	0 E_2	0 H_3	+M a_1	+M a_2	Cantidad en horas	Contribución por unidades de variables	
30	X	4	0	-1	0	0	1	0	12	1 2/4 = 3	Pivote
+M	a_2	0	3	0	-1	0	0	1	6	No es posible	
0	H_3	1	3/2	0	0	1	0	0	9	9/1 = 9	
	$Z_j - C_j$	4M–30	3M–40	–M	–M	0	0	0	18M		
		Pivote									

7. Aplicamos el método de Gauss-Jordan para obtener los nuevos valores numéricos a lo largo de los renglones: X, H_3 y ($Z_j - C_j$).

De la Tabla 6.14 símplex II

El renglón 1 se multiplica por .1/4 Fórmula aplicada X (1/4), sustituyendo obtenemos:

Para $a_1: 4\left(\frac{1}{4}\right) = 1$ Para $Y: 0\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ Para $E_1: -1\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$ Para $E_2: 0\left(\frac{1}{4}\right) = 0$

Para $H_3: 0\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ Para $a_1: 1\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$ Para $a_2: 0\left(\frac{1}{4}\right) = 0$

Cantidad en horas: $12\left(\frac{1}{4}\right) = 3$

De la Tabla II

Al renglón 3 se le resta todo el renglón 1.

Fórmula aplicada H_3 – X, sustituyendo obtenemos:

Para a_1: 1 – 1 = 0 Para $Y: \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}$ Para $E_1: 0 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$ Para E_2: 0 – 0 = 0

Para H_3: 1 – 1 = 0 Para $a_1: 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$ Para a_2: 0 – 0 = 0 Cantidad en horas: 9 – 3 = 6

De la Tabla 6.14 símplex II

Al renglón 4 le sumamos el renglón 1 multiplicado por - 4M + 30

Fórmula aplicada ($Z_j - C_j$) + X (–4M + 30), sustituyendo obtenemos:

Para a_1: 4M – 30 + 1(– 4M + 30) = 0

Para Y: 3M – 40 + 0(– 4M + 30) = 3M – 40

Para E_1: –M – 1/4(– 4M + 30) = – 7 1/2

Para E_2: –M + 0(– 4M + 30) = –M

Para H_3: 0 + 0(– 4M + 30) = 0

Para a_1: 0 + 1/4(– 4M + 30) = –M + 7 1/2

Para a_2: 0 + 0(– 4M + 30) = 0

Cantidad en horas: 18M + 3(– 4M + 30) = 6M + 90

Los valores o datos calculados se muestran en la Tabla 6.15 símplex III:

Tabla 6.15 Símplex III

Coeficientes básicos [C_j]	Variables básicas	30 a_1	40 Y	0 E_1	0 E_2	0 H_3	+M a_1	+M a_2	Cantidad en horas	Contribución por unidades de variables
30	X	1	0	-1/4	0	0	1/4	0	3	
+M	a_2	0	3	0	-1	0	0	1	6	
0	H_3	0	3/2	1/4	0	1	-1/4	0	9	
	$Z_j - C_j$	0	3M−40	−7 1/2	−M	0	−M+ 71/2	0	6M+90	

1. *Condición de optimalidad y de factibilidad.*
   Nuevamente, se repite el proceso. Del renglón ($Z_j - C_j$) se elige el valor numérico más positivo y se obtiene la variable que entra (Y). Luego, se divide el valor numérico ubicado en la columna llamada cantidad en horas entre el valor numérico de la columna óptima, y se elige la cantidad positiva más pequeña; de este modo, encontrará la variable no básica que sale (a_2).
   Lo expresado en el índice 1, se encuentra indicado en la Tabla 6.16 símplex IV:

Tabla 6.16 Símplex IV

Coeficientes básicos [C_j]	Variables básicas	30 a_1	40 a_2	0 E_1	0 E_2	0 H_3	+M a_1	+M a_2	Cantidad en horas	Contribución por unidades de variables	
30	X	1	0	-1/4	0	0	1/4	0	3	No es posible	
40	Y	0	3	0	-1	0	0	1	6	6/3 = 2	Pivote
0	H_3	0	3/2	1/4	0	1	-1/4	0	6	6 /3/2= 4	
	$Z_j - C_j$	0	3M−40	−7 1/2	−M	0	−M+7+1/2	0	6M+90		
			Pivote								

2. Aplicamos el método Gauss-Jordan para obtener los nuevos valores numéricos a lo largo de los renglones: Y, H_3 y $Z_j - C_j$.

De la Tabla 6.16 símplex IV

El renglón 2 se multiplica por 1/3.
Fórmula aplicada Y(1/3) sustituyendo obtenemos:

Para $a_1: 0\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ Para $a_2: 3\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ Para $E_1: 0\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ Para $E_2: -1\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$

Para $H_3: 0\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ Para $a_1: \left(\frac{1}{3}\right) = 0$ Para $a_2: 1\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

Cantidad en horas: $6\left(\frac{1}{3}\right) = 2$

De la Tabla 6.16 símplex IV
Al renglón 3 se le resta el renglón 2 multiplicado por 3/2
Fórmula aplicada H_3 – Y (3/2), sustituyendo obtenemos:

Para $a_1: 0 - 0\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ Para $a_2: \frac{3}{2} - 1\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ Para $E_1: \frac{1}{4} - 0\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$

Para $E_2: 0 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$ Para $H_3: 1 - 0\left(\frac{3}{2}\right) = 1$ Para $a_1: -\frac{1}{4} - 0\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$

Para $a_2: 0 - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$ Cantidad en horas: $6 - 2\left(\frac{3}{2}\right) = 3$

De la Tabla 6.16 símplex IV
Al renglón 4 se le suma el renglón 3 multiplicado por (-3M + 40).
Fórmula aplicada $(Z_j$ - $C_j)$ Y+(-3M + 40), sustituyendo obtenemos:

Para $a_{1:}$ $0 + 0(-3M + 40) = 0$ Para a_2: $3M - 40 + 1(-3M + 40) = 0$

Para $E_{1:}$ $-7\ 1/2 + 0(-3M + 40) = -7\ 1/2$ Para E_2: $-M - 1/3\ (-\ 3M + 40) = -\ 13\ 1/3$

Para H_3: $0 + 0(-3M + 40) = 0$

Para a_2: $0 + 1/3(-3M + 40) = -M + 13\ 1/3$ Para a_2: $-M + 7\ 1/2(3M - 40) = -M + 7\ 1/2$

Cantidad en horas: $6M + 90 + 2(-3M + 40) = 170$

Los valores o datos calculados se muestran en la Tabla 6.17 símplex V:

Tabla 6.17 Símplex V

Coeficientes básicos $[C_j]$	Variables básicas	30 a_1	40 a_2	0 E_1	0 E_2	0 H_3	+M a_1	+M a_2	Cantidad en horas	Contribución por unidades de variables
30	X	1	0	-1/4	0	0	1/4	0	3	
40	Y	0	1	0	–1/3	0	0	1/3	2	
0	H_3	0	0	1/4	1/2	1	-1/4	-1/2	3	
	$Z_j - C_j$	0	0	–7 1/2	–13 1/2	0	–M+7 1/2	–M+13 1/3	170	

El método de la M es utilizado para resolver problemas de programación lineal sujetas a restricciones del tipo = y ≥.

Recuerde que M representa una penalización para el coeficiente objetivo de una variable artificial, la cual tiende al infinito (matemáticamente, $M \mapsto \infty$). Al usar esta penalización, el proceso de optimización obligará a las variables artificiales a adquirir valores de cero (siempre que el problema tenga una solución factible). En este caso, como estamos minimizando, obtendremos valores de cero o cantidades negativas.

Hemos obtenido la solución óptima, porque no existe una variable básica que pueda hacer que $(Z_j - C_j)$ se minimice ($170) a una más. Observe que en la tabla todos los valores numéricos son negativos o ceros a lo largo del renglón $(Z_j - C_j)$.

Por último, se sustituyen los valores X = 3 y Y = 2 en las ecuaciones originales, a fin de comprobar que los datos obtenidos cumplan con las restricciones del problema:

Restricciones sujeto a:

$4X \geq 12$ Cantidad de maíz	$3Y \geq 6$ Cantidad de trigo	$X + 1.5Y \leq 9$ Cantidad de sorgo
$4(3) \geq 12$	$3(2) \geq 6$	$3 + 1.5(2) \leq 9$

6.4.1 RECORDATORIO DEL MÉTODO DE LA M

El método de la M es utilizado cuando se trata de resolver problemas de programación lineal sujetas a restricciones del tipo = y≥. La M (matemáticamente, $M \rightarrow \infty$) representa una penalización para las variables artificiales (a_i) en la función objetivo. Al usar esta penalización, el proceso de optimización obligará a las variables artificiales a adquirir valores de ceros (siempre que el problema tenga una solución factible). En otras palabras, la solución final será como si las variables artificiales nunca hubieran existido.

La *penalización* (M) para las variables artificiales en la función objetivo dependerá del tipo de problema:

$$\text{Coeficiente obejtivo de la variable artificial} \begin{cases} \text{-M, en problemas de maximización.} \\ \text{M, en problemas de minimización.} \end{cases}$$

6.5 MÉTODO DE LAS DOS FASES

La razón principal por la cual el método de las dos fases se utiliza en ocasiones en lugar del método de la M, es debido a que la M representa un valor numérico muy grande que tiende al infinito, lo que puede causar un error de cálculo de redondeo por mínimo que sea. Para solucionar este problema usaremos el método de las dos fases, un algoritmo sistemático y directo que elimina la necesidad de introducir la M en un problema de maximización o minimización de programación lineal. Al igual que el método de la M, el método de las dos fases se utiliza en problemas que se encuentran sujetos a restricciones del tipo = y≥.

Para una mejor explicación retomemos el problema basado en la alimentación del caballo lusitano (formulado en el capítulo 3, pág. 47 y solucionado gráficamente en el capítulo 4, pág. 56). El objetivo consistía en minimizar los costos en Z = 30X + 40Y. Recordemos que al utilizar el método de la M la función objetivo se definió como Z = 30X + 40Y + Ma_1 + Ma_2. Por lo tanto, iniciaremos con la información que se muestra en la Tabla 6.18 símplex I, obtenida por este método

Tabla 6.18 Símplex I

Coeficientes básicos [C_j]	Variables básicas	30 X	40 Y	0 E_1	0 E_2	0 H_3	+M a_1	+M a_2	Cantidad en horas	Contribución por unidades de variables
+M	a_1	4	0	-1	0	0	1	0	12	
+M	a_2	0	3	0	−1	0	0	1	6	
0	H_3	1	3/2	0	0	1	0	0	9	
	$Z_j - C_j$	4M−30	3M−40	−M	−M	0	0	0	18M	

MÉTODO DE LAS DOS FASES:

En la fase I, las variables artificiales [(a_1 y a_2) por tener restricciones del tipo ≥], deben convertirse en variables no básicas y adquirir valores de cero en el renglón $Z_j - C_j$, debido a la penalización de M. Esto con el fin de obtener una solución básica factible inicial para el problema real. Además de que el valor óptimo enZ deberá cambiar de 18 a 0.

Si lo expresado anteriormente sucede, pasamos a la fase II. De suceder lo contrario; el problema no tiene solución.

El procedimiento de la fase I se lleva a cabo de la siguiente manera:

De la Tabla 6.18 símplex I, dividimos todos los valores del renglón $Z_j - C_j$ entre M y eliminamos los términos depreciables [(−30 y −40) porque M representa un valor infinito]. (Ver Tabla 6.19 símplex II)

Tabla 6.19 Símplex II

Coeficientes básicos [C_j]	Variables básicas	0 X	0 Y	0 E_1	0 E_2	0 H_3	1 a_1	1 a_2	Cantidad en horas	Contribución por unidades de variables
1	a_1	4	0	−1	0	0	1	0	12	
1	a_2	0	3	0	−1	0	0	1	6	
0	H_3	1	3/2	0	0	1	0	0	9	
	$Z_j - C_j$	4	3	−1	−1	0	0	0	18	

Ahora, aplicamos sistemáticamente el método símplex ya aprendido. La fase I termina hasta que las variables básicas artificiales (a_1 y a_2) salgan de su base y adquieran valores de cero. Además de que el valor óptimo en Z deberá cambiar de 18 a 0.

1. *Condición de optimalidad y de factibilidad.*
   Del renglón ($Z_j - C_j$) se elige el valor numérico más positivo y se obtiene la variable básica que entra (X). Luego, se divide el valor numérico ubicado en la columna de cantidad en horas entre el coeficiente correspondiente de la columna óptima y se elige la cantidad positiva más pequeña; de este modo; encontrará el renglón que proporciona variable no básica que sale (a_1).
   Lo expresado en el índice 1 se encuentra indicado en la Tabla símplex III:

Tabla 6.20 Símplex III

Coeficientes básicos [C_j]	Variables básicas	0 a_1	0 Y	0 E_1	0 E_2	0 H_3	1 a_1	1 a_2	Cantidad en horas	Contribución por unidades de variables	
0	X	4	0	-1	0	0	1	0	12	12/4 = 3	Pivote
1	a_2	0	3	0	−1	0	0	1	6	No es posible	
0	H_3	1	3/2	0	0	1	0	0	9	9/1 = 9	
	$Z_j - C_j$	4	3	−1	−1	0	0	0	18		
		Pivote									

Aplicamos el método Gauss-Jordan para obtener los nuevos valores numéricos a lo largo de los renglones H_3 y $(Z_j - C_j)$

De la Tabla 6.20 símplex III.
El renglón 1 se multiplica por. 1/4.
Fórmula aplicada X (1/4), sustituyendo obtenemos:

Para $a_1: 4\left(\frac{1}{4}\right) = 1$ Para $Y: 0\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ Para $E_1: -1\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$ Para $E_2: 0\left(\frac{1}{4}\right) = 0$

Para $H_3: 0\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ Para $a_1: 1\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$ Cantidad en horas: $12\left(\frac{1}{4}\right) = 3$

Para a_2: $0 = \left(\frac{1}{4}\right) 0$

De la Tabla 6.20 símplex III.
Al renglón 3 se le resta todo el renglón 1
Fórmula aplicada $H_3 - X$, sustituyendo obtenemos:

Para a_1: $1 - 1 = 0$ Para $Y: \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}$ Para $E_1: 0 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$ Para E_2: $0 - 0 = 0$

Para: H_3:$1 - 0 = 1$ Para $a_1: 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$ Para a_2: $0 - 0 = 0$

Cantidad en horas: $9 - 3 = 6$

De la Tabla 6.20 símplex III.
Al renglón 4 se le resta el renglón 1 multiplicado por 4.
Fórmula aplicada $(Z_j - C_j) - X$ (4), sustituyendo obtenemos:

Para a_1: $4 - 1(4) = 0$ Para Y: $3 - 0\ (4) = 3$ Para E_1: $-1 + \frac{1}{4}(4) = 0$ Para E_2: $-1 - 0\ (4) = -1$

Para H_3: $0 - 0(4)$ Para $a_1: 0 - \frac{1}{4}(4) = -1$ Para a_2:$0 - 0(4) = 0$

Cantidad en horas: $18 - 3\ (4) = 6$

Los valores o datos calculados se muestran en la Tabla 6.21 símplex IV:

Tabla 6.21 Símplex IV

Coeficientes básicos $[C_j]$	Variables básicas	0 a_1	0 Y	0 E_1	0 E_2	0 H_3	1 a_1	1 a_2	Cantidad en horas	Contribución por unidades de variables
0	X	1	0	-1/4	0	0	1/4	0	3	
1	a_2	0	3	0	−1	0	0	1	6	
0	H_3	0	3/2	1/4	0	1	-1/4	0	6	
	$Z_j - C_j$	0	3	0	−1	0	−1	0	6	

CONDICIÓN DE OPTIMALIDAD Y DE FACTIBILIDAD

1. Nuevamente se repite el proceso. Del renglón ($Z_j - C_j$) se elige el valor numérico más positivo y se obtiene la variable básica que entra (Y). Luego se divide el valor numérico ubicado en la columna de cantidad en horas entre el valor numérico de la columna óptima y se elige la cantidad positiva más pequeña; de este modo; encontrará la variable no básica que sale (a_2).

   Lo expresado en el índice 1, se encuentra indicado en la Tabla 6.22 símplex V:

Tabla 6.22 Símplex V

Coeficientes básicos [C_j]	Variables básicas	0 a_1	0 a_2	0 E_1	0 E_2	0 H_3	1 a_1	1 a_2	Cantidad en horas	Contribución por unidades de variables	
0	X	1	0	-1/4	0	0	1/4	0	3	No es posible	
0	Y	0	3	0	–1	0	0	1	6	6/3 = 2	Pivote
0	H_3	0	3/2	1/4	0	1	-1/4	0	6	6/ 3/2 = 4	
	$Z_j - C_j$	0	3	0	–1	0	–1	0	6		
			Pivote								

2. Aplicamos el método Gauss-Jordan para obtener los nuevos valores numéricos a lo largo de los renglones: Y, H_3 y (Zj – Cj).

De la Tabla 6.22 Símplex V.
El renglón 2 se multiplica por 1/3.
Fórmula aplicada Y(1/3), sustituyendo obtenemos:

Para $a_1: 0\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ Para $a_2: 3\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ Para $E_1: 0\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ Para $E_2: -1\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$

Para $H_3: 0\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ Para $a_1: 0\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ Para $a_2: 1\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$ Cantidad en horas: $6\left(\frac{1}{3}\right) = 2$

De la Tabla 6.22 Símplex V.
Al renglón 3 le restamos el renglón 2 multiplicado por.3/2.
Fórmula aplicada H_3 –Y(3/2), sustituyendo obtenemos:

Para $a_1: 0 - 0\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ Para $a_2: \frac{3}{2} - 1\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ Para $E_1: \frac{1}{4} - 0\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$

Para $E_2: 0 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$ Para $H_3: 1 - 0\left(\frac{3}{2}\right) = 1$ Para $a_1: -\frac{1}{4} - 0\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

Para $a_2: 0 - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ Cantidad en horas: $6 - 2\left(\frac{3}{2}\right) = 3$

De la Tabla 6.22 Símplex V.
Al renglón 4 se le resta el renglón 2 multiplicado por 3.
Fórmula aplicada $(Z_j - C_j) - Y(3)$, sustituyendo obtenemos:

Para a_1: $0 - 0(3) = 0$ Para a_2: $3 - 1(3) = 0$ Para E_1: $0 - 0(3) = 0$

Para E_2: $-1 + \frac{1}{3}(3) = 0$ Para H_3: $0 - 0(3) = 0$ Para a_1: $-1 - 0(3) = -1$

Para a_2: $0 - \frac{1}{3}(3) = -1$ Cantidad en horas: $6 - 2(3) = 0$

Los nuevos valores o datos calculados se muestran en la Tabla 6.23 símplex VI:

Tabla 6.23 Símplex VI

Coeficientes básicos $[C_j]$	Variables básicas	0 a_1	0 a_2	0 E_1	0 E_2	0 H_3	1 a_1	1 a_2	Cantidad en horas	Contribución por unidades de variables
0	X	1	0	-1/4	0	0	1/4	0	3	
0	Y	0	1	0	−1/3	0	0	1/3	2	
0	H_3	0	0	1/4	1/2	1	-1/4	−1/2	3	
	$Z_j - C_j$	0	0	0	0	0	-1	-1	0	

Las variables a_1 y a_2 se convierten en variables básicas artificiales y adquieren valores de cero en el renglón $Z_j - C_j$, además, el valor óptimo en Z cambió de 18 a 0.

Si se hubiera obtenido un valor diferente de cero no se podría iniciar la fase II, por lo tanto; podemos afirmar que el problema no tiene solución.

Ahora prepararemos la Tabla 6.23 símplex VI para la fase II:

a. De la Tabla 6.23 símplex VI, eliminamos las columnas que contienen las variables artificiales a_1 y a_2 que fueron agregadas en la Tabla símplex I. (Ver Tabla 6.24 símplex VII)

Tabla 6.24 Símplex VII

Coeficientes básicos $[C_j]$	Variables básicas	0 a_1	0 a_2	0 E_1	0 E_2	0 H_3	Cantidad en horas	Contribución por unidades de variables
0	X	1	0	-1/4	0	0	3	
0	Y	0	1	0	−1/3	0	2	
0	H_3	0	0	1/4	1/2	1	3	
	$Z_j - C_j$	0	0	0	0	0	0	

b. Luego, se sustituyen los valores de las variable no básicas $a_1 = 0$ y $a_2 = 0$, por los coeficientes (−30 y−40) que fueron depreciados en la fase I. Recordemos que a_1 fue remplazada por X y a_2 fue sustituida por Y. Es decir, ahora: $a_1 = -30$ y $a_2 = -40$. (Ver Tabla 6.25 símplex VIII)

Tabla 6.25 Símplex VIII

Coeficientes básicos $[C_j]$	Variables básicas	a_1 (0)	a_2 (0)	E_1 (0)	E_2 (0)	H_3 (0)	Cantidad en horas	Contribución por unidades de variables
0	X	1	0	-1/4	0	0	3	
0	Y	0	1	0	−1/3	0	2	
0	H_3	0	0	1/4	1/2	1	3	
	$Z_j - C_j$	-30	-40	0	0	0	0	

c. Por último, utilizamos el método Gauss-Jordan para convertir los valores 30 y 40 del último renglón $(Z_j - C_j)$, en cero.

De la Tabla 6.25 Símplex VIII.

Al renglón 4 se le suma el renglón 1 multiplicado por 30.

Fórmula aplicada $(Z_j - C_j) + X(30)$, sustituyendo obtenemos:

Para a_1: $-30 + 1(30) = 0$ Para a_2: $-40 + 0(30) = -40$ Para E_1: $0 - \frac{1}{4}(30) = -7\frac{1}{2}$

Para E_2: $0 + 0(30) = 0$ Para H_3: $0 + 0(30) = 0$

Cantidad en horas: $0 + 3(30) = 90$

Los valores o datos calculados se encuentran indicados en la Tabla 6.26 símplex IX:

Tabla 6.26 Símplex IX

Coeficientes básicos $[C_j]$	Variables básicas	a_1 (0)	a_2 (0)	E_1 (0)	E_2 (0)	H_3 (0)	Cantidad en horas	Contribución por unidades de variables
0	X	1	0	−1/4	0	0	3	
0	Y	0	1	0	−1/3	0	2	
0	H_3	0	0	1/4	1/2	1	3	
	$Z_j - C_j$	0	-40	−7 1/2	0	0	90	

De la Tabla 6.26 IX.
Al renglón 4 se le suma el renglón 1 multiplicado por 40.
Fórmula aplicada $(Z_j - C_j) + Y\ (40)$, sustituyendo obtenemos:

Para a_1: $0 + 0(40) = 0$ Para a_2: $-40 + 1(40) = 0$ Para E_1: $-7\frac{1}{2} + 0(40) = -7\frac{1}{2}$

Para E_2: $0 - \frac{1}{3}(40) = -13\frac{1}{2}$ Para H_3: $0 + 0(40) = 0$

Cantidad en horas: $90 + 2(40) = 170$

Los resultados valores o datos calculados se muestran en la Tabla 6.27 símplex X:

Tabla 6.27 Símplex X

Coeficientes básicos $[C_j]$	Variables básicas	0 a_1	0 a_2	0 E_1	0 E_2	0 H_3	Cantidad en horas	Contribución por unidades de variables
0	X	1	0	-1/4	0	0	3	
0	Y	0	1	0	−1/3	0	2	
0	H_3	0	0	1/4	1/2	1	3	
	$Z_j - C_j$	0	0	−7 1/2	−13 1/2	0	170	

Observe que se ha llegado a la solución debido a que todos los valores numéricos del último renglón $(Z_j - C_j)$ son ceros y negativos.

6.5.1 RECORDATORIO DEL MÉTODO DE LAS DOS FASES

El método de las dos fases es una variante del método símplex que elimina uso de la M, debido a que ésta representa un valor que tiende al infinito, $(M \to \infty)$, lo que puede ocasionar un error de cálculo de redondeo cuando se manipulan en forma simultánea coeficientes grandes en un sistema computacional. Al igual que el método de la M, el método de las dos fases se utiliza en problemas que se encuentran sujetos a restricciones del tipo $=$ y $\geq$.

NOTA. La salida de las columnas de las variables artificiales al terminar la fase I sólo se hace cuando todas ellas sean no básicas; sin embargo, es posible que éstas sigan siendo básicas pero a nivel de cero al final de la fase I. En este caso, esas variables forman, por necesidad, parte de la solución básica de la fase II. En consecuencia, se deben modificar los cálculos en la fase II para asegurar que una variable artificial nunca se haga positiva durante las iteraciones de la fase II.

La regla de la fase II obliga a la variable artificial a salir de la solución básica en cualquier momento en que su coeficiente de restricción en la columna de pivote sea positivo o negativo. De hecho, esta regla se puede aplicar al final de la fase I, para eliminar las variables artificiales cero de la solución básica, antes de comenzar la fase II.

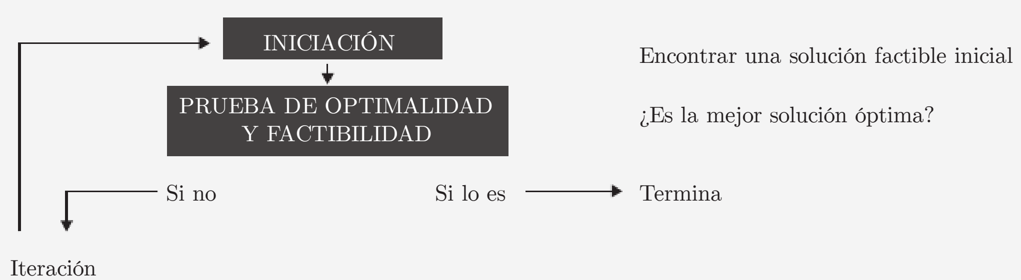
Como su nombre lo indica, el procedimiento del método de las dos fases se lleva a cabo en dos etapas:

1. En la fase I, se identifican todas las variables artificiales básicas del tablero símplex [(a_1, a_2, etc.) debido a la penalización M y, por consiguiente, tener restricciones del tipo ≥ y =], las cuales por medio de la aplicación del método símplex se obligan a salir de la base a fin de convertirse en variables artificiales no básicas adquiriendo valores de cero, además de que el valor óptimo en Z toma también el valor de cero, de lo contrario, el problema no tiene solución[1].

2. En la fase II, se eliminan del último tablero símplex las columnas que contienen las variables artificiales [(a_1, a_2, etc.) debido a la misma penalización M] que fueron agregadas en la primera Tabla símplex I. Luego, se sustituyen los valores de las variable no básicas ($a_1 = 0$, $a_2 = 0$ etc.), por los coeficientes que fueron depreciados en la fase I. Por último, utilizamos el método Gauss-Jordan para convertir los valores de los coeficientes depreciables en cero[2].

▶ RESUMEN

DIAGRAMA DE FLUJO



El método símplex y sus métodos derivados (el método de la M y el de las dos fases) es un algoritmo iterativo que examina las esquinas o vértices de un conjunto factible de ecuaciones lineales en busca de una solución óptima.

Este método inicia con la determinación de un vértice inicial (que no necesariamente debe empezar en el origen). Posteriormente, examina los vértices adyacentes más próximos con respecto a la primera solución, realiza la prueba de optimalidad y factibilidad al vértice y escoge las coordenadas del vértice que maximizará o minimizará la función objetivo. El movimiento ascendente

NOTA.1 El objetivo es minimizar a cero la suma de las variables artificiales. Si el valor mínimo de la suma es positivo, el problema no tiene solución factible, y termina el proceso (recuerde que una variable artificial positiva significa que no satisface una restricción original). En caso contrario, se prosigue a la segunda fase.

NOTA.2 El objetivo es eliminar de las restricciones las variables artificiales y remplazar la función objetivo por la función objetivo original y resolverlo por el método símplex tradicional.

(o descendente en un modelo de minimización) de una esquina a la adyacente se expresa en términos de la operación pivoteo sobre una tabla de datos. La iteración termina al ya no encontrar otro vértice cuyas coordenadas nos permitan una mejor solución óptima. Si el problema es no acotado, el algoritmo lo descubrirá durante su ejecución.

▶ EVALUACIÓN

Resuelva los siguientes problemas utilizando cualquiera de los métodos antes explicados:

Problema 2. *Capítulo* 6.
Una empresa química fabrica dos aditivos que permiten la elaboración de dos detergentes. Uno es utilizado especialmente para la limpieza de artículos de vestuario y el otro para el lavado de utensilios de cocina. Para producir los dos aditivos se requiere mezclar tres materiales químicos, tal como se indica en la Tabla X:

Tabla X

MATERIALES	ADITIVO PARA LIMPIEZA DE VESTUARIOS	ADITIVO PARA LIMPIEZA DE UTENSILIOS DE COCINA
Material A	.2	.65
Material B	No contiene material B	.15
Material C	.4	.3

Para llevar a cabo la producción, se dispone de 14 toneladas del material A, 3 del material B y 12 del material C. Además, el gerente analizó las cifras de producción y determinó una utilidad de €37 por cada tonelada que se produzca a base de aditivo utilizado como detergente para limpieza de artículos de vestuario, y €48 por cada tonelada producida de base de aditivo utilizado como detergente para limpieza de utensilios. Determine la cantidad de aditivo que es conveniente producir de acuerdo a su uso, a fin de maximizar la contribución a la ganancia total.

Problema 2. *Capítulo* 6.
Se ofrece a los estudiantes de Administración un curso de álgebra matricial que se imparte en 12 horas clase y otro de programación lineal (PL) que se imparte en 20 horas clase. El departamento de matemáticas solicitó que el curso de álgebra matricial se divida en 5 o más temas, y el curso de PL se divida en 8 o más temas. En el verano se dispone de no más de 400 horas clase. Los cursos son impartidos por dos asesores, el que imparte los temas relacionados con el álgebra matricial cobra $2400 y el que imparte los temas de PL cobra $7650. Para que se lleven a cabo estos dos cursos se deben inscribir más de 21 alumnos.

Encuentre la cantidad mínima de cursos de álgebra matricial y PL que se pueden impartir en la Universidad.

▶ PL EN ACCIÓN (Asignación de productos a las diferentes instalaciones de Eastman Kodak alrededor del mundo)[1]

Uno de los asuntos de planeación más importantes en Eastman Kodak es la determinación de qué productos deberán fabricarse y en qué instalaciones, pues esta empresa se encuentra en todo el mundo. La asignación de productos a las instalaciones se llama "carga mundial". Al determinar la carga mundial, Kodak enfrenta diversos intercambios interesantes. Por ejemplo, no todas las instalaciones manufactureras son igualmente eficientes para todos los productos y los márgenes, por lo que algunas instalaciones varían de producto a producto. Además de costos de manufactura, los costos de transportación, los efectos de los derechos aduanales y el reintegro de éstos pueden afectar de manera significativa la decisión de la asignación.

Para asistir en la determinación de la carga mundial, Kodak elaboró un modelo de programación lineal que considera la naturaleza física del problema de la distribución y los diversos costos implicados (manufactura, transportación y derechos aduanales) con el objetivo del modelo es minimizar el costo total sujeto a restricciones y satisfacer la demanda y limitaciones de capacidad para cada instalación.

El modelo de programación lineal es una representación estática de la situación aún cuando la realidad siempre está cambiando; por ello, debe usarse dinámicamente. Por ejemplo, cuando cambian las expectativas de la demanda, puede emplearse el modelo para determinar el efecto que tendrá ese cambio en la carga mundial. Suponga que la moneda del país A se eleva en comparación con la del país B, ¿cómo se modificaría la carga mundial? Además de usar el modelo de programación lineal para evaluar cómo reaccionar ante ciertas modificaciones, el modelo es útil de forma más activa al considerar cuestiones como las siguientes: ¿vale la pena que la instalación F gaste *d* dólares para disminuir el costo de manufactura por unidad del producto P de x a y? El modelo de programación lineal ayuda a Kodak a evaluar el efecto general de los cambios posibles en cualquier instalación.

En el análisis final, los administradores reconocen que no pueden emplear el modelo con sólo ponerlo en funcionamiento, leer los resultados y ejecutar la solución; por el contrario, debe recurrirse al juicio gerencial para proporciona la decisión final.

1 PL EN ACCIÓN fue obtenido de: David R. Anderson, Dennis J. Sweeney y Thomas A. Williams. *Métodos Cuantitativos para los Negocios*. 9a. ed., Editorial Thomson, pág. 285. Basado a su vez en Greg Sampson de Eastman Kodak.

GLOSARIO

Algoritmo del método símplex.—Algoritmo que sigue un procedimiento de solución sistematizado (mediante la repetición de una serie de pasos) que optimiza un objetivo deseado [maximizar (ganancias) o minimizar (costos o tiempo)], el cual se encuentra condicionado a restricciones.

Esencia gráfica y algebraica del método símplex.—Algoritmo matemático iterativo constituido por conceptos de álgebra matricial y de geometría analítica.

Método de las dos fases.—Algoritmo matemático que eliminará la necesidad de utilizar la M, a fin de evitar un error de cálculo en la solución de problemas de PL sujetas a restricciones del tipo $=$ y $\geq$. El procedimiento se lleva a cabo en dos fases:

En la fase I, todas las variables artificiales se hacen cero (debido a la penalización de M por unidad al ser mayores que cero) con el fin de obtener una solución básica factible inicial para el problema real. Fase I: minimizar o maximizar $Z = Ma_1 + Ma_2$ (hasta que $a_1 = 0$, $a_2 = 0$).

En la fase II, todas las variables artificiales se mantienen en cero (por esta misma penalización) mientras que el método símplex genera una secuencia de soluciones básicas factibles que llevan a una solución óptima. Fase II: minimizar o maximizar $Z = C_1X + C_2Y$ (con $a_1 = 0$, $a_2 = 0$).

Método de la M.—Método que utiliza la M (valor numérico muy grande) para resolver problemas de programación lineal sujetas a restricciones del tipo $=$ y $\geq$.

CAPÍTULO 7

TEORÍA DE LA DUALIDAD Y ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

▷ 7.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo estudiaremos la teoría de la dualidad y el análisis de sensibilidad, temas fundamentales de la programación lineal. Veremos que se encuentran vinculados en la búsqueda de la información económica acerca del valor de los recursos escasos que se utilizan, cuándo se analizan y se soluciona el problema dual, o cuándo se le aplica el análisis de sensibilidad al problema primal.

▷ 7.2 TEORÍA DE LA DUALIDAD

La teoría de la dualidad establece que un problema dual de programación lineal tiene lugar a partir del modelo original denominado problema primal. Ambos se encuentran muy relacionados, de tal manera que la solución óptima de cualquiera de ellos proporciona la solución óptima del otro.

La dualidad establece la siguiente regla:

Para todo problema de maximización de programación lineal existe un problema de minimización, y viceversa (para todo problema de minimización de programación lineal existe un problema equivalente de maximización). Esta regla nos indica que existe una correspondencia directa entre los elementos del problema primal y su dual.

Veamos la esencia de la teoría en su forma estándar y en su forma matricial desde el contexto de un problema primal de maximización.

Dada la forma estándar para un problema de programación lineal, tenemos a la izquierda el problema primal y, después de hacer a la conversión, tenemos a la derecha su dual:

Problema primal

$$\text{Maximizar } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{Sujeto a: } \overset{n}{\underset{j=1}{\bullet}}\, a_{ij}\, x_j \;''\; b_i \text{ para } i = 1,2\ldots,m$$

$$x_j \geq 0 \text{ para } j = 1,2\ldots,n$$

Problema dual

$$\text{Maximizar} W = \overset{m}{\underset{i=1}{\bullet}}\, b_i y_i$$

$$\text{Sujeto a:} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \text{, para } j = 1,2\ldots,n$$

$$y_i \geq 0 \text{ para } i = 1,2\ldots,m$$

Las variables X_j $j = 1, 2\ldots\ldots, n$, incluyen las variables de holgura, excedentes y artificiales, si existen.

Como podemos observar, el problema dual usa exactamente los mismos *parámetros* $(a_{ij}$, b_i y $c_j)$ que el problema primal, pero en diferentes lugares, tal como se resume a continuación:

a) Se define una variable dual por cada ecuación primal (restricción) y una restricción dual por cada variable primal.

b) Los coeficientes de restricción (columna) de una variable primal definen los coeficientes en el lado izquierdo de la restricción dual, y su coeficiente objetivo define el lado derecho.

c) Los coeficientes objetivo del primal definen los valores derechos de las ecuaciones de restricción dual.

d) El sentido de las desigualdades en el dual con respecto al primal siempre serán opuestos.

Ahora observemos este mismo problema pero en su notación matricial:

Problema primal		**Problema dual**	
Maximizar:	$Z = cx$	Minimizar:	$W = yb$,
Sujeto a:		Sujeto a:	
	$Ax \leq b$		$yA \geq c$
	$x \geq 0$		$y \geq 0$

Donde **c** y **y** $[y_1, y_2, \ldots\ldots y_m]$ son vectores renglón, pero **b** y **x** son vectores columna.

En el problema primal, cada columna (excepto la del lado derecho) proporciona los coeficientes de una sola variable de las respectivas restricciones y de la función objetivo, mientras que cada renglón (excepto el último) da los parámetros de una restricción. En el problema dual, cada renglón (excepto el renglón del lado derecho) da los coeficientes de una variable de las restricciones respectivas y de la función objetivo, mientras que cada columna (excepto la de la derecha) proporciona los parámetros de una restricción. Además, la columna del lado derecho da los datos del problema primal y los coeficientes de la función objetivo del problema dual, mientras que el último renglón proporciona los coeficientes de la función objetivo del problema primal y los lados derechos del problema dual.

Como podemos observar, existe una correspondencia directa en el problema primal y su dual (tanto en su notación estándar como matricial). En conclusión, podemos realizar las siguientes afirmaciones:

a) Los *parámetros* de una restricción (funcional) en cualquier problema son los coeficientes de una variable en el otro.
b) Los coeficientes de la función objetivo en un problema son los valores del lado derecho en el otro.

Ahora describiremos cómo realizar la conversión de un problema primal a dual, por medio de un manejo de reglas matriciales.

Problema dual obtenido en su forma matricial:

Problema primal		**Problema dual**	
Maximizar:	$Z(Xo) = CX$	Minimizar:	$W(Yo) = b^T Y$
Sujeto a:		Sujeto a:	
	$AX \leq b$		$A^T Y \geq c^T$
	$X \geq 0$		$Y \geq 0$
Minimizar:	$Z(Xo) = CX$	Maximizar:	$W(Yo) = b^T Y$
Sujeto a:		Sujeto a:	
	$AX \geq b$		$A^T Y \leq C^T$
	$X \geq 0$		$Y \geq 0$

C, representa el vector renglón de coeficientes de la función objetivo primal.

b, representa el vector columna de términos independientes de restricciones del primal.

A, representa la matriz de coeficientes tecnológicos de restricciones del primal.

X, representa el vector columna de variable primal.

T, representa la transpuesta de la matriz primal A.

Y, representa el vector columna de variables duales.

Con excepción de **X** y **Y**, los vectores y matrices en ambos problemas son los mismos, pero debe cuidarse el orden del arreglo vectorial atendiendo la transposición T indicada.

Ejemplo:

Recodemos que el problema (formulado en el capítulo 3, pág. 47 y solucionado gráficamente en el capítulo 4, pág. 56) basado en la elaboración de dos tipos de sofás había quedado expresado de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lll}
\text{Maximizar:} & Z = 10X + 25Y & \\
\text{Sujeto a:} & X + 2Y & \leq 80 \text{ Departamento de corte} \\
 & 3/4X + 1/2Y & \leq 20 \text{ Departamento de armado} \\
 & X & \leq 50 \text{ Departamento de tapicería} \\
 & Y & \leq 10 \text{ Departamento de cubiertas} \\
\text{Donde:} & X,\ Y \geq 0 &
\end{array}$$

Recordemos que las restricciones correspondientes a los departamentos de corte y armado son redundantes, por lo tanto el problema fue planteado de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lll}
\text{Maximizar:} & Z = 10X + 25Y & \\
\text{Sujeto a:} & 3/4X + 1/2Y & \leq 20 \\
 & Y & \leq 10 \\
\text{Donde:} & X \geq 0,\ Y \geq 0 &
\end{array}$$

Expresemos el problema como sigue, a fin facilitar la enseñanza del método dual símplex:

Problema primal en forma algebraica

$$\begin{array}{lll}
\text{Maximizar:} & Z(Xo) = 10X_1 + 25X_2 & \\
\text{Sujeto a:} & 3/4X_1 + 1/2X_2 & \leq 20 \\
 & X_2 & \leq 10 \\
\text{Donde:} & X_1 \geq 0,\ X_2 & \geq 0
\end{array}$$

Para el método dual los coeficientes del ejemplo se arreglan en sus vectores como sigue:

$C = [10, 25]$, obtenemos su transpuesta $C^T = \begin{bmatrix} 10 \\ 25 \end{bmatrix}$, de donde $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$

$b = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix}$, obtenemos su transpuesta $b^T = [20, 10]$, de donde $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ obtenemos su transpuesta $A^T = \begin{bmatrix} 3/4 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$

Aplicamos las siguientes formulas:

Minimizar: $Y_o = b^T Y = [20, 10]\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = 20Y_1 + 10Y_2$, obtenemos

Sujeta a sus restricciones: $A^T Y \geq C^T = \begin{bmatrix} 3/4 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 10 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 3/4\,Y_1 + 0Y_2 \geq 10 \\ 1/2\,Y_1 + 1Y_2 \geq 25 \end{matrix}$

Entonces la conversión del primal a su dual es:

Problema primal en forma algebraica		***Problema dual en forma algebraica***	
Maximizar:	$Z(Xo) = 10X_1 + 25X_2$	Minimizar:	$W(Yo) = 20Y_1 + 10Y_2$
Sujeto a:	$3/4X_1 + 1/2\,X_2 \leq 20$	Sujeto a:	$3/4Y_1 \geq 10$
	$X_2 \leq 10$		$1/2Y_1 + Y_2 \geq 25$
Donde:	$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0$	Donde:	$Y_1 \geq 0,\ Y_2 \geq 0$

El planteamiento dual del problema primario se obtiene de manera directa aplicando los siguientes incisos:

a) Reemplazamos las variables x_j del primario por variables y_i en el dual.

b) Colocamos los coeficientes de la función objetivo del primal como los valores del segundo término en el dual.

c) Situamos los valores del segundo término del primal como los coeficientes de la función objetivo del dual.

d) Transponemos los renglones de los coeficientes de restricciones del primal para convertirlos en las columnas de coeficientes en el dual.

e) Invertimos la dirección de las desigualdades.

Una vez que se hemos realizado la conversión del primal al dual, podemos solucionar el problema.

Expresemos el problema en su forma estándar a fin de aplicar el método de las dos fases:

$$\begin{array}{llcccccl} \text{Minimizar: } W(Yo) = & 20Y_1 & + 10Y_2 & & & + Ma_1 & + Ma_2 & \\ \text{Sujeto a:} & 3/4Y_1 & & - H_1 & & + a_1 & & = 10 \\ & 1/2Y_1 & + Y_2 & & - H_2 & & + a_2 & = 25 \end{array}$$

Donde: $Y_1, Y_2, H_1, H_2, a_1, a_2 \geq 0$

Sumamos las dos restricciones que contienen las variables artificiales, multiplicamos el resultado por M y por último le restamos la función objetivo:

$$\left(\tfrac{3}{4} Y_1 \quad - H_1 \quad + a_1 = 10\right)$$

Sumamos las dos restricciones que

$$\left(\tfrac{1}{2} Y_1 + Y_2 \quad - H_2 + a_2 = 25\right)$$

contienen las variables artificiales.

$$\left(1\tfrac{1}{4} Y_1 + Y_2 - H_1 - H_2 + a_1 + a_2 = 35\right)$$

Multiplicando por M obtenemos:

$$M1\tfrac{1}{4} Y_1 + MY_2 - MH_1 - MH_2 + \cancel{Ma_1} + \cancel{Ma_2} = 35M$$

A la ecuación W_j

$$-20\,Y_1 - 10\,Y_2 \qquad - \cancel{Ma_1} - \cancel{Ma_2} = 0$$

le restamos la función objetivo.

$$\left(M1\tfrac{1}{4} - 20\right) Y_1 + (M - 10) Y_2 - MH_1 - MH_2 = 35M$$

Ecuación representada por: W_j - C_j

Simplificamos la información por medio de la utilización de la Tabla símplex I:

Tabla7.1 Símplex I

Coeficientes básicos $[C_j]$	Variables básicas	20 Y_1	10 Y_2	0 H_1	0 H_2	+M a_1	+M a_2		Contribución por unidad
+M	a_1	3/4	0	-1	0	1	0	10	
+M	a_2	1/2	1	0	–1	0	1	25	
	$W_j - C_j$	1 1/4 M–20	M–10	–M	–M	0	0	35M	

En la fase I se consideran los valores (–20 y –10) del último renglón (W_j– C_j) de la Tabla símplex I depreciables, debido a que la M representa un valor infinito; por lo tanto, podemos dividir todos los valores del último renglón entre M. Lo expresado anteriormente se indica en la Tabla símplex II:

Tabla 7.2 Símplex II

Coeficientes básicos $[C_j]$	Variables básicas	20 Y_1	10 Y_2	0 H_1	0 H_2	+M a_1	+M a_2		Contribución por unidad
+M	a_1	3/4	0	-1	0	1	0	10	
+M	a_2	1/2	1	0	–1	0	1	25	
	$W_j - C_j$	1 1/4	1	–1	–1	0	0	35	

La fase I termina hasta que el valor numérico 35 adquiera un valor de 0.

Apliquemos el método Gauss-Jordan para llegar a esta solución: (Véanse las Tablas 7.3, 7.4 y 7.5 símplex III, IV y V, respectivamente)

Tabla 7.3 Símplex III

Coeficientes básicos $[C_j]$	Variables básicas	20 Y_1	10 Y_2	0 H_1	0 H_2	+M a_1	+M a_2		Contribución por unidad	
+M	a_1	3/4	0	-1	0	1	0	10	10/.75 = 13.333	$a_1(4/3)$
+M	a_2	1/2	1	0	−1	0	1	25	25/.5 = 50	$a_2 - a_1(1/2)$
	$W_j - C_j$	1 1/4	1	−1	−1	0	0	35		$(W_j - C_j) - a_1(1\ 1/4)$

Tabla 7.4 Símplex IV

Coeficientes básicos $[C_j]$	Variables básicas	+M a_1	10 Y_2	0 H_1	0 H_2	+M a_1	+M a_2		Contribución por unidad	
20	Y_1	1	0	−4/3	0	4/3	0	13.333		
+M	a_2	0	1	2/3	−1	−2/3	1	18.333		
	$W_j - C_j$	0	1	2/3	−1	−5/3	0	18.333		$(W_j - C_j) - Y_2$

Tabla 7.5 Símplex VI

Coeficientes básicos $[C_j]$	Variables básicas	+M a_1	+M a_2	0 H_1	0 H_2	+M a_1	+M a_2		Contribución por unidad
20	Y_1	1	0	-4/3	0	4/3	0	13.333	
10	Y_2	0	1	2/3	−1	-2/3	1	18.333	
	$W_j - C_j$	0	0	0	0	-1	-1	0	

Observe que los valores numéricos del renglón $W_j - C_j$ de las variables artificiales no básicas son ceros y negativos. Además, el valor de la función objetivo es 0; por lo tanto, iniciamos la fase II agregando los valores que fueron depreciables (−20 y −10) en la fase I, y eliminando las columnas a_1 y a_2. (Véanse las Tablas 7.7, 7.8 y 7.9 símplex VI, VII y VIII, respectivamente)

Tabla 7.7 Símplex VII

Coeficientes básicos $[C_j]$	Variables básicas	+M a_1	+M a_2	0 H_1	0 H_2		Contribución por unidad	
20	Y_1	1	0	-4/3	0	13.333		
10	Y_2	0	1	2/3	−1	18.333		
	$W_j - C_j$	-20	-10	0	0	0		$(W_j - C_j) + Y_2(10)$

Tabla 7.8 Símplex VIII

Coeficientes básicos $[C_j]$	Variables básicas	$+M$ a_1	$+M$ a_2	0 H_1	0 H_2		Contribución por unidad	
20	Y_1	1	0	-4/3	0	13.333		
10	Y_2	0	1	2/3	-1	18.333		
	$W_j - C_j$	-20	0	20/3	-10	18.333		$(W_j - C_j) + a_1\ (20)$

Tabla 7.9 Símplex IX

Coeficientes básicos $[C_j]$	Variables básicas	$+M$ a_1	$+M$ a_2	0 H_1	0 H_2	Precios Duales
20	Y_1	1	0	-4/3	0	13.333
10	Y_2	0	1	2/3	-1	18.333
	$W_j - C_j$	0	0	-20	-10	450

El resultado nos indica que al maximizar [Z(Xo) = €450] el problema primal equivale a minimizar [W(Yo) = €450] en el problema dual.

Este mismo ejemplo se presentó en el capítulo 6, páginas. 128, 135 y 142. La solución óptima para el problema primal de maximización se dio en $X_{(\text{SOFÁ A})} = 20$ y $Y_{(\text{SOFÁ B})} = 10$; sin embargo, la solución óptima para este problema dual de minimización se dio en $Y_1 = 13.333$ y $Y_2 = 18.333$. Sustituyendo estos valores en sus correspondientes funciones objetivos, tenemos:

Maximizar: $Z = 10X + 25Y \Rightarrow Z = 10(20) + 25(10) = 450$
Minimizar: $W = 10X + 25Y \Rightarrow Z = 10(13.333) + 25(18.333) = 450$

Este resultado nos afirma que debe existir una *propiedad de simetría* entre el problema primal y su dual de la siguiente forma:

Propiedad de simetría. En caso de *cualquier* problema primal y su dual, la relación entre ellos debe ser *simétrica* debido a que el dual del problema es en sí mismo el problema primal.

En conclusión: la relación indica que para todas las soluciones primales y duales factibles, el valor objetivo en el problema de minimización establece siempre una cota superior del valor objetivo en el problema de maximización. Dado que las iteraciones sucesivas del problema de maximización obtienen valores crecientes en Z, y las del problema de minimización obtienen valores decrecientes en W, pero al final, en el curso de las iteraciones, se llegará a un punto de equilibrio donde los valores objetivo de maximización y minimización deben ser iguales, esto es: Z = W. En otras palabras, al final de cada iteración, el método símplex identifica de manera simultánea una solución óptima Z(Xo) para el problema primal y una *solución óptima complementaria* W(Yo) para el problema dual (que se encuentre en el renglón que representa la contribución neta por unidad), donde: Z(Xo) = W(Yo).

Los valores de $Y_1 = 13.333$ y $Y_2 = 18.333$ representan los precios duales. Recordemos que el precio dual proporciona información económica que ayuda a tomar decisiones para la adquisición de un recurso adicional. Por ejemplo, por cada hora que le agregamos o le quitemos al departamento de armado obtenemos un aumento o disminución de €13.333 en la solución óptima. Lo mismo sucede con el departamento de cubiertas, por cada hora que le agregamos o le quitemos obtenemos un aumento o disminución de €18.333 en la solución óptima.

Hasta ahora hemos solucionado un problema primal por medio de su dual. Sin embargo, es posible que el problema primal (o su dual) no tenga soluciones factibles o bien tenga soluciones factibles pero no una solución óptima (debido a que la función objetivo no está acotada). La propiedad llamada teorema de la dualidad resume las únicas relaciones posibles entre los problemas primal y dual:

1. Si un problema primal tiene soluciones factibles y una función objetivo acotada (y por lo tanto, una solución óptima) entonces sucede idénticamente lo mismo para el problema dual.

   Lo mismo sucede del dual al primal.
2. Si uno de los problemas primales tiene soluciones factibles y una solución no acotada (y por consiguiente, no tiene solución óptima), entonces el problema dual no tiene soluciones factibles.

   Lo mismo sucede del dual al primal.
3. Si un problema primal no tiene soluciones factibles, entonces el problema dual no tiene soluciones factibles o bien la solución es no acotada.

   Lo mismo sucede del dual al primal.

7.2.1 INTERPRETACIÓN ECONÓMICA DE LA DUALIDAD[1]

El problema de programación lineal se puede considerar como un modelo de asignación de recursos, en el que el objetivo es maximizar los ingresos o las utilidades, sujeto a recursos limitados.

Consideremos la siguiente representación de los problemas más generales del primal y dual, en donde el primero asume el papel de modelo de asignación de recursos:

Problema primal	**Problema dual**
Maximizar: $Z(Xo) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	Minimizar: $W(Yo) = \sum_{i=1}^{m} b_j y_j$
Sujeto a:	Sujeto a:
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq b_i$ para $i = 1,2 \ldots, m$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \geq c_j$ para $j = 1,2 \ldots, n$
$x_j \geq 0$, para $j = 1,2 \ldots, n$	$y_i, \geq 0$, para $i = 1,2,\ldots, m$

Desde el punto de vista del modelo de asignación de recursos, el problema primal tiene n actividades económicas y m recursos. El cociente c_j del primal representa la utilidad por unidad de actividad j. El recurso i, cuya disponibilidad máxima es b_i se consume con una tasa a_{ij} unidades por unidad de actividad j.

1 La información contenida en la subcapítulo citado "INTERPRETACIÓN ECONÓMICA DE LA DUALIDAD" fue obtenida de: Hamdy A. Taha. *Investigación de Operaciones*, 7a. ed., Editorial Pearson_Prentice Hall, pp. 132, 133 y 135.

Interpretación económica de las variables duales

Para dos soluciones factibles primales y duales cualquiera, los valores de las funciones objetivo, cuando son finitos, deben satisfacer la siguiente desigualdad:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_1 = W$$

La igual estricta $\mathbf{Z} = \mathbf{W}$ es válida cuando las soluciones primal y dual son óptimas. Examinemos primero la condición óptima $\mathbf{Z} = \mathbf{W}$. Como el problema primal representa un modelo de asignación de recursos, se puede imaginar que $\mathbf{Z}$ representa la utilidad monetaria. Como $\boldsymbol{b}_i$ representa la cantidad disponible de unidades del recurso $\boldsymbol{i}$, la ecuación $\mathbf{Z} = \mathbf{W}$ se puede expresar en forma dimensional como sigue:

$$\$ = \sum_{i} \left(unidades\, de\, recursos\, i\right) x \left(\$\ por\, unidad\, de\, recurso\, i\right)$$

Esto quiere decir que las variables duales $\boldsymbol{y}_i$ representan el valor por unidad del recurso $\boldsymbol{i}$**.** A las variables $\boldsymbol{y}_i$ se le conocen como *precios duales*, *precios sombra* y *multiplicadores símplex.*

Con la misma lógica, la desigualdad $\mathbf{Z} < \mathbf{W}$ relacionada con dos soluciones asociadas, primal y dual, se puede interpretar como sigue:

$$(\textit{Utilidad}) < (\textit{Valor de los recursos})$$

Según esta relación, siempre que los ingresos totales por todas las actividades sean menores que el valor de los recursos, las soluciones primal y dual correspondientes no son óptimas. La optimalidad (retorno máximo) sólo se alcanza cuando se han explotado los recursos por completo, lo que sólo puede suceder cuando los datos valor de los recursos son iguales a los resultados ($ de utilidad). En términos económicos se dice que el sistema permanece *inestable* (no óptimo) cuando los datos valor de recursos son mayores que el resultado (retorno o ingreso). La estabilidad sólo se obtiene cuando las dos cantidades son iguales.

Interpretación económica de las restricciones duales

La interpretación económica de las restricciones duales se puede entender usando la siguiente fórmula:

$$\text{En cualquier iteración primal el } x_i = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c$$

Esto quiere decir (aplicando el análisis dimensional para interpretar esta fórmula) que la utilidad cj por unidad de actividad j está en $ por unidad. En consecuencia, para tener consistencia, la cantidad $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ también debe estar en $ por unidad. Además, como c_j representa una utilidad, la cantidad $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$, que aparece en la ecuación con signo contrario debe representar un costo. Al mismo tiempo, como a_{ij} es la cantidad del recurso i que usa la actividad j, las variables duales y_i deben representar al costo imputado por unidad de recurso i, y se puede considerar que la cantidad $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ es el costo imputado de todos los recursos necesarios para producir una unidad de actividad.

La condición de optimalidad de maximización del método símplex indica que un aumento en la cantidad de actividad j no usada (no básica) puede mejorar la actividad sólo en caso de que su coeficiente objetivo $\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c\right)$ sea no negativo. En función de la interpretación anterior, esta condición establece que:

$$\begin{pmatrix} \textit{costo imputado de} \\ \textit{recursos por unidad} \\ \textit{de actividad} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \textit{Utilidad por unidad} \\ \textit{de actividad j} \end{pmatrix}$$

Así, la condición de optimalidad de maximización indica que es económicamente favorable aumentar una actividad a un valor positivo si su utilidad unitaria es mayor que su costo imputado unitario.

▷ 7.3 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

Recordemos que es importante comprender el tema relacionado con el análisis de sensibilidad, debido a que los valores numéricos que nos proporcionan la solución óptima en un modelo de programación lineal pueden estar sujetos a cambios. Por ejemplo, los coeficientes de la función objetivo pueden mudar en relación con los costos de los productos o con la mano de obra; igualmente, los valores (del lado derecho de las restricciones) que representan los recursos pueden cambiar por otros factores como huelgas o con la materia prima disponible. En este contexto, el análisis de sensibilidad analiza y da información de los límites en los cuales operan los parámetros de los valores independientes de las restricciones, y de los coeficientes de la función objetivo.

En este capítulo se explicará el análisis de sensibilidad utilizando la última Tabla símplex.

a) Cambio en el coeficiente de la función objetivo de una variable básica.
b) Cambio en el término independiente de una restricción.

◢ 7.3.1 CAMBIO EN EL COEFICIENTE DE LA FUNCIÓN OBJETIVO DE UNA VARIABLE BÁSICA

Retomemos el mismo problema (formulado en el capítulo 3, pág. 47 y solucionado gráficamente en el capítulo 4, pág. 56), basado en la elaboración de dos tipos de sofás. La solución obtenida por medio del método símplex fue la siguiente: (Véase la Tabla 7.10 símplex I)

Tabla 7.10 Símplex I

C_j	Mezcla de productos	+M $X_{(\text{SOFÁ A})}$	+M $Y_{(\text{SOFÁ A})}$	0 H_1	0 H_2	Cantidad en horas
€10	$X_{(\text{SOFÁ A})}$	1	0	4/3	−2/3	20
€25	$Y_{(\text{SOFÁ B})}$	0	1	0	1	10
	Z_j	€10	€25	€13 1/3	€18 1/3	€450
	$W_j - C_j$	€0	€0	-€13 1/3	-€18 1/3	

¿Cuánto puede aumentar la contribución a la utilidad en X, en caso de incrementarse la demanda de sofás? o ¿cuánto puede disminuir la contribución a la utilidad en X, en caso de aminorarse la demanda de sofás debido a la competencia? Para responder a estas dos preguntas es necesario encontrar los límites inferiores y superiores en los cuales pueden cambiar los coeficientes de las variables básicas en la función objetivo, sin modificar las coordenadas del vértice J(10, 20) que nos proporciona la solución óptima.

El procedimiento de análisis de sensibilidad se aplica de la siguiente manera:

a) De la Tabla 7.10 final símplex óptima, se mantiene constante el coeficiente 25 que multiplica la Y, y se le suma a la variable básica X un coeficiente cualquiera Δ en todos los lugares en que ocurre C_j; por lo tanto, los nuevos valores obtenidos en la nueva Tabla 7.11 símplex óptima II cambian en:
$C_j \to \check{C}_j$, $Z_j \to \check{Z}_j$ y $(C_j - Z_j) \to (\check{C}_j - \check{Z}_j)$.

Tabla 7.11 Símplex II

Čj	Mezcla de productos	€10+Δ $X_{(\text{SOFÁ A})}$	€25 $Y_{(\text{SOFÁ B}}$	€0 H_1	€0 H_2	Cantidad en horas
€10+ Δ	$X_{(\text{SOFÁ A})}$	1	0	4/3	− 2/3	20
€25	$Y_{(\text{SOFÁ B})}$	0	1	0	1	10
	$\check{Z}_j$	€10+Δ	€25	€13 1/3 + 4/3 Δ	€18 1/3 + 2/3 Δ	€450 + 20 Δ
	$\check{C}_j - \check{Z}_j$	€0	€0	-€13 1/3 − 4/3 Δ	-€18 1/3 + 2/3 Δ	

b) Ahora debemos asegurarnos de que ningún valor $(\check{C}_j - \check{Z}_j)$ de las variables no básicas de la Tabla 7.11 símplex óptima II se vuelva positivo, a fin de que se cumpla la condición de optimalidad y se puedan encontrar los cambios permisibles en C_j. Es decir:

Para H_1, se tiene: $-13\frac{1}{3} - \frac{4}{3}\Delta \leq 0$, despejando: $\Delta \geq \left(13\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) = \Delta \geq -10$ límite inferior.

El sentido de la desigualdad cambia cuando se multiplica o se divide por un número negativo.

Para H_2, se tiene: $-18\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\Delta \leq$ despejando: $\Delta \leq \left(18\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \Delta \leq 27.5$ límite superior.

Por lo tanto, los cambios permisibles en C_j se pueden expresar como $-10 \leq \Delta \leq 27.5$. Estos datos nos indican que la contribución en X a las utilidades no puede disminuir a más de €10 o aumentar a más de €27.5. A partir de este análisis, podemos afirmar que las utilidades en X están limitadas a quedar entre $C_j - 10$ y $C_j + 27.5$. Como $C_j = 10$, entonces tenemos $0 \leq C_j \leq 37.5$. En la Tabla 7.12 se muestran los datos obtenidos:

Tabla 7.12

VARIABLE	LIMITE INFEROR	COEFICIENTES FUNCIÓN OBJETIVO	LIMITE SUPERIOR	DISMINUCIÓN PERMISIBLE	AUMENTO PERMISIBLE
X	0	10	37.5	10	27.5

Si la contribución a la utilidad del sofá tipo A aumentara hasta los €40, ocasionaría un cambio en el coeficiente de la variable X, mayor a lo permisible para mantener la optimalidad. En este caso, será necesario volver a calcular los nuevos datos de la Tabla 7.12 símplex óptima.

a) Calculemos cuánto aumentó Δ en $\check{C}_j$, es decir: $\Delta = €40 - €10 = €30$.
Como podemos observar, el valor (€30) está fuera de los rangos permisibles ($-10 \leq \Delta \leq 27.5$) del que puede aceptar Δ en $\check{C}_j$.

b) Sustituimos el nuevo valor de $\Delta = €30$ en la Tabla 7.13 símplex II, a fin de calcular los nuevos datos en los renglones $\check{Z}_j$ y ($\check{C}_j - \check{Z}_j$).

7.13 Tabla Símplex II

Čj	Mezcla de productos	€10+30 $X_{(\text{SOFÁ A})}$	€25 $Y_{(\text{SOFÁ B})}$	€0 H_1	€0 H_2	Cantidad en horas
€10+30	$X_{(\text{SOFÁ A})}$	1	0	4/3	-2/3	20
€25	$Y_{(\text{SOFÁ B})}$	0	1	0	1	10
	$\check{Z}_j$	€10 + 30	€25	€13 1/3 + 4/3(30)	€18 1/3 − 2/3(30)	€450 + 20(30)
	$\check{C}_j - \check{Z}_j$	€0	€0	-€13 1/3 - 4/3(30)	−€18 1/3 + 2/3(30)	

Los resultados se muestran en la Tabla 7.14 símplex óptima III:

7.54 Tabla Símplex III

Čj	Mezcla de productos	€10+30 $X_{(SOFÁ\ A)}$	€25 $Y_{(SOFÁ\ B)}$	€0 H_1	€0 H_2	Cantidad en horas
€40	$X_{(SOFÁ\ A)}$	1	0	4/3	-2/3	20
€25	$Y_{(SOFÁ\ B)}$	0	1	0	1	10
	$\check{Z}_j$	€40	€25	€53 1/3	–€1.66)	€1050
	$\check{C}_j - \check{Z}_j$	€0	€0	-€53 1/3	€1.66	

En la Tabla 7.14 símplex III se puede apreciar que se aumentó la contribución total a €1050; sin embargo, hemos obtenido un valor positivo (€1.66) en el renglón ($\check{C}_j - \check{Z}_j$) para la variable H_2. Esto implica que la variable H_2 debe entrar a la base y salir la variable X, ahora, la variable H_2 que antes era no básica se ha convertido en una variable básica, y la variable X que antes era básica se ha convertido en una variable no básica. Lo que también implica que para poder obtener una utilidad máxima de €1050, sólo se deben producir sofás tipo B.

Con base en la información obtenida hasta este momento, podemos realizar las siguientes deducciones:

1. Si el coeficiente de la contribución de la variable básica en X disminuye en menor cantidad que cero o aumenta a más de 37.5, la variable X dejará de ser básica para convertirse en variable no básica y ser reemplazada por algunas de las dos variables H_1 o H_2, cualquiera de estas dos variables que antes eran no básicas pueden entrar a la base para convertirse en variables básica.

2. Si la variable X deja de ser básica al salir de la base y es remplazada por H_1 o H_2, las coordenadas J(10, 20) del vértice que nos proporcionó la solución óptima cambiará por otro vértice cuyas coordenadas proporcionan otra solución óptima.

3. A fin de mantener la optimalidad en la variable X y para que no deje de ser básica, los límites permisibles en su coeficiente deben de estar entre 10 para la disminución permisible y 27.5 para el aumento permisible; de lo contrario, debe volverse a calcular la nueva Tabla símplex óptima.

4. Las variables no básicas (H_1 y H_2) son aquellas cuya contribución neta a las utilidades en la Tabla final símplex óptima adquieren valores negativos ($C_j - Z_j$) Por lo tanto, las utilidades que se obtendrían al producir y comercializar cualquier cantidad de una variable no básica son menores o iguales que las ganancias a las que sería mejor renunciar; por el contrario, los cambios en los coeficientes de la contribución a la utilidad de las variables básicas tendrán de alguna manera algún impacto positivo o negativo sobre la solución existente.

7.3.2 CAMBIO EN EL TÉRMINO INDEPENDIENTE DE UNA RESTRICCIÓN

Ahora, aplicaremos el análisis de sensibilidad al valor independiente del lado derecho de una restricción, con el fin de encontrar el límite inferior y superior en el cual es aplicable el precio dual.

Retomemos el mismo problema basado en la elaboración de dos tipos de sofás.

La solución obtenida por medio del método símplex fue la siguiente: (Véase la Tabla 7.15 símplex I)

7.15 Tabla Símplex I

C_j	Mezcla de productos	€10+30 $X_{(SOFÁ\ A)}$	€25 $Y_{(SOFÁ\ B)}$	€0 H_1	€0 H_2	Cantidad en horas
€10	$X_{(SOFÁ\ A)}$	1	0	4/3	-2/3	20
€25	$Y_{(SOFÁ\ B)}$	0	1	0	1	10
	Z_j	€10	€25	€13 1/3	€18 1/3	€450
	$C_j - Z_j$	€0	€0	–€13 1/3	–€18 1/3	

Supongamos que se desea aumentar la producción y venta de sofás tipo B, pues el mercado así lo demanda. ¿Cómo afectará a la contribución total y la producción en los dos tipos de sofás, si se decide producir más sofás tipo B? Para responder a esta pregunta es necesario aplicar el análisis de sensibilidad al valor derecho de la restricción que tiene efecto en la producción del sofá tipo B y en donde el precio dual es aplicable.

Antes de aplicar el análisis de sensibilidad, debemos recordar que el precio dual es el mejoramiento en el valor de la solución óptima por unidad de incremento en el valor independiente del lado derecho de una restricción; por lo tanto, los valores 18 1/3 y –18 1/3, situados en los renglones Z_j y $(C_j - Z_j)$ de la columna H_2 proporcionan el precio dual, el cual nos indica que por cada hora que se añade o que se le quita para la producción de sofás tipo B, obtenemos un aumento o disminución en la solución óptima de €18. Sabiendo esta información, ya podemos aplicar el procedimiento de análisis de sensibilidad, para calcular los parámetros del límite inferior y superior cuando un recurso que se modifica.

El procedimiento se realiza de la siguiente manera:

1. A los valores de la columna de los términos independientes de la Tabla símplex I, le sumamos los valores de la columna cuya holgura se encuentra relacionada, multiplicada por una cantidadΔ_N.

$$\text{Para X: } 20 - 2/3\ \Delta_N$$
$$\text{Para Y: } 10 + 1\Delta_N$$

Donde Δ_N representa un número positivo o negativo que refleja posibles aumentos o disminuciones en la disponibilidad de recursos para el sofá que se encuentra bajo análisis, en este caso, el sofá tipo B, que se relaciona con los valores de la columna H_2. Recordemos que cuando entró a la base la variable Y(SOFÁ B) salió la variable holgura H_2.

2. Se debe cumplir con las condiciones de no negatividad impuestas por las restricciones $X \geq 0$ y $Y \geq 0$. Entonces, para mantener la factibilidad, se estructura una desigualdad para cada función mayor o igual que cero, lo que permite obtener un intervalo de Δ_N que satisface cada una de ellas. Por consiguiente:

$$\text{Para X: } 20 - 2/3\Delta_N \geq 0$$
$$\text{Para Y: } 10 + \ \ 1\Delta_N \geq 0$$

3. Ahora es necesario despejar las dos desigualdades a fin de encontrar el conjunto más restringido de los límites de Δ_N.

$$\Delta_N \geq -20\ (-3/2) \Rightarrow \Delta_N \leq 30$$
$$\Delta_N \geq -10/1 \Rightarrow \Delta_N \geq -10$$

Luego, el límite inferior y superior permisible de Δ_N está restringido en $-10 \leq \Delta_N \leq 30$.

Los datos obtenidos nos indican que el recurso medido en horas para el sofá tipo B puede disminuir hasta 10 horas o aumentar hasta 30 horas. Expresado esto en términos de disponibilidad de horas con respecto al sofá tipo B en el departamento de cubiertas $(Y \leq 10)$, obtenemos b_N.

$$-10 + 10 \leq b_N \leq 30 + 10 \text{ o bien, } 0 \leq b_N \leq 40$$

Así, la solución óptima actual lo seguirá siendo si existen cuando menos 40 horas disponibles para la producción de sofás tipo B.

Expresemos los datos obtenidos por medio de las dos siguientes Tablas:(Véanse las Tablas 7.16 II y 7.17 símplex II)

7.16 Tabla Símplex II

RESTRICCIONES OBLIGATORIAS	LÍMITE INFEROR	VALOR ÓPTIMO	LÍMITE SUPERIOR	DISMINUCIÓN PERMISIBLE	AUMENTO PERMISIBLE	PRECIO DUAL
Cubiertas	0	10	40	10	30	18.333

7.17 Tabla Símplex II

C_j	Mezcla de productos	€10	€25	€0	€0	Cantidad de sofás
		$X_{(\text{SOFÁ A})}$	$Y_{(\text{SOFÁ B})}$	H_1	H_2	
€10	$X_{(\text{SOFÁ A})}$	1	0	4/3	-2/3	$20 - 2/3\ \Delta_N$
€25	$Y_{(\text{SOFÁ B})}$	0	1	0	1	$10 + 1\Delta_N$
	Z_j	€10	€25	€13 1/3	€18 1/3	€(450 + 18 1/3 ΔN)
	$C_j - Z_j$	€0	€0	-€13 1/3	–€18 1/3	

Con estos datos obtenidos, la empresa sabrá cómo afectará la contribución total y la producción en los dos tipos de sofás, si se decide producir más sofás tipo B.

Para poder producir y vender más sofás tipo B se debe contar con más cantidad de horas disponibles (recurso). Supongamos que se decide añadir 9 horas a las 10 que anteriormente se tenían antes de solucionar el problema por medio del método símplex, lo que suma 19 horas. Observe que el límite máximo permisible (Tabla 7.17 símplex II) es de 30 horas; por lo tanto, se encuentra dentro de límite permitido. Esto permitirá a la fábrica obtener una nueva contribución total, en consecuencia, una nueva producción de sofás tipo A y B diferente:

Contribución total en: €[450 + 18 1/3 (9)] = €615.

Producción de sofás tipo A y B en:

Para X(SOFÁ A): $20 - 23\Delta_N \Rightarrow 20 - 2/3(9) = 14$ Para $Y_{(\text{SOFÁ B})}$: $10 + 1\Delta_N \Rightarrow 10 + 1(9) = 19$

La información obtenida permite deducir lo siguiente:

Por cada hora que se le añada para la producción del sofá tipo B, la contribución total aumentará en €($450 + 18\ 1/2\Delta_N$), con la condición que el precio dual se mantenga dentro de los límites inferior y superior de 10 para la disminución permisible y 30 para el aumento permisible.

▶ RESUMEN

La teoría de la dualidad establece que un problema dual de programación lineal se origina directamente a partir del modelo original denominado problema primal. Ambos se encuentran muy relacionados, de tal manera que la solución óptima de cualquiera de ellos proporciona la solución óptima del otro. La solución del problema dual del primal nos proporciona los precios marginales (conocidos como: precios duales, precios sombra y multiplicadores símplex), los cuales tienen un vínculo importante con el análisis de sensibilidad.

Aplicando el análisis de sensibilidad en la última Tabla símplex óptima, y analizando la información contenida en las columnas designadas como disminución permisible y aumento permisible, podemos hacer cambios en el valor de un coeficiente de una variable básica, sin cambiar los valores de las variables de decisión que nos proporcionaron la solución óptima; de manera similar, analizando tanto los límites inferiores y superiores, como la disminución permisible y el aumento permisible en los cuales actúan los precios duales, es posible realizar cambios en los valores del lado derecho que conforman las restricciones activas.

EVALUACIÓN

De los siguientes problemas, realice la conversión del primal al dual. Luego, resuelva el primer problema por medio del Método de la M y el segundo por el Método de las dos fases y, por último, realice el análisis de sensibilidad tal como se aprendió en este capítulo:

Problema 2. Capítulo 7

Una empresa química fabrica dos aditivos que permiten la elaboración de dos detergentes, uno se utiliza especialmente para la limpieza de artículos de vestuario y el otro para el lavado de utensilios de cocina. Para producir los dos aditivos se requiere mezclar tres materiales químicos, tal como se indica en la Tabla X:

Tabla X

MATERIALES	ADITIVO PARA LIMPIEZA DE VESTUARIOS	ADITIVO PARA LIMPIEZA DE UTENSILIOS DE COCINA
Material A	.2	.65
Material B	No contiene material B	.15
Material C	.4	.3

Para llevar a cabo la producción se dispone de 14 toneladas del material A, 3 del material B y 12 del material C. Además, el gerente analizó las cifras de producción y determinó una utilidad de €37 por cada tonelada que se produzca a base de aditivo utilizado como detergente para limpieza de artículos de vestuario, y €48 por cada tonelada producida de base de aditivo utilizado como detergente para limpieza de utensilios. Determine la cantidad de aditivo que es conveniente producir de acuerdo a su uso, a fin de maximizar la contribución a la ganancia total.

Prolema 2. *Capítulo* 7

Se ofrece a los estudiantes de Administración un curso de álgebra matricial que se imparte en 12 horas clase y otro de programación lineal (PL) que se imparte en 20 horas clase. El departamento de matemáticas solicitó que el curso de álgebra matricial se divida en 5 o más temas, y el curso de PL se divida en 8 o más temas. En el verano se dispone de no más de 400 horas clase. Los cursos son impartidos por dos asesores, el que imparte los temas relacionados con el álgebra matricial cobra $2400 y el que imparte los temas de PL cobra $7650. Para que se lleven a cabo estos dos cursos se deben inscribir más de 21 alumnos.

▶ PL EN ACCIÓN (Estimación de los valores nutritivos de los alimentos en la Universidad de Minnesota) [1]

El Centro Coordinador de Nutrición (CCN) de la Universidad de Minnesota mantiene una base de datos de la composición de los alimentos que emplean nutriólogos e investigadores de todo el mundo. La información proporcionada por el CCN se usa para estimar la ingestión de nutrientes de los individuos, para planear menús, para investigar vínculos entre la dieta y las enfermedades, y para satisfacer requerimientos reguladores.

Los cálculos de investigación requieren de una cantidad enorme de valores nutritivos de los alimentos. La base de datos del CCN contiene información sobre 93 nutrientes diferentes para cada producto alimentario; con muchos productos y con nuevas marcas introducidas cada año, el CCN tiene la tarea significativa de mantenerse actualizada; su labor se hace más difícil porque los productos con marcas nuevas sólo proporcionan cifras sobre una cantidad relativamente pequeña de nutrientes. Debido al alto costo del análisis químico de productos nuevos, el CCN usa un modelo de programación lineal para ayudar a estimular miles de valores de nutrientes por año.

Las variables de decisión en el modelo de programación lineal son las cantidades de cada ingrediente en un producto alimentario. El objetivo es minimizar la diferencia entre los valores de nutrientes estimados y los valores de nutrientes conocidos para el producto. Las restricciones consisten en que los ingredientes deben estar en el orden descendiente por peso, deben estar dentro de los límites especificados por los nutriólogos y las diferencias entre los valores de nutrientes calculados y los valores de nutrientes conocidos deben estar dentro de las tolerancias establecidas.

En la práctica, un nutriólogo del CCN emplea el modelo de programación lineal para derivar estimaciones de las cantidades de cada ingrediente en un nuevo producto alimenticio. Una vez hecho esto, el nutriólogo refina las estimaciones basado en su conocimiento de formulación del producto y la composición del alimento. Después, pueden calcularse las cantidades de cada nutriente en el producto. Con aproximadamente 1000 productos evaluados cada año, son significativos los ahorros en tiempo y costo logrados con el uso de la programación lineal para ayudar a estimar dichos valores.

1 PL EN ACCIÓN fue obtenido de: David R. Anderson, Dennis J. Sweeney y Thomas A. Williams. *Métodos Cuantitativos para los Negocios*, 9a. ed., Editorial Thomson, pág. 307. Basado a su vez en: Brian J. Westrich, Michael A. Altmann y Sandra J. Potthot, "Minnesota´s Nutrion Coordinating Center Uses Mathematical Optimization to Estimate Food Nutrient Values", Interfaces (septiembre/octubre de 1998): 86-99.

GLOSARIO

Teoría de la dualidad.—La teoría de la dualidad establece que un problema dual de programación lineal se origina directamente a partir del modelo original denominado problema primal. Ambos se encuentran muy relacionados, de tal manera que la solución óptima de cualquiera de ellos proporciona la solución óptima del otro. La importancia de la teoría de la dualidad radica en tres razones básicas:

1. El planteamiento dual de un problema de programación lineal puede dar como resultado una reducción considerable en los cálculos.
2. La posibilidad de obtener información económica acerca del valor de los recursos escasos que se utilizan cuando se analiza el problema dual.
3. La relación dual tiene un nexo importante con el análisis de sensibilidad.

Análisis de sensibilidad.—Este término se utiliza para estudiar y saber cómo afectan los cambios en los coeficientes de un problema de programación lineal en la solución óptima y los cambios en el valor independiente de una restricción.

Precio dual y precio sombra.—Se conoce como precio dual al mejoramiento en el valor de la solución óptima por unidad de aumento en el valor independiente del lado derecho de una restricción. El precio dual y sombra son lo mismo para todos los problemas de maximización; sin embargo, en un problema de minimización, este último es el negativo del precio dual correspondiente. Ambos proporcionan información económica que ayuda a tomar decisiones para la administración de recursos adicionales.

CAPÍTULO 8

MÉTODOS DE TRANSPORTE Y ASIGNACIÓN

▷ 8.1 INTRODUCCIÓN

A continuación se explicarán y solucionarán algunos problemas especiales de PL denominados de "flujo de red", los cuales se encuentran clasificados como modelos de transporte. En estos casos, el equipo de IO debe determinar las rutas a usar y la cantidad de bienes que se deberán embarcar desde cada planta o almacén a cada centro de distribución en donde se comercializará el producto, con el objeto de minimizar el costo de transportación y al mismo tiempo satisfacer la demanda del consumidor.

Estos problemas se pueden resolver en forma rápida y eficiente sin importar la cantidad de variables y restricciones que contenga el modelo por medio de los siguientes algoritmos:

1. Regla de la esquina noroeste (REN).
2. Método del costo mínimo (MCM).
3. Método por aproximaciones de Vogel (MAV).
4. Método de pasos secuenciales (MPS).
5. Método de distribución modificada (MODI).

También se explicará el modelo de transporte denominado problema de asignación utilizando el método húngaro para solucionarlo.

▷ 8.2 EL PROBLEMA DE TRANSPORTE

Como se indicó en la introducción, el objetivo común en un programa de transporte es determinar las rutas a usar y la cantidad de bienes que se deberán embarcar desde cada planta o almacén a cada centro de distribución en donde se comercializará el producto, con el fin de minimizar el costo de transportación y al mismo tiempo satisfacer la demanda del consumidor. Lo ilustraremos por medio de un ejemplo.

Una modista vende rollos de tela de lino en los siguientes centros de distribución: Querétaro, Monterrey, Veracruz y Zacatecas. Para poder comercializar el producto es necesario transportarlo desde 3 plantas que se encuentran ubicadas en Cd. Valles, Tampico y Ébano. La capacidad de producción de cada planta en un mes se ve en la Tabla 8.1.

Tabla 8.1

ORIGEN	PLANTA	CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN
1	Cd. Valles	4000
2	Tampico	5000
3	Ébano	3000

La capacidad de demanda de los centros de distribución en un mes se ve en la Tabla 8.2.

Tabla 8.2

DESTINO	PLANTA	CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN
1	Querétaro	2000
2	Monterrey	4500
3	Veracruz	3000
4	Zacatecas	2500

El costo de transporte por unidad en cada ruta es el que muestra la Tabla 8.3.

Tabla 8.3

ORIGEN	DESTINO			
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas
Cd. Valles	\$4	\$7	\$5	\$9
Tampico	\$6	\$4	\$8	\$5
Ébano	\$4	\$6	\$6	\$8

¿Cuáles son las rutas a usar y la cantidad de rollos de tela de lino a transportar desde la planta a cada centro de distribución para lograr que el costo de transporte total sea mínimo? Para solucionar el problema es necesario diseñar un esquema llamado flujo de red, el cual nos proporciona toda la información requerida para solucionar el modelo. (Véase la Figura 8.1)

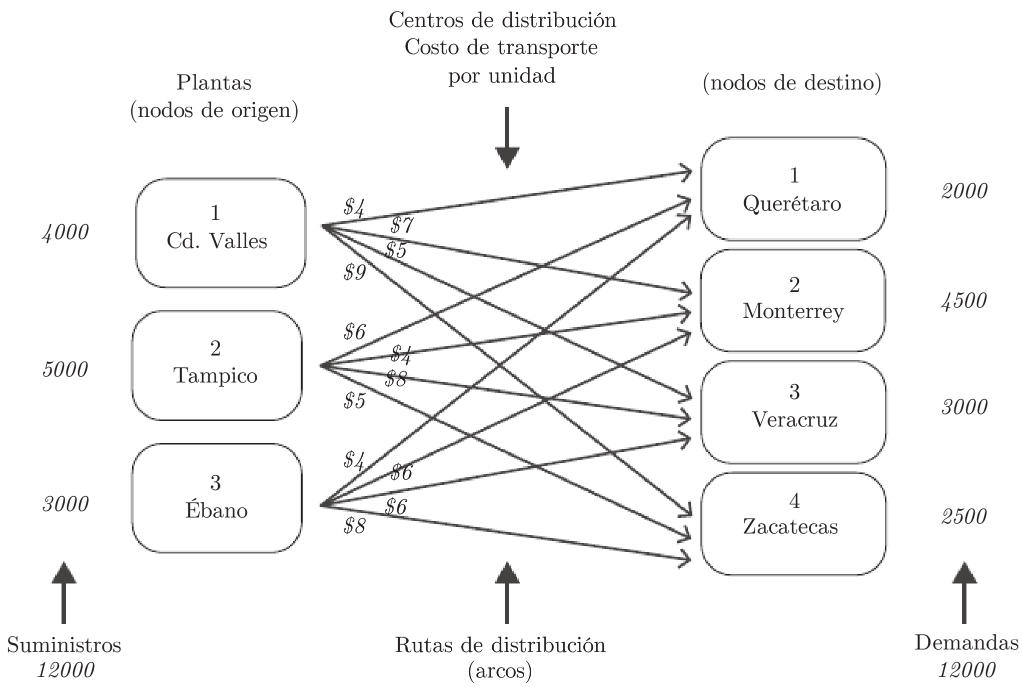


Figura 8.1

Cada origen y destino se representa como un nodo (los rectángulos) y cada ruta de embarque posible se representa con un arco (las líneas que las conectan). La cantidad de suministro se escribe junto a cada nodo de origen y la cantidad de la demanda se escribe junto a cada nodo de destino. Los bienes transportados de los orígenes representan el flujo en la red.

Debido a que el objetivo es minimizar el costo total, podemos usar los datos que nos proporciona el esquema 1 para elaborar las expresiones relacionadas con los costos. Por ejemplo:

El costo de transporte para las unidades embarcadas en Cd. Valles es: $4X_{11} + 7X_{12} + 5X_{13} + 9X_{14}$.

De la expresión $7X_{12}$, el 7 representa el costo por transportar un rollo de tela de lino desde la planta de origen hasta su destino de distribución. X_{12}, el subíndice 1 nos indica que el origen de embarque es en Cd. Valles; y el subíndice 2 nos indica que el destino de distribución es Monterrey.

En general, las variables de decisión para un problema de transporte que tiene m orígenes y n destinos se escriben como sigue:

X_{ij} = cantidad de unidades embarcadas del origen i al destino j. Donde $i = 1, 2, 3,..., m$ y $j = 1, 2, 3, ..., n$

El costo de transporte para las unidades embarcadas en Tampico es: $6X_{21} + 4X_{22} + 8X_{23} + 5X_{24}$.

El costo de transporte para las unidades embarcadas en Ébano es: $4X_{31} + 6X_{32} + 6X_{33} + 8X_{34}$.

La suma de estas expresiones proporciona la función objetivo que muestra el costo de transporte total para la empresa de los rollos de lino:

Minimizar: $4X_{11} + 7X_{12} + 5X_{13} + 9X_{14} + 6X_{21} + 4X_{22} + 8X_{23} + 5X_{24} + 4X_{31} + 6X_{32} + 6X_{33} + 8X_{34}$

El problema de transporte se encuentra sujeto a restricciones debido a que cada origen tiene un suministro limitado, y cada destino tiene un requerimiento de demanda de rollos de tela de lino; por consiguiente, las restricciones se encuentran determinadas de la siguiente manera:

Restricciones de suministro:

Cd. Valles: $X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \leq 4000$
Tampico: $X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 5000$
Ébano: $X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \leq 3000$

Restricciones de demanda:

Querétaro: $X_{11} + X_{21} + X_{31} = 2000$
Monterrey: $X_{12} + X_{22} + X_{32} = 4500$
Veracruz: $X_{13} + X_{23} + X_{33} = 3000$
Zacatecas: $X_{14} + X_{24} + X_{34} = 2500$

El problema de transporte cuenta con 12 variables y 7 restricciones; combinando la función objetivo y las restricciones, queda formulado de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar:} & 4X_{11} + 7X_{12} + 5X_{13} + 9X_{14} + 6X_{21} + 4X_{22} + 8X_{23} + 5X_{24} + 4X_{31} + 6X_{32} + 6X_{33} + 8X_{34} \\
\text{Sujeto a:} & X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \leq 4000 \\
& X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 5000 \\
& X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \leq 3000 \\
& X_{11} + X_{21} + X_{31} = 2000 \\
& X_{12} + X_{22} + X_{32} = 4500 \\
& X_{13} + X_{23} + X_{33} = 3000 \\
& X_{14} + X_{24} + X_{34} = 2500 \\
& X_{ij} \geq 0 \text{ para } i = 1, 2,3 \text{ y } j = 1, 2, 3 \text{ y } 4
\end{array}
$$

En general, un modelo de programación lineal de transporte tiene las siguientes características:

i = índice para los orígenes, $i = 1,2,..., m$
j = índice para los destinos, $j = 1,2,..., n$
X_{ij} = cantidad de unidades de embarque del origen i al destino j
C_{ij} = costo por unidad de embarque del origen i al destino j
S_i = suministro o capacidad en unidades en el origen i
d_j = demanda en unidades de destino j

Entonces, un modelo de programación lineal de transporte de m orígenes y n destinos es:

$$\text{Maximizar: } \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq Si \quad i = 1, 2\ldots, m \text{ Suministros}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = d_j \quad j = 1, 2\ldots, n \text{ Demanda}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \text{para toda } i \text{ y } y$$

Acabamos de usar un esquema bien detallado que nombramos flujo de red, el cual nos proporcionó los datos pertinentes para formular un problema de programación lineal, que puede ser resuelto por el método símplex, el de las dos fases o el método de la M; sin embargo, debido a su estructura, lo podemos resolver fácilmente y en un tiempo mucho menor utilizando los siguientes métodos: la regla de la esquina noroeste (REN), el método del costo mínimo (MCM), el método por aproximaciones de Vogel (MAV) y el método de distribución modificada (MODI).

8.2.1 REGLA DE LA ESQUINA NOROESTE (REN)

La regla de la esquina noroeste (REN) es un algoritmo que utiliza los datos que relacionan cuantitativamente los suministros en cada planta o almacén con la cantidad de productos que demandan los consumidos en cada destino. Este método produce una solución factible inicial debido a que no considera los costos durante el proceso de asignar las ofertas; por lo tanto, la solución óptima sólo es obtenida por casualidad.

Expliquemos la REN solucionando el problema que enfrenta la empresa de rollos de tela de lino. Comencemos con los datos que nos proporcionó el flujo de red obtenido en el subcapítulo 8.2. (Véase la Figura 8.2)

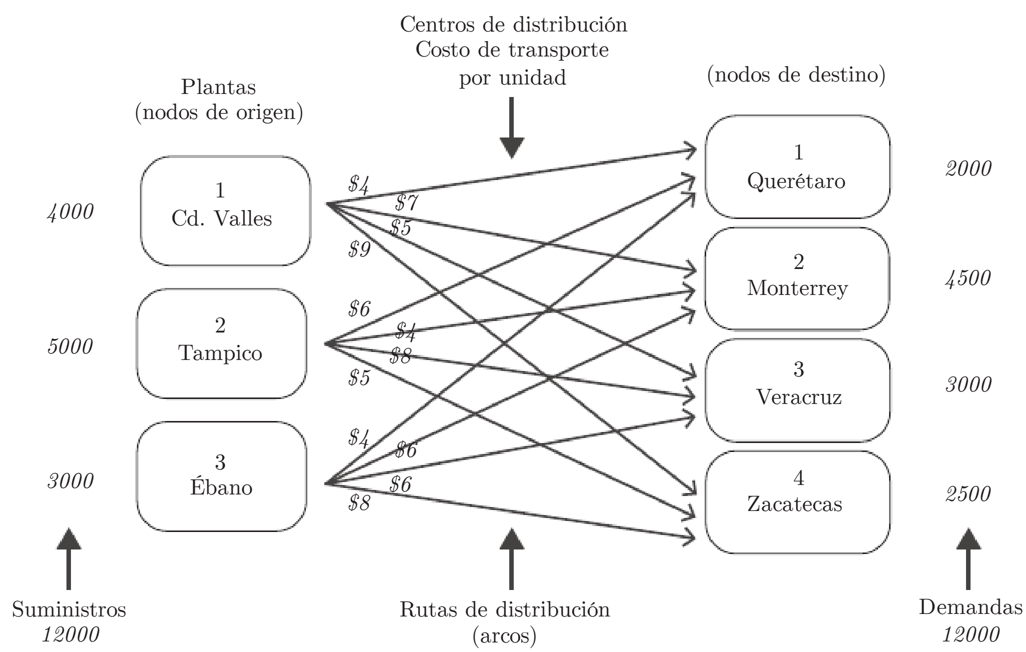


Figura 8.2

Por medio del Figura 8.2 podemos elaborar una tabla de transporte A que contenga todos los datos pertinentes para facilitar la solución del problema:

Tabla 8.4 Transporte A

Plantas X_{ij}	Distribuidores				Suministro (oferta)	
	1	2	3	4		
1	X_{11}				4000	Cd. Valles
2					5000	Tampico
3					3000	Ébano
Demanda	2000	4500	3000	2500	12000	
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas		

Los pasos que se requieren para aplicar la REN son los siguientes:

Analizando la Tabla 8.4 de transporte A:

1. Se comienza con la celdilla superior izquierda (ruta X_{11}); es decir, por la esquina noroeste.
2. Se analiza cuantitativamente tanto la oferta como la demanda y se elige la menor cantidad. En este caso, la demanda que exige el estado de Querétaro es de 2000 unidades de tela de lino, la cual condiciona la oferta de 4000 rollos de tela que puede suministrar la planta 1 que se encuentra localizada en Cd. Valles.
3. Como la demanda de telas en Querétaro queda satisfecha, nos desplazamos de la casilla X_{11} a la casilla X_{12}, sobrando 2000 unidades en la planta 1 que suministra a Cd. Valles.
4. Eliminamos la columna 1 que se encuentra indicada de color gris.

Lo expresado se encuentra en la Tabla 8.5 de transporte B:

Tabla 8.5 Transporte B

Plantas X_{ij}	Distribuidores				Suministro (oferta)		
	1	2	3	4			
1	2000	X_{12}			~~4000~~	Cd. Valles	2000
2					5000	Tampico	
3					3000	Ébano	
Demanda	~~2000~~	4500	3000	2500	12000		
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas			
	0						

Analizando la Tabla 8.5 de transporte B:

1. De nuevo, se escoge la menor cantidad entre la oferta que ofrece la planta 1, ubicada en Cd. Valles, y la demanda que requieren los consumidores en Monterrey. En este caso, la oferta es de 2000 unidades que condicionan la demanda, que requiere

4500 rollos de telas de lino; por lo tanto, la oferta en la planta 1 en Cd. Valles queda completa.

2. Como la planta 1 ya no tiene rollos de tela de lino que ofrecer, nos desplazamos de la casilla X_{12} a la casilla $X_{22,}$ sobrando 2500 unidades en la distribuidora de Monterrey.
3. Eliminamos el renglón 1 que se encuentra indicado de color gris.

Lo expresado en los incisos anteriores se encuentra indicado en la Tabla 8.6 de transporte C:

Tabla 8.6 Transporte C

Plantas X_{ij}	Distribuidores				Suministro (oferta)			
	1	2	3	4				
1	2000	2000			4000	Cd. Valles	~~2000~~	0
2		X_{22}			5000	Tampico		
3					3000	Ébano		
Demanda	~~2000~~	4500	3000	2500	12000			
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas				
	0	2500						

Analizando la Tabla 8.6 de transporte C:

1. De nuevo, se escoge la menor cantidad entre la oferta y la demanda. En este caso, la demanda es de 2500 unidades de tela de lino, que condiciona la oferta que requiere de 5000 rollos; por lo tanto, la demanda en la distribuidora de Monterrey queda satisfecha.
2. Como la oferta en Monterrey quedó satisfecha, nos desplazamos de la casilla X_{22} a la casilla $X_{23,}$ sobrando 2500 unidades en la planta que suministra a Tampico.
3. Eliminamos la columna 2 que se indica de color gris.

Lo expresado se encuentra en la Tabla 8.7 de transporte D:

Tabla 8.7 Transporte D

Plantas X_{ij}	Distribuidores				Suministro (oferta)			
	1	2	3	4				
1	2000	2000			4000	Cd. Valles	2000	0
2		2500	X_{23}		5000	Tampico	~~2500~~	
3					3000	Ébano		
Demanda	~~2000~~	4500	3000	2500	12000			
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas				
	0	~~2500~~						
		0						

El mismo razonamiento sistemático antes mencionado se aplica hasta llegar a la solución final que nos proporciona la solución factible, tal como se indica en la Tabla 8.8 de transporte E:

Tabla 8.8 Transporte E

Plantas X_{ij}	Distribuidores				Suministro (oferta)			
	1	2	3	4				
1	2000	2000			4000	Cd. Valles	~~2000~~	0
2		2500	2500		5000	Tampico	~~2500~~	0
3			500	2500	3000	Ébano	~~2500~~	
Demanda	~~2000~~	4500	3000	~~2500~~	12000			
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas				
	0	~~2500~~	~~500~~	0				
		0	0					

Por último, nos falta calcular el valor de la función objetivo y diseñar de nuevo el de flujo de red. Para esto, es necesario utilizar los datos que nos proporciona la tabla de transporte E de la siguiente manera: (Véase la Tabla 8.1 y la Figura 8.3)

Tabla 8.9 *Costo total obtenido por medio de la regla de la esquina* ***noroeste***

SUMINISTROS	PLANTAS	RUTA	DESTINO	DEMANDAS	COSTO POR UNIDAD	COSTO TOTAL
4000	Cd. Valles	X_{11}	Querétaro	2000	\$4	\$ 8000
	Cd. Valles	X_{12}	Monterrey	2000	\$7	\$14000
5000	Tampico	X_{22}	Monterrey	2500	\$4	\$10000
	Tampico	X_{23}	Veracruz	2500	\$8	\$20000
3000	Ébano	X_{33}	Veracruz	500	\$6	\$ 3000
	Ébano	X_{34}	Zacatecas	2500	\$8	\$20000
						\$75000

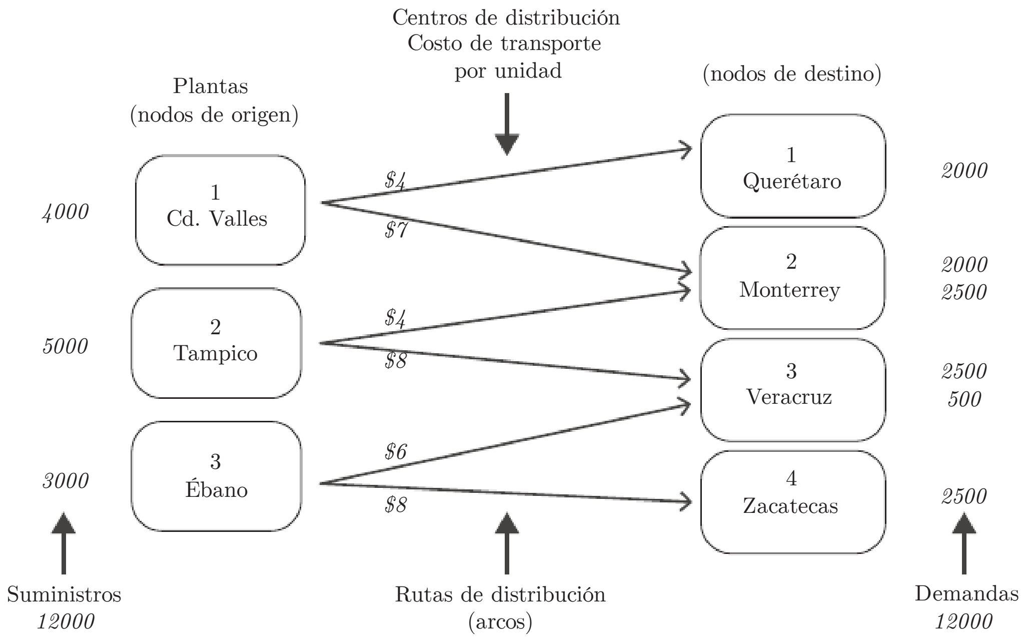


Figura 8.3

◢ 8.2.2 MÉTODO DEL COSTO MÍNIMO (MCM)

A diferencia del REN, que no considera los costos de envío, el método del costo mínimo (MCM) sí toma en cuenta los costos por transportar la mercancía desde el suministro de cada planta hacia sus destinos, con el fin de obtener la mejor solución factible inicial.

Expliquemos el MCM solucionando nuevamente el problema que enfrenta la modista que comercializa rollos de tela de lino. Comencemos con el flujo de red obtenido en el subcapítulo 8.2: (Véase la Figura 8.4)

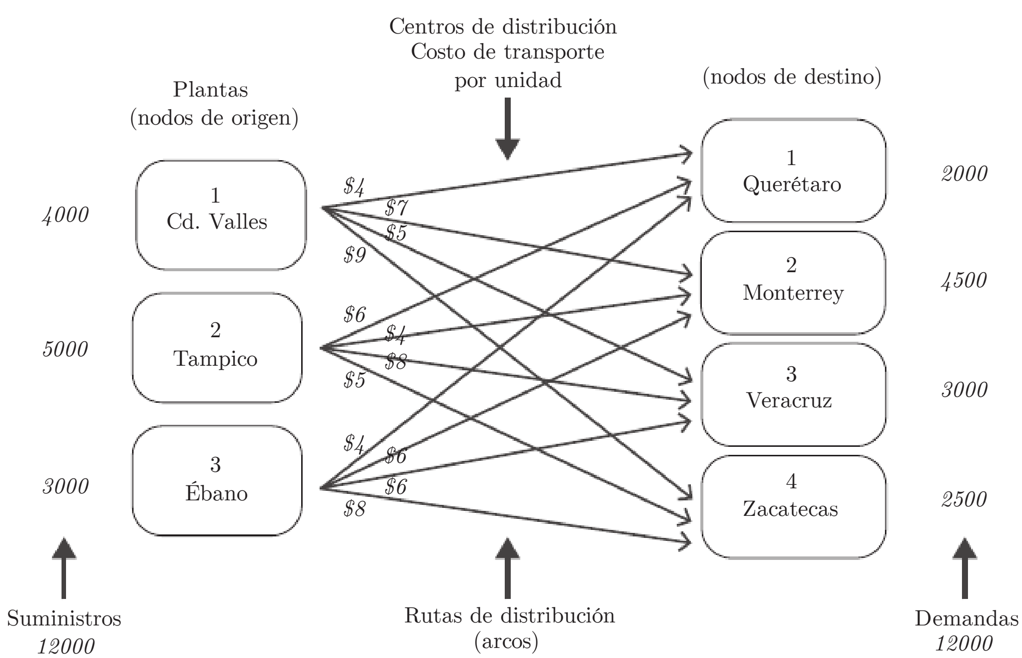


Figura 8.4

Ahora elaboremos una tabla de transporte A utilizando el esquema 1, y solucionemos el problema aplicado el MCM como sigue: (Véase la Tabla 8.10 de transporte A)

Tabla 8.10 Transporte A

Plantas X_{ij}	Distribuidores 1	2	3	4	Suministro (oferta)	
1	4	7	5	9	4000	Cd. Valles
2	6	4	8	5	5000	Tampico
3	4	6	6	8	3000	Ébano
Demanda	2000	4500	3000	2500	12000	
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas		

Analizando la Tabla 8.10 de transporte A:

1. Se comienza con la celdilla que representa la ruta de menor costo. Hay un empate entre las celdillas: $X_{11} = 4$, $X_{22} = 4$ y $X_{31} = 4$. Se elige arbitrariamente la celdilla X_{22}.
2. Se analiza cuantitativamente tanto la oferta como la demanda y se elige la menor cantidad. En este caso, la demanda en Monterrey es de 4500 unidades de tela de lino, la cual condiciona la oferta de 5000 rollos de tela que puede suministrar la planta 2, localizada en Tampico.
3. Como la demanda en Monterey queda satisfecha, eliminamos la columna 2, sobrando 500 unidades en la planta 2 que suministra Tampico.

Lo expresado se encuentra en la Tabla 8.11 de transporte B:

Tabla 8.11 Transporte B

Plantas X_{ij}	Distribuidores 1	2	3	4	Suministro (oferta)		
1	4	7	5	9	4000	Cd. Valles	
2	6	4500 4	8	5	5000	Tampico	500
3	4	6	6	8	3000	Ébano	
Demanda	2000	~~4500~~	3000	2500	12000		
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas			
		0					

Analizando la Tabla 8.11 de transporte B:

1. Volvemos escoger la celdilla que representa la ruta de menor costo. Hay un empate entre las celdillas: $X_{11} = 4$ y $X_{31} = 4$. Elegimos arbitrariamente la celdilla X_{31}.
2. De nuevo, se escoge la menor cantidad entre la oferta que ofrece la planta 3 ubicada en Ébano y la demanda que requieren los consumidores en Querétaro. Es este caso, la demanda es de 2000 unidades que condicionan la oferta que requiere de 3000 rollos de tela de lino.

3. Como la demanda en Querétaro quedó satisfecha, eliminamos la columna 1, sobrando 1000 unidades que suministra la planta 3.

Esto se encuentra indicado en la Tabla 8.12 de transporte C:

Tabla 8.12 Transporte C

Plantas X_{ij}	Distribuidores 1	2	3	4	Suministro (oferta)		
1	^{4}	^{7}	^{5}	^{9}	4000	Cd. Valles	
2	^{6}	4500 ^{4}	^{8}	^{5}	5000	Tampico	500
3	^{4}	^{6}	^{6}	^{8}	3000	Ébano	1000
Demanda	~~2000~~	~~4500~~	3000	2500	12000		
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas			
	0	0		2000			

Analizando la Tabla 8.12 de transporte C:

1. Volvemos escoger la celdilla que representa la ruta de menor costo. Hay un empate entre las celdillas: $X_{13} = 5$ y $X_{24} = 5$. Escogemos de manera arbitraria la celdilla $X_{24} = 5$.

2. Es este caso, la oferta es de 500 unidades, que condiciona la demanda que requiere 2500 rollos de tela de lino.

3. Como la oferta en Tampico queda satisfecha, eliminamos el renglón 2, sobrando 2000 unidades en Zacatecas.

Lo expresado se encuentra indicado en la Tabla 8.13 de transporte D:

Tabla 8.13 Transporte D

Plantas X_{ij}	Distribuidores 1	2	3	4	Suministro (oferta)			
1	^{4}	^{7}	^{5}	^{9}	4000	Cd. Valles		
2	^{6}	4500 ^{4}	^{8}	500 ^{5}	5000	Tampico	~~500~~	0
3	2000 ^{4}	^{6}	^{6}	^{8}	3000	Ébano	1000	
Demanda	2000	~~4500~~	3000	2500	12000			
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas				
	0	0		2000				

Analizando la Tabla 8.13 de transporte D:

1. Volvemos escoger la celdilla que representa la ruta de menor costo. Como no hay empate, seleccionamos la celdilla $X_{13} = 5$.

2. La demanda de 3000 rollos de tela de lino condiciona la oferta de 4000 unidades.

3. Como la demanda en Veracruz queda satisfecha, eliminamos la columna 3, sobrando 1000 unidades en Cd. Valles.

Lo expresado se encuentra en la Tabla 8.14 de transporte E:

Tabla 8.14 Transporte E

Plantas X_{ij}	Distribuidores				Suministro (oferta)			
	1	2	3	4				
1	(4)	(7)	3000 (5)	(9)	4000	Cd. Valles	1000	
2	(6)	4500 (4)	(8)	2000 (5)	5000	Tampico	~~500~~	0
3	2000 (4)	(6)	(6)	(8)	3000	Ébano	1000	
Demanda	~~2000~~	~~4500~~	~~3000~~	2500	12000			
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas				
	0	0	0	2500				

Analizando la Tabla 8.14 de transporte E:

1. Nuevamente, escogemos la celdilla que representa la ruta de menor costo. Como no hay empate seleccionamos la celdilla $X_{34} = 8$.
2. La oferta de 1000 rollos de tela de lino condiciona la demanda de 2000 unidades.
3. La oferta en Ébano queda satisfecha, sobrando 1000 unidades en Zacatecas. Ahora, el renglón 3 es eliminado.

Lo expresado se encuentra en la Tabla 8.15 de transporte F:

Tabla 8.15 Transporte F

Plantas X_{ij}	Distribuidores				Suministro (oferta)			
	1	2	3	4				
1	(4)	(7)	3000 (5)	(9)	4000	Cd. Valles	1000	
2	(6)	4500 (4)	(8)	500 (5)	5000	Tampico	~~500~~	0
3	2000 (4)	(6)	(6)	1000 (8)	3000	Ébano	~~1000~~	0
Demanda	~~2000~~	~~4500~~	~~3000~~	2500	12000			
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas				
	0	0	0	2000				
				1000				

Analizando la Tabla 8.15 de transporte F:

1. Elegimos por último la celdilla $X_{14} = 9$.
2. Como la oferta en la planta de suministro ubicada en Cd. Valles es igual a la demanda de rollos de tela de lino que requieren los consumidores en Zacatecas, afirmamos que hemos llegado a una solución inicial factible.

Lo expresado se encuentra en la Tabla 8.16 de transporte G:

Tabla 8.16 Transporte G

Plantas X_{ij}	Distribuidores 1	2	3	4	Suministro (oferta)			
1	4	7	3000 5	1000 9	4000	Cd. Valles	~~1000~~	0
2	6	4500 4	8	500 5	5000	Tampico	~~500~~	0
3	2000 4	6	6	1000 8	3000	Ébano	~~1000~~	0
Demanda	~~2000~~	~~4500~~	~~3000~~	2500	12000			
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas				
	0	0	0	2000				
				~~1000~~				
				0				

Por último, falta calcular el valor de la función objetivo y diseñar de nuevo el flujo de red. Para esto es necesario utilizar los datos que nos proporciona la Tabla 8.16 de transporte G de la siguiente manera: (Véase la Tabla 8.17)

Tabla 8.17 *Costo total obtenido por medio del método del costo mínimo*

SUMINISTROS	PLANTAS	RUTA	DESTINO	DEMANDAS	COSTO POR UNIDA	COSTO TOTAL
4000	*Cd. Valles*	X_{13}	*Veracruz*	3000	\$5	15000
	Cd. Valles	X_{14}	*Zacatecas*	1000	\$9	9000
5000	*Tampico*	X_{22}	*Monterrey*	4500	\$4	18000
	Tampico	X_{24}	*Zacatecas*	500	\$5	2500
3000	*Ébano*	X_{31}	*Querétaro*	2000	\$4	8000
	Ébano	X_{34}	*Zacatecas*	1000	\$8	8000
						\$60500

Si comparamos la REN y con el MCM, habrá que preferir este último, pues el costo total por transportar los rollos de tela de lino desde cada suministro hasta cada uno sus destinos nos proporciona un ahorro de \$75000 – \$60500 = \$14500. (Véase la Figura 8.5)

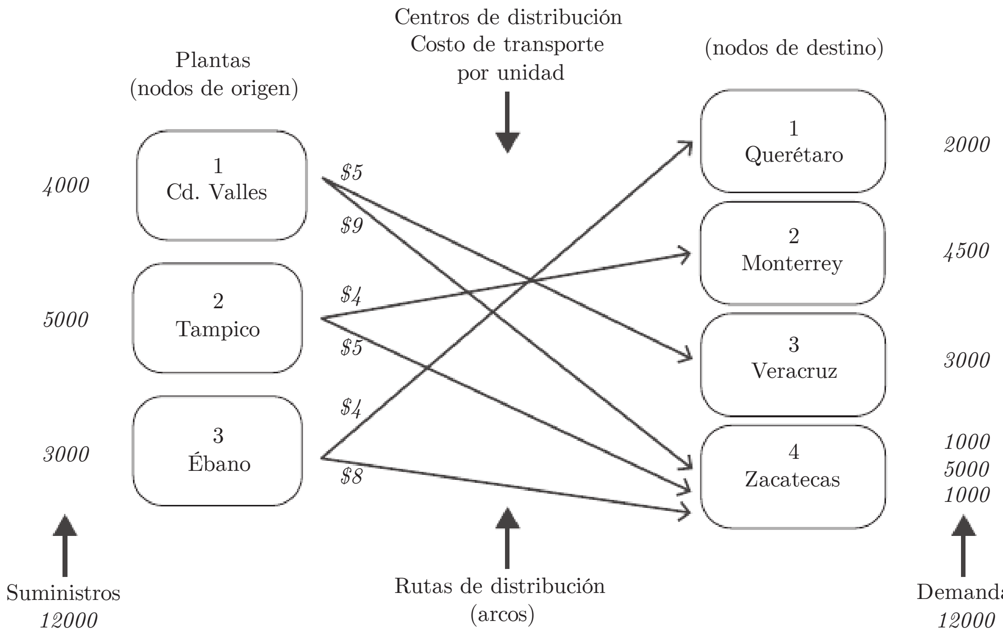


Figura 8.5

8.2.3 MÉTODO DE APROXIMACIÓN DE VOGEL (MAV)

El método de aproximación de Vogel (MAV) usa la información de costos mediante el concepto de costo de oportunidad para determinar una solución inicial factible que, al igual que con la REN y el MCM, podría ser óptima; sin embargo, se acerca a una mejor solución.

Expliquemos el MAV solucionando nuevamente el problema que enfrenta la empresa de rollos de tela de lino. Comencemos utilizando la Tabla 8.18 de transporte A vista en el subcapítulo 8.2.2, agregándole un renglón y una columna de penalización:

Tabla 8.18 Transporte A

Plantas X_{ij}	Distribuidores 1	2	3	4	Suministro (oferta)	Penalización	
1	4	7	5	9	4000		Cd.Valles
2	6	4	8	5	5000		Tampico
3	4	6	6	8	3000		Ébano
Demanda	2000	4500	3000	2500	12000		
Penalización							
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas			

Los pasos que se requieren para aplicar el MAV son los siguientes:
Analizando la Tabla 8.18 de transporte A:

1. Se identifican las dos rutas más económicas en cada renglón (oferta) y en cada columna (demanda), luego se calcula la diferencia entre estos valores a fin de identificar el renglón o columna que nos proporcione la máxima penalidad. Por ejemplo, la ruta de transporte más económica en el renglón 1 es la que se encuentra localizada en la celdilla $X_{11}= 4$; es decir, la que transporta los rollos de tela de lino de Cd. Valles a Querétaro. La que le sigue en precio es la ubicada en la celdilla X_{13}, con un costo de 5; es decir, la que va de Cd. Valles a Veracruz. Entonces, la penalización para el reglón 1 se calcula restando la celdilla X_{13} de la X_{11}. Así, 5 – 4 = 1. Por lo tanto, cada unidad de tela de lino de Cd. Valles que no se ha envidado a Querétaro incurrirá en un costo adicional de por lo menos $1; sin embargo, la máxima penalidad se encuentra ubicada en la columna 4 con un valor de $3. (Véase la tabla de transporte B) Los empates se resuelven arbitrariamente.

2. De la columna que nos proporciona la máxima penalización se elige la ruta de transporte más económica. Es este caso, el menor costo de la columna 4 se encuentra localizada en la celdilla X_{24} con un costo de $5; es decir, la ruta que va de Tampico a Zacatecas. Los empates se resuelven arbitrariamente.

3. Como la demanda en Zacatecas condiciona la oferta en Tampico, se sustituye el valor de 2500 unidades de tela de lino en la celdilla X_{24}, sobrando 2500 unidades para la planta 2.

4. Por último, se elimina la columna 4.

Lo expresado en los cuatro incisos anteriores se encuentra indicado en la Tabla 8.19 de transporte B:

Tabla 8.19 Transporte B

Plantas X_{ij}	Distribuidores				Suministro (oferta)	Penalización		
	1	2	3	4				
1	^{4}	^{7}	^{5}	^{9}	4000	5 - 4 = 1	Cd.Valles	
2	^{6}	^{4}	^{8}	2500 ^{5}	5000	5 - 4 = 1	Tampico	2500
3	^{4}	^{6}	^{6}	^{8}	3000	6 - 4 = 2	Ébano	
Demanda	2000	4500	3000	~~2500~~	12000			
Penalización	6 - 4 = 2	6 - 4 = 2	6 - 5 = 1	8 - 5 = 3				
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas				
				0				

Antes de comenzar con el mismo ciclo, eliminamos los datos innecesarios de la tabla de transporte B. Por lo que se diseña una nueva Tabla 8.20 de transporte C:

Tabla 8.20 Transporte C

Plantas X_{ij}	Distribuidores 1	2	3	4	Suministro (oferta)	Penalización		
1	^{4}	^{7}	^{5}	^{9}	4000		Cd.Valles	
2	^{6}	^{4}	^{8}	2500 ^{5}	5000		Tampico	2500
3	^{4}	^{6}	^{6}	^{8}	3000		Ébano	
Demanda	2000	4500	3000	~~2500~~	12000			
Penalización				X				
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas				
				0				

Analizando la Tabla 8.20 de transporte C:

1. Se identifican las dos rutas más económicas en cada renglón (oferta) y en cada columna (demanda), luego se calcula la diferencia que existe entre estos valores a fin de identificar el renglón que proporcione la máxima penalidad. Hay un empate entre las plantas de suministro de Ébano y Tampico, y en las distribuidoras de Querétaro y Monterrey con una penalización de 4. Elegimos arbitrariamente la columna 1.
2. De la columna 1, se elige la ruta de transporte más económica. Hay un empate entre las celdillas X_{11} y X_{31} con un costo de \$4. Se elige arbitrariamente la celdilla X_{11}.
3. Como la demanda en Querétaro condiciona la oferta en Cd. Valles, se sustituye el valor de 2000 unidades de tela de lino en la celdilla X_{11}, sobrando 2000 unidades la planta 1.
4. Por último, se elimina la columna 1.

Lo expresado en los cuatro incisos anteriores se encuentra en la Tabla 8.21 de transporte D

Tabla 8.21 Transporte D

Plantas X_{ij}	Distribuidores 1	2	3	4	Suministro (oferta)	Penalización		
1	2000 ^{4}	^{7}	^{5}	^{9}	4000	5 - 4 = 1	Cd.Valles	2000
2	^{6}	^{4}	^{8}	2500 ^{5}	5000	6 - 4 = 2	Tampico	2500
3	^{4}	^{6}	^{6}	^{8}	3000	6 - 4 = 2	Ébano	
Demanda	~~2000~~	4500	3000	~~2500~~	12000			
Penalización	6 - 4 = <u>2</u>	6 - 4 = 2	6 - 5 = 1	X				
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas				
	0			0				

Antes de comenzar con el mismo ciclo, eliminamos los datos innecesarios de la Tabla 8.21 de transporte D. Por lo que se diseña una nueva Tabla 8.22 de transporte E:

Tabla 8.22 Transporte E

Plantas X_{ij}	Distribuidores 1	2	3	4	Suministro (oferta)	Penalización		
1	2000 ^{4}	^{7}	^{5}	^{9}	4000		Cd.Valles	2000
2	^{6}	^{4}	^{8}	2500 ^{5}	5000		Tampico	2500
3	^{4}	^{6}	^{6}	^{8}	3000		Ébano	
Demanda	~~2000~~	4500	3000	~~2500~~	12000			
Penalización	X			X				
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas				
	0			0				

Analizando la Tabla 8.22 de transporte E:

1. La máxima penalización se encuentra ubicada en el renglón 2 con un valor de 4.
2. En el renglón 2, la ruta de transporte más económica se encuentra en la celdilla $X_{22,}$ con un valor de \$4.
3. Como la oferta en Tampico condiciona la demanda en Monterrey, se sustituye el valor de 2 500 unidades de tela de lino en la celdilla X_{22}, sobrando 2 000 unidades en Monterrey.
4. Por último, se elimina el reglón 2.

Lo expresado en los cuatro incisos anteriores se encuentra en la Tabla 8.23 de transporte F:

Tabla 8.23 Transporte F

Plantas X_{ij}	Distribuidores 1	2	3	4	Suministro (oferta)	Penalización			
1	2000 ^{4}	^{7}	^{5}	^{9}	4000	7 - 5 = 2	Cd.Valles	2000	
2	^{6}	2500 ^{4}	^{8}	2500 ^{5}	5000	8 - 4 = <u>4</u>	Tampico	~~2500~~	0
3	^{4}	^{6}	^{6}	^{8}	3000	6 - 6 = 0	Ébano		
Demanda	~~2000~~	4500	3000	~~2500~~	12000				
Penalización	X	6 - 4 = 2	6 - 5 = 1	X					
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas					
	0	2000		0					

De nuevo, antes de comenzar con el mismo ciclo, eliminamos los datos innecesarios de la Tabla 8.23 de transporte F. Por lo que se diseña una nueva Tabla 8.24 de transporte G:

Tabla 8.24 Transporte G

Plantas X_{ij}	Distribuidores 1	2	3	4	Suministro (oferta)	Penalización			
1	2000 ^{4}	^{7}	^{5}	^{9}	4000		Cd.Valles	2000	
2	^{6}	2500 ^{4}	^{8}	2500 ^{5}	5000	X	Tampico	~~2500~~	0
3	^{4}	^{6}	^{6}	^{8}	3000		Ébano		
Demanda	~~2000~~	4500	3000	~~2500~~	12000				
Penalización	X			X					
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas					
	0	2000		0					

Analizando la Tabla 8.24 de transporte G:

1. La máxima penalización se encuentra ubicada en el renglón 1 con un valor de 2.
2. La ruta de transporte más económica en la planta 1, se halla en la celdilla X_{13} a un costo de $5.
3. Como la oferta en Cd. Valles condiciona la demanda en Veracruz, se sustituyen las 2 000 unidades de tela de lino en la celdilla X_{13}, sobrando 1000 unidades.
4. Por último, se elimina el reglón 1.

Lo expresado en los cuatro incisos anteriores se encuentra indicado en la Tabla 8.25 de transporte H:

Tabla 8.25 Transporte H

Plantas X_{ij}	Distribuidores 1	2	3	4	Suministro (oferta)	Penalización			
1	2000 ^{4}	^{7}	^{5}	^{9}	4000	7 - 5 = 2	Cd.Valles	2000	0
2	^{6}	2500 ^{4}	^{8}	2500 ^{5}	5000	X	Tampico	~~2500~~	0
3	^{4}	^{6}	^{6}	^{8}	3000	6 - 6 = 0	Ébano		
Demanda	~~2000~~	4500	3000	~~2500~~	12000				
Penalización	X	7 - 6 = 1	6 - 5 = 1	X					
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas					
	0	2000	1000	0					

Antes de comenzar con el mismo ciclo, eliminamos los datos innecesarios de la Tabla 8.25 de transporte H. Por lo que se diseña una nueva Tabla 8.26 de transporte I:

Tabla 8.26 Transporte I

Plantas X_{ij}	Distribuidores				Suministro (oferta)	Penalización			
	1	2	3	4					
1	2000 ^{4}	^{7}	2000 ^{5}	^{9}	4000	X	Cd.Valles	~~2000~~	0
2	^{6}	2500 ^{4}	^{8}	2500 ^{5}	5000	X	Tampico	~~2500~~	0
3	^{4}	^{6}	^{6}	^{8}	3000		Ébano		
Demanda	~~2000~~	4500	3000	~~2500~~	12000				
Penalización	X			X					
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas					
	0	2000	1000	0					

Realice las dos últimas etapas del MAV por su cuenta para llegar a la solución inicial factible. (Véase la Tabla 8.27 transporte K)

Tabla 8.27 Transporte K

Plantas X_{ij}	Distribuidores				Suministro (oferta)	Penalización			
	1	2	3	4					
1	2000 ^{4}	^{7}	2000 ^{5}	^{9}	4000	X	Cd.Valles	~~2000~~	0
2	^{6}	2500 ^{4}	^{8}	2500 ^{5}	5000	X	Tampico	~~2500~~	0
3	^{4}	2000 ^{6}	1000 ^{6}	^{8}	3000	X	Ébano	~~1000~~	0
Demanda	~~2000~~	4500	3000	~~2500~~	12000				
Penalización	X	X	X	X					
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas					
	0	~~2000~~	~~1000~~	0					
		0	0						

Por último, falta calcular el valor de la función objetivo y diseñar de nuevo el de flujo de red. Para esto es necesario utilizar los datos que nos proporciona la Tabla 8.28 de la siguiente manera:

Tabla 8.28 *Costo total obtenido por medio del método de aproximación Vogel*

SUMINISTROS	PLANTAS	RUTA	DESTINO	DEMANDAS	COSTO POR UNIDAD	COSTO TOTAL
4000	Cd. Valles	X_{11}	Querétaro	2000	\$4	8000
	Cd. Valles	X_{13}	Veracruz	2000	\$5	10000
5000	Tampico	X_{22}	Monterrey	2500	\$4	10000
	Tampico	X_{24}	Zacatecas	2500	\$5	12500
3000	Ébano	X_{32}	Monterrey	2000	\$6	12000
	Ébano	X_{33}	Veracruz	1000	\$6	6000
						\$58500

Si comparamos el MCM con el MAV, habrá que preferir este último, pues el costo total por transportar los rollos de tela de lino desde cada suministro hasta cada uno de sus destinos nos proporciona un ahorro de \$60 500 – \$58 500 = \$2 000. (Véase la Figura 8.6)

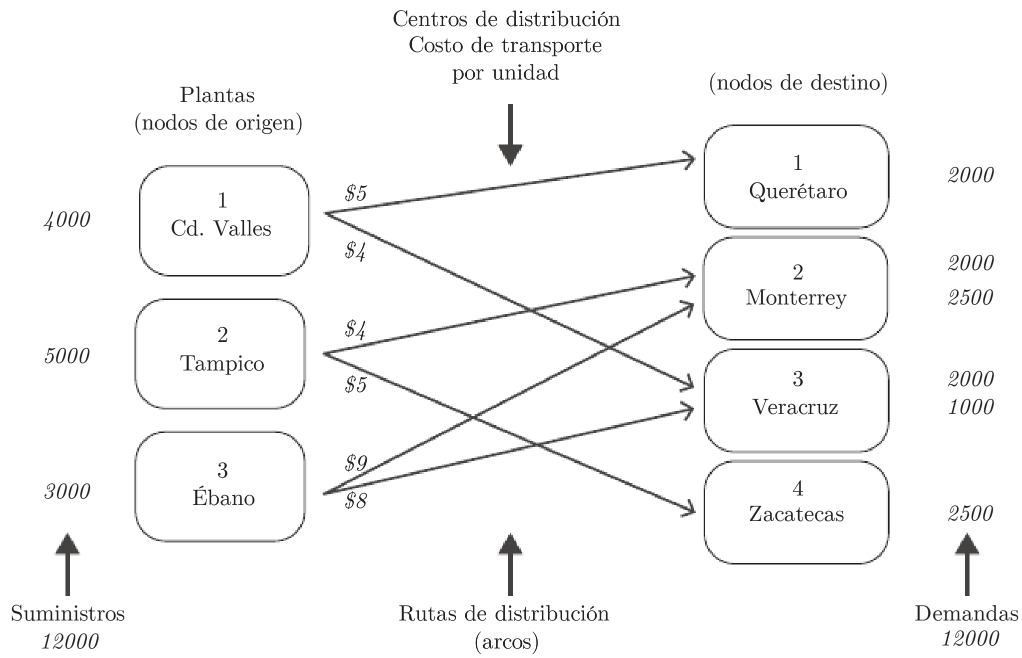


Figura 8.6

Observe que el MAV no transporta unidades de tela de lino en: X_{12}, X_{14} y X_{21}, X_{23}, X_{31} y X_{34}. Esto es porque los altos costos de envío produjeron penalizaciones grandes que causaron que el método de MAV eligiera otras variables para satisfacer las restricciones de demanda en: X_{11}, X_{13}, X_{22}, X_{24}, X_{32} y X_{33}

El MAV usa menos pivotes que los dos métodos anteriores. Por esta razón, la REN y el MCM rara vez se utilizan para hallar una solución básica inicial para solucionar un problema de transporte; sin embargo, es significativo comprender analíticamente cómo funciona cada uno.

8.2.4 MÉTODO DE PASOS SECUENCIALES (MPS)

El método de pasos secuenciales (MPS) es un procedimiento de programación lineal que garantiza encontrar la solución óptima a un problema de transporte. El algoritmo comienza con una solución inicial factible originada por medio de la REN, el MCM o el MAV y consiste en evaluar el costo marginal de envío de artículos por rutas que no se hayan usado (representadas por las celdillas vacías), en tanto que se elimina una de las usadas actualmente. El procedimiento secuencial termina cuando no hay cambio de rutas que mejoren el valor de la función objetivo.

El procedimiento sistemático para aplicar el MPS es el siguiente:

a) Comenzamos con una solución inicial factible originada por la REN, el MCM o el MAV. En este caso, usaremos los datos obtenidos por medio del MCM establecidos en la Tabla 8.29 de transporte G.

b) Evaluamos arbitrariamente el costo marginal de usar una celdilla no ocupada (es decir, el costo de enviar una unidad por esa ruta). Por ejemplo, usemos la celdilla X_{11} y tracemos una ruta factible de la siguiente manera:

Indique la celdilla X_{11} con un signo $+$, esto significa un aumento de unidad.

1. Al aumentar la celdilla X_{11} en una unidad, se requiere disminuir en una unidad una celdilla ocupada de la columna 1; de otro modo no satisfaríamos la demanda de 2000 unidades de tela de lino en Querétaro. La única celdilla ocupada es X_{31}, la cual se debe de indicar con un signo $-$.

2. Al disminuir la celdilla X_{31} en una unidad, se requiere aumentar en una unidad una celdilla ocupada del renglón 3; de otra manera no compensaríamos la oferta de 3000 unidades de tela de lino en Ébano. La única celdilla ocupada es X_{34}, la cual se debe indicar con un signo $+$.

3. Al aumentar la celdilla X_{34} en una unidad, se requiere disminuir en una unidad una celdilla ocupada en la columna 4; de otro forma no satisfaríamos la demanda de 2000 unidades de tela de lino en Zacatecas. Las únicas celdillas ocupadas son: X_{14} y X_{24}; sin embargo, la única factible es la X_{34}, la cual se debe indicar con un signo $-$.

4. Por último, para cerrar el ciclo secuencial: al disminuir la celdilla X_{14} en una unidad, se requiere aumentar en una unidad la celdilla en la cual se está evaluando el costo marginal. Es decir, en la celdilla X_{11} que ya se encuentra indicada con el signo $+$; de otra manera no compensamos la oferta de 4000 unidades de tela de lino en Cd. Valles.

Tabla 8.29 Transporte G

Evaluación del costo marginal de enviar una unidad de tela de lino en la ruta X_{11}. Esto se representa con un signo positivo (+).

La celdilla X_{14} disminuye en 1, a fin de equilibrar la demanda en Zacatecas

Plantas X_{ij}	Distribuidores 1	2	3	4	Suministro (oferta)		
1	+ [4]	[7]	3000 [5]	- 1000 [9]	4000	Cd.Valles	1000
2	[6]	4500 [4]	[8]	500 [5]	5000	Tampico	~~500~~
3	- 2000 [4]	[6]	[6]	+ 1000 [8]	3000	Ébano	1000
Demanda	~~2000~~	~~4500~~	~~3000~~	2500	12000		
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas			

La celdilla X_{31} disminuye en 1, a fin de equilibrar la demanda en Querétaro.

La celdilla X_{34} aumenta en 1, a fin de equilibrar la oferta en Ébano.

El procedimiento secuencial es la médula espinal del MPS. Ahora bien, para calcular el costo marginal por introducir una unidad de tela de lino en la celdilla X_{11} se procede de la siguiente manera: (Véase la Tabla 8.30)

Tabla 8.30 Transporte I

ACCIÓN	RUTA	EFECTO EN LA FUNCIÓN OBJETIVO
Aumentar en una unidad	X_{11}	$+ 4$
Disminuir en una unidad	X_{31}	$- 4$
Aumentar en una unidad	X_{34}	$+ 8$
Disminuir en una unidad	X_{14}	$- 9$
COSTO MARGINAL POR UNIDAD EN LA RUTA X_{11}		$- \underline{1}$

El dato numérico –1 nos indica que si transportamos un rollo de tela de lino de Cd. Valles a Querétaro, el valor de la función objetivo disminuye en 1. Este valor nos confirma que la solución obtenida por el MCM es una solución inicial factible y que debemos encontrar una solución óptima. Para esto, es necesario evaluar las otras casillas no usadas para calcular el costo marginal por no utilizarlas. La celdilla que tenga el valor más negativo (X_{ij}) nos puede proporcionar la solución óptima. Si hay empate, se escoge arbitrariamente. (Véase la Tabla 8.31 de transporte A y la Tabla 8.32)

Tabla 8.31 Transporte A

Plantas X_{ij}	Distribuidores 1	2	3	4	Suministro (oferta)	
1	^{4}	^{7}	3000 ^{5}	1000 ^{9}	4000	Cd.Valles
2	+ ^{6}	4500 ^{4}	^{8}	- 500 ^{5}	5000	Tampico
3	- 2000 ^{4}	^{6}	^{6}	+ 1000 ^{8}	3000	Ébano
Demanda	~~2000~~	~~4500~~	~~3000~~	2500	12000	
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas		

Tabla 8.32 Transporte A

ACCIÓN	RUTA	EFECTO EN LA FUNCIÓN OBJETIVO
Aumentar en una unidad	X_{21}	$+ 6$
Disminuir en una unidad	X_{31}	$- 4$
Aumentar en una unidad	X_{34}	$+ 8$
Disminuir en una unidad	X_{24}	$- 5$
COSTO MARGINAL POR UNIDAD EN LA RUTA X_{21}		$+ \underline{5}$

El valor numérico de + 5 nos indica que si transportamos un rollo de tela de lino de Tampico a Querétaro, el valor de la función objetivo aumenta en 5.

Sigamos con la Tabla 8.33 de transporte I: (Véase la Tabla 8.34)

Tabla 8.33 Transporte I

Plantas X_{ij}	Distribuidores				Suministro (oferta)	
	1	2	3	4		
1	^{4}	+ ^{7}	3000 ^{5}	- 1000 ^{9}	4000	Cd.Valles
2	^{6}	- 4500 ^{4}	^{8}	+ 500 ^{5}	5000	Tampico
3	2000 ^{4}	^{6}	^{6}	1000 ^{8}	3000	Ébano
Demanda	~~2000~~	~~4500~~	~~3000~~	2500	12000	
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas		

Tabla 8.34 Transporte I

ACCIÓN	RUTA	EFECTO EN LA FUNCIÓN OBJETIVO
Aumentar en una unidad	X_{12}	+ 7
Disminuir en una unidad	X_{22}	- 4
Aumentar en una unidad	X_{24}	+ 5
Disminuir en una unidad	X_{14}	- 9
COSTO MARGINAL POR UNIDAD EN LA RUTA X_{12}		- 1

El valor numérico de -1 nos indica que si transportamos un rollo de tela de lino de Cd. Valles a Monterrey, el valor de la función objetivo disminuye en 1.

Sigamos con la Tabla 8.35 de transporte J: (Véanse las Tablas 8.35 de transporte J y 8.36)

Tabla 8.35 Transporte J

Plantas X_{ij}	Distribuidores				Suministro (oferta)	
	1	2	3	4		
1	^{4}	^{7}	- 3000 ^{5}	+1000 ^{9}	4000	Cd.Valles
2	^{6}	-4500 ^{4}	+ ^{8}	- 500 ^{5}	5000	Tampico
3	2000 ^{4}	^{6}	^{6}	1000 ^{8}	3000	Ébano
Demanda	~~2000~~	~~4500~~	~~3000~~	2500	12000	
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas		

Tabla 8.36

ACCIÓN	RUTA	EFECTO EN LA FUNCIÓN OBJETIVO
Aumentar en una unidad	X_{23}	+ 8
Disminuir en una unidad	X_{24}	- 5
Aumentar en una unidad	X_{14}	+ 9
Disminuir en una unidad	X_{13}	- 5
COSTO MARGINAL POR UNIDAD EN LA RUTA X_{23}		+ 7

El valor numérico de +7 nos indica que si transportamos un rollo de tela de lino de Tampico a Veracruz, el valor de la función objetivo aumentará en 7.

Encuentre por su propia cuenta el costo marginal en las celdillas no usadas: X_{32} y X_{33}.

Regresemos a la Tabla 8.29 de transporte G. Indiquemos en las celdillas no ocupadas los costos marginales antes calculados, a fin de realizar un mejor análisis para encontrar la solución óptima. (Véase la Tabla 8.37 de transporte G).

Tabla 8.37 Transporte G

Plantas X_{ij}	Distribuidores 1	2	3	4	Suministro (oferta)		
1	+ **-1** [4]	**-1** [7]	3000 [5]	- 1000 [9]	4000	Cd.Valles	~~1000~~
2	+ **5** [6]	4500 [4]	+**7** [8]	500 [5]	5000	Tampico	~~500~~
3	- 2000 [4]	**-1** [6]	+**2** [6]	+ 1000 [8]	3000	Ébano	~~1000~~
Demanda	~~2000~~	~~4500~~	~~3000~~	2500	12000		
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas			

Para poder encontrar la solución óptima debemos elegir el valor más negativo; sin embargo, tenemos tres valores negativos (-1) en las celdillas: X_{11}, X_{12} y X_{31}; por lo tanto, podemos elegir arbitrariamente la celdilla X_{11}.

Nos falta determinar el número máximo de unidades que se pueden asignar a la ruta X_{11}. Para esto, elegimos de la ruta las celdillas: $X_{31} = -2000$ y $X_{14} = -1000$ debido a que nuestro propósito es disminuir los costos de transporte; por consiguiente, el valor de 1000 restringe el valor de 2000. Es decir, la cantidad máxima de rollos de tela de lino que podemos transportar de Cd. Valles a Querétaro es de 1000. Recuerde que en la trayectoria de la ruta, el signo positivo significa un aumento y el signo negativo una disminución, en este caso de 1000 unidades. Por último, la Tabla 8.38 de transporte G es modificada de la siguiente forma:

Tabla 8.38 Transporte G

Plantas X_{ij}	Distribuidores 1	2	3	4	Suministro (oferta)		
1	1000 [4]	[7]	3000 [5]	[9]	4000	Cd.Valles	~~1000~~
2	[6]	4500 [4]	[8]	500 [5]	5000	Tampico	~~500~~
3	1000 [4]	[6]	[6]	2000 [8]	3000	Ébano	~~1000~~
Demanda	~~2000~~	~~4500~~	~~3000~~	2500	12000		
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas			

A fin de saber que hemos obtenido la solución óptima, debemos calcular nuevamente los costos marginales en cada celdilla no ocupada. Si se obtienen valores iguales o mayores que cero hemos llegado a la solución final.

Los nuevos cálculos de costo marginal se muestran en la siguiente Tabla 8.39 de transporte modificada G2:

Tabla 8.39 Transporte G2

Plantas X_{ij}	Distribuidores				Suministro (oferta)		
	1	2	3	4			
1	1000 ^{4}	0 ^{7}	3000 ^{5}	**+9** ^{9}	4000	Cd.Valles	~~1000~~
2	**+5** ^{6}	- 4500 ^{4}	**+6** ^{8}	+ 500 ^{5}	5000	Tampico	~~500~~
3	1000 ^{4}	+ **-1** ^{6}	**+1** ^{6}	- 2000 ^{8}	3000	Ébano	~~1000~~
Demanda	~~2000~~	~~4500~~	~~3000~~	2500	12000		
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas			

Observe que en la ruta X_{32}, el valor de $X_{34} = -2000$ limita el valor $X_{22} = -4500$; por lo tanto, la celdilla X_{32} puede transportar 2000 rollos de tela de lino de Ébano a Monterrey. Recuerde que en la trayectoria de la ruta, el signo positivo significa un aumento y el signo negativo una disminución, en este caso de 2000 unidades en las celdillas no ocupadas de esta ruta.

Las modificaciones se indican en la Tabla 8.40 de transporte modificada G3:

Tabla 8.40 Transporte G3

Plantas X_{ij}	Distribuidores				Suministro (oferta)		
	1	2	3	4			
1	1000 ^{4}	^{7}	3000 ^{5}	^{9}	4000	Cd.Valles	~~1000~~
2	^{6}	2500 ^{4}	^{8}	2500 ^{5}	5000	Tampico	~~500~~
3	1000 ^{4}	2000 ^{6}	^{6}	^{8}	3000	Ébano	~~1000~~
Demanda	~~2000~~	~~4500~~	~~3000~~	2500	12000		
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas			

Nuevamente, para verificar que hemos obtenido la solución óptima, debemos calcular los costos marginales en cada celdilla no ocupada.

Los nuevos cálculos de costo marginal se muestran en la Tabla 8.41 de transporte G modificada 4:

Tabla 8.41 Transporte G4

Plantas X_{ij}	Distribuidores				Suministro (oferta)	
	1	2	3	4		
1	1000 ^{4}	**+1** ^{7}	3000 ^{5}	**+2** ^{9}	4000	Cd.Valles
2	**+4** ^{6}	2500 ^{4}	**+5** ^{8}	2500 ^{5}	5000	Tampico
3	1000 ^{4}	2000 ^{6}	**+1** ^{6}	**+1** ^{8}	3000	Ébano
Demanda	2000	4500	3000	2500	12000	
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas		

Todos los costos marginales son positivos; por lo tanto, hemos llegado a la solución óptima. Ahora bien, si comparamos el MAV con el PMS, habrá que preferir este último, pues el costo total por transportar los rollos de tela de lino desde cada suministro hasta cada uno sus destinos nos proporciona un ahorro de $60 500 – $57 500 = $3 000.

Ahora calculemos el valor de la función objetivo: (Véase la Tabla 8.42 y la Figura 8.7)

Tabla 8.42 *Costo total obtenido por medio del método de pasos secuenciales*

SUMINISTROS	PLANTAS	RUTA	DESTINO	DEMANDAS	COSTO POR UNIDA	COSTO TOTAL
4000	Cd. Valles	X_{11}	Querétaro	1000	$4	4000
	Cd. Valles	X_{13}	Veracruz	3000	$5	15000
5000	Tampico	X_{22}	Monterrey	2500	$4	10000
	Tampico	X_{24}	Zacatecas	2500	$5	12500
3000	Ébano	X_{31}	Monterrey	1000	$4	4000
	Ébano	X_{32}	Veracruz	2000	$6	12000
						$57500

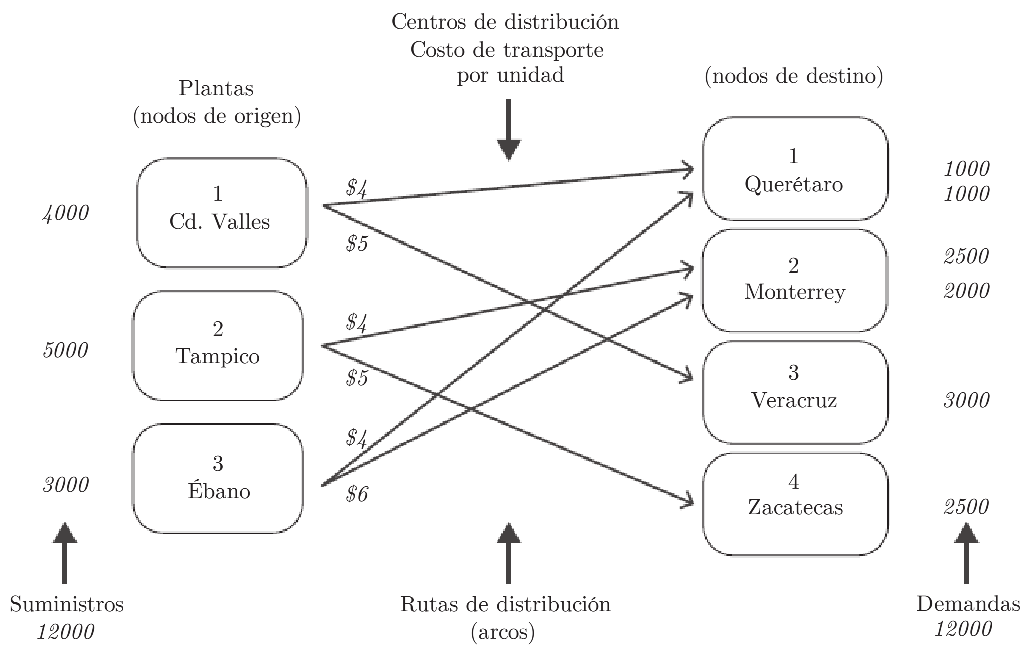


Figura 8.7

Recodemos que la REN, el MCM y el MAV sólo garantizan una solución inicial factible; sin embargo, el método el MPS sí garantiza la solución óptima, pero con la condición de que inicie con algunos uno de los tres métodos antes mencionados.

8.2.5 MÉTODO DE DISTRIBUCIÓN MODIFICADA (MODI)

El método de distribución modificada (MODI) es un procedimiento que garantiza encontrar la solución óptima a partir de una solución factible basada en la REN, el MCM y el MAV. El algoritmo MODI se basa sistemáticamente en los siguientes pasos:

1. Iniciamos con la solución factible obtenida por medio de la MAV: (Véase la Tabla 8.42 de transporte A).

Tabla 8.42 Transporte A

Plantas X_{ij}	Distribuidores				Suministro (oferta)	
	$1(v_1)$	$2(v_2)$	$3(v_3)$	$4(v_4)$		
$1(u_1)$	2000 [4]	[7]	2000 [5]	[9]	4000	Cd.Valles
$2(u_2)$	[6]	2500 [4]	[8]	2500 [5]	5000	Tampico
$3(u_3)$	[4]	2000 [6]	1000 [6]	[8]	3000	Ébano
Demanda	2000	4500	3000	2500	12000	
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas		

2. De la Tabla 8.42 de transporte A, se determina un índice para el renglón (u_i para el renglón i) y uno para cada columna (v_j para la columna j), tal que $u_i + v_j = c_{ij}$ para cada celdilla usada siendo c_{ij} el costo de enviar una unidad desde el origen i al destino j. Es decir: (Véase la Tabla 8.43).

Tabla 8.43

RUTA	COSTO POR ROLLO DE TELA DE LINO	ECUACIÓN $u_i + v_j = c_{ij}$
X_{11}	4	$u_1 + v_1 = 4$
X_{13}	5	$u_1 + v_3 = 5$
X_{22}	4	$u_2 + v_2 = 4$
X_{24}	5	$u_2 + v_4 = 5$
X_{32}	6	$u_3 + v_2 = 6$
X_{33}	6	$u_3 + v_3 = 6$

3. Hay 6 ecuaciones y 7 variables. Elegimos arbitrariamente una ruta (X_{11}), despejamos la variable que más nos convenga (v_1) y le damos el valor de cero a la otra variable ($u_1 = 0$). El procedimiento de sustitución y despeje en las 6 ecuaciones es como sigue:

   Para la ruta X_{11}. Si $u_1 = 0$ en $u_1 + v_1 = 4$, entonces $v_1 = 4$.
   Para la ruta X_{13}. Si $u_1 = 0$ en $u_1 + v_3 = 5$, entonces $v_3 = 5$.
   Para la ruta X_{33}. Si $v_3 = 5$ en $u_3 + v_3 = 6$, entonces $u_3 = 1$.
   Para la ruta X_{32}. Si $u_3 = 1$ en $u_3 + v_2 = 6$, entonces $v_2 = 5$.
   Para la ruta X_{22}. Si $v_2 = 5$ en $u_2 + v_2 = 4$, entonces $u_2 = -1$.
   Para la ruta X_{24}. Si $u_2 = -1$ en $u_2 + v_4 = 5$, entonces $v_4 = 6$.
   $u_1 = 0$, $v_1 = 4$, $v_3 = 5$, $u_3 = 1$, $v_2 = 5$, $u_2 = -1$ y $v_4 = 6$.

Recordemos que los valores u_i para el renglón i, corresponden a la oferta.

Recordemos que los valores v_j para la columna j, corresponden a la demanda.

4. Ahora es necesario calcular los costos marginales para las cedillas no ocupadas. Si u_i y v_j representan las celdillas no ocupadas estando el costo marginal (e_{ij}) de usarlas dado por la ecuación: $e_{ij} = C_{ij} - (u_i + v_j)$.

Para X_{12} tenemos: $e_{12} = 7 - (0 + 5) = 2$
Para X_{14} tenemos: $e_{14} = 9 - (0 + 6) = 3$
Para X_{21} tenemos: $e_{21} = 6 - (-1 + 4) = 3$
Para X_{23} tenemos: $e_{23} = 8 - (-1 + 5) = 4$
Para X_{31} tenemos: $e_{31} = 4 - (1 + 4) = -1$
Para X_{33} tenemos: $e_{33} = 8 - (1 + 6) = 1$

Los costos marginales se encuentran indicados en la siguiente Tabla 8.44 de transporte B:

Tabla 8.44 Transporte B

Plantas X_{ij}	Distribuidores				Suministro (oferta)	
	$1(v_1)$	$2(v_2)$	$3(v_3)$	$4(v_4)$		
$1(u_1)$	2000 [4]	**+2** [7]	+2000 [5]	**+3** [9]	4000	Cd.Valles
$2(u_2)$	**+3** [6]	2500 [4]	**+4** [8]	2500 [5]	5000	Tampico
$3(u_3)$	**-1** [4]	2000 [6]	**-1000** [6]	**+1** [8]	3000	Ébano
Demanda	2000	4500	3000	2500	12000	
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas		

5. De la tabla de transporte B elegimos la celdilla que contenga el costo marginal con signo más negativo, es decir la celdilla X_{31}. A partir de esta celdilla trazamos la trayectoria secuencial (si la hay) a fin de determinar cuántas unidades de rollo de tela de lino debemos de asignar a esta ruta. La trayectoria de la celdilla X_{31} se encuentra expresada en la siguiente Tabla 8.45 de transporte C:

Tabla 8.45 Transporte C

Plantas X_{ij}	Distribuidores				Suministro (oferta)	
	$1(v_1)$	$2(v_2)$	$3(v_3)$	$4(v_4)$		
$1(u_1)$	- 2000 [4]	**+2** [7]	+ **2000** [5]	**+3** [9]	4000	Cd.Valles
$2(u_2)$	**+3** [6]	2500 [4]	**+4** [8]	2500 [5]	5000	Tampico
$3(u_3)$	+ **1** [4]	2000 [6]	- **1000** [6]	**+1** [8]	3000	Ébano
Demanda	2000	4500	3000	2500	12000	
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas		

Observe que en la ruta X_{31}, el valor de $X_{33} = -1000$ limita el valor $X_{11} = -2000$; por lo tanto, la celdilla X_{31} puede transportar 1000 rollos de tela de lino de Ébano a Querétaro. Recuerde que en la trayectoria de la ruta, el signo positivo significa un aumento y el signo negativo una disminución, en este caso de 1000 unidades en las celdillas no ocupadas de esta ruta.

Lo expresado se encuentra en la siguiente Tabla 8.46 de transporte D:

Tabla 8.46 Transporte D

Plantas X_{ij}	Distribuidores				Suministro (oferta)	
	$1_{(v1)}$	$2_{(v2)}$	$3_{(v3)}$	$4_{(v4)}$		
$1_{(u1)}$	1000 [4]	[7]	3000 [5]	[9]	4000	Cd.Valles
$2_{(u2)}$	[6]	2500 [4]	[8]	2500 [5]	5000	Tampico
$3_{(u3)}$	1000 [4]	2000 [6]	[6]	[8]	3000	Ébano
Demanda	2000	4500	3000	2500	12000	
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas		

6. Si todos los costos marginales en las casillas no ocupadas adquieren valores de cero o positivos, afirmamos que hemos llegado a la solución óptima. Para obtener estos valores podemos aplicar los pasos c) y d) del método MODI o utilizando el MPS. Realícelo por su propia cuenta: (Véase la Tabla 8.47 de transporte E)

Tabla 8.47 Transporte E

Plantas X_{ij}	Distribuidores				Suministro (oferta)	
	$1_{(v1)}$	$2_{(v2)}$	$3_{(v3)}$	$4_{(v4)}$		
$1_{(u1)}$	1000 [4]	**+1** [7]	3000 [5]	**+2** [9]	4000	Cd.Valles
$2_{(u2)}$	**+4** [6]	2500 [4]	**+5** [8]	2500 [5]	5000	Tampico
$3_{(u3)}$	1000 [4]	2000 [6]	**+1** [6]	**+1** [8]	3000	Ébano
Demanda	2000	4500	3000	2500	12000	
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas		

Como todos los costos marginales son positivos, afirmamos que hemos obtenido la solución óptima:

Ahora calculemos el valor de la función objetivo del MODI. (Véase la Tabla 8.48 y la Figura 8.8)

Tabla 8.48 *Método de distribución modificada*

SUMINISTROS	PLANTAS	RUTA	DESTINO	DEMANDAS	COSTO POR UNIDA	COSTO TOTAL
4000	Cd. Valles	X_{11}	Querétaro	1000	\$4	4000
	Cd. Valles	X_{13}	Veracruz	3000	\$5	15000
5000	Tampico	X_{22}	Monterrey	2500	\$4	10000
	Tampico	X_{24}	Zacatecas	2500	\$5	12500
3000	Ébano	X_{31}	Querétaro	1000	\$4	4000
	Ébano	X_{32}	Monterrey	2000	\$6	12000
						\$57500

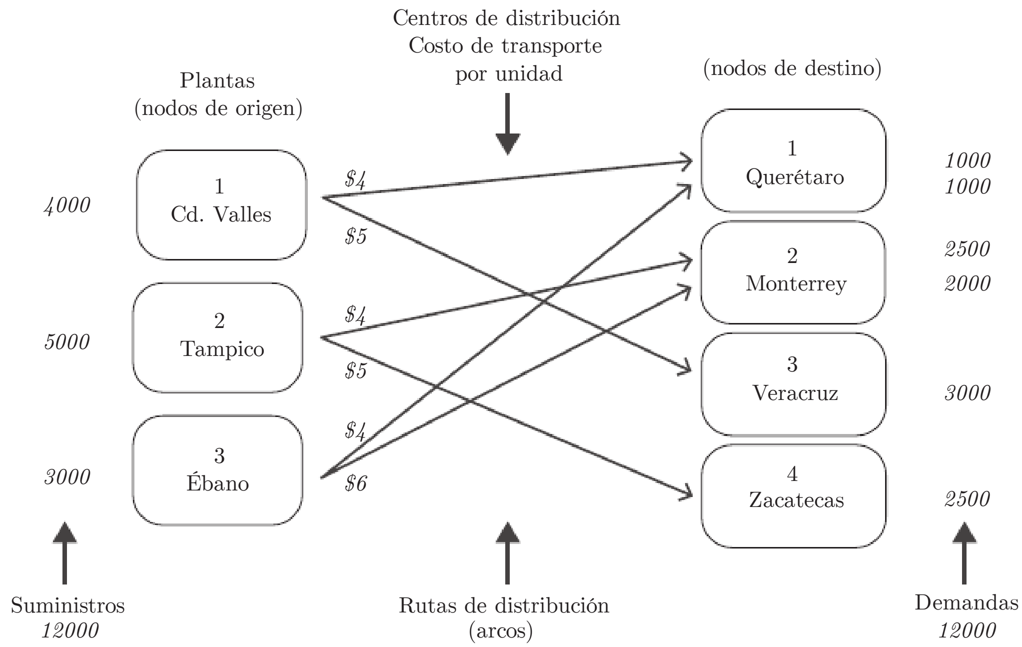


Figura 8.8

Como podemos comprobar, el método MODI y el método MPS sí garantizan la solución óptima, pero con la condición de que se inicie con alguno de estos tres métodos: REN, MCM y MAV.

▷ 8.3 PROBLEMAS ESPECIALES DE TRANSPORTE

Un modelo de transporte puede implicar una o más de las siguientes situaciones:

a) Maximización de la función objetivo.
b) Oferta no igual a la demanda.
c) Problemas degenerados.
d) Rutas inaceptables.

a) Maximización de la función objetivo

Un modelo de transporte puede utilizarse también para maximizar el valor de la función objetivo (ganancia o ingreso) en vez de minimizarlo. Los métodos son los ya explicados (REN, MCM, VOGEL, MPS y MODI) pero con un ligero cambio elemental. Los valores marginales ya no son considerados como costos, por el contrario, son considerados beneficios. De esta manera, se deberá determinar el mayor valor marginal a la celdilla que nos proporcione la ruta más óptima; es decir, hasta que las rutas no usadas tengan valores marginales negativos. Este cambio no afecta en absoluto las restricciones de un modelo de transporte de programación lineal.

b) Oferta no igual a la demanda

Si la oferta es mayor a la demanda, es necesario equilibrar el problema creando un *destino de demanda ficticio* que permita igualar el exceso que existe en la oferta. Por ejemplo, recordemos la empresa que comercializa rollos de tela de lino. Supongamos que la demanda total se redujo a 11 000 unidades de tela con respecto a las 12 000 unidades que existen en la oferta, debido a que en Querétaro la demanda disminuyó a 1 000 unidades. Para compensar el exceso que hay en la oferta total es necesario agregar un destino ficticio de mil unidades en la demanda por medio de la columna 5, y proporcionar un costo nulo por transportar cada unidad de tela desde Cd. Valles, Tampico y Ébano a su destino. A los envíos de demanda ficticios se les asigna un costo de cero, pues indican una capacidad de suministro sin uso. (Ver Tabla 8.49 de transporte A modificada)

Tabla 8.49 Transporte A modificada

Plantas X_{ij}	Distribuidores					Suministro (oferta)	
	1	2	3	4	5 (destino ficticio)		
1	4	7	5	9	0	4000	Cd. Valles
2	6	4	8	5	0	5000	Tampico
3	4	6	6	8	0	3000	Ébano
Demanda	1000	4500	3000	2500	1000	12000	
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas	La demanda del destino ficticio hace que la sea: oferta = demanda		

Por otra parte, si la oferta es menor que la demanda, el problema no tiene solución factible; sin embargo, en ocasiones es deseable permitir la posibilidad de dejar sin satisfacer parte de la demanda. Ante esta situación, se asocia una penalización con la demanda no cumplida.

c) Problemas degenerados

Independientemente del método que se utilice (REN, MCM, MAV, MPS o MODI), un problema de transporte es degenerado si utiliza menos $\underline{m + n - 1}$ rutas que las que debe de usar para obtener una solución óptima. m representa la cantidad de plantas donde se distribuye la demanda, y n la cantidad de plantas donde se suministra la oferta.

En el ejemplo de la empresa de tela de lino la planta tiene 4 distribuidoras y 3 suministros. Si aplicamos la ecuación lineal $m + n - 1$ y sustituimos los valores correspondientes, obtenemos $4 + 3 - 1 = 6$, las rutas que deben de usarse para obtener posiblemente la solución óptima; sin embargo, si el modelo usa menos de las 6 rutas que marca la fórmula, el problema es *degenerado*. Por lo tanto, es posible obtener una solución factible pero nunca será óptima.

d) Rutas inaceptables

En ocasiones resulta imposible usar las rutas que permiten transportar los bienes desde las plantas que proporcionan los suministros hacia las plantas distribuidoras. Cuando se presenta esta situación, sólo es necesario eliminar la ruta de embarque (arco) que se conecta desde el origen y al destino.

Por ejemplo, recordemos el siguiente flujo de red: (Véase la Figura 8.9)

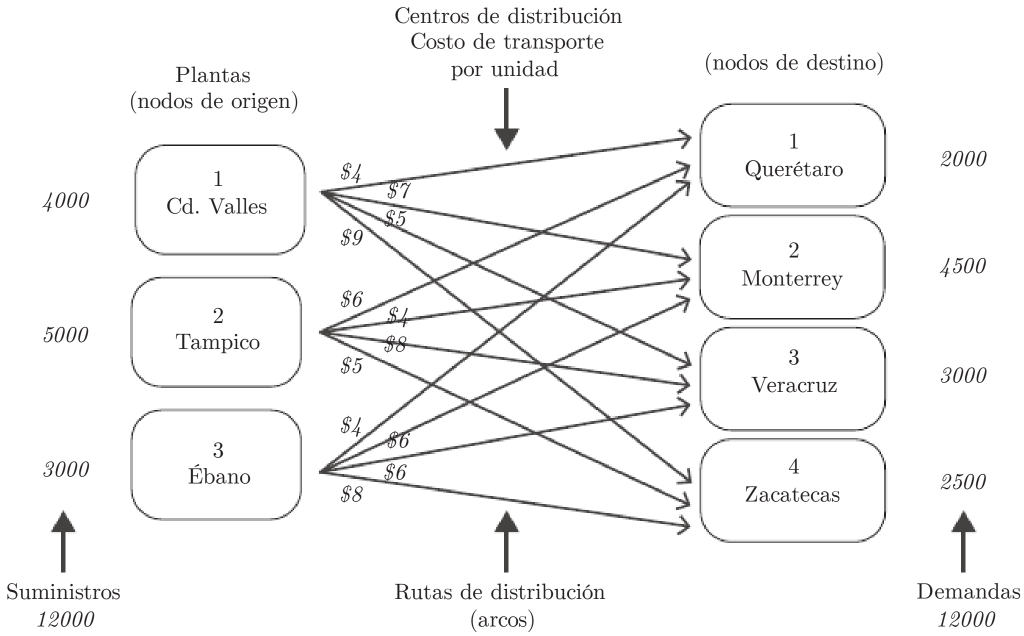


Figura 8.9

Ahora elaboremos una tabla de transporte:

Si las rutas de Cd. Valles a Zacatecas, de Tampico a Monterrey, y de Ébano a Veracruz fueran inaceptables o inutilizables, podrían eliminarse; por lo tanto, las variables: X_{14} X_{22} y X_{33} deberían excluirse del modelo de transporte de programación lineal:

Problema de transporte formulado por medio de ecuaciones lineales:

$$\text{Minimizar: } 4X_{11} + 7X_{12} + 5X_{13} + 9X_{14} + 6X_{21} + 4X_{22} + 8X_{23} + 5X_{24} + 4X_{31} + 6X_{32} + 6X_{33} + 8X_{34}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{Sujeto a:} & X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} & \leq 4\,000 \\
 & X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} & \leq 5\,000 \\
 & X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} & \leq 3\,000 \\
 & X_{11} + X_{21} + X_{31} & = 2\,000 \\
 & X_{12} + X_{22} + X_{32} & = 4\,500 \\
 & X_{13} + X_{23} + X_{33} & = 3\,000 \\
 & X_{14} + X_{24} + X_{34} & = 2\,500 \\
 & X_{ij} \geq 0 \text{ para } i = 1, 2,3 \text{ y } j = 1, 2, 3 \text{ y } 4 &
\end{array}$$

El flujo de red queda determinado de la siguiente manera: (Véase la Figura 8.10).

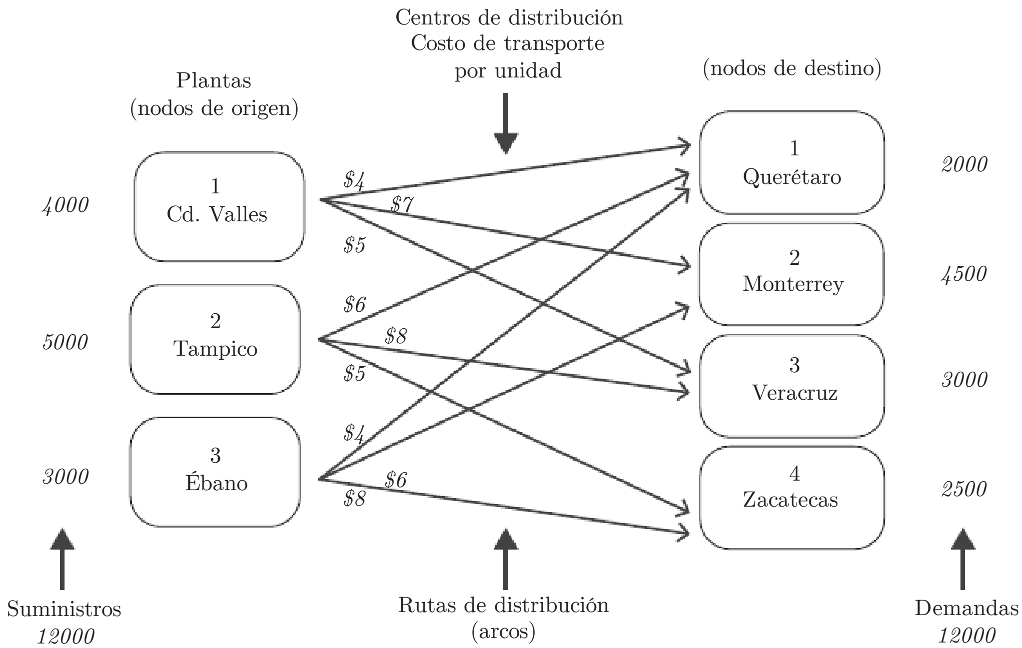


Figura 8.10 Esquema modificado.

Observe que a la tabla modificada se le agrega la M en las celdillas X_{14}, X_{22} y X_{33}, la cual significa un costo arbitrariamente grande. M se supone tan grande que al sumar o restar de ella un número finito resulta todavía mayor que cualquier otro número de la tabla; entonces, esto elimina el uso de las celdillas X_{14}, X_{22} y X_{33}, ya que el costo de hacerlo sería demasiado grande.

Tabla 8.50 Modificada de Transporte

Plantas X_{ij}	Distribuidores				Suministro (oferta)	
	1	2	3	4		
1	4	7	5	M	4000	Cd.Valles
2	6	M	8	5	5000	Tampico
3	4	6	M	8	3000	Ébano
Demanda	2000	4500	3000	2500	12000	
	Querétaro	Monterrey	Veracruz	Zacatecas		

▷ 8.4 EL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN

El problema de asignación es una extensión especial del problema de transporte, se aplica en una variedad de situaciones como son: asignar trabajos a máquinas, asignar personal de ventas, asignar contratos a licitaciones, asignar telefonistas para atender llamadas de servicios, asignar modelos a agencias de publicidad, etc. En general, el problema consiste en determinar la asignación óptima de agentes u objetos "invisibles" a n tareas. Expliquemos con un ejemplo el problema de asignación.

Una empresa de uniformes escolares produce prendas en cuatro máquinas. El tiempo de producción para que la máquina 1 realice la primera tarea es de 6 horas, para la segunda tarea es de 3 horas, para la tercera es de 1 hora, y para la cuarta es de 7 horas. El tiempo de producción para que la máquina 2 realice la primera tarea es de 2 horas, para la segunda es de 5 horas, para la tercera es de 4 horas y para la cuarta es de 3 horas. El tiempo de producción para que la máquina 3 realice la primera tarea es de 3 horas, para la segunda es de 2 horas, para la tercera es de 6 horas y para la cuarta es de 5 horas. El tiempo de producción para que la máquina 4 realice la primera tarea es de 5 horas, para la segunda es de 4 horas, para la tercera es de 1 hora y para la cuarta es de 3 horas.

Se desea minimizar el tiempo de producción de las cuatro máquinas.

Para facilitar la formulación del problema es necesario establecer una tabla que muestre todos los datos antes mencionados. La nombraremos tabla de asignación A (Véase la Tabla 8.51)

Tabla 8.51 Asignación A

	PRODUCCIÓN EN HORAS				Suministro (oferta)
	Tarea1	Tarea 2	Tarea3	Tarea4	
Maquina 1	6	3	1	7	1
Maquina 2	2	5	4	3	1
Maquina 3	3	2	6	5	1
Maquina 4	5	4	1	3	1
Demanda	1	1	1	1	4

Ahora, elaboremos una red de flujo con los datos establecidos en la tabla de asignación A: (Véase la Figura 8.11)

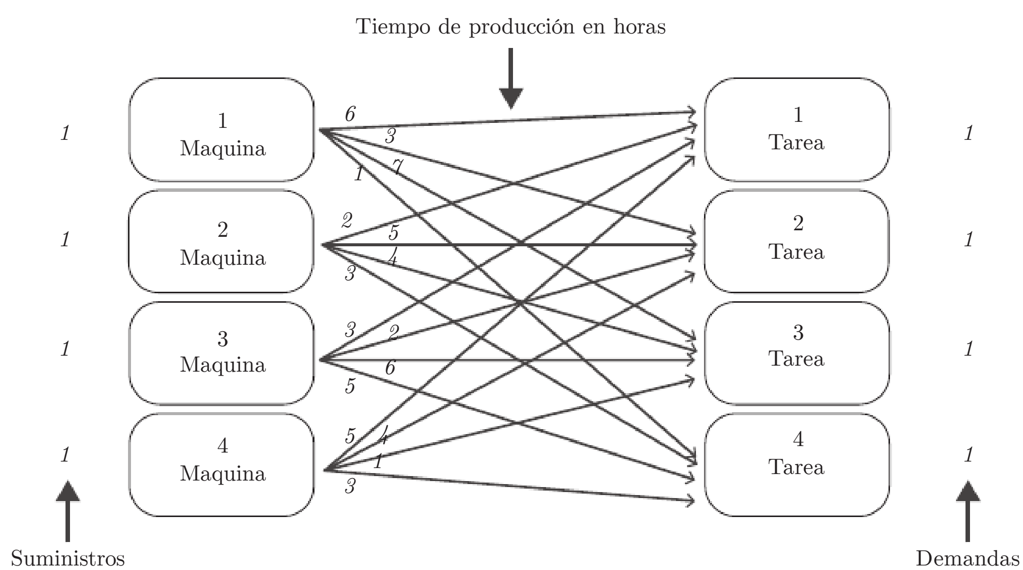


Figura 8.11

La Figura 8.11 muestra la representación de flujo de red del problema de asignación de la mediana empresa que produce uniformes. Los nodos de suministro corresponden a cada una de las cuatro máquinas, y los nodos de demanda corresponden a cada una de las tareas. Los arcos corresponden al tiempo de producción que requiere cada máquina para realizar una tarea.

Como podemos observar, el problema de asignación se encuentra balanceado, pues todos los valores en los suministros y demandas son iguales a 1. Del mismo modo que en el problema de transporte, se requiere una restricción para cada nodo y una variable para cada arco. Usaremos la variable de decisión con doble subíndice: con X_{11} representamos la asignación de la máquina uno con respecto a la tarea uno que le corresponde, etc. Por lo tanto, definimos las variables de decisión para el problema de asignación:

$$X_{ij} = \begin{cases} \text{uno si la máquina } i \text{ se asigna una tarea } j\text{; Donde } i = 1, 2, 3 \text{ y } j = 1, 2, 3 \\ \textit{cero de otra manera} \end{cases}$$

La suma de los tiempos para completar las cuatro máquinas proporcionará las tareas totales requeridas para completar las tres asignaciones. Entonces, la función objetivo es:

Minimizar:

$$6X_{11} + 3X_{12} + X_{13} + 7X_{14} + 2X_{21} + 5X_{22} + 4X_{23} + 3X_{24} + 3X_{31} + 2X_{32} + 6X_{33} + 5X_{34} + 5X_{41} + 4X_{42} + X_{43} + 3X_{44}$$

El problema se encuentra sujeto a 6 restricciones, las tres primeras limitaciones aseguran que a cada máquina se le asignó una tarea, y las tres últimas aseguran que se completó la tarea. Es decir:

Restricciones:

$$\begin{aligned}
\text{Máquina 1:} \quad & X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 1 \\
\text{Máquina 2:} \quad & X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 1 \\
\text{Máquina 3:} \quad & X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 1 \\
\text{Máquina 4:} \quad & X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} = 1 \\
\text{Tarea 1:} \quad & X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 1 \\
\text{Tarea 2:} \quad & X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 1 \\
\text{Tarea 3:} \quad & X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = 1 \\
\text{Tarea 4:} \quad & X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} = 1
\end{aligned}$$

Ahora combinemos la función objetivo y las restricciones para establecer el esquema de programación lineal para solucionar el problema de asignación de la mediana empresa:

$$\begin{aligned}
\text{Minimizar: } & 6X_{11} + 3X_{12} + X_{13} + 7X_{14} + 2X_{21} + 5X_{22} + 4X_{23} + 3X_{24} + 3X_{31} + 2X_{32} + 6X_{33} + 5X_{34} \\
& 5X_{41} + 4X_{42} + X_{43} + 3X_{44}
\end{aligned}$$

Sujeto a:

$$\begin{array}{rcccccccccccccccccl}
\text{Máquina 1:} & X_{11} & + X_{12} & + X_{13} & + X_{14} & & & & & & & & & & & & & & = 1 \\
\text{Máquina 2:} & & & & & X_{21} & + X_{22} & + X_{23} & + X_{24} & & & & & & & & & & = 1 \\
\text{Máquina 3:} & & & & & & & & & X_{31} & + X_{32} & + X_{33} & + X_{34} & & & & & & = 1 \\
\text{Máquina 4:} & & & & & & & & & & & & & X_{41} & + X_{42} & + X_{43} & + X_{44} & & = 1 \\
\text{Tarea 1:} & X_{11} & & & & + X_{21} & & & & + X_{31} & & & & + X_{41} & & & & & = 1 \\
\text{Tarea 2:} & & X_{12} & & & & + X_{22} & & & & + X_{32} & & & & + X_{42} & & & & = 1 \\
\text{Tarea 3:} & & & X_{13} & & & & + X_{23} & & & & + X_{33} & & & & + X_{43} & & & = 1 \\
\text{Tarea 4:} & & & & X_{14} & & & & + X_{24} & & & & + X_{34} & & & & + X_{44} & & = 1
\end{array}$$

Para: $X_{ij} = 0$ o $X_{ij} = 1$

Si $X_{ij} = 1$, entonces la función objetivo tomará el tiempo requerido para que la máquina *i* ejecute la tarea *j*. Pero si $X_{ij} = 0$, entonces la función objetivo no tomará el tiempo requerido. En general, un problema de asignación es un modelo equilibrado en el que el suministro y la demanda tienen valores numéricos iguales a 1. Los problemas derivados del modelo de transporte se caracterizan porque se conoce el costo de asignar cada nodo de suministro a cada nodo de demanda, por lo tanto la matriz de costo del problema de asignación es su ***matriz de costos***.

En conclusión, un problema de asignación implica *m* agentes u objetos y *n* tareas. Si determinamos $X_{ij} =1$ o $X_{ij} = 0$, según los agentes u objetos *i* se asigna a la tarea *j* o no, y si C_{ij} = muestra el costo de asignar el agente *i* a la tarea *j*, podemos escribir el modelo de asignación general como:

Minimizar: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \qquad i = 1,2,\ldots\ldots\ldots, m \text{ } \textit{Agentes u objetos}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq 1 \qquad j = 1,2,\ldots\ldots\ldots, m \text{ } \textit{Tareas}$$

$$Xij \geq 0 \quad \textit{para toda i y j}$$

Un problema de asignación se resuelve más fácilmente utilizando el ***método húngaro***, el cual se presenta en el siguiente subcapítulo.

8.4.1 MÉTODO DE HÚNGARO

El método húngaro es un algoritmo que reduce la matriz de costos mediante una serie de operaciones aritméticas para solucionar un problema de asignación. La asignación óptima se logra mediante la selección de celdillas con un costo "reducido" de cero.

Resolvamos el problema de asignación basado en la empresa que elabora uniformes escolares. Los datos se encuentran establecidos en la Tabla 8.52 de asignación A:

Tabla 8.52 Asignación A

	PRODUCCIÓN EN HORAS				Suministro (oferta)
	Tarea **1**	Tarea **2**	Tarea **3**	Tarea **4**	
Maquina **1**	6	3	1	7	1
Maquina **2**	2	5	4	3	1
Maquina **3**	3	2	6	5	1
Maquina **4**	5	4	1	3	1
Demanda	1	1	1	1	4

Utilicemos el algoritmo húngaro para resolver el problema:

1. *Reducción de renglones*
   En cada uno de los cuatro renglones de la tabla de asignación A, escogemos la celdilla que contenga el mínimo costo y le restamos cada una de las celdillas del renglón correspondiente.

   Así, el costo mínimo del renglón 1 (máquina 1) es 1; entonces, le restamos 1 a cada una de las celdillas: X_{11}, X_{12}, X_{13} y X_{14}.

   Igualmente, el costo mínimo del renglón 2 (máquina 2) es 2; entonces, la restamos 2 a cada una de las celdillas: X_{21}, X_{22}, X_{23} y X_{24}.

   Del mismo modo, el costo mínimo del renglón 3 (máquina 3) es 2; entonces, la restamos 2 a cada una de las celdillas: X_{31}, X_{32}, X_{33} y X_{34}.

   Por último, el costo mínimo del renglón 4 (máquina 4) es 1; entonces, la restamos 1 a cada una de las celdillas: X_{41}, X_{42}, X_{43} y X_{44}.

Los resultados se muestran en la Tabla 8.53 de asignación B:

Tabla 8.53 Asignación B

	PRODUCCIÓN EN HORAS				Suministro (oferta)
	Tarea **1**	Tarea **2**	Tarea **3**	Tarea **4**	
Maquina **1**	5	2	0	6	1
Maquina **2**	0	3	2	1	1
Maquina **3**	1	0	4	3	1
Maquina **4**	4	3	0	2	1
Demanda	1	1	1	1	4

Los cambios realizados en los coeficientes de costos no afectan al valor óptimo, porque a cada máquina se le debe asignar una de las cuatro tareas, y cada una de tales asignaciones se redujo por la misma constante. Esto significa que cuando usemos los nuevos costos, el valor óptimo de la función objetivo (o sea el costo mínimo total) será 5 unidades menor que el que se obtendría usando los costos originales.

Nótese que las 5 unidades corresponden a la suma de los costos mínimos que escogieron en cada uno de los cuatro renglones.

2. *Reducción de columna*
   De cada columna de la tabla de asignación B, escogemos la celdilla que contenga el mínimo costo y le restamos cada una de las celdillas de la columna correspondiente. Esto no afectará a la solución óptima. El nuevo valor óptimo será ahora 1 unidad menor que el anterior. Es decir, 6 unidades.

   Así, el costo mínimo de la columna 1 (tarea 1) es 0; entonces, le restamos 0 a cada una de las celdillas: X_{11}, X_{21}, X_{31} y X_{41}.
   Igualmente, el costo mínimo de la columna 2 (tarea 2) es 0; entonces, le restamos 0 a cada una de las celdillas: X_{12}, X_{22}, X_{32} y X_{42}.
   Del mismo modo, el costo mínimo de la columna 3 (tarea 3) es 0; entonces, le restamos 0 a cada una de las celdillas: X_{13}, X_{23}, X_{33} y X_{43}.
   Por último, el costo mínimo de la columna 4 (tarea 4) es 1; entonces, le restamos 1 a cada una de las celdillas: X_{14}, X_{24}, X_{34} y X_{44}.

Los resultados se muestran en la Tabla 8.54 de asignación C:

Tabla 8.54 Asignación C

	PRODUCCIÓN EN HORAS				Suministro (oferta)
	Tarea **1**	Tarea **2**	Tarea **3**	Tarea **4**	
Maquina **1**	5	2	0	5	1
Maquina **2**	0	3	2	0	1
Maquina **3**	1	0	4	2	1
Maquina **4**	4	3	0	1	1
Demanda	1	1	1	1	4

3. *Búsqueda de la matriz reducida*

Se trazan las líneas rectas mínimas que se requieren sobre los renglones y columnas para cubrir los ceros en la tabla de asignación C. Si el número de líneas que se usa es igual a la cantidad de renglones (o columnas) que hay, se dice que la matriz es reducida y hemos llegado a una solución óptima. Si no es así, saltamos al paso 4. Los resultados se indican en la Tabla 8.55 de asignación D:

Tabla 8.55 Asignación D

	PRODUCCIÓN EN HORAS				Suministro (oferta)
	Tarea **1**	Tarea **2**	Tarea **3**	Tarea **4**	
Maquina **1**	5	2	0	5	1
Maquina **2**	0	3	2	0	1
Maquina **3**	1	0	4	2	1
Maquina **4**	4	3	0	1	1
Demanda	1	1	1	1	4

Observe que se requiere únicamente de tres líneas para tapar los ceros. Ahora, comencemos con el paso 4.

4. Reducciones posteriores

De la tabla de asignación D, se debe encontrar el costo mínimo de las celdillas que no estén cubiertas por las líneas rectas (X_{44}=1), luego se suma este valor en las celdillas donde cruzan las líneas rectas (X_{23} y X_{33}), y se le resta este valor a las celdillas que no estén cubiertas por las líneas rectas (X_{11}, X_{12}, X_{14}, X_{41}, X_{42} y X_{44}). Los demás valores numéricos se mantienen inalterados X_{13}, X_{21}, X_{22}, X_{24}, X_{31}, X_{32}, X_{34} y X_{43}. Los cambios se muestran en la Tabla 8.56 de asignación E:

Tabla 8.56 Asignación E

	PRODUCCIÓN EN HORAS				Suministro (oferta)
	Tarea **1**	Tarea **2**	Tarea **3**	Tarea **4**	
Maquina **1**	4	1	0	4	1
Maquina **2**	0	3	3	0	1
Maquina **3**	1	0	5	2	1
Maquina **4**	3	2	0	0	1
Demanda	1	1	1	1	4

3. Regrese al paso 3. Encuentre de nuevo la matriz reducida. (Véase la Tabla 8.57 de asignación F).

Tabla 8.57 Asignación F

	PRODUCCIÓN EN HORAS				Suministro (oferta)
	Tarea **1**	Tarea **2**	Tarea **3**	Tarea **4**	
Maquina **1**	4	1	0	4	1
Maquina **2**	0	3	3	0	1
Maquina **3**	1	0	5	2	1
Maquina **4**	3	2	0	0	1
Demanda	1	1	1	1	4

Hemos llegado a una solución óptima debido a que los cuatros renglones o columnas que hay son iguales a las líneas rectas que se requieren como mínimo para tapar todos los ceros:

5. *Solución óptima*
De la tabla de asignación F, debemos designar una máquina para cada tarea, lo que significa que de la matriz de costo reducida se eligen las celdillas que tengan costos de cero, y se relaciona la máquina con la tarea que le corresponda. Las celdillas escogidas con costo cero se indican mediante una cruz. Los resultados se indican en la Tabla 8.58 de asignación G:

Tabla 8.58 Asignación G

	PRODUCCIÓN EN HORAS				Suministro (oferta)
	Tarea **1**	Tarea **2**	Tarea **3**	Tarea **4**	
Maquina **1**	4	1	x 0	4	1
Maquina **2**	x 0	3	3	0	1
Maquina **3**	1	x 0	5	2	1
Maquina **4**	3	2	0	x 0	1
Demanda	1	1	1	1	4

Observe que las celdillas X_{24} y X_{43} tienen costo de cero, sin embargo no forman parte de la solución. Si elegimos la celdilla X_{24} dejamos incapacitados para designar a la máquina 2 la tarea 1. Recuerde que a cada máquina sólo se le puede asignar una tarea, por lo tanto no podemos elegir dos ceros que se encuentren en un mismo renglón o en la misma columna.

Las asignaciones del problema de la mediana empresa que elabora uniformes escolares son:

A la máquina 1 se le debe asignar la tarea 3 *A la máquina 2 se le debe asignar la tarea 1*
A la máquina 3 se le debe asignar la tarea 2 *A la máquina 4 se le debe asignar la tarea 4*

El valor de la función objetivo se puede calcular por medio de la Tabla 8.59 de asignación A (tabla que contiene los valores numéricos de la matriz original de costo): (Véase la Figura 8.12)

Tabla 8.59 Asignacion A

	PRODUCCIÓN EN HORAS				Suministro (oferta)
	Tarea **1**	Tarea **2**	Tarea **3**	Tarea **4**	
Maquina **1**	6	3	1	7	1
Maquina **2**	2	5	4	3	1
Maquina **3**	3	2	6	5	1
Maquina **4**	5	4	1	3	1
Demanda	1	1	1	1	4

El costo de asignar la máquina 1 a la tarea 3 es de 1 hora.
El costo de asignar la máquina 2 a la tarea 1 es de 2 horas.
El costo de asignar la máquina 3 a la tarea 2 es de 2 horas.
El costo de asignar la máquina 4 a la tarea 4 es de 3 horas.
Costo total en la producción: 8 horas.

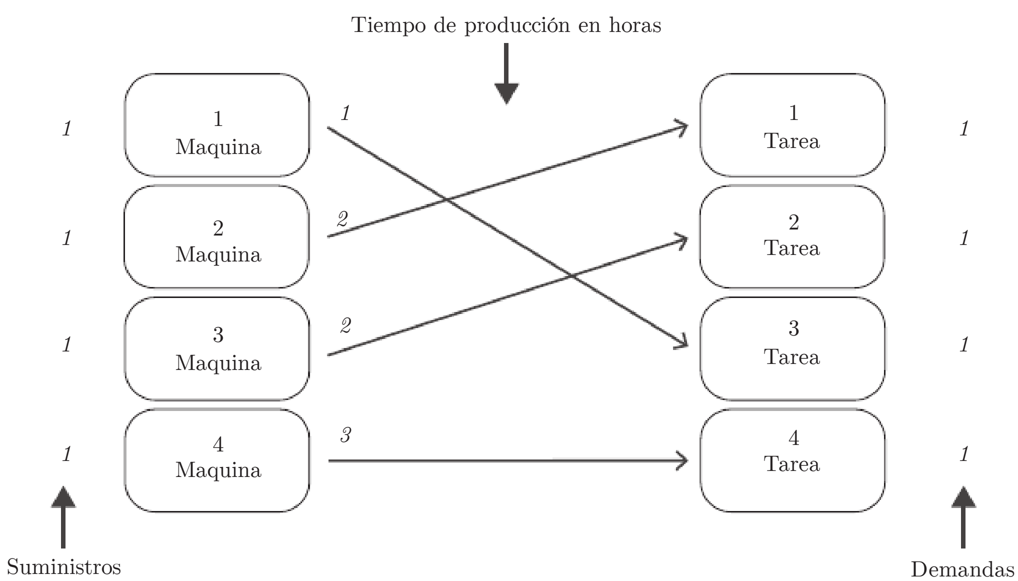


Figura 8.12

▷ 8.5 PROBLEMAS ESPECIALES DE ASIGNACIÓN

Un modelo de asignación puede implicar una o más de las siguientes situaciones:

1. Maximización de la función objetivo.
2. Agentes u objetos (suministros) no iguales a las tareas asignadas (demanda).
3. Asignaciones inaceptables.

1. Maximización de la función objetivo

Si se desea maximizar la función objetivo en un problema de asignación, sólo es necesario multiplicar la matriz de utilidades por -1, y resolverlo sistemáticamente como un problema de minimización. En este caso, tenemos que pensar no en un costo sino en utilidades. Los valores óptimos de la matriz de utilidades nos proporcionan las alternativas de decisión que se evalúan en función de ganancia en lugar de tiempo o costo. El aumento marginal anticipado del beneficio neto debido a tal asignación, tiene como consecuencia la asignación de un agente u objeto a una tarea.

2. Agentes u objetos (suministros) no iguales a las tareas asignadas (demanda)

Ahora bien, supongamos primero que la cantidad de agentes u objetos (suministro) supera al número de tareas asignadas (demanda). Cuando sucede esta condición, los agentes u objetos que resulten extras en la solución de un problema de asignación no serán asignados a ninguna tarea.

Ahora bien, suponga que la cantidad de agentes u objetos (suministros) es menor al número de tareas (demanda). En caso el problema de asignación no tendrá una solución factible. En esta situación, es necesario agregar los agentes u objetos ficticios que sean necesarios para la cantidad de tareas asignadas. Recordemos por ejemplo el problema basado en la producción de uniformes escolares resuelto por el método húngaro en el subcapítulo 8.4.1. Supongamos que tenemos 3 máquinas y 4 tareas de se deben de asignar. En este caso tendríamos que asignar una máquina ficticia que realice la tarea faltante. El costo medido en tiempo de asigna una máquina ficticia a una tarea cualquiera en la producción de uniformes escolares es de cero. Por supuesto, no de harán asignación real de la máquina a una tarea cualquiera.

La situación en la que la cantidad de agentes no es igual a la cantidad de tareas, es semejante al suministro total que no es igual a la demanda total en un problema de transporte.

3. Asignaciones inaceptables

Cuando en un problema existen asignaciones inaceptables, es necesario eliminar la variable de decisión correspondiente a la formulación. Supongamos que una máquina de la empresa que produce uniformes escolares se descompone por falta de mantenimiento preventivo, de tal manera que sería imposible realizarle una tarea.

Esta correspondencia (máquina – tarea) sería una asignación inaceptable.

Para solucionar el problema, simplemente se asigna un costo arbitrariamente grande representado mediante la letra M a la celdilla del renglón y columna que le corresponda. M es un número muy grande al cual si se le resta un número finito cualquiera, queda todavía un valor mayor que los demás números relevantes y automáticamente se descarta la asignación de la máquina con la tarea que le correspondía al momento de solucionar el problema por el método húngaro.

Este mismo procedimiento es empleado en un problema de transporte, para asegurar que las rutas inaceptables no sean parte de la solución óptima y para eliminar las variables artificiales.

▶ RESUMEN

Aprendimos a formular y solucionar el modelo de transporte, también llamado problema de flujo de red. La esquematización de este tipo de problemas consiste en nodos que representan tanto las plantas que suministran los bienes como las plantas que los distribuyen. Estos nodos se encuentran conectados por medio de un arco, el cual representa la ruta de distribución de bienes. Se aplicaron algoritmos que usan sólo operaciones aritméticas de suma y resta como:

1. Regla de la esquina noroeste (REN).
2. Método del costo mínimo (MCM).
3. Método por aproximaciones de Vogel (MAV).
4. Método de pasos secuenciales (MPS).
5. Método de distribución modificada (MODI).

Una característica especial de los modelos de transporte es que se producen soluciones factibles iniciales y óptimas con valores enteros para las variables de decisión. La razón es la estructura matemática particular del modelo de programación lineal. Cada variable aparece exactamente en una restricción de suministro y en una de demanda, además de que todos los coeficientes de las restricciones en las ecuaciones lineales de restricción son 1 y 0. A diferencia del método símplex y sus derivados, un modelo de transporte se puede resolver en forma rápida y eficiente sin importar la cantidad de variables y restricciones que contengan el modelo de PL.

También explicamos que un modelo de transporte puede implicar una o más de las siguientes situaciones:

1. Maximización de la función objetivo.
2. Oferta no igual a la demanda.
3. Problemas degenerados.
4. Rutas inaceptables.

Explicamos que un modelo de asignación es un problema en el cual el número de agentes u objetos (suministro) debe de ser igual a la tareas designadas (demanda), el cual puede ser resuelto por medio del método húngaro.

▶ EVALUACIÓN

Resuelva el siguiente problema de transporte:

Problema 1. Capítulo 8

Una fábrica de detergentes para trastes tiene dos plantas que se encuentran ubicadas en las ciudades X y Z. La capacidad de producción por semana se encuentra indicada en la Tabla A:

Tabla A

ORIGEN	CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN POR SEMANA
Planta en ciudad Y	25260
Planta en ciudad Z	23580

Una fábrica transporta su detergente en tres distribuidoras A, B y C; la demanda del detergente en una semana se muestra en la Tabla B:

Tabla B

DISTINO	DEMANDA POR SEMANA
Distribuidora A	17950
Distribuidora B	14380
Distribuidora C	16510

El costo por transportar cada bolsa de detergente desde el origen hasta su destino se muestra en la Tabla C:

Tabla B

	Destino		
Origen	Distribuidora A	Distribuidora B	Distribuidora C
Planta en ciudad Y	\$2	\$4	\$3
Planta en ciudad Z	\$5	\$3	\$2

La gerente pide al equipo de IO solucionar el problema de la siguiente manera:

1. Elaboren una red de flujo que represente la problemática del modelo de transporte.
2. Formulen el problema del modelo de transporte por medio de la programación lineal.
3. Solucionen el modelo de transporte por medio del MAV. (Indiquen la tabla de transporte y la red de flujo)
4. Demuestren por medio del MODI que la solución inicial factible obtenida por el MAV es una solución óptima (indiquen sistemáticamente el procedimiento del MODI).

▶ PL EN ACCIÓN (Movilización en la infantería de marina de Estados Unidos de América)[1]

La infantería de Estados Unidos elaboró un modelo de red para movilizar a sus oficiales en caso de una crisis mundial o guerra. El problema es enviar a estos oficiales (llamado acantonamiento, es decir, asignación de guardia) lo más rápido posible. El modelo elaborado para resolver este tipo de problema es el de transporte. Los nodos de origen o suministros representan al personal disponible, y los nodos de destino o demanda representan los acantonamientos. Una práctica realista podría implicar hasta 40 000 oficiales y 25 000 acantonamientos. Si se permiten todas las combinaciones del arco oficial a acantonamientos, el problema de transporte tendría mil millones de arcos. Para reducir el tamaño del problema, el personal con calificaciones similares se conjunta en el mismo nodo de suministro y las asignaciones de guardia similares en los mismos nodos de demanda. Usando este enfoque y los métodos para eliminar arcos no factibles, la infantería de marina ha resuelto problemas que implican 27 000 elementos y 10 000 acantonamientos en 10 segundos en una computadora personal. Se han obtenido resultados excelentes de envío de personal con grado y calificaciones laborales apropiados a los acantonamientos deseables. En una crisis, la disponibilidad y uso de este sistema puede hacer la diferencia entre una respuesta apropiada y un desastre. El sistema anterior requería de dos a cuatro días para producir un plan de movilización completo y una correspondencia de calidad inferior entre las calificaciones del oficial y las necesidades de acantonamiento. La infantería de marina está usando ahora el modelo de movilización para mejorar su capacidad en tiempo de paz.

▶ GLOSARIO

Red de flujo.—Representación gráfica de un modelo de transporte, constituido por nodos que representan la oferta y demanda de bienes, los cuales se conectan por medio de un arco que representan el costo de enviar el producto desde un origen a un destino.

Problema de transporte.—Modelo de programación lineal para encontrar el modo menos costoso de satisfacer demandas en n destinos mediante ofertas desde m orígenes.

Regla de la esquina noroeste (REN).—Algoritmo que se usa para encontrar una solución inicial factible para que el problema de transporte satisfaga la demanda y se agote la oferta en un orden prescrito.

1 PL EN ACCIÓN fue obtenido de: David R. Anderson, Dennis J. Sweeney y Thomas A. Williams. *Métodos Cuantitativos para los Negocios*. 9a. ed., Editorial Thomson, pág. 425. Información basada en: D.O. Bausch, G. G. Brown, D. R. Hundley, S. H. Rapp y R. E. Rosenthal, "Mobilizing Marine Corps Officers", en *Interfaces* (julio/agosto 1991), pp. 26-38.

Método de aproximación de Vogel (MAV).—Algoritmo que se usa para encontrar una solución inicial factible al problema de transporte mediante la consideración de "costos de penalidad" de no usar la ruta económica disponible.

Tabla de transporte.—Tabla que se usa para distribuir los parámetros de un problema de transporte y que proporciona un modo conveniente de aplicar algoritmos de solución.

Método de paso secuencial (MPS).—Serie de ajuste de la solución factible del problema de transporte que incorpora una nueva ruta.

Método de costo mínimo (MCM).—Algoritmo que se usa para encontrar una solución inicial factible al problema de transporte mediante el análisis del mínimo costo posible de enviar un producto a su destino.

Método de distribución modificado (MODI).—Forma simple de calcular los parámetros que se necesitan en el método de paso secuencial.

Método húngaro.—Algoritmo utilizado para solucionar problemas de asignación, en el cual a cada agente u objeto se le debe de asignar una sola tarea.

Degeneración.—Situación en el que el problema de transporte se indica por el hecho de que se usan menos $m + n = 1$.

Celdilla.—Rectángulo de la tabla de transporte que se usa para identificar una ruta entre un origen y un destino.

BIBLIOGRAFÍA

Anderson, D. R., Sweeney, D. J., & Williams., T. A. (s.f.). *Métodos Cuantitativos para los Negocios* (9a. ed.). Editorial Thomson.

Anfossi, A., & Meyer, M. F. (s.f.). *Curso de Álgebra.* Editorial Progreso, S.A.

Baldor, A. (s.f.). *Algebra* (10a. ed.). Editorial Publicaciones Cultural.

Eppen, G., Gould, F. J., Schmidt, C. P., Moore, J. H., & Wathjerford, L. R. (s.f.). *Investigación de Operaciones Aplicadas a la Ciencia Administrativa* (5a. ed.). Editorial Pearson Prentice Hall.

Mathur, K., & Solow, D. (s.f.). *Investigación de Operaciones.* Editorial Pearson Education.

Taha, H. A. (s.f.). *Investigación de Operaciones* (7a. ed.). Editorial Pearson Prentice Hall.

Thierauf, R. J., & Grosse, R. A. (2002). *Toma de Decisiones por Medio de la Investigación de Operaciones.* Editorial Limusa.

Winston, W. L. (2004). *Investigación de Operaciones. Aplicaciones y Algoritmos.* Editorial Thomson.

ÍNDICE ANALÍTICO

N

O

P

R