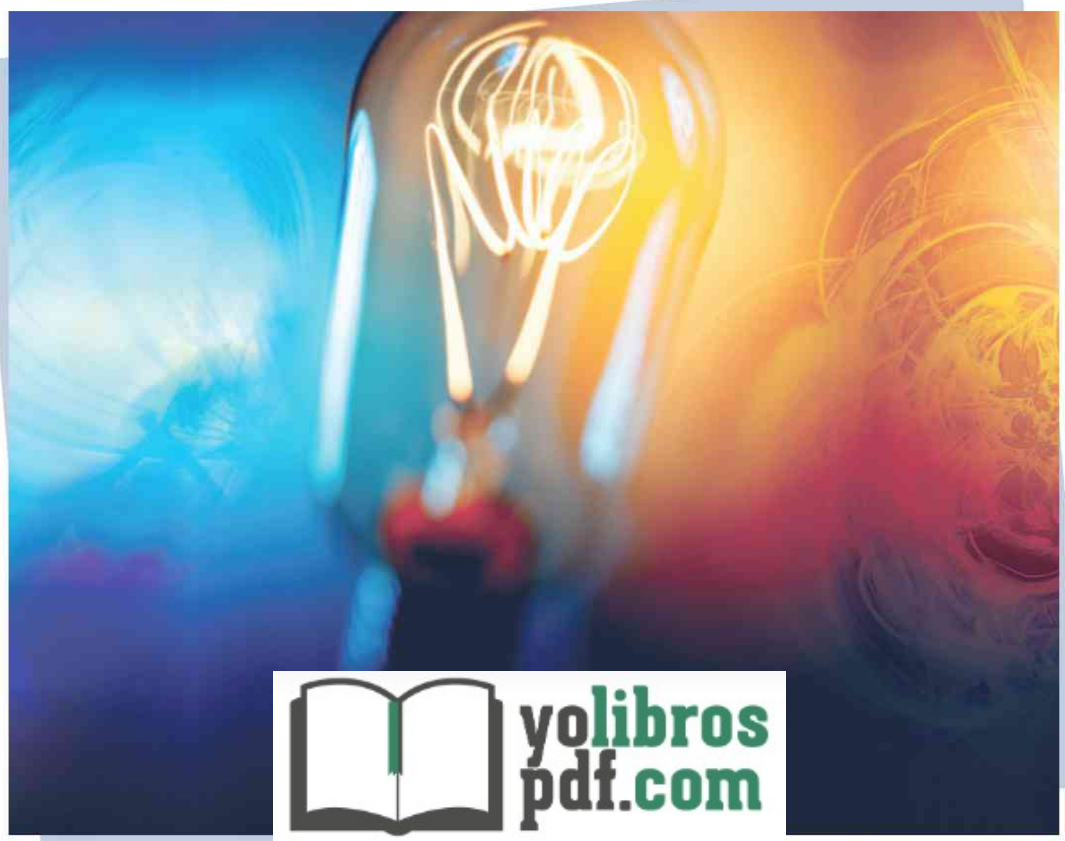
Electricidad

Fundamentos y problemas de electrostática, corriente continua, electromagnetismo y corriente alterna



yolibros pdf.com

Juan Luis Hernández Martín
Antonio Colmenar Santos

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Ra-Ma®

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Electricidad

Fundamentos y problemas de electrostática, corriente continua, electromagnetismo y corriente alterna

Electricidad

Fundamentos y problemas de electrostática, corriente continua, electromagnetismo y corriente alterna

Juan Luis Hernández Martín

Antonio Colmenar Santos

Ra-Ma®

La ley prohíbe
copiar o imprimir este libro

ELECTRICIDAD. FUNDAMENTOS Y PROBLEMAS DE ELECTROSTÁTICA, CORRIENTE CONTINUA, ELECTROMAGNETISMO Y CORRIENTE ALTERNA
© Juan Luis Hernández Martín y Antonio Colmenar Santos

© De la Edición Original en papel publicada por Editorial RA-MA
ISBN de Edición en Papel: 978-84-9964-134-8
Todos los derechos reservados © RA-MA, S.A. Editorial y Publicaciones, Madrid, España.

MARCAS COMERCIALES. Las designaciones utilizadas por las empresas para distinguir sus productos (hardware, software, sistemas operativos, etc.) suelen ser marcas registradas. RA-MA ha intentado a lo largo de este libro distinguir las marcas comerciales de los términos descriptivos, siguiendo el estilo que utiliza el fabricante, sin intención de infringir la marca y solo en beneficio del propietario de la misma. Los datos de los ejemplos y pantallas son ficticios a no ser que se especifique lo contrario.

RA-MA es una marca comercial registrada.

Se ha puesto el máximo empeño en ofrecer al lector una información completa y precisa. Sin embargo, RA-MA Editorial no asume ninguna responsabilidad derivada de su uso ni tampoco de cualquier violación de patentes ni otros derechos de terceras partes que pudieran ocurrir. Esta publicación tiene por objeto proporcionar unos conocimientos precisos y acreditados sobre el tema tratado. Su venta no supone para el editor ninguna forma de asistencia legal, administrativa o de ningún otro tipo. En caso de precisarse asesoría legal u otra forma de ayuda experta, deben buscarse los servicios de un profesional competente.

Reservados todos los derechos de publicación en cualquier idioma.

Según lo dispuesto en el Código Penal vigente ninguna parte de este libro puede ser reproducida, grabada en sistema de almacenamiento o transmitida en forma alguna ni por cualquier procedimiento, ya sea electrónico, mecánico, reprográfico, magnético o cualquier otro sin autorización previa y por escrito de RA-MA; su contenido está protegido por la Ley vigente que establece penas de prisión y/o multas a quienes, intencionadamente, reprodujeren o plagiaren, en todo o en parte, una obra literaria, artística o científica.

Editado por:
RA-MA, S.A. Editorial y Publicaciones
Calle Jarama, 33, Polígono Industrial IGARSA
28860 PARACUELLOS DE JARAMA, Madrid
Teléfono: 91 658 42 80. Fax: 91 662 81 39
Correo electrónico: editorial@ra-ma.com
Internet: www.ra-ma.es y www.ra-ma.com

Maquetación: Gustavo San Román Borrueco
Diseño Portada: Antonio García Tomé

ISBN: 978-84-9964-419-6

E-Book desarrollado en España en septiembre de 2014.

A nuestras mujeres, Merchi y Ana,
e hijos, Raúl y Lucía.

ÍNDICE

PRESENTACIÓN Y OBJETIVOS **17**

AUTORES **19**

CAPÍTULO 1. ELECTROSTÁTICA **21**

1.1 ELECTRICIDAD Y ELECTROTECNIA 22
1.2 ELECTRIZACIÓN DE UN CUERPO. CARGA ELÉCTRICA 23
1.3 ESTRUCTURA ATÓMICA DE LA MATERIA 29
1.4 CUERPOS CONDUCTORES Y AISLANTES 33
1.5 LEY DE COULOMB 35
1.6 FUERZA ELÉCTRICA DEBIDA A VARIAS CARGAS. PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN 37
1.7 CAMPO ELÉCTRICO. INTENSIDAD DE CAMPO ELÉCTRICO *E* 37
1.8 CAMPO ELÉCTRICO DEBIDO A VARIAS CARGAS PUNTUALES. PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN 41
1.9 TRABAJO ELÉCTRICO. DIFERENCIA DE POTENCIAL ELÉCTRICO EN UN CAMPO ELÉCTRICO UNIFORME 42
1.10 COMPORTAMIENTO DE UN CONDUCTOR Y UN AISLANTE EN UN CAMPO ELÉCTRICO 44
1.11 DIFERENCIA DE POTENCIAL Y POTENCIAL ELÉCTRICO DEBIDO A UNA CARGA PUNTUAL 45
1.12 POTENCIAL ELÉCTRICO DEBIDO A VARIAS CARGAS PUNTUALES 49
1.13 ENERGÍA POTENCIAL ELÉCTRICA 49
1.14 FLUJO ELÉCTRICO 50
1.15 LEY DE GAUSS 51

1.16 TODA LA CARGA DE UN CONDUCTOR, EN EQUILIBRIO ELECTROESTÁTICO, SE CONCENTRA EN SU SUPERFICIE 52
1.17 INTENSIDAD DE CAMPO *E* Y POTENCIAL ELÉCTRICO *V* DEBIDO A UNA ESFERA MACIZA CONDUCTORA CARGADA 53
1.18 INTENSIDAD DE CAMPO *E* Y POTENCIAL ELÉCTRICO *V* DEBIDO A UNA CORTEZA ESFÉRICA CONDUCTORA CARGADA 55
1.19 INTENSIDAD DE CAMPO *E* Y POTENCIAL ELÉCTRICO *V* DEBIDO A UN VOLUMEN ESFÉRICO CON CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA 55
1.20 INTENSIDAD DE CAMPO ELÉCTRICO *E* Y DIFERENCIA DE POTENCIAL V_{AB} DEBIDO A UNA CARGA LINEAL UNIFORME λ DE LONGITUD INFINITA 56
1.21 INTENSIDAD DE CAMPO ELÉCTRICO *E* DEBIDO A UN PLANO INFINITO DE DISTRIBUCIÓN UNIFORME DE DENSIDAD DE CARGA 58
1.22 INTENSIDAD DE CAMPO ELÉCTRICO *E* DEBIDO A DOS PLANOS INFINITOS PARALELOS CARGADOS CON CARGAS OPUESTAS 58
1.23 CAMPO EN LA PROXIMIDAD DE LA SUPERFICIE DE UN CONDUCTOR (TEOREMA DE COULOMB) 59
1.24 EL POTENCIAL DE UN CONDUCTOR AISLADO ES EL MISMO EN TODOS SUS PUNTOS 60
1.25 CAMPO EN EL INTERIOR DE UN CONDUCTOR HUECO, SIN CARGA Y CON CARGA 60
1.26 CAMPO ELÉCTRICO SOBRE LA SUPERFICIE DE UN CONDUCTOR. PRESIÓN ELECTROSTÁTICA 62
1.27 EN UN CONDUCTOR LAS CARGAS ELÉCTRICAS SE ACUMULAN EN LAS PUNTAS 63
1.28 RESUMEN DE LAS CARACTERÍSTICAS DE UN CONDUCTOR CARGADO EN EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO 65
1.29 RESUMEN DE CONCEPTOS Y FÓRMULAS DE LA ELECTROSTÁTICA 66
1.30 EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN 67

CAPÍTULO 2. CONDENSADOR 79
2.1 CAPACIDAD DE UN CONDUCTOR 80
2.2 CAPACIDAD DE UNA ESFERA 81
2.3 CONDENSADOR. CONDENSADOR PLANO 82
2.4 CONDENSADOR PLANO: EFECTO DE UN DIELÉCTRICO 86
2.5 RUPTURA DEL DIELÉCTRICO. RIGIDEZ DIELÉCTRICA DE LOS MATERIALES 89
2.6 CONDENSADOR CILÍNDRICO. GENERALIZACIÓN DE LA FÓRMULA DE LA CAPACIDAD DEL GENERADOR PLANO 90
2.7 DIELÉCTRICOS. POLARIZACIÓN 92
2.8 DESPLAZAMIENTO ELÉCTRICO D 96

2.9 LEY DE GAUSS EN PRESENCIA DE UN DIELÉCTRICO 96
2.10 FINALIDAD DEL DIELÉCTRICO EN LOS CONDENSADORES 98
2.11 ENERGÍA DE UN CONDENSADOR CARGADO 98
2.12 COMPORTAMIENTO DE UN CONDUCTOR Y UN DIELÉCTRICO EN UN CAMPO ELÉCTRICO 101
2.13 ANALOGÍA HIDRÁULICA DE UN CONDENSADOR 102
2.14 ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES 103
2.15 ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES EN PARALELO 103
2.16 ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES EN SERIE 104
2.17 ASOCIACIÓN MIXTA DE CONDENSADORES 105
2.18 RESUMEN DE CONCEPTOS Y FÓRMULAS DE ESTE CAPÍTULO 106
2.19 EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN 107

CAPÍTULO 3. CORRIENTE CONTINUA 127

3.1 ELECTROCINÉTICA. CIRCUITO ELÉCTRICO. ELEMENTOS ACTIVOS Y PASIVOS EN LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS 128
3.2 CORRIENTE ELÉCTRICA. INTENSIDAD DE LA CORRIENTE 132
3.3 DENSIDAD DE CORRIENTE. VELOCIDAD DE ARRASTRE 135
3.4 DIFERENCIA DE POTENCIAL. TENSIÓN. FUERZA ELECTROMOTRIZ. DIPOLO ELÉCTRICO 137
3.5 TRABAJO ELÉCTRICO. POTENCIA ELÉCTRICA 139
3.6 LEY DE OHM 142
3.7 RESISTENCIA ELÉCTRICA DE UN CONDUCTOR. CONDUCTANCIA ELÉCTRICA. RESISTENCIA EN FUNCIÓN DE LA TEMPERATURA 146
3.8 EFECTO Y LEY DE JOULE 149
3.9 RESISTOR. RESISTORES FIJOS, VARIABLES Y NO LINEALES 150
3.10 ASOCIACIÓN DE RESISTENCIAS 152
3.11 ASOCIACIÓN DE RESISTENCIAS EN SERIE 153
3.12 ASOCIACIÓN DE RESISTENCIAS EN PARALELO 153
3.13 ASOCIACIÓN MIXTA DE RESISTENCIAS 155
3.14 LEY DE OHM GENERALIZADA. FUERZA CONTRAELECTROMOTRIZ 155
3.15 APARATOS DE MEDIDAS DE LAS MAGNITUDES ELÉCTRICAS EN CC 161
3.16 ELEMENTOS PASIVOS IDEALES Y REALES 165
3.17 ELEMENTOS ACTIVOS IDEALES Y REALES 168
3.18 FUENTE DE TENSIÓN IDEAL Y REAL 169
3.19 FUENTE DE TENSIÓN REAL. CARACTERÍSTICA *V-I*. PUNTO DE FUNCIONAMIENTO 170
3.20 FUENTE DE CORRIENTE IDEAL Y REAL 171

3.21 FUENTE DE INTENSIDAD REAL. CARACTERÍSTICA I-V. PUNTO DE FUNCIONAMIENTO 172
3.22 TRANSFORMACIÓN DE FUENTES 173
3.23 EQUIVALENCIA ENTRE ASOCIACIONES DE FUENTES 175
3.24 GENERADORES DE TENSIÓN IGUALES ASOCIADOS EN SERIE Y EN PARALELO 177
3.25 TEMPERATURA DE TRABAJO DE UN CONDUCTOR RECORRIDO POR UNA CORRIENTE ELÉCTRICA 178
3.26 PROTECCIÓN DE LAS LÍNEAS ELÉCTRICAS: FUSIBLE 181
3.27 CAÍDA DE TENSIÓN EN UNA LÍNEA DE CORRIENTE CONTINUA 184
3.28 CÁLCULO DE UNA LÍNEA DE CC 186
3.29 PRODUCCIÓN DE CALOR POR ENERGÍA ELÉCTRICA 186
3.30 RESUMEN DE CONCEPTOS Y FÓRMULAS DE ESTE CAPÍTULO 188
3.31 EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN 190

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE CIRCUITOS EN CORRIENTE CONTINUA 213
4.1 DEFINICIONES EN REDES ELÉCTRICAS 214
4.2 LEYES DE KIRCHHOFF 215
4.3 APLICACIÓN DE LAS LEYES DE KIRCHHOFF EN RESOLUCIÓN DE REDES: MÉTODO DE CORRIENTES DE RAMAS 219
4.4 APLICACIÓN DE LAS LEYES DE KIRCHHOFF EN RESOLUCIÓN DE REDES: MÉTODO DE CORRIENTES DE MALLAS 221
4.5 APLICACIÓN DE LAS LEYES DE KIRCHHOFF EN RESOLUCIÓN DE REDES: MÉTODO DE LAS TENSIONES DE LOS NUDOS 223
4.6 PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN 225
4.7 TEOREMA DE THÉVENIN 228
4.8 TEOREMA DE NORTON 230
4.9 TRANSFORMACIÓN DE FUENTES THÉVENIN Y NORTON 232
4.10 TEOREMA DE SUSTITUCIÓN 234
4.11 TEOREMA DE RECIPROCIDAD 235
4.12 TEOREMA DE MILLMAN 236
4.13 TEOREMA DE TELLEGEN 236
4.14 TEOREMA DE KENNELLY 237
4.15 TEOREMA DE LA MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA 239
4.16 RÉGIMEN TRANSITORIO Y RÉGIMEN PERMANENTE 241
4.17 REGÍMENES TRANSITORIOS: CIRCUITO RC 242
4.18 REGÍMENES TRANSITORIOS: CIRCUITO RL 247
4.19 RESUMEN COMPARATIVO DE LOS ELEMENTOS PASIVOS *R*, *L* Y *C* EN CORRIENTE CONTINUA 252

4.20 RESUMEN DE CONCEPTOS Y FÓRMULAS DE ESTE CAPÍTULO.....253
4.21 EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN 253

CAPÍTULO 5. ELECTROMAGNETISMO: FUENTES DE CAMPO MAGNÉTICO, FUERZAS ELECTROMAGNÉTICAS, MATERIALES MAGNÉTICOS.....295

5.1 ELECTROMAGNETISMO. INTRODUCCIÓN HISTÓRICA.....296
5.2 MAGNETISMO. IMANES NATURALES E IMANES ARTIFICIALES. POLOS MAGNÉTICOS. CAMPO MAGNÉTICO. INDUCCIÓN MAGNÉTICA *B* 298
5.3 FLUJO MAGNÉTICO Φ.....301
5.4 LEY DE GAUSS PARA EL MAGNETISMO 304
5.5 CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR UNA CARGA EN MOVIMIENTO. CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR UNA CORRIENTE. LEY DE BIOT-SAVART 305
5.6 CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR UNA CORRIENTE RECTILÍNEA 308
5.7 CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR UNA CORRIENTE CIRCULAR.....310
5.8 CIRCULACIÓN DE LA INDUCCIÓN MAGNÉTICA *B* 312
5.9 TEOREMA DE AMPÈRE.....313
5.10 INDUCCIÓN MAGNÉTICA EN EL INTERIOR DE UN CONDUCTOR RECTILÍNEO.....317
5.11 INDUCCIÓN MAGNÉTICA EN UN SOLENOIDE 318
5.12 INDUCCIÓN MAGNÉTICA EN UNA BOBINA 320
5.13 FUERZA MAGNÉTICA SOBRE UNA CARGA ELÉCTRICA EN EL INTERIOR DE UN CAMPO MAGNÉTICO FUERZA DE LORENTZ 322
5.14 FUERZA MAGNÉTICA SOBRE UN CONDUCTOR RECTILÍNEO POR EL QUE CIRCULA UNA CORRIENTE. FUERZA DE LAPLACE 324
5.15 FUERZA MAGNÉTICA SOBRE UN CONDUCTOR CUALQUIERA 326
5.16 MOMENTO SOBRE UNA ESPIRA DE CORRIENTE. PRINCIPIO DEL FLUJO MÁXIMO. MOMENTO MAGNÉTICO DE UNA ESPIRA.....328
5.17 FUERZA ELECTROMAGNÉTICA ENTRE DOS CORRIENTES RECTILÍNEAS PARALELAS 332
5.18 EFECTO HALL.....334
5.19 EXCITACIÓN MAGNÉTICA. PERMEABILIDAD MAGNÉTICA RELATIVA. CORRIENTES AMPERIANAS.....335
5.20 IMANACIÓN. TEOREMA DE AMPÈRE PARA EL VECTOR H.....339
5.21 MATERIALES MAGNÉTICOS: DIAMAGNETISMO, PARAMAGNETISMO, FERROMAGNETISMO.....341
5.22 HISTÉRESIS MAGNÉTICA 346
5.23 BOBINA DE NÚCLEO CORTO: CAMPO DESMAGNETIZANTE 348

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

5.24 REFRACCIÓN DE LAS LÍNEAS DE INDUCCIÓN MAGNÉTICA 350
5.25 TABLA COMPARATIVA DE CAMPO MAGNÉTICO Y CAMPO ELÉCTRICO 352
5.26 RESUMEN DE CONCEPTOS Y FÓRMULAS DE ESTE CAPÍTULO 354
5.27 EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN 356

CAPÍTULO 6. ELECTROMAGNETISMO: INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA, CIRCUITOS MAGNÉTICOS 377

6.1 FUERZA ELECTROMOTRIZ INDUCIDA. LEY DE FARADAY-HENRY 378
6.2 LEY DE LENZ 382
6.3 FUERZA ELECTROMOTRIZ INDUCIDA DINÁMICA: CAMPO ELÉCTRICO INDUCIDO Y FEM INDUCIDA EN UN CONDUCTOR EN MOVIMIENTO 385
6.4 FUERZA ELECTROMOTRIZ INDUCIDA ESTÁTICA: CAMPO ELÉCTRICO INDUCIDO Y FEM INDUCIDA POR UN FLUJO CAMBIANTE EN EL TIEMPO 390
6.5 ESTUDIO ENERGÉTICO DE UN GENERADOR Y UN MOTOR DE ENERGÍA ELÉCTRICA ELEMENTAL. TRABAJO ELECTROMAGNÉTICO 392
6.6 FÓRMULA GENERAL DE LA LEY DE AMPÈRE 394
6.7 CORRIENTES DE FOUCAULT 396
6.8 AUTOINDUCCIÓN. COEFICIENTE DE AUTOINDUCCIÓN *L* DE UN CIRCUITO 399
6.9 ENERGÍA DE UN CAMPO MAGNÉTICO 401
6.10 ENERGÍA PERDIDA POR HISTÉRESIS 404
6.11 PÉRDIDAS MAGNÉTICAS TOTALES: PÉRDIDAS EN EL HIERRO 405
6.12 ACOPLAMIENTO MAGNÉTICO. INDUCTANCIA MUTUA 406
6.13 ENERGÍA ALMACENADA EN UN ACOPLAMIENTO MAGNÉTICO 412
6.14 REGLA DE LOS PUNTOS PARA BOBINAS CON ACOPLAMIENTO MAGNÉTICO 415
6.15 RELACIÓN ENTRE EL COEFICIENTE DE INDUCCIÓN *L* Y EL COEFICIENTE DE INDUCTANCIA MUTUA *M* 417
6.16 INDUCTANCIAS EN SERIE 418
6.17 INDUCTANCIAS EN PARALELO 420
6.18 FUERZA DE UN ELECTROIMÁN 422
6.19 CIRCUITO MAGNÉTICO. LEY DE HOPKINSON 423
6.20 CIRCUITO MAGNÉTICO CON ENTREHIERRO 426
6.21 RELUCTANCIAS EN SERIE 429
6.22 RELUCTANCIAS EN PARALELO 429
6.23 RELUCTANCIAS EN SERIE Y PARALELO 430

6.24 CIRCUITO CON PARTE MÓVIL. CONVERSIÓN ELECTROMECÁNICA DE ENERGÍA 430
6.25 FUGAS MAGNÉTICAS. COEFICIENTE DE HOPKINSON 432
6.26 FUERZA ELECTROMOTRIZ INDUCIDA EN UNA ESPIRA GIRATORIA: GENERADOR ELEMENTAL 433
6.27 FUERZA CONTRAELECTROMOTRIZ INDUCIDA EN UNA ESPIRA GIRATORIA: MOTOR ELEMENTAL 437
6.28 ECUACIONES DE MAXWELL 438
6.29 RESUMEN DE CONCEPTOS Y FÓRMULAS DE ESTE CAPÍTULO 440
6.30 EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN 443

CAPÍTULO 7. CORRIENTE ALTERNA MONOFÁSICA 459
7.1 GENERACIÓN DE UNA FEM SINUSOIDAL 460
7.2 MAGNITUDES Y VALORES FUNDAMENTALES DE UNA SEÑAL SINUSOIDAL 461
7.3 FRECUENCIA Y PARES DE POLOS EN LOS GENERADORES DE CA 467
7.4 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE MAGNITUDES SINUSOIDALES. REPRESENTACIÓN CARTESIANA Y FASORIAL 468
7.5 OPERACIONES BÁSICAS CON NÚMEROS COMPLEJOS 475
7.6 CIRCUITO EN CORRIENTE ALTERNA: IMPEDANCIA 478
7.7 ASOCIACIÓN DE IMPEDANCIAS EN CA: EN SERIE, EN PARALELO, MIXTAS 481
7.8 LEYES DE KIRCHHOFF EN CA 484
7.9 GENERALIZACIÓN DE LAS FÓRMULAS Y TEOREMAS DE LAS REDES DE CC A REDES DE CA 485
7.10 CIRCUITO DE CA SINUSOIDAL CON RESISTENCIA *R*: TENSIÓN E INTENSIDAD 485
7.11 CIRCUITO DE CA SINUSOIDAL CON RESISTENCIA *R*: POTENCIA ACTIVA *P* 487
7.12 CIRCUITO DE CA SINUSOIDAL CON INDUCTANCIA *L*: TENSIÓN, INTENSIDAD, REACTANCIA INDUCTIVA X_L 489
7.13 CIRCUITO DE CA SINUSOIDAL CON INDUCTANCIA *L*: POTENCIA REACTIVA INDUCTIVA Q_L 493
7.14 CIRCUITO DE CA SINUSOIDAL CON CAPACIDAD *C*: TENSIÓN, INTENSIDAD, REACTANCIA CAPACITIVA X_C 496
7.15 CIRCUITO DE CA SINUSOIDAL CON CAPACIDAD C: POTENCIA REACTIVA CAPACITIVA QC 500
7.16 CIRCUITO DE RLC EN SERIE: DIAGRAMA DE TENSIONES Y DIAGRAMA DE IMPEDANCIAS 503
7.17 POTENCIAS EN CIRCUITOS RLC: POTENCIA ACTIVA, REACTIVA Y APARENTE 506

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

7.18 FACTOR DE POTENCIA Y COSENO DE φ. CORRECCIÓN DEL FACTOR DE POTENCIA 514
7.19 APARATOS DE MEDIDA Y FORMAS DE CONEXIÓN 518
7.20 TEOREMA DE BOUCHEROT 519
7.21 RESONANCIA. RESONANCIA EN SERIE Y EN PARALELO 520
7.22 CIRCUITOS ELÉCTRICOS CON SEÑALES NO SENOIDALES: ARMÓNICOS 523
7.23 LOS ARMÓNICOS: ORIGEN, FUENTES, EFECTOS, CONSECUENCIAS, MEDIDAS CORRECTIVAS 528
7.24 POTENCIAS EN LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS CON SEÑALES NO SENOIDALES 531
7.25 RESUMEN DE CONCEPTOS Y FÓRMULAS DE ESTE CAPÍTULO 536
7.26 EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN 540

CAPÍTULO 8. CORRIENTE ALTERNA TRIFÁSICA 573
8.1 GENERACIÓN DE UN SISTEMA TRIFÁSICO 574
8.2 GENERADOR TRIFÁSICO CONECTADO EN ESTRELLA Y. TENSIONES E INTENSIDADES 578
8.3 GENERADOR TRIFÁSICO CONECTADO EN TRIÁNGULO Δ. TENSIONES E INTENSIDADES 581
8.4 CARGAS EQUILIBRADAS: CARGAS IGUALES EN ESTRELLA Y 584
8.5 CARGAS EQUILIBRADAS: CARGAS IGUALES EN TRIÁNGULO Δ 587
8.6 CARGAS DESEQUILIBRADAS: CARGAS DIFERENTES EN ESTRELLA Y CON NEUTRO 588
8.7 CARGAS DESEQUILIBRADAS: CARGAS DIFERENTES EN ESTRELLA Y SIN NEUTRO 590
8.8 CARGAS DESEQUILIBRADAS: CARGAS DIFERENTES EN TRIÁNGULO Δ 592
8.9 TRANSFORMACIÓN ESTRELLA EN TRIÁNGULO Y TRIÁNGULO EN ESTRELLA 594
8.10 DETERMINACIÓN DE LA SECUENCIA DE FASES 595
8.11 POTENCIAS EN UN SISTEMA TRIFÁSICO: CASO GENERAL 597
8.12 POTENCIA INSTANTÁNEA EN UN SISTEMA TRIFÁSICO EQUILIBRADO 598
8.13 POTENCIA ACTIVA *P*, REACTIVA *Q* Y APARENTE *S* EN UN SISTEMA TRIFÁSICO EQUILIBRADO EN ESTRELLA Y 600
8.14 POTENCIA ACTIVA *P*, REACTIVA *Q* Y APARENTE *S* EN UN SISTEMA TRIFÁSICO EQUILIBRADO EN TRIÁNGULO Δ 601
8.15 MEDIDAS DE POTENCIA EN LOS SISTEMAS TRIFÁSICOS 603

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

8.16 MEDIDA DE LA POTENCIA EN UN SISTEMA EQUILIBRADO CON NEUTRO RSTN 603
8.17 MEDIDA DE LA POTENCIA EN UN SISTEMA EQUILIBRADO SIN NEUTRO RST 604
8.18 MEDIDA DE LA POTENCIA EN UN SISTEMA DESEQUILIBRADO CON NEUTRO RSTN 606
8.19 MEDIDA DE LA POTENCIA EN UN SISTEMA DESEQUILIBRADO SIN NEUTRO RST. MÉTODO DE LOS TRES VATÍMETROS 607
8.20 MEDIDA DE LA POTENCIA EN UN SISTEMA DESEQUILIBRADO SIN NEUTRO RST. MÉTODO DE LOS DOS VATÍMETROS. PARTICULARIZACIÓN PARA SISTEMAS EQUILIBRADOS 610
8.21 CORRECCIÓN DEL FACTOR DE POTENCIA EN UN SISTEMA TRIFÁSICO 614
8.22 VENTAJAS DEL SISTEMA TRIFÁSICO FRENTE AL SISTEMA MONOFÁSICO 617
8.23 RESUMEN DE CONCEPTOS Y FÓRMULAS DE ESTE CAPÍTULO 619
8.24 EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN 623

ANEXO A. GRANDES PERSONAJES EN LA HISTORIA DE LA ELECTRICIDAD 647

ANEXO B. MAGNITUDES VECTORIALES. OPERACIONES 675

ANEXO C. TRIGONOMETRÍA 681

ANEXO D. NÚMEROS COMPLEJOS 685

BIBLIOGRAFÍA 691

ÍNDICE DE MAGNITUDES Y UNIDADES 693

ÍNDICE ALFABÉTICO 697

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

PRESENTACIÓN Y OBJETIVOS

La lectura de este libro permite adquirir una visión de conjunto de los fundamentos de la electricidad, mediante una descripción sencilla, gráfica y práctica, pero con una adecuada fundamentación teórica, pues, como dijo Ortega y Gasset, "*nada hay más práctico que una buena teoría*". En él se desgranan, para su correcto estudio y comprensión, los contenidos necesarios para posteriormente poder adentrarse con propiedad en el amplio mundo de las aplicaciones eléctricas.

En la elaboración de sus contenidos se ha procurado emplear un lenguaje sencillo y claro, pero riguroso, se han utilizado procesos matemáticos básicos, pero que a su vez sean capaces de permitir culminar el proceso de aprendizaje con un nivel suficiente de conocimientos. Como valor añadido, en múltiples explicaciones se presentan los razonamientos desde varios ángulos o niveles matemáticos posibles y en una gran cantidad de casos se exponen las aplicaciones prácticas concretas de cada teoría vista.

El texto se ha estructurado en ocho capítulos y cuatro útiles anexos; en sus más de cuatrocientas figuras se presentan de forma sintética y esquemática los diferentes contenidos que se desarrollan a lo largo del texto y que encuentran un buen punto de apoyo en el más de un centenar de problemas prácticos resueltos que se presentan. Se pretende que el libro sea útil, no sólo durante la etapa de aprendizaje, sino también, posteriormente, durante el ejercicio de la actividad profesional.

Así, en el capítulo 1 se presenta el tema de la *Electrostática: campo, potencial y flujo eléctrico*; en el capítulo 2, se trata la *Electrostática: capacidad eléctrica*. El capítulo 3 aborda la *Corriente continua*; en el capítulo 4 se ve el *Análisis de circuitos en corriente continua;* el capítulo 5 presenta el *Electromagnetismo: fuentes de campo magnético, fuerzas electromagnéticas, materiales magnéticos.* En el capítulo 6 se ven el *Electromagnetismo: inducción electromagnética, circuitos magnéticos*; en el capítulo 7 se pasa revista a la *Corriente alterna monofásica* y, finalmente, en el capítulo 8 se estudia la *Corriente alterna trifásica.* Al final de cada capítulo se propone una batería de ejercicios

resueltos, donde de una manera eminentemente práctica se refuerzan los contenidos del tema.

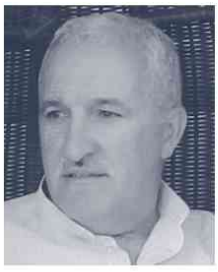
En el Anexo I se pasa revista a los *Grandes personajes en la historia de la electricidad*. En el Anexo II se facilita un resumen de las *Operaciones con magnitudes vectoriales*, en el Anexo III sobre las relaciones *Trigonométricas* y finalmente en el Anexo IV sobre los *Números complejos*.

El libro está dirigido preferentemente a los alumnos de los Ciclos Formativos de Formación Profesional de Electricidad-Electrónica, así como para la asignatura Electrotecnia del Bachillerato Tecnológico, pero también puede ser útil para profesionales del sector, así como para alumnos de los primeros cursos de Grados en Ingenierías, Arquitectura y en general estudios técnicos que incorporen en su currículo asignaturas o módulos relacionados con la electricidad. Se ha pensado también para cubrir parte de la programación de un curso de Experto Profesional en Equipos e Instalaciones Eléctricas (*http://volta.ieec.uned.es/ programa_ ENER.asp*), reconocido con 20 créditos ETCS en un título propio de la UNED (Universidad Nacional de Educación a Distancia), desde donde se imparte totalmente a distancia (*on-line*), y en general a todas aquellas personas que se encuentren en diferentes entornos relacionados con el mundo de la electricidad, bien por cursar enseñanzas profesionales o por desarrollar tareas en empresas que tengan que ver con este tipo de actividades.

Esperamos que esta obra cumpla con sus expectativas y le sea de utilidad.

AUTORES

D. **Antonio Colmenar Santos**, es Doctor Ingeniero Industrial e Ingeniero Industrial (especialidad Electrónica y Automática) por la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la UNED e Ingeniero Técnico Industrial por la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de la Universidad de Valladolid, especialidad Electricidad. Actualmente, es Profesor Titular de Escuela Universitaria en el área de Ingeniería Eléctrica del DIEEC de la UNED. Es profesor titular en excedencia del cuerpo de Profesores de Educación Secundaria y de Profesores Técnicos de Formación Profesional en las especialidades de Sistemas Electrónicos y Equipos Eléctricos respectivamente. Ha trabajado para la AECI-ICI como experto asesor en el proyecto INTECNA (Nicaragua). Ha pertenecido a la Association for the Advancement of Computing in Education (AACE). Ha sido Coordinador para la Virtualización de la ETSII de la UNED y Coordinador de Servicios Telemáticos de la UNED, secretario de DIEEC y actualmente es director del Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y de Control de la UNED (DIEEC).



D. **Juan Luis Hernández Martín**, es Ingeniero Técnico en Electricidad, por la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Las Palmas. Experto y Master en Informática Educativa por la UNED. Desde el año 1980, es Profesor titular del Cuerpo de Profesores de Educación Secundaria en la especialidad de Sistemas Electrotécnicos y Automáticos. Ha sido asesor del Centro de Profesores de La Laguna, tutor externo del Practicum del Centro Superior de Educación y tutor de la Consejería de Educación en la modalidad de teleformación. Además de la realización de cursos relacionados con su especialidad y profesión ha participado en varios proyectos educativos de la Comunidad Europea.

Capítulo 1

ELECTROSTÁTICA

Objetivos:

- Exponer las diferentes formas de electrizar los cuerpos.
- Clasificar los materiales según sus propiedades eléctricas.
- Conocer la teoría atómica que explica los fenómenos electrostáticos.
- Conocer la ley de Coulomb.
- Describir el campo eléctrico y explicar el concepto de intensidad de campo eléctrico.
- Explicar el concepto de diferencia de potencial relacionándolo con los conceptos de trabajo y energía en un campo eléctrico.
- Explicar el concepto de potencial eléctrico.
- Analizar el concepto de flujo eléctrico y establecer la Ley de Gauss.
- Aplicar la Ley de Gauss para obtener el campo eléctrico de diversas configuraciones de carga.
- Exponer situaciones observables que ayuden a entender los contenidos de esta unidad didáctica.

- Resolver ejercicios y problemas con contenidos propios de esta unidad didáctica.

1.1 ELECTRICIDAD Y ELECTROTECNIA

La **Electricidad** es una forma de energía basada en los electrones que forman parte de los átomos, de los que están constituidos todos los materiales. El exceso o déficit de electrones en un material origina que éste adquiera una carga negativa o positiva, respectivamente. De acuerdo al estudio que se hace de la electricidad, se tienen, entre otras, las siguientes disciplinas:

- **Electrostática:** estudia el comportamiento de las cargas eléctricas en reposo.
- **Electrocinética:** estudia el comportamiento de las cargas en movimiento y su propagación a través de cuerpos conductores (corriente eléctrica). No estudia los fenómenos magnéticos engendrados por dicho movimiento.
- **Electrodinámica:** estudia las cargas eléctricas en movimiento y los efectos de una corriente eléctrica sobre otra.
- **Electromagnetismo:** estudia las interacciones entre las corrientes eléctricas y los campos magnéticos.
- **Electroquímica:** estudia los procesos eléctricos en relación con los procesos químicos.

La **Electrotecnia** es el estudio de las aplicaciones técnicas de la electricidad. Comprende, entre otras, a las siguientes ramas:

- **Teoría de circuitos eléctricos:** estudio de los circuitos eléctricos.
- **Líneas y redes eléctricas:** estudio del transporte y distribución de la electricidad.
- **Máquinas eléctricas:** estudio de generadores, transformadores y motores eléctricos.
- **Aparatos de medida y protección:** estudio de los aparatos de medidas y aparatos de protección.
- **Luminotecnia:** estudio del alumbrado eléctrico.

1.2 ELECTRIZACIÓN DE UN CUERPO. CARGA ELÉCTRICA

Existen diferentes formas de electrizar un cuerpo:

Electricidad por frotamiento

Se basa en una experiencia conocida desde la antigüedad, que es la propiedad que adquieren ciertos cuerpos, al ser frotados, de atraer a ciertos cuerpos ligeros. Esta propiedad se le llama **electrización**, y el cuerpo que la posee se dice que está electrizado.

Si una varilla de ámbar se frota con un paño de lana se electriza, es decir, adquiere propiedades eléctricas. También se electriza una varilla de vidrio si se frota con un paño de seda (*figura 1.1*). Ambas varillas, debido a las propiedades eléctricas adquiridas manifiestan, entre otras, la de atraer objetos ligeros, como trocitos de papel, pero la propiedad eléctrica adquirida por frotamiento no es equivalente en ambos casos. Así, puede observarse que dos varillas de ámbar electrizadas se *repelen* entre sí, y lo mismo sucede en el caso de que ambas sean de vidrio (*figura 1.1*). Sin embargo, la varilla de ámbar y la de vidrio se *atraen*. B. Franklin (1706-1790) llamó a la clase de electricidad adquirida por el vidrio **positiva** (+) y a la adquirida por el ámbar **negativa** (-). A la *cantidad* de electricidad adquirida por cada barra se le llama **carga eléctrica**.

En la antigua Grecia habían observado este fenómeno al frotar pieles con la resina ámbar, *electrón* en griego, de donde proviene la palabra electricidad y sus derivados.

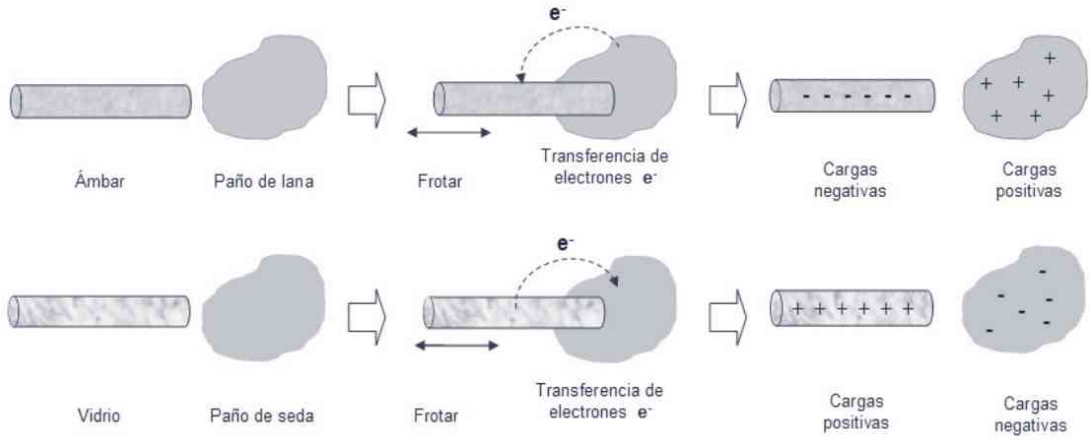


Figura 1.1. Electrización por frotamiento

Si se repite la experiencia de frotamiento con distintos cuerpos, todos los cuerpos electrizados se comportarán como el vidrio (carga +) o como el ámbar (carga negativa). En general, la materia es fundamentalmente neutra, es decir, que su carga positiva y negativa son iguales.

En definitiva, todas estas experiencias pusieron de manifiesto que:

- Existen sólo dos clases de cargas eléctricas.
- Las cargas eléctricas de distinto signo se atraen y cargas eléctricas de igual signo se repelen.
- La carga eléctrica de un cuerpo es, como se verá más adelante, el defecto (carga positiva) o exceso (carga negativa) de electrones que posee.
- La carga eléctrica de un sistema aislado permanece constante (principio de conservación de la carga eléctrica).
- *La carga eléctrica está cuantificada*, es decir, existe una cantidad, o carga, mínima de electricidad que es la que posee el electrón. La carga eléctrica del electrón tiene una magnitud muy pequeña y en electrotecnia se utiliza un múltiplo que es el culombio (C), siendo la equivalencia: $1\ C = 6{,}25 \cdot 10^{18}$ electrones.

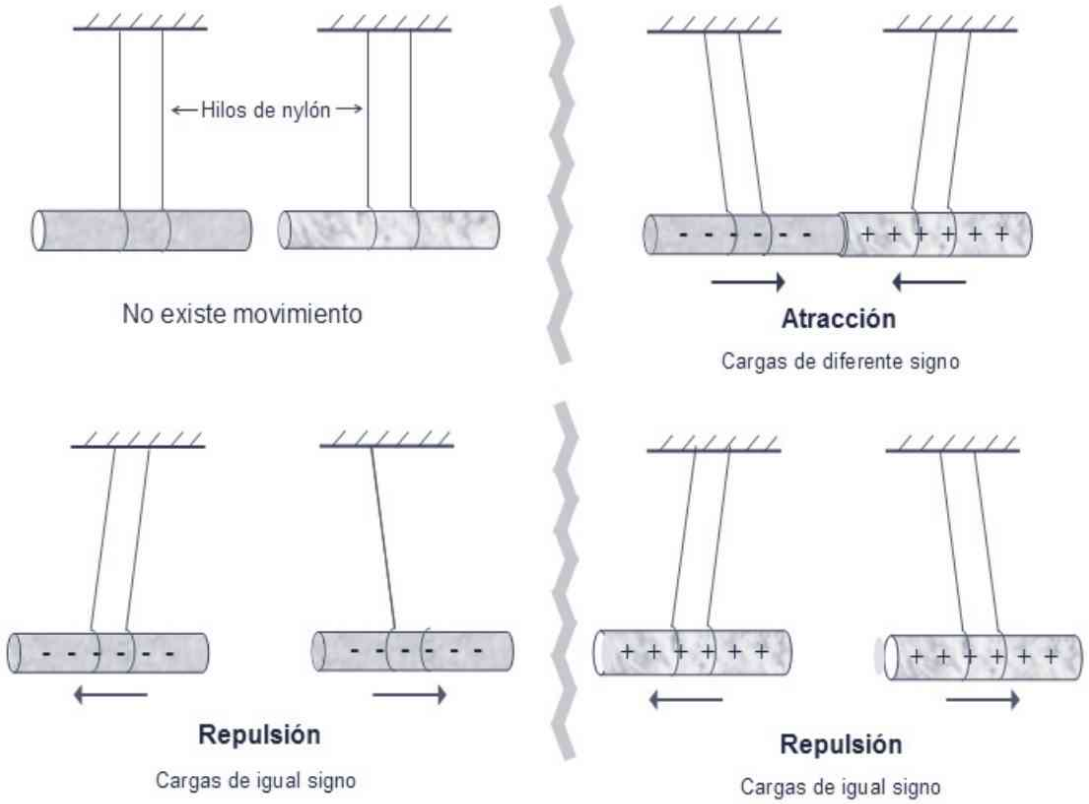


Figura 1.2. Atracción o repulsión de cuerpos cargados eléctricamente

Entre los materiales, algunos permiten fácilmente el desplazamiento de las cargas eléctricas de unas regiones a otras del mismo, se les denomina **conductores** (por ejemplo, el cobre). Si embargo, otros materiales no permiten, o ponen mucha dificultad, al desplazamiento de las cargas eléctricas de unas regiones a otras del mismo, se les denomina **aislantes** (por ejemplo, el vidrio). En el *apartado 1.3* se explican las causas de este comportamiento.

Electricidad por contacto

La electrización por contacto se produce como consecuencia de la puesta en contacto de un cuerpo electrizado con otro inicialmente neutro o con carga diferente, produciéndose un desplazamiento de cargas, por repulsión, del cuerpo cargado al neutro, o con carga diferente, quedando ambos cuerpos cargados con carga del mismo signo, dependiendo la cantidad de cargas que adquiere cada cuerpo del tamaño y la forma que tengan. En general queda más cargado el de mayor volumen.

Si uno de los cuerpos tiene un tamaño muchísimo menor que el otro cuerpo con el que entra en contacto, aquél queda en estado neutro, por pasar todas las cargas al cuerpo de mayor tamaño. Como cuerpo de mayor tamaño se suele utilizar la tierra, cuyo símbolo es el indicado en la *figura 1.3*. **Conectar a tierra** significa poner en contacto el conductor con el suelo mediante un conductor metálico, la piel húmeda de una persona, etc., pues la propia Tierra constituye un conductor que, para muchos propósitos, puede considerarse como infinitamente grande.

- En la *figura 1.3 (parte superior)*, se explica, mediante materiales de forma esférica, cómo al entrar en contacto un cuerpo cargado negativamente (exceso de electrones) con otro en estado neutro (igual cantidad de cargas negativas y positivas) parte de los electrones del cuerpo cargado negativamente son repelidos hacia el cuerpo neutro, quedando ambos, cuando se alcance el equilibrio, cargados negativamente.

- En la *figura 1.3 (centro)* se explica cómo al entrar en contacto un cuerpo cargado positivamente (déficit de electrones) con otro en estado neutro (igual cantidad de cargas negativas y positivas) parte de los electrones del cuerpo neutro son atraídos hacia el cuerpo cargado positivamente, quedando ambos cargados positivamente.

- En la *figura 1.3 (parte inferior)* se explica cómo al entrar en contacto un cuerpo cargado negativamente (exceso de electrones) con otro en estado neutro de mayor tamaño, parte de los electrones del cuerpo cargado negativamente son repelidos hacia el cuerpo neutro, quedando ambos cargados negativamente, pero con menos carga el de menor tamaño. Si el cuerpo cargado se conecta a tierra todas las cargas fluyen hacia ella, quedando el cuerpo descargado.

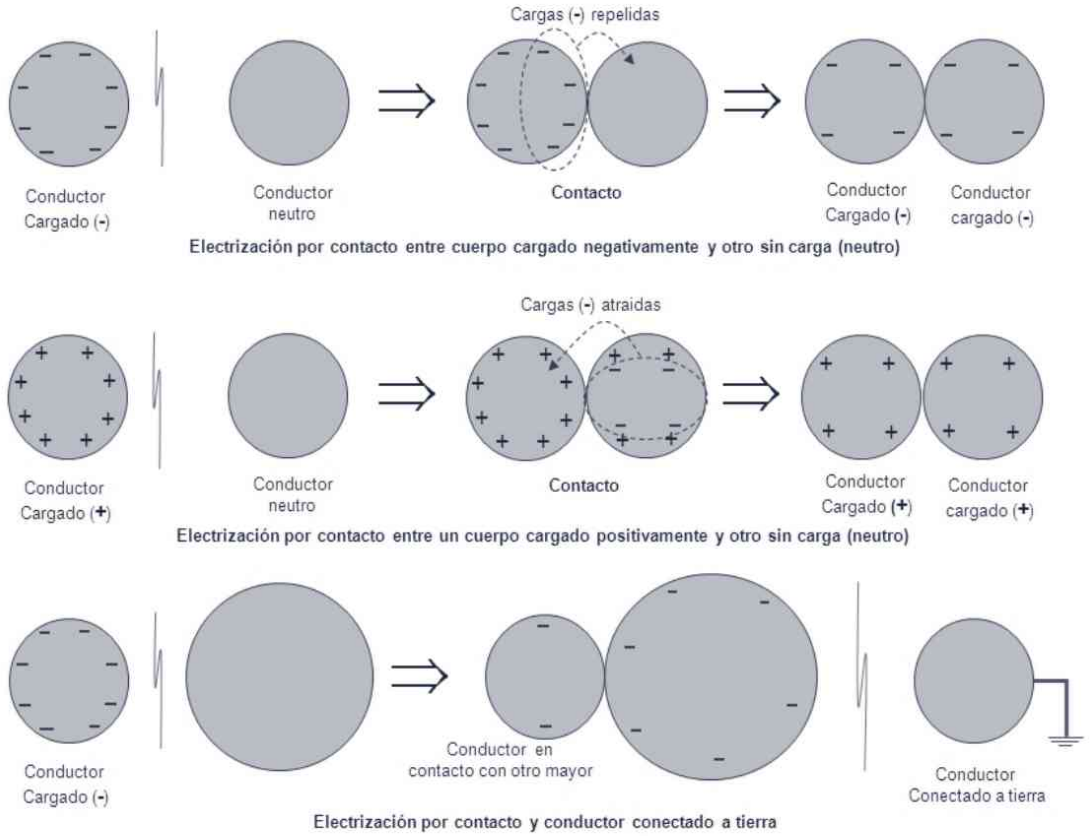


Figura 1.3. Electrización por contacto

Electricidad por inducción o influencia

Se trata de la electrización de un cuerpo (inducido), en el que sus cargas tengan movimiento libre (conductores), por ejemplo los metales, por otro cuerpo cargado (inductor) sin que haya contacto directo entre ambos, debido a que las fuerzas eléctricas se ejercen a distancia, *figura 1.4*. Así, si el cuerpo cargado lo está positivamente la parte del cuerpo neutro más próximo se cargará con electricidad negativa y la opuesta con electricidad positiva. Debido a la formación de estas dos regiones o *polos* de características eléctricas opuestas, a la electrización por influencia se la denomine también **polarización eléctrica**. Esta electrización es transitoria y dura mientras el cuerpo cargado se mantenga suficientemente próximo al neutro. Para dejar el cuerpo cargado, una vez se retire el inductor, se ha de conectar, durante la polarización, uno de los dos sectores cargados a otro cuerpo mucho mayor (tierra) a donde fluirán las cargas eléctricas, quedando el cuerpo cargado con las cargas del otro sector, aún después de retirar el inductor.

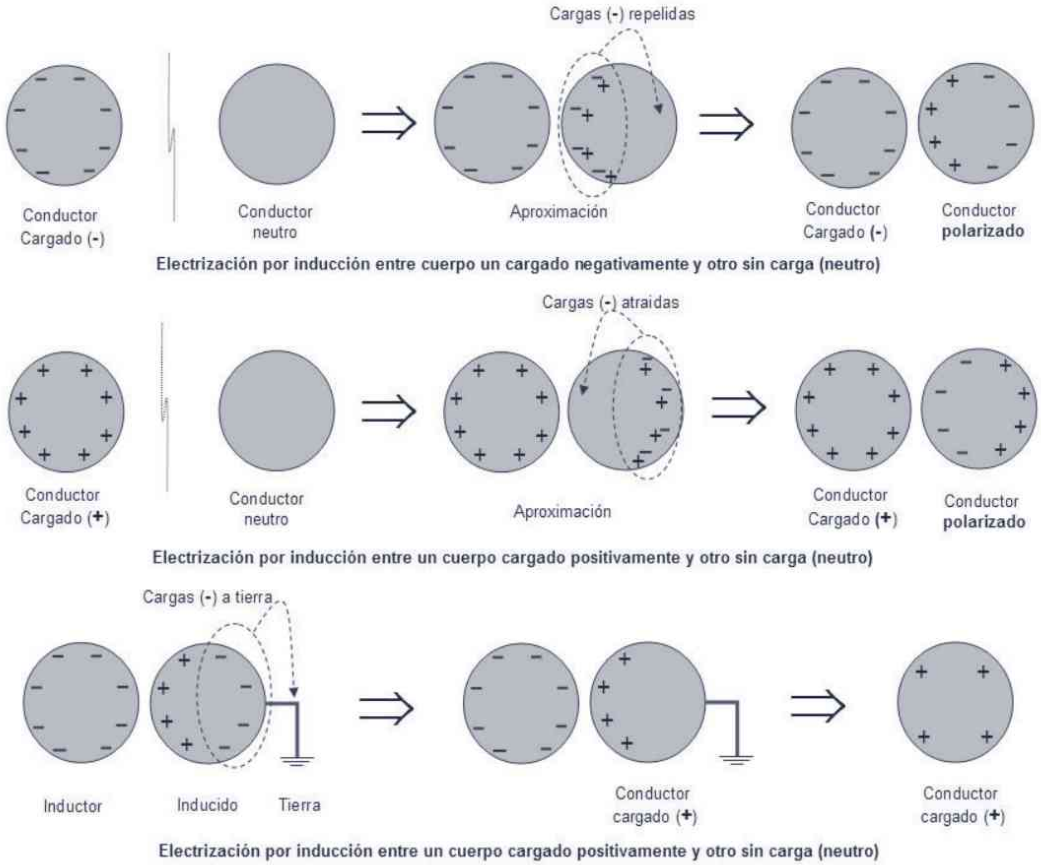


Figura 1.4. Electrización por influencia o inducción en un conductor

Observa:

Las cargas electrostáticas aparecen constantemente en la vida cotidiana. En la *figura 1.5* se muestran diferentes situaciones en las que se pueden generar cargas eléctricas, por rozamiento, contacto e inducción.

Al bajar una persona de un coche, especialmente en días muy secos, a veces sufre una pequeña descarga eléctrica al tocar la carrocería (que ha quedado cargada eléctricamente debido al rozamiento con el aire y estar aislada del suelo por los neumáticos) y producirse un desplazamiento de cargas eléctricas a través del cuerpo hacia el suelo. Si el día es húmedo, o llueve, no se produce la descarga, pues ésta se va produciendo a través del aire, que ha aumentado su conductividad eléctrica con la humedad.

Por la misma razón, los camiones cisternas de combustibles arrastran una cadena que permite la circulación, a medida que se van formando, de las cargas eléctricas debidas al rozamiento y de esta manera evitar posibles *chispas*.

A veces, el cabello se nos pone de punta cuando nos sacamos un jersey (de lana, por ejemplo). Al realizar esta acción frotamos nuestros cabellos con la lana, y algunos

electrones del cabello pasan al tejido y así los pelos nos quedan cargados positivamente. Al quedar cargados con cargas de igual signo, los cabellos intentan alejarse los unos de los otros, adquiriendo la forma en punta que es la manera más efectiva de lograrlo.

Cuando te quitas el jersey habrás observado, especialmente en verano y con tiempo seco (y más con cierto tipo de ropa), que se produce un chisporreteo (si estás en un lugar oscuro puedes ver las chispas). Esto es debido a la electrización por frotamiento que se produce al sacarte el jersey.

Una serie triboeléctrica de materiales ayuda a determinar la polaridad de cada uno de los dos materiales cargados en el proceso de rozamiento, *tabla 1.1*. La magnitud de la carga electrostática está relacionada con la posición o distancia relativa entre sí de los materiales en la serie y su signo está determinado por la propensión de un material a ceder o ganar electrones que es lo que en realidad indica tal serie. Así, por ejemplo, el frotamiento de una pieza de vidrio y otra de PVC y su posterior separación darán lugar a una carga electrostática negativa sobre la pieza de PVC y otra de igual magnitud y carga positiva sobre la de vidrio. La misma experiencia realizada con lana y goma daría cargas positivas y negativas respectivamente en sus superficies pero con magnitud menor de la cantidad de carga eléctrica, al estar más próximos.

← Más positivo (+)			Serie triboeléctrica						(-) Más negativo →	
Vidrio	Cabello	Nailon	Lana	Algodón	Cobre	Níquel	Goma	Poliéster	PVC	Teflón

Tabla 1.1. Serie triboeléctrica

Un ejemplo de puesta a tierra lo constituye la instalación de un pararrayos, inventado por B. Franklin (1706-1790), cuya finalidad es proteger a los edificios de los rayos que se producen durante las tormentas eléctricas. Básicamente un pararrayos se trata de un conductor en el que un extremo se encuentra enterrado en el suelo y el extremo opuesto, terminado en punta, por encima del edificio que se quiere proteger. Los rayos (descargas eléctricas) circulan entre las nubes y el suelo, a través del camino más corto y éste se lo ofrece el pararrayo, evitando que la descarga se produzca a través del edificio.

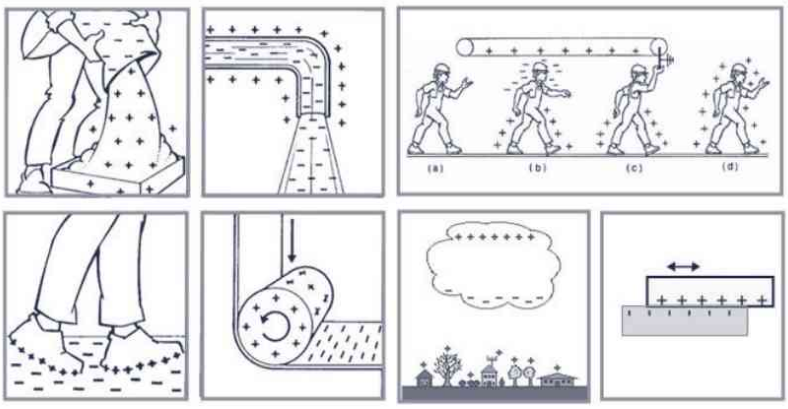


Figura 1.5. Generación de cargas eléctricas

1.3 ESTRUCTURA ATÓMICA DE LA MATERIA

Para entender adecuadamente los fenómenos eléctricos es necesario tener en cuenta la constitución de la materia. Para ello se comienza por recordar algunos conceptos.

Hasta comienzos del siglo XX la materia se caracterizaba por tener masa y volumen, es decir, ocupar un lugar en el espacio. A partir de la teoría de la relatividad de Einstein (1879-1955), materia y energía son dos aspectos de una misma realidad. Así, todas las formas de materia tienen asociadas una cierta energía pero sólo algunas formas de materia tienen masa. La materia másica se presenta en uno de cuatro estados de agregación molecular: sólido, líquido, gaseoso y plasma.

La **materia** es todo lo que existe en el Universo y está compuesta, en última instancia, por partículas elementales, *figura 1.6*. La materia, *tabla 1.2I,* se organiza jerárquicamente en varios niveles:

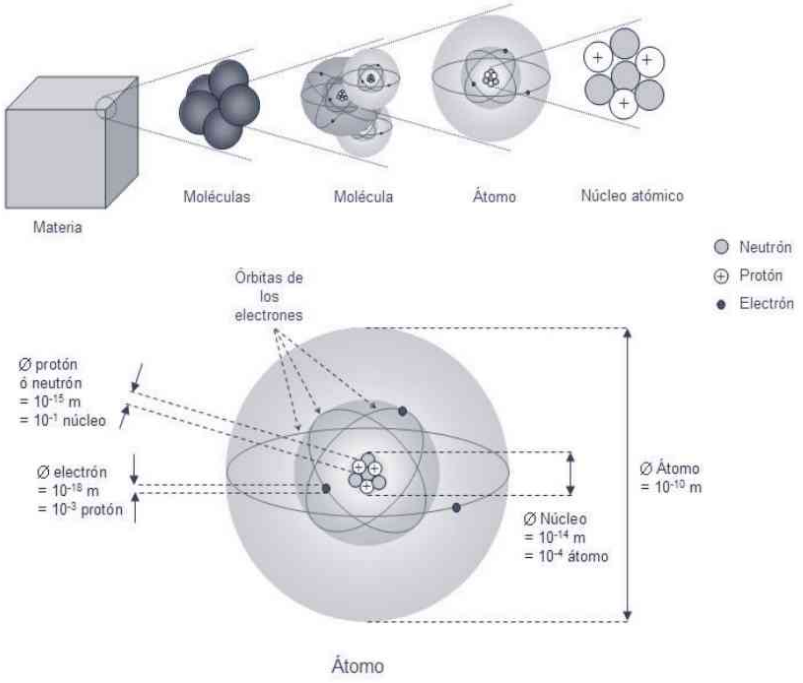


Figura 1.6. Estructura de la materia. Estructura atómica

- El nivel más complejo es la agrupación en **moléculas**, que es la menor porción de materia que conserva las propiedades de la misma.

- Las moléculas, a su vez, son agrupaciones de **átomos**, que son las partes más pequeñas en que puede dividirse la materia sin que aparezcan partículas con carga eléctrica. En la naturaleza se encuentran unos 107 átomos diferentes, que forman los elementos químicos, ejemplo: hidrógeno (H), cobre (Cu), mercurio (Hg), etc.

Las moléculas de un cuerpo pueden ser monoatómicas (por ejemplo, He), biatómicas (por ejemplo, O_2) o poliatómicas (por ejemplo, H_2O).

- Los átomos son agrupaciones de partículas llamadas **protones** (con carga eléctrica positiva) y **neutrones** (sin carga eléctrica), ambas constituyen el **núcleo** del átomo, alrededor del cual, formando la corteza atómica, giran unas partículas llamadas **electrones** (con carga eléctrica negativa pero del mismo valor que la del protón) y cuyo comportamiento nos permite entender los fenómenos eléctricos.

- A partir de este nivel existe todo un conjunto de partículas subatómicas que terminan finalmente en los **quarks** (constituyentes de los protones y neutrones) y los **leptones** (constituyentes de los electrones) que son los constituyentes fundamentales de la materia y, hasta ahora, las partículas más pequeñas que el hombre ha logrado identificar.

El **átomo está casi todo vacío**, su tamaño está determinado por las órbitas más exteriores de los electrones. El tamaño del núcleo es muchísimo menor que el del átomo, aproximadamente 10.000 veces menor, de tal manera que el volumen del espacio ocupado por el núcleo es tan pequeño que se necesitarían alrededor de 10^{12} (un billón) de núcleos para cubrir el volumen ocupado por el átomo. Para tener una idea más visual de los enormes espacios vacíos existentes en el átomo, se puede hacer el símil de considerar su núcleo del tamaño de una bola de ping-pong (2 cm de diámetro), lo que implicaría que el átomo tendría el tamaño de una esfera de 200 m de diámetro en cuyo interior los electrones, con un diámetro del orden de milésimas de mm, estarían girando, a diferentes distancias, alrededor del núcleo, donde estarían los protones y neutrones, teniendo cada uno de ellos un diámetro de unos 2 mm.

Por otra parte, como las partículas que forman el núcleo (protones y neutrones) tienen el mismo peso y son mucho más pesadas que los electrones, un neutrón, o protón, pesa aproximadamente lo mismo que 1.840 electrones, esto quiere decir que, además de estar el átomo casi vacío, casi toda la materia que lo compone, su masa, está concentrada en el núcleo. Más del 99,99% de la masa de cualquier átomo es debida a su núcleo.

Sistema	**Tamaño** (m)	**Estructura**	**Masa** (kg)
Electrón	10^{-18}	Leptón	10^{-30}
Protón o neutrón	10^{-15}	Unión de quarks	10^{-27}
Núcleo	10^{-14}	Unión de partículas	10^{-25}
Átomo	10^{-10}	Núcleo y electrones	10^{-25}
Molécula	10^{-7}	Unión de átomos	10^{-20}
Célula viva	10^{-5}	Unión de moléculas	10^{-10}

Tabla 1.2. Tamaño de los diferentes niveles de la materia

Como se ha dicho, en el átomo, el núcleo está formado por dos tipos de partículas, los *protones,* dotados de carga eléctrica positiva, y los *neutrones,* sin carga eléctrica aunque con una masa semejante a la del protón. Tanto unos como otros se hallan unidos entre sí por efecto de unas fuerzas mucho más intensas que las de la repulsión electrostática, la fuerza nuclear fuerte, formando un todo compacto (precisamente esta fuerza es el origen de la energía nuclear). Su carga total es positiva debido a la presencia de los protones. Los electrones son partículas mucho más ligeras que los protones y tienen carga eléctrica negativa. La carga de un electrón es igual en magnitud, aunque de signo contrario, a la de un protón. Las fuerzas eléctricas atractivas que experimentan los electrones respecto del núcleo hacen que estos se muevan en torno a él en una situación que podría ser comparada, en una primera aproximación, a la de los planetas girando en torno al Sol por efecto, en este caso, de la atracción gravitatoria. El número de electrones en un átomo es igual al de protones de su núcleo correspondiente, de ahí que en conjunto, el átomo completo resulte eléctricamente neutro.

Los **elementos químicos** muy pocas veces se encuentran como átomos aislados, como por ejemplo el helio (He), casi siempre **se encuentran unidos entre sí** formando nuevas sustancias llamadas **compuestos**, teniendo la forma en que los átomos se unen un efecto profundo sobre las propiedades físicas y químicas de las sustancias. Para formar compuestos, los átomos que los constituyen deben **mantenerse unidos** gracias a un tipo de **interacción llamado enlace químico**, *figura 1.7*, pudiendo ser:

- **Enlace iónico**. Este tipo de enlace se forma por transferencia de uno o más electrones entre un elemento metálico que cede electrones (catión) y un elemento no metálico que recibe electrones (anión), manteniéndose unidos por atracción electrostática. Los compuestos unidos por enlace iónico constituyen cristales, debido a que la atracción produce un arreglo de átomos llamado red cristalina, por ejemplo el cloruro sódico (ClNa).

- **Enlace covalente**. Se forma **entre elementos no metálicos**. En este tipo de enlace, los átomos involucrados **comparten electrones** y originan moléculas, por ejemplo el oxígeno (O2). El **enlace covalente** permite la formación de **moléculas de elementos** cuando se unen átomos del mismo elemento (p. ej., H2) y **moléculas de compuestos** cuando se unen átomos de diferentes elementos (p. ej., ClH).

- **Enlace metálico**. Es característico de los elementos metálicos. Los átomos de los metales tienen pocos electrones en su última capa, por lo general 1, 2 o 3. Estos átomos pierden fácilmente esos electrones (electrones de valencia) y se convierten en iones positivos, por ejemplo Na^{+}, Cu^{2+}, Mg^{2+}. Los iones positivos resultantes se ordenan en el espacio formando la red metálica. Los electrones de valencia desprendidos de los átomos forman una nube de electrones que puede desplazarse a través de toda la red. De este modo todo el conjunto de los iones positivos del metal queda unido mediante la nube de electrones con carga negativa que los envuelve.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Por otra parte existen las fuerzas de atracción entre moléculas que se conocen con el nombre de fuerzas intermoleculares o fuerzas de Van der Waals.

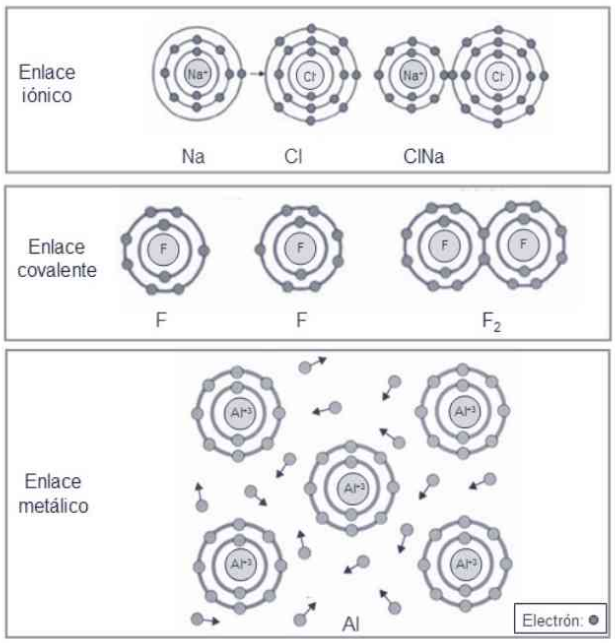


Figura 1.7. Enlaces químicos

Conforme a la teoría atómica de la materia, la electrización de un cuerpo (ver *apartado 1.2*) se explica del siguiente modo:

- **Electrización por frotamiento**. Por efecto de la fricción, los electrones externos de los átomos del paño de lana son liberados y cedidos a la varilla de ámbar, con lo cual ésta queda cargada negativamente y aquél positivamente. En el caso de la varilla de vidrio, los electrones pasan de la varilla, quedando cargada positivamente, al paño, quedando éste cargado negativamente. En cualquiera de estos fenómenos se pierden o se ganan electrones, pero el número de electrones cedidos por uno de los cuerpos es igual al número de electrones aceptado por el otro, de ahí que en conjunto no hay producción ni destrucción de carga eléctrica. Nótese el papel particularmente importante que desempeñan los electrones en el fenómeno de la electrización.

- **Electrización por contacto**. Se debe a que se produce una transferencia de electrones libres desde el cuerpo que los posea en mayor cantidad hacia el que los contenga en menor proporción hasta que se produzca un equilibrio entre ambas, dependiendo de la forma de los cuerpos y su composición.

- **Electrización por influencia**. Debido a la repulsión o atracción, a distancia, de los electrones de un cuerpo que se encuentra bajo la influencia de otro cargado negativamente o positivamente.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Otras formas de producir electricidad son:

- **Electrización por presión.** Al producir presión sobre ciertos materiales, como por ejemplo un cristal de cuarzo, se produce un desplazamiento de electrones en el mismo, quedando una superficie con un defecto de electrones, polo +, y otra superficie con un exceso de electrones, polo -.

- **Electrización por acción de la luz.** Producida por la incidencia de la luz sobre ciertos materiales, por ejemplo en una célula fotovoltaica, produciéndose una diferencia de cargas entre dos áreas, de forma análoga al caso anterior.

- **Electrización por acción del calor.** Se produce al calentar la unión de dos metales diferentes, lo cual produce un desplazamiento de cargas eléctricas.

- **Electrización por acción magnética.** El desplazamiento de cargas es producida por el movimiento de un conductor eléctrico, por ejemplo Cu, en el interior de un campo magnético.

- **Electrización por reacción química.** Producida, por ejemplo, en las pilas y baterías.

De acuerdo con todo lo anterior, en la **electrización** en general, los electrones son los determinantes en el tipo de carga que adquieren los cuerpos, según que su número aumente (carga negativa) o disminuya (carga positiva).

1.4 CUERPOS CONDUCTORES Y AISLANTES

Cuando un cuerpo neutro es electrizado, sus cargas eléctricas, bajo la acción de las fuerzas correspondientes, se redistribuyen hasta alcanzar una situación de equilibrio. Algunos cuerpos ponen muchas dificultades a este movimiento de las cargas eléctricas por su interior y sólo permanece cargado el lugar en donde se depositó la carga neta, se les denominan **aislantes o dieléctricos**. Otros, por el contrario, permiten que las cargas puedan moverse fácilmente por su interior, de tal manera que la electricidad afecta finalmente a todo el cuerpo, depositándose en su superficie, y se les denominan **conductores**, *figura 1.8.*

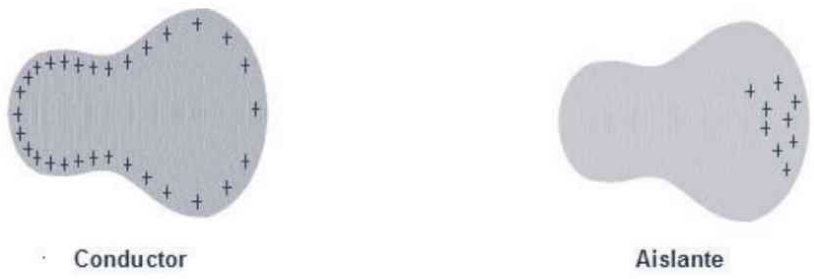


Figura 1.8. Cuerpo aislante y cuerpo conductor

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Esta diferencia de comportamiento de las sustancias respecto del desplazamiento de las cargas en su interior depende de la constitución de sus átomos. Así, los átomos de las **sustancias conductoras** poseen electrones externos muy débilmente ligados al núcleo que les otorga una gran movilidad, tal es el caso de los **metales**. Sin embargo, en **las sustancias aislantes**, como el ámbar, el vidrio, la mayor parte de los no metales, etc. los núcleos atómicos retienen con fuerza todos sus electrones, lo que hace que su movilidad sea escasa. Por otra parte, sustancias que en principio son aislantes (por ejemplo, el agua pura, H_2O), en ciertas circunstancias son conductoras (por ejemplo, el agua del grifo debido a las sales que contiene).

Entre los buenos conductores y los aisladores existe una gran variedad de situaciones intermedias. Es de destacar entre ellas la de los materiales **semiconductores** por su importancia en la fabricación de dispositivos electrónicos. En condiciones ordinarias se comportan como malos conductores, pero se pueden alterar sus propiedades conductoras, mejorando enormemente su conductividad, ya sea mediante pequeños cambios en su composición, ya sea sometiéndolos a condiciones especiales, como elevada temperatura o iluminación.

Si un conductor se pone en la proximidad de un cuerpo cargado (inductor), se produce en dicho conductor un desplazamiento de electrones (**conductor polarizado**), en uno u otro sentido dependiendo del signo de la carga del inductor, debido a la movilidad de los electrones del enlace metálico. Si se pone frente al inductor un aislante, no se produce un desplazamiento de electrones en el mismo, sino que se produce un desplazamiento de cargas en el seno de los átomos o de las moléculas de dicho aislante (**aislante polarizado**), *figura 1.9.*

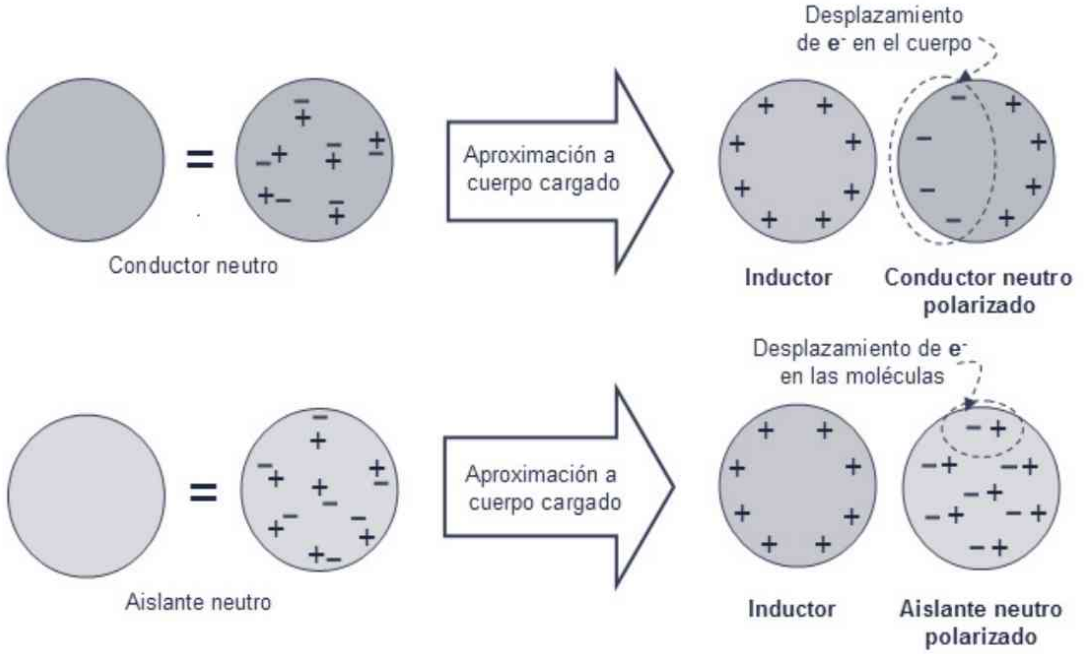


Figura 1.9. Polarización de un conductor y de un aislante

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

En la *figura 1.10* se muestra el átomo de un aislante sin influencia de una carga externa (aislado) y bajo la influencia de una carga externa (polarizado).

Figura 1.10. Aislante: átomo aislado y átomo polarizado

1.5 LEY DE COULOMB

La magnitud de las fuerzas entre cargas eléctricas fue determinada por Coulomb (1736-1806) y se conoce como ley de Coulomb, *figura 1.11*, cuyo enunciado es:

"*La fuerza F de acción recíproca entre cargas eléctricas* ***puntuales*** *es directamente proporcional al producto de las cargas eléctricas (q_1 y q_2) e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia (d) que las separa*".

$$F = K\frac{q_1 \cdot q_2}{d^2} \qquad [1.1]$$

En la fórmula, la fuerza ***F*** se expresa en newtons (N), las cargas q_1 y q_2 en culombios (C), la distancia *d* en metros (m) y *K* es una constante de proporcionalidad, que depende del medio en el que se encuentren las cargas. Para el vacío, y aproximadamente para el aire, su valor (K_0) es:

$$k_0 = \frac{1}{4\pi \in_0} = 9{\cdot}10^9\ (Nm^2/C^2) \qquad [1.2]$$

Siendo ε_0 la permitividad del vacío (y aproximadamente para el aire), su valor es $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ C^2/N \cdot m^2$. La permitividad determina la facilidad de un material **polarizarse** en respuesta a la influencia de cargas eléctricas.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Las fuerzas de Coulomb en otro medio son más pequeñas que en el vacío, *tabla 1.3I*, y en esos casos:

$$k = k_0 k_r = \frac{1}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0} = \frac{9 \cdot 10^9}{\epsilon_r} (Nm^2 / C^2) \qquad [1.3]$$

k_r = Constante relativa del medio.

ε_r = Permitividad relativa del medio.

$\varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon$ = Permitividad absoluta del medio.

Material	ε_r
Aire seco	1
Papel seco	2
Petróleo	2,1
Tierra seca	3 ÷ 4
Madera	4
Vidrio	7
Agua	80

Tabla 1.3. Permitividad relativa

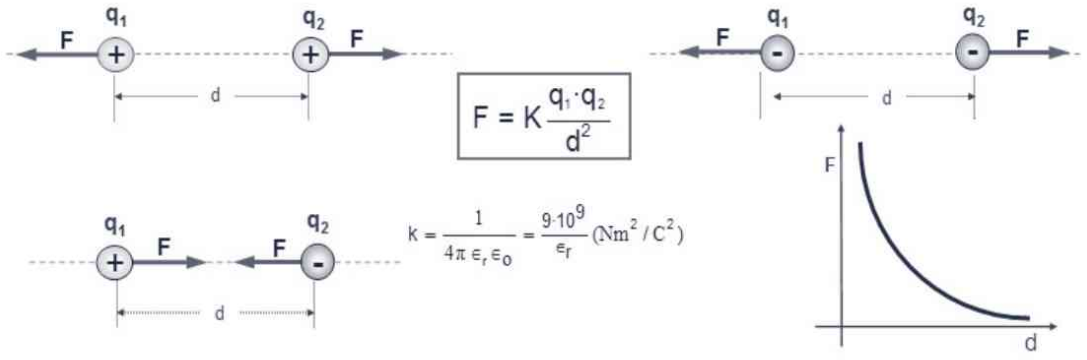


Figura 1.11. Ley de Coulomb

Las fuerzas ***F***, son pues, **magnitudes vectoriales**, cuyo **módulo** está dado por la Ley de Coulomb, la **dirección** es la de la recta que une los centros de las cargas y su **sentido** es de atracción o repulsión según las cargas sean de diferente o igual signo respectivamente.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Como se ha dicho en un apartado anterior, en electrotecnia la unidad de carga eléctrica es el culombio, no obstante, en electrostática es muy poco frecuente trabajar con cargas del orden de 1 culombio, sino mucho menores, utilizándose con más frecuencia el microculombio μC (1 μC = 10^{-6} C).

1.6 FUERZA ELÉCTRICA DEBIDA A VARIAS CARGAS. PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Si en lugar de tener dos cargas puntuales hay tres o más la fuerza eléctrica $\boldsymbol{F_q}$ sobre una de ellas se obtendrá sumando **vectorialmente** las fuerzas que sobre ella ejercería cada una de las otras $\boldsymbol{F_{qi}}$ si estuviera sola. Esto se conoce como el **principio de superposición**. En la *figura 1.12* se tienen dos ejemplos de la aplicación de este principio.

$$\bar{F}_q = \sum \bar{F}_{qi} = \bar{F}_{q1} + \bar{F}_{q2} + \bar{F}_{q3} + \ldots \qquad [1.4]$$

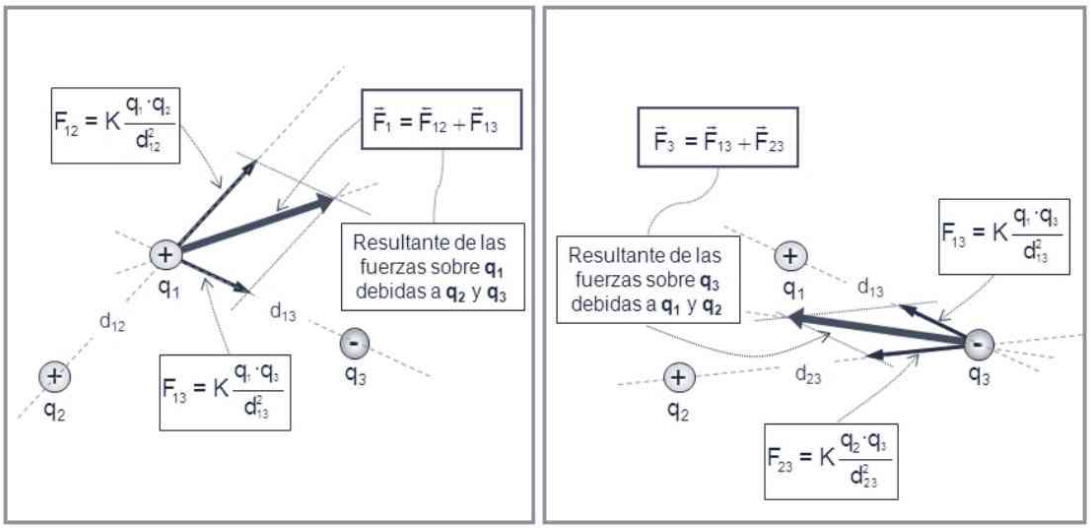


Figura 1.12. Fuerza debida a varias cargas

1.7 CAMPO ELÉCTRICO. INTENSIDAD DE CAMPO ELÉCTRICO *E*

Conforme a la ley de Coulomb, si se tiene una carga q_1, al situar una carga q_2 a cierta distancia d de ella, quedará sometida a la fuerza de atracción o repulsión $\boldsymbol{F}$ correspondiente. Independiente de q_2, alrededor de q_1, existe una nueva propiedad del espacio que se manifiesta al situar en él cualquier carga q_2. A esta nueva propiedad del espacio alrededor de la carga q_1 se le denomina **campo eléctrico**.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Para expresar la magnitud del campo eléctrico creado por una carga puntual q_1 se define la **intensidad de campo eléctrico** ***E***, como la fuerza ejercida por la carga q_1 sobre la unidad de carga eléctrica (q_2 = 1 C), *figura 1.13 izquierda.*

En general, el campo eléctrico creado por una carga q tiene, a una distancia d, una intensidad de campo ***E***, *figura 1.13*, cuyo módulo es:

$$E = K\frac{q}{d^2} \qquad [1.5]$$

Si en el campo eléctrico anterior, situamos a la distancia d una carga q', quedará sometida a una fuerza de módulo:

$$F = K\frac{q \cdot q'}{d^2} \qquad [1.6]$$

Es decir:

$$\bar{F} = \bar{E} \cdot q' \qquad [1.7]$$

De la fórmula anterior se infiere que la unidad de campo eléctrico es ($E = F/q'$) newton/culombio (N/C), pero en la práctica se expresa más, como se justifica en el *apartado 1.9,* en voltios/metro (V/m)

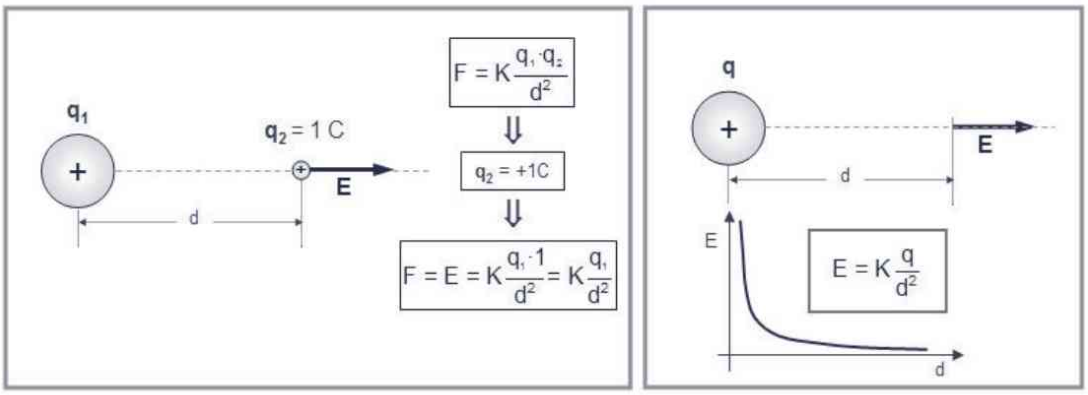


Figura 1.13. Campo eléctrico E

Puesto que el campo eléctrico ***E***, es una magnitud vectorial, tiene magnitud y sentido, y su valor puede ser diferente en cada punto. Es posible hacer una representación gráfica de un campo eléctrico mediante las llamadas **líneas de fuerza**, sugeridas por Faraday (1791-1867), que son líneas imaginarias a las que la intensidad de campo eléctrico **E** es tangente en cada punto.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Una carga puntual positiva dará lugar a un mapa de líneas de fuerza radiales, *figura 1.14.a,* pues las fuerzas eléctricas actúan siempre en la dirección de la línea que une a las cargas que interactúan, y dirigidas hacia la fuera porque las cargas móviles positivas se desplazarían en ese sentido (fuerzas repulsivas). En el caso del campo debido a una carga puntual negativa el mapa de líneas de fuerza sería análogo, pero dirigidas hacia la carga central, *figura 1.14.b*. Como consecuencia de lo anterior, en el caso de los campos debidos a varias cargas las líneas de fuerza nacen siempre de las cargas positivas y mueren en las negativas, *figura 1.14.d.* Si se tienen dos cargas positivas iguales la forma del campo es el de la *figura 1.14.e,* etc.

Un campo eléctrico uniforme, creado por dos superficies próximas (de gran superficie en relación a su separación) cargadas con cargas eléctricas opuestas, tiene todas sus líneas de fuerzas paralelas, *figura 1.14.c.*

Se ha de tener en cuenta que una carga eléctrica abandonada libremente en un campo eléctrico **no se desplaza** siguiendo una línea de fuerza que pase por el punto inicial. En este punto, la fuerza ***F*** sobre dicha carga es tangente a la línea de fuerza y su desplazamiento inicial tiene la dirección y sentido de la fuerza ***F***, pero una vez en movimiento, la trayectoria de la carga depende de su masa. **Sólo** si la carga no tuviese masa su recorrido coincidiría con la línea de fuerza que pasa por el punto inicial.

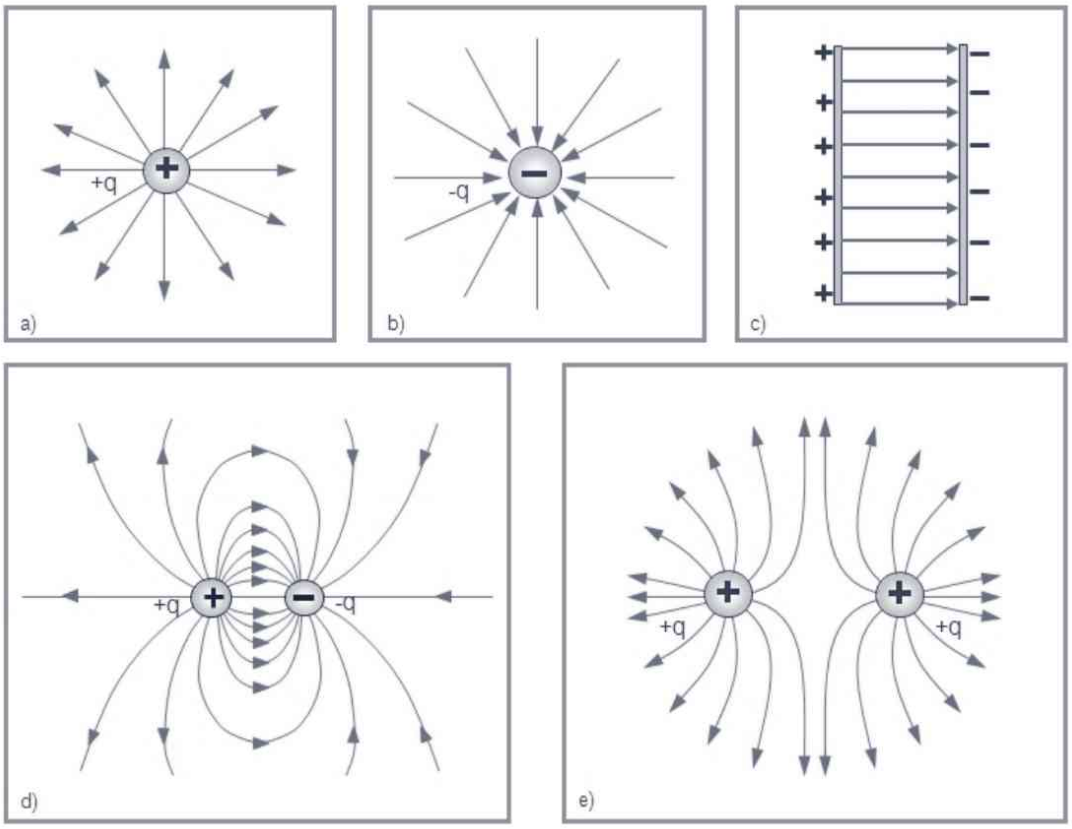


Figura 1.14. Líneas de fuerza en un campo eléctrico

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

En la *figura 1.15* se puede ver la forma del campo eléctrico para otras distribuciones de carga.

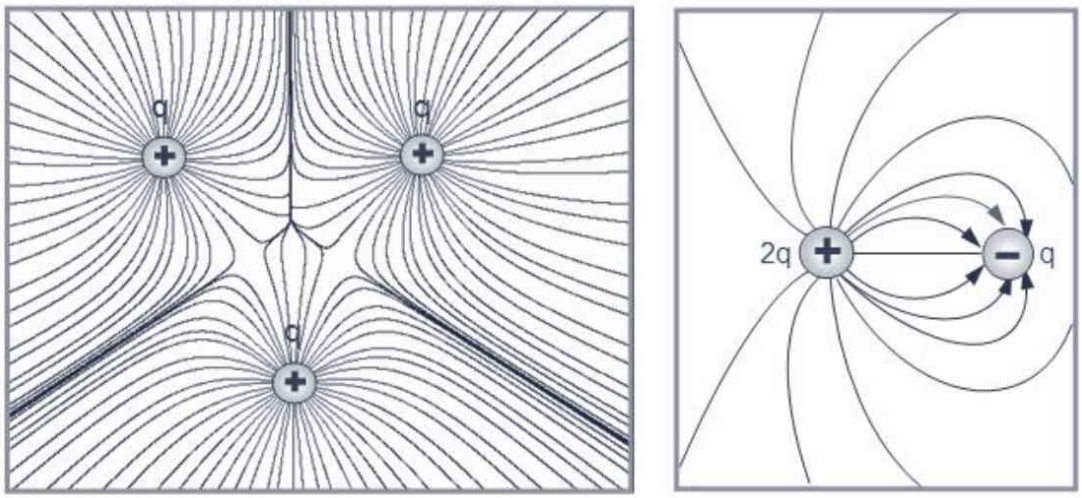


Figura 1.15. Líneas de fuerza en un campo eléctrico

Características de las líneas de fuerza

- El número total de líneas de campo eléctrico que salen (carga positiva) o entran (carga negativa) de una carga puntual es proporcional a la cantidad de carga. Se escoge la constante de proporcionalidad de forma que suministre la mejor visualización. En la *figura 1.16* están representadas 8 líneas para la carga $+q$ y 16 líneas para la carga $+2q$. El que por un punto dado no pase una línea de campo no quiere decir que no exista allí intensidad de campo eléctrico, pues sólo se representan unas pocas de líneas, las suficientes para no complicar el gráfico y hacernos una idea de cómo es el campo eléctrico.

- Las líneas se dibujan simétricamente saliendo o entrando en la carga puntual.

- Cuanto más próximas entre ellas estén las líneas de campo, mayor es la intensidad de campo $\boldsymbol{E}$ (*figura 1.16*).

- Las líneas empiezan o terminan solamente en las cargas.

- El campo es tangente a la línea de fuerza, *figura 1.17*.

- Las líneas de fuerza no se cortan nunca.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Figura 1.16. Líneas de fuerza en un campo eléctrico: proporcionalidad de E con q

1.8 CAMPO ELÉCTRICO DEBIDO A VARIAS CARGAS PUNTUALES. PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Si en lugar de una carga puntual se tienen dos o más, el campo eléctrico resultante en un punto $\boldsymbol{E_P}$, se obtendrá, de forma análoga a las fuerzas de Coulomb, sumando **vectorialmente** los campos eléctricos, en dicho punto, debidos a cada carga $\boldsymbol{E_P}$ **(principio de superposición)**:

$$\bar{E}_P = \sum \bar{E}_{Pi} = \bar{E}_{P1} + \bar{E}_{P2} + \bar{E}_{P3} + \ldots \qquad [1.8]$$

En la *figura 1.17* para dos puntos p_1 *y* p_2 se determina el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ en cada uno de ellos $\boldsymbol{E_1}$ y $\boldsymbol{E_2}$, como resultante de la suma vectorial de los campos eléctricos debidos a cada carga, q_1 y q_2. Nótese que en cada punto el vector intensidad de campo eléctrico debido a cada carga ($\boldsymbol{E_{q1}}$ **y** $\boldsymbol{E_{q2}}$), está en la dirección que une el punto con el centro de la carga, y que $\boldsymbol{E_1}$ y $\boldsymbol{E_2}$ son tangentes a la línea de fuerza que pasa por cada punto.

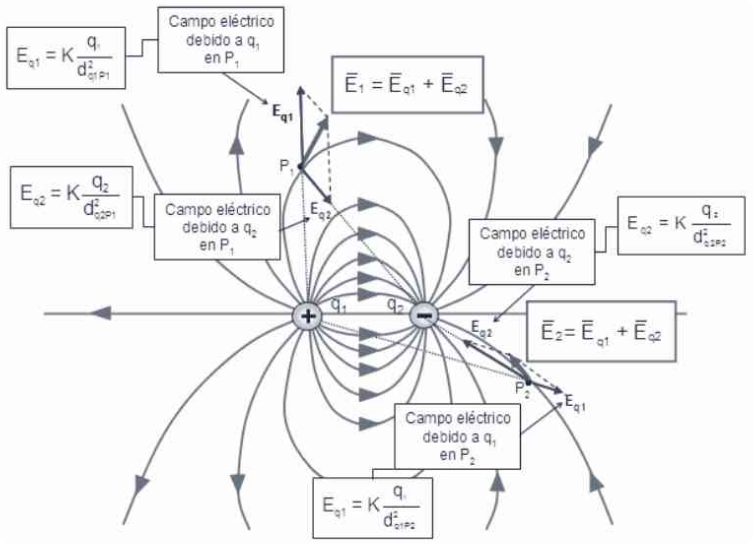


Figura 1.17. Líneas de fuerza en un campo eléctrico e intensidad de campo $\boldsymbol{E}$ *en dos puntos*

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

1.9 TRABAJO ELÉCTRICO. DIFERENCIA DE POTENCIAL ELÉCTRICO EN UN CAMPO ELÉCTRICO UNIFORME

Si en el interior de un campo uniforme ***E*** se coloca una carga $+q$ en un punto a, será repelida hacia la zona negativa del campo, *figura 1.18*, con una fuerza ***F***, de módulo:

$$F = E \cdot q \qquad [1.9]$$

Al llegar la carga a otro punto b, la fuerza habrá desarrollado un trabajo:

$$W_{ab} = F \cdot d = E \cdot q \cdot d \qquad [1.10]$$

El trabajo eléctrico realizado se expresa, en el sistema internacional, en julios, [julio = (V/m) · C · m].

Si se quiere situar de nuevo la carga $+q$ en el punto a, sería necesario comunicarle una fuerza externa al campo, de sentido contrario e igual a su módulo ***F***, realizando un trabajo igual a W_{ab}. Este trabajo le comunica una energía potencial a la carga, energía que será devuelta al dejar de actuar la fuerza exterior.

Cuando la carga se desplaza en el sentido del campo, primer caso, el campo eléctrico ***E*** realiza un trabajo y la carga $+q$ adquiere una posición, punto b, de menor energía, (energía potencial menor). Cuando la carga se desplaza en el sentido contrario al campo, segundo caso, una fuerza externa al campo eléctrico E realiza el trabajo y la carga $+q$ adquiere una posición, punto a, de mayor energía, (energía potencial mayor).

Se define como **diferencia de potencial eléctrico** (ddp) V_{ab} entre dos puntos a y b el trabajo desarrollado por el campo eléctrico para trasladar la unidad de carga positiva entre dichos puntos, es decir:

$$V_{ab} = \frac{W_{ab}}{q} = E \cdot d \qquad [1.11]$$

La unidad de ddp es el voltio = julio/culombio.

Nótese que la intensidad de campo eléctrico ***E*** es una magnitud vectorial y la diferencia de potenciales V_{ab} es una magnitud escalar.

Llamando V_a (potencial del punto a) al producto $E \cdot d_a$, y V_b (potencial del punto b) al producto $E \cdot d_b$, se tiene, *figura 1.18*:

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

$$V_{ba} = - E \cdot d \qquad [1.12]$$

Esta fórmula se puede poner, llamando *Vab/d* **gradiente de *V***, en la forma:

$$E = - \frac{V_{ba}}{d} = -\text{grad } V \qquad [1.13]$$

Se deduce que, independientemente del signo de la carga, su energía potencial aumenta, si ésta se desplaza en sentido *opuesto* a la fuerza eléctrica debida a ***E***, y su energía potencial disminuye si la carga se desplaza en el mismo sentido que la fuerza debida a ***E***. También, todos los puntos que se encuentren a la misma distancia, perpendiculares a las líneas de fuerza de uno de los lados, se encuentran al mismo potencial, así, los puntos a_1 y a_2 distantes ambos una distancia d_a del lado negativo, tienen el mismo potencial V_a que el punto *a*. El plano, perpendicular a las líneas de fuerza que contiene dichos puntos forma una **superficie equipotencial**.

De la fórmula anterior se tiene otra forma de expresar la intensidad de campo eléctrico ***E***, que es, voltios/metro = V/m.

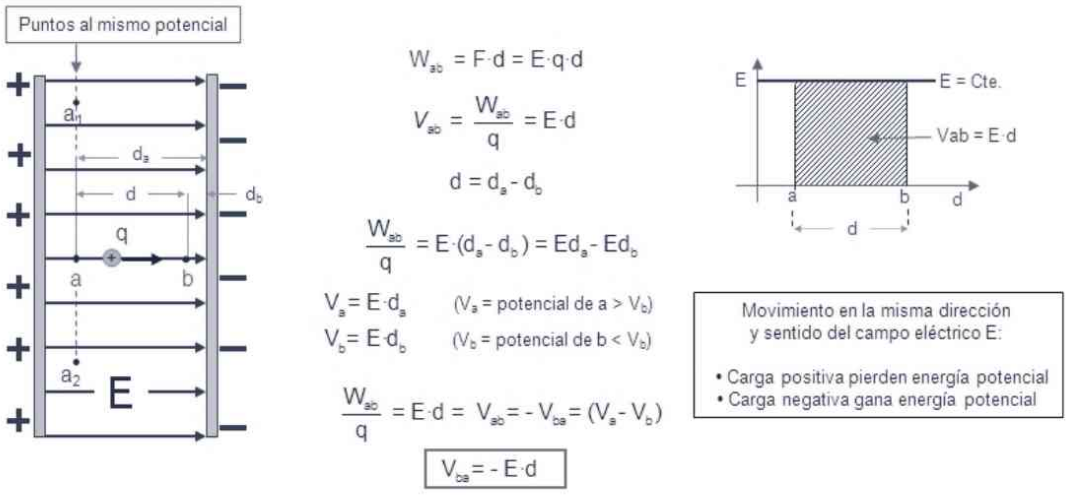


Figura 1.18. Diferencia de potencial en un campo eléctrico uniforme

Si mediante una fuerza externa se quiere desplazar una carga *q* desde el punto *b'* (de igual potencial que el punto *b*) al punto *a*, siguiendo la dirección *b'a*, *figura 1.19,* se requieren dos fuerzas: una $\boldsymbol{F_1}$ en dicha dirección, de módulo $q \cdot E \cdot \cos\alpha$, y sentido contrario a la componente del campo ***E*** en la misma dirección, y otra $\boldsymbol{F_2}$ perpendicular a la dirección, de módulo $q \cdot E \cdot \text{sen } \alpha$, y sentido contrario a la componente del campo, perpendicular a la dirección *b'a*.

La fuerza $\boldsymbol{F_1}$ realiza un trabajo $W_{b'a}$ que se invierte en aumentar la energía potencial de *q*. La fuerza $\boldsymbol{F_2}$ no realiza trabajo, pues su dirección es perpendicular al

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

desplazamiento. Como se demuestra en la *figura 1.19* el trabajo $W_{b'a}$ tiene el mismo valor que el trabajo W_{ba}.

Si en lugar del punto *b'* se elige otro cualquiera que esté al mismo potencial, nos daría el mismo valor para el trabajo realizado. Se deduce que el trabajo realizado para llevar la carga *q* entre dos puntos, depende de la distancia *d*, paralela a las líneas de fuerza, entre dichos puntos, y **no del camino recorrido**, es decir, depende de la diferencia de potencial entre los dos puntos *b'* y *a*. Por esto se dice que el campo eléctrico es un **campo conservativo**.

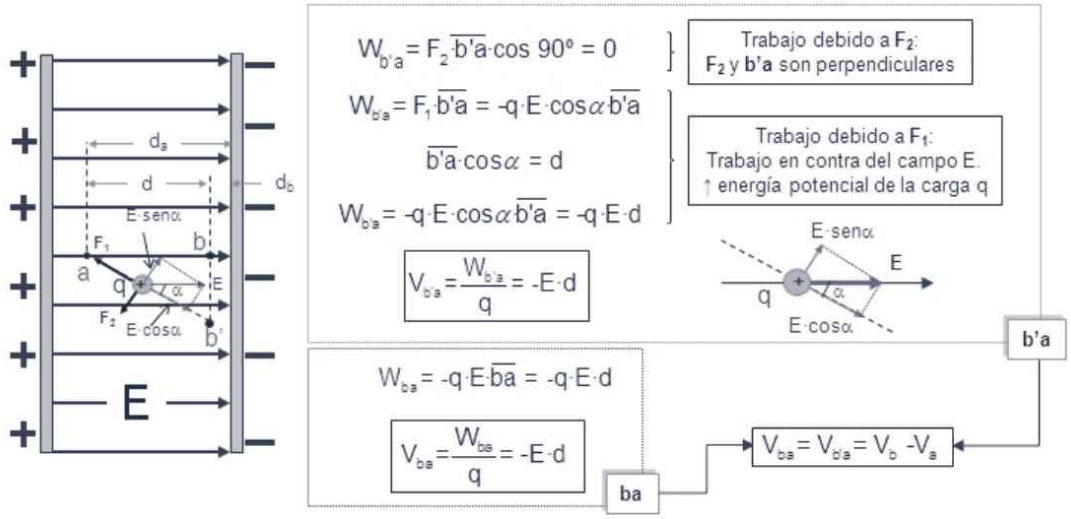


Figura 1.19. Diferencia de potencial en un campo eléctrico uniforme

1.10 COMPORTAMIENTO DE UN CONDUCTOR Y UN AISLANTE EN UN CAMPO ELÉCTRICO

En la *figura 1.20*, de acuerdo con lo visto hasta aquí, se representa el comportamiento de un conductor y un aislante antes y después de situarlo en un campo eléctrico ***E***. Se observa que:

- Al someter al **conductor** a un campo ***E***, se produce un desplazamiento de cargas eléctricas en el interior del mismo, se dice que el cuerpo está polarizado (la polarización deja de existir cuando el campo ***E*** se anula). Si, mientras existe ***E***, la barra se "corta" por la mitad, cada una de las dos mitades mantiene la carga de distinto signo. Al dejar de existir el campo ***E***, se mantiene cada parte de la barra cargada con cargas de sentido contrario, aunque se reorganizan extendiéndose a toda la periferia.

- Al someter al **aislante** a un campo ***E***, se produce un desplazamiento de cargas eléctricas en el interior de las moléculas del mismo, pero no en su conjunto, se

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

dice que el cuerpo está polarizado (la polarización deja de existir cuando el campo ***E*** se anula). Si, mientras existe ***E***, la barra se "corta" por la mitad, se mantiene la polarización en cada una de las dos mitades. Al dejar de existir el campo ***E***, la polarización deja de existir en cada una de las dos mitades.

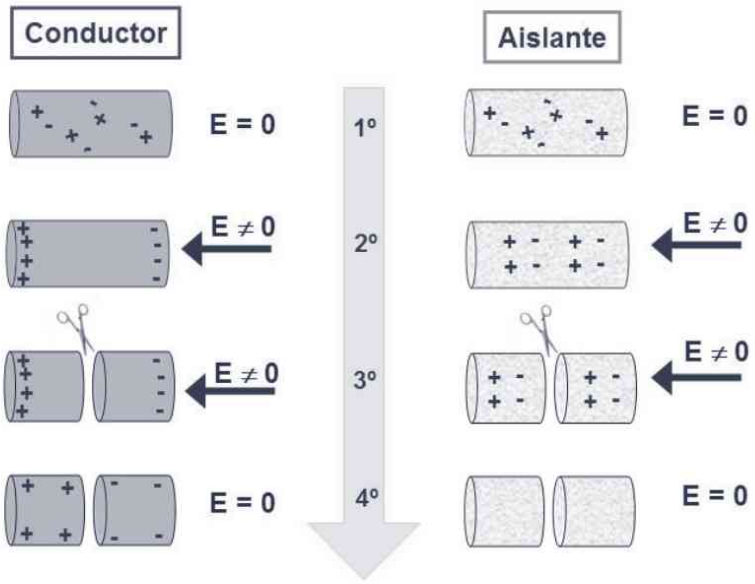


Figura 1.20. Comportamiento de un conductor y un aislante en un campo eléctrico

1.11 DIFERENCIA DE POTENCIAL Y POTENCIAL ELÉCTRICO DEBIDO A UNA CARGA PUNTUAL

Sea una carga puntual q y su campo eléctrico ***E*** y considérese dos puntos a y b. De la misma manera que para un campo uniforme, *fórmula [1.11]*, se define la **diferencia de potencial** V_{ab} (ddp entre a y b) al trabajo debido al campo eléctrico ***E***, para trasladar la unidad de carga positiva (+1) entre dichos puntos, *figura 1.21*.

$$V_{ab} = E \cdot d \qquad [1.14]$$

En este caso la intensidad de campo ***E*** no es constante en todo el recorrido, pues es función del radio r ($E = Kq_1/r^2$). Considerando un *radio medio geométrico* $r_{\underline{mab}} = (r_a \cdot r_b)^{1/2}$, entre los puntos a y b se obtiene un campo eléctrico medio geométrico $\boldsymbol{E}_{\underline{mab}}$ entrre dichos puntos, a partir del cual se obtiene, *figura 1.21*:

$$V_{ab} = V_a - V_b = k\frac{q}{r_a} - k\frac{q}{r_b} \qquad [1.15]$$

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Si el segundo punto *b* está en el ∞, o muy alejado de *a*, ($V_b = k \cdot q_b/r_b \rightarrow 0$), se tiene el potencial del punto *a*:

$$V_a = k\frac{q}{r_a} - 0 = k\frac{q}{r_a} \qquad [1.16]$$

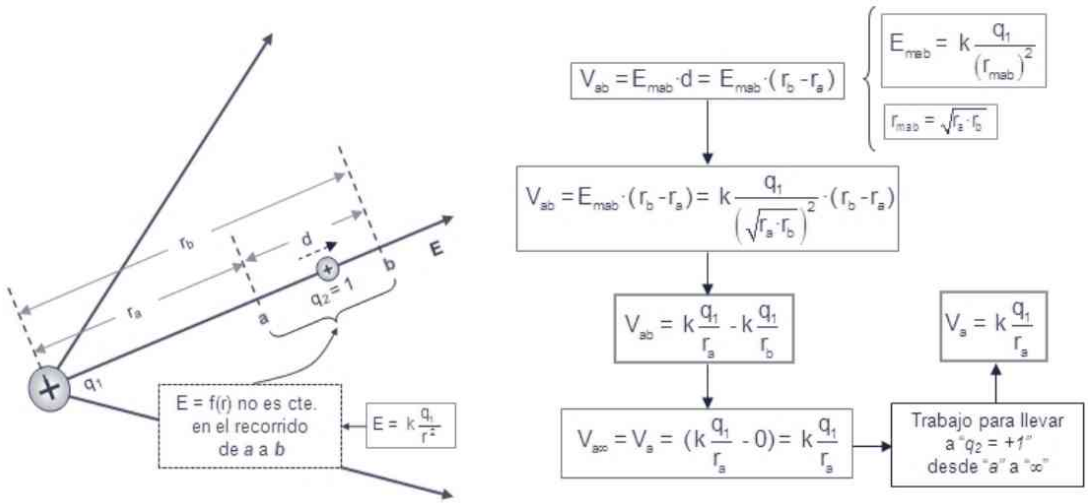


Figura 1.21. Diferencia de potencial en un campo eléctrico debido a una carga uniforme

Todos los puntos que están a la misma distancia del centro tienen el mismo potencial, y se encuentran en una superficie esférica llamada **superficie equipotencial**, *figura 1.22*, que tiene las siguientes propiedades:

- No se requiere trabajo para mover una carga entre ellas ($V_{ab} = W_{ab}/q$; como $V_{ab} = 0 \Rightarrow W_{ab} = 0$).

- Las superficies equipotenciales son **siempre perpendiculares a las líneas de fuerza** y, por consiguiente, a ***E***. Si no fuera así, el campo tendría una componente en ella y, por consiguiente, debería hacerse trabajo para mover la carga en la superficie, lo cual no es cierto como se acaba de demostrar.

- Una superficie equipotencial no puede tener ningún punto común con otra superficie equipotencial. Si lo tuviera, el potencial en ese punto tendría dos valores diferentes, lo cual es imposible.

- Una carga eléctrica positiva tiende a desplazarse en la dirección de superficies equipotenciales decrecientes.

- Una carga eléctrica negativa tiende a desplazarse en la dirección de superficies equipotenciales crecientes.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

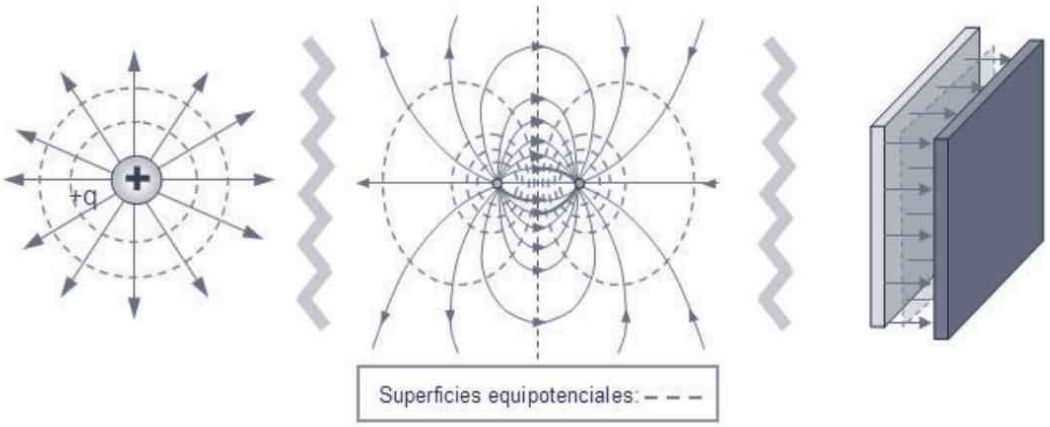


Figura 1.22. Superficies equipotenciales

El campo gravitatorio terrestre tiene similitud con el campo eléctrico. En la *figura 1.23* (no se considera el rozamiento) la masa m de la bola equivaldría a la carga eléctrica q, la gravedad g a la intensidad de campo eléctrico $\boldsymbol{E}$, el producto de la altura h por la gravedad g, al potencial eléctrico V y las superficies horizontales a las superficies equipotenciales.

El trabajo realizado por una fuerza $\boldsymbol{F_e}$ para llevar la bola desde la altura h_a a la altura h_b se invierte en aumentar su energía potencial ($W = \Delta E_p = mgh_b - mgh_a$), de manera análoga que, el trabajo realizado en contra de un campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ para desplazar una carga eléctrica q una distancia d ($W = - q \cdot E \cdot d$) se invierte en aumentar la energía potencial ΔV de la carga q.

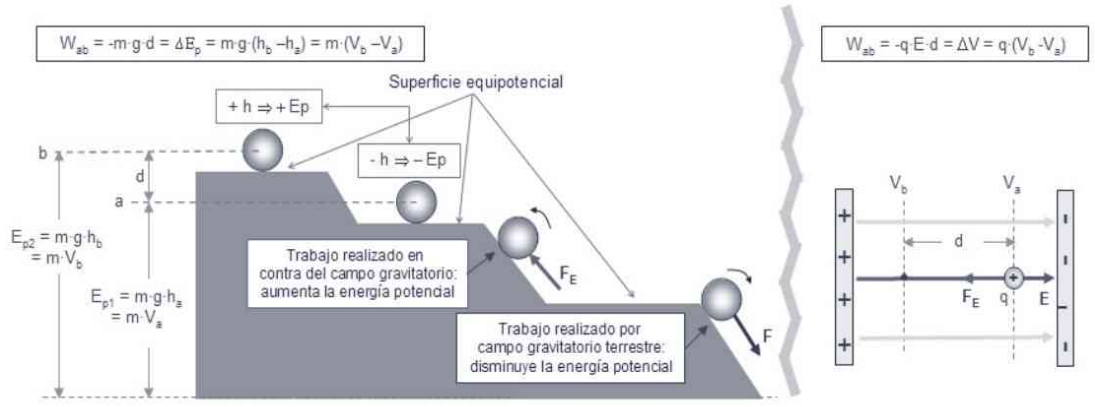


Figura 1.23. Campo gravitatorio terrestre y campo eléctrico

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

La ddp y potencial de un punto se puede hallar mediante el cálculo diferencial como se explica a continuación:

Sea un punto cualquiera, *figura 1.24*, en la dirección *ab*, a una distancia *r* de *q*. En un recorrido muy pequeño *ds,* se puede considerar que el campo es constante, teniendo el mismo valor que tiene a la distancia *r*. El trabajo dV_s para trasladar la unidad de carga positiva a lo largo de *ds* es (recordando que se ha de considerar la componente de ***E***, $\boldsymbol{E} \cdot \cos\alpha$, en la dirección de *ds*:

$$dV_s = E \cdot ds \cdot \cos\alpha = E \cdot dr$$

Haciendo las operaciones correspondientes:

$$V_{ab} = V_a - V_b = k\frac{q}{r_a} - k\frac{q}{r_b}$$

Si el segundo punto está en el ∞ (o muy alejado de *a*), se tiene el potencial del punto *a*:

$$V_a = k\frac{q}{r_a}$$

También se puede poner, llamando *Vab/d* **gradiente de *V***, en la forma:

$$E = -\frac{dV_r}{dr} = -\,\text{grad}\,V$$

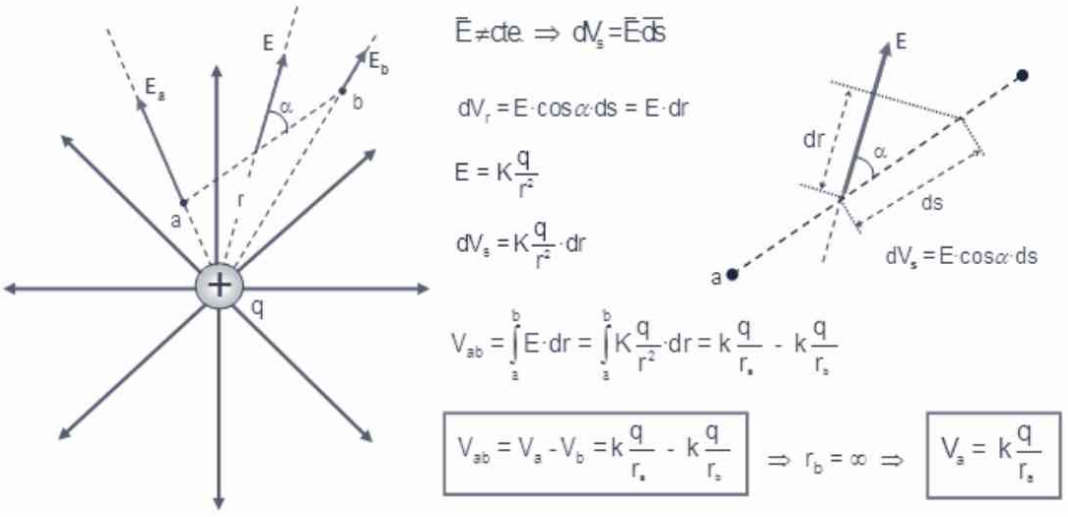


Figura 1.24. Diferencia de potencial en un campo eléctrico debido a una carga uniforme

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

1.12 POTENCIAL ELÉCTRICO DEBIDO A VARIAS CARGAS PUNTUALES

Si en lugar de una carga puntual se tienen dos o más, el potencial eléctrico de un punto *P* debido a dichas cargas, se obtiene de forma análoga al caso del campo eléctrico ***E***, aplicando el principio de superposición, esto es, sumando los potenciales debidos a cada carga, pero teniendo en cuenta que ahora la **suma es aritmética**.

$$V_P = k\sum_i \frac{q_i}{r_i} \qquad [1.17]$$

1.13 ENERGÍA POTENCIAL ELÉCTRICA

Sea V_1 el potencial de un punto *P* debido a una carga q_1, *figura 1.25.* Si se quiere trasladar, sin aceleración, una carga q_2, del mismo signo, desde el infinito ($V_\infty = 0$) hasta el punto *P*, se ha de realizar un trabajo $W_{\infty p}$ que se invierte en el aumento de la energía potencial U_{12} del sistema ($U_{12} = W_{p\infty}$).

$$U_{12} = k\frac{q_1 \cdot q_2}{d} \qquad [1.18]$$

La unidad de la energía potencial eléctrica es el julio.

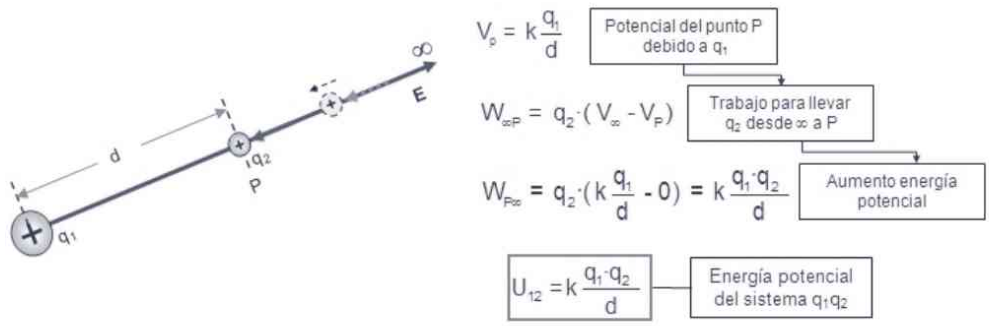


Figura 1.25. Energía potencial eléctrica

Nótese que, si las dos cargas son del mismo signo U_{12} es positiva, es necesaria una fuerza exterior para aproximar las cargas y si son de signo contrario U_{12} es negativa, es necesaria una fuerza exterior para separar las cargas. Por otra parte, **no confunda** los términos *potencial* con *energía potencial*, el primero es una característica escalar del campo eléctrico, independiente de las cargas que puedan ponerse en el campo, el segundo tiene en cuenta las cargas que se pongan en el campo. Es decir, no es necesario que haya una carga en un punto para que exista potencial *V* (o campo eléctrico ***E***) en dicho punto.

Si en el sistema hay más de dos cargas, la energía potencial total U_T se obtiene calculando U para cada par de cargas y sumando aritméticamente los términos. Si se tiene, por ejemplo, tres cargas del mismo signo, su energía potencial eléctrica es:

$$U_T = k\left(\frac{q_1 \cdot q_2}{d_{12}} + \frac{q_1 \cdot q_3}{d_{13}} + \frac{q_2 \cdot q_3}{d_{23}}\right) \qquad [1.19]$$

1.14 FLUJO ELÉCTRICO

El flujo eléctrico Φ_E es la medida del número de líneas de un campo eléctrico que atraviesan cierta superficie. Como el número de líneas por unidad de área es proporcional a la magnitud del campo eléctrico $\boldsymbol{E}$, entonces, si las líneas de fuerzas son perpendiculares a una superficie de área A, *figura 1.26*, el número de líneas que penetran en la misma es proporcional al producto EA.

$$\Phi_E = E \cdot A \qquad [1.20]$$

Si las líneas de fuerza forman un ángulo α respecto a la posición de máximo flujo, *figura 1.26*, el valor del flujo es ahora:

$$\Phi_{E\alpha} = E \cdot A \cdot \cos\alpha = \boldsymbol{E \cdot A} \qquad [1.21]$$

Expresando $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{A}$ el producto escalar de los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{A}$ (el vector $\boldsymbol{A}$ es un vector perpendicular a la superficie A).

En el caso que la superficie A sea perpendicular al campo $\boldsymbol{E}$, el ángulo $\alpha = 0° \Rightarrow \Phi_{E\alpha} = \Phi_E = E \cdot A$

Si la superficie A es paralela al campo $\boldsymbol{E}$ el ángulo $\alpha = 90° \Rightarrow \Phi_{E\alpha} = 0$

La unidad del flujo eléctrico Φ_E es el $N \cdot m^2/C$

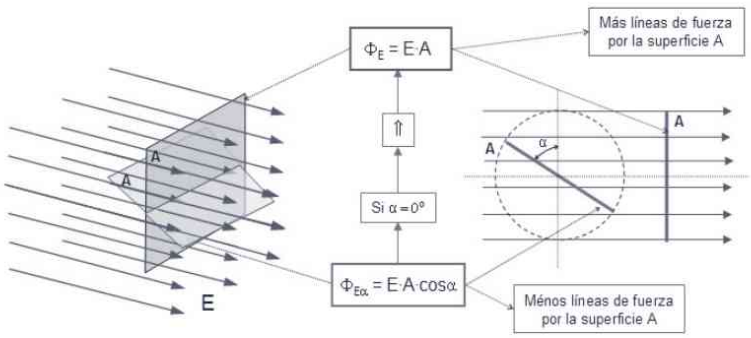


Figura 1.26. Flujo eléctrico

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Cuando el campo $\boldsymbol{E}$ no es uniforme, sino que varía de un punto a otro en el área $\boldsymbol{A}$, se tiene:

$$\Phi_E = \int_A \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} \qquad [1.22]$$

1.15 LEY DE GAUSS

La ley de Gauss (1777-1855) establece que:

"*El flujo eléctrico neto Φ_E a través de cualquier superficie cerrada que rodea cargas eléctricas es proporcional a la carga eléctrica total q_{int} (suma algebraica de las cargas eléctricas Σq_i) dentro de dicha superficie*".

$$\Phi_E = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \qquad [1.23]$$

La superficie elegida se le llama *superficie gaussiana* y puede tener cualquier forma y tamaño, pero con la condición de ser cerrada.

Para campos eléctricos de distribuciones de carga eléctrica con alta simetría, la ley de Gauss facilita la determinación matemática del campo eléctrico generado por estas cargas.

En la *figura 1.27*, se demuestra la **ley de Gauss para una carga puntual** q colocada en el vacío. Se toma como superficie gaussiana una esfera de radio r. En la esfera se toma un área elemental A_i, lo suficientemente pequeña para considerar que el campo $\boldsymbol{E}$ es perpendicular a dicha superficie. El flujo que atraviesa la esfera es la suma $\Sigma\Phi_i$ de todos los flujos Φ_i en cada área A_i. Como el campo $\boldsymbol{E}$ tiene el mismo módulo E para todos los puntos de la esfera de radio r, teniendo, pues, un valor constante en toda la superficie esférica y $\Sigma\Phi_i$ es el área correspondiente a la totalidad de la esfera ($A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$), se obtiene la fórmula:

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad [1.24]$$

El flujo es independiente del radio r de la esfera elegida, depende sólo de la carga encerrada por ella.

Mediante el cálculo diferencial se puede demostrar que esta fórmula se obtiene, también, considerando **cualquier** otra superficie **cerrada** que rodeara la carga eléctrica. Es decir, que independientemente de la forma y tamaño de la superficie elegida, el flujo eléctrico a través de la misma depende solamente de la carga eléctrica neta contenida en dicha superficie.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

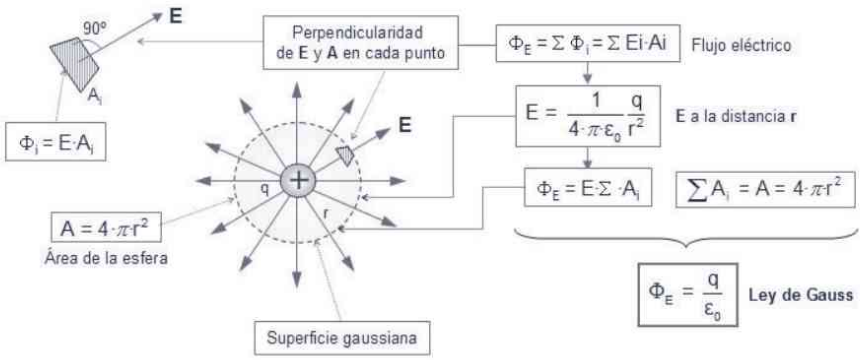


Figura 1.27. Ley de Gauss en una carga puntual

En la *figura 1.28* se muestran diferentes superficies gaussianas y la aplicación de la Ley de Gauss a cada una de ellas.

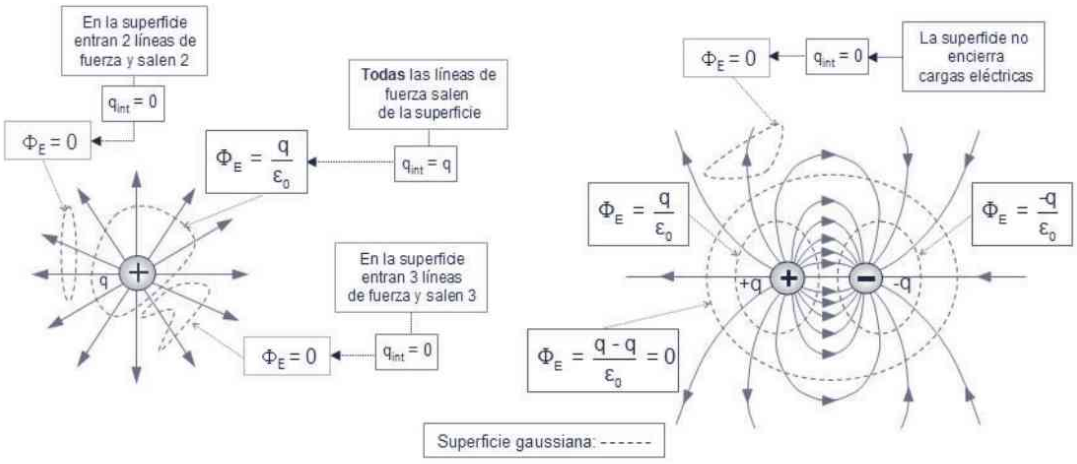


Figura 1.28. Ley de Gauss con diferentes superficies gaussianas

A continuación se hacen algunas aplicaciones de la Ley de Gauss, en diferentes situaciones con cuerpos situados en el vacío (o en el aire).

1.16 TODA LA CARGA DE UN CONDUCTOR, EN EQUILIBRIO ELECTROESTÁTICO, SE CONCENTRA EN SU SUPERFICIE

Sea un conductor cargado, *figura 1.29*, cuya carga eléctrica está en equilibrio (reposo). Se deduce que:

- Puesto que un conductor se caracteriza porque las cargas eléctricas se pueden mover libremente por su interior, si las cargas están en reposo, la intensidad del

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

campo eléctrico en todos los puntos interiores del mismo deberá ser cero ($\boldsymbol{E} = 0$) de otro modo se desplazarían, lo que es contrario a la hipótesis de equilibrio.

- La carga total neta contenida en el interior del conductor es nula, **todo exceso de carga reside en la superficie del conductor**. En efecto, si se considera una superficie gaussiana cualquiera dentro del conductor, *figura 1.29*, como $\boldsymbol{E} = 0$ el flujo $\boldsymbol{\Phi_E}$ también lo es, y conforme a la Ley de Gauss, la carga neta dentro de la superficie es nula. Más allá de la periferia del conductor, las cargas no pueden desplazarse, pues existe el aislante (aire, pvc, etc.). Además, el campo eléctrico en la superficie de un conductor es **perpendicular** a dicha superficie, de lo contrario las cargas se trasladarían.

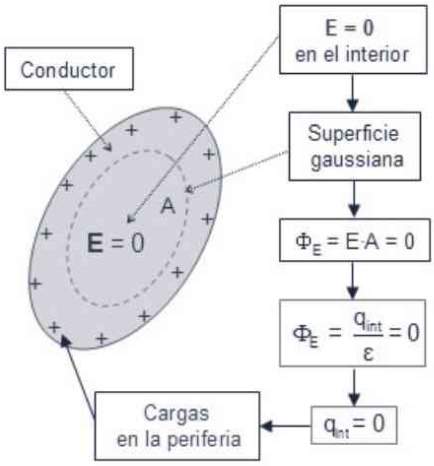


Figura 1.29. ***E*** *en el interior de un conductor*

1.17 INTENSIDAD DE CAMPO *E* Y POTENCIAL ELÉCTRICO *V* DEBIDO A UNA ESFERA MACIZA CONDUCTORA CARGADA

Sea una esfera maciza conductora de radio R, *figura 1.30*, por tratarse de un conductor (apartado anterior) toda la carga eléctrica Q se distribuye en la periferia (de manera uniforme pues de lo contrario habría desplazamiento de cargas) originando un campo eléctrico radial. El campo eléctrico en el interior de la esfera es nulo ($\boldsymbol{E} = 0$). Si se toma una superficie gaussiana de forma esférica de cualquier radio r ($r > R$), aplicando la Ley de Gauss, se tiene el módulo de $\boldsymbol{E}$:

$$E = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \qquad [1.25]$$

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Una esfera con una carga uniformemente repartida Q, tiene un campo eléctrico nulo en su interior ($r < R$) y el campo eléctrico en el exterior ($r \geq R$) tiene el mismo valor que el de una carga puntual Q concentrada en el centro de la esfera.

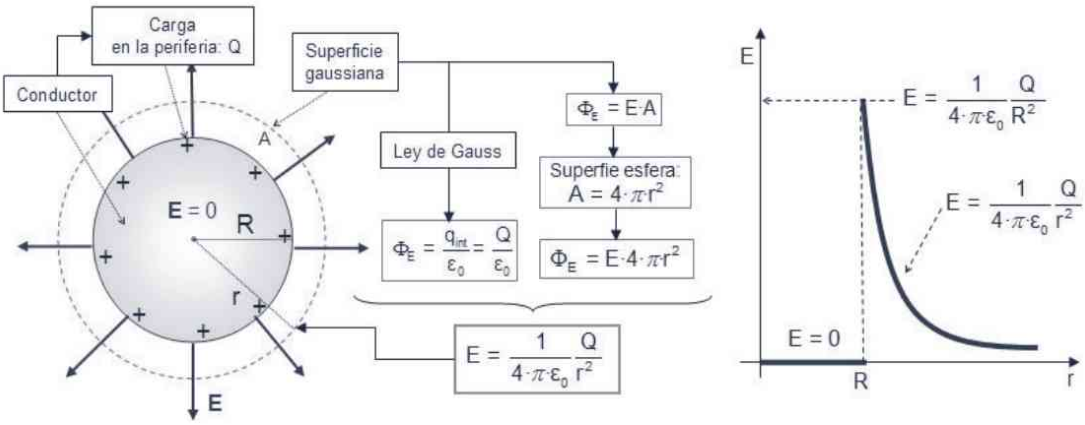


*Figura 1.30. Campo **E** creado de una esfera conductora maciza*

Para hallar el potencial eléctrico V_r a una distancia r ($r \geq R$) de la esfera, recordando que $dV_r = E \cdot dr$, se tiene, *figura 1.31*:

$$dV_r = E \cdot dr \Rightarrow V_r = \int_r^{\infty} E \cdot dr$$

$$V_r = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \frac{Q}{r} \qquad [1.26]$$

Teniendo el valor máximo para $r = R$, que es el correspondiente a la superficie de la esfera. Puesto que en un conductor en equilibrio todos los puntos han de estar al mismo potencial, el valor del potencial en la superficie es, también, el que tienen todos sus puntos.

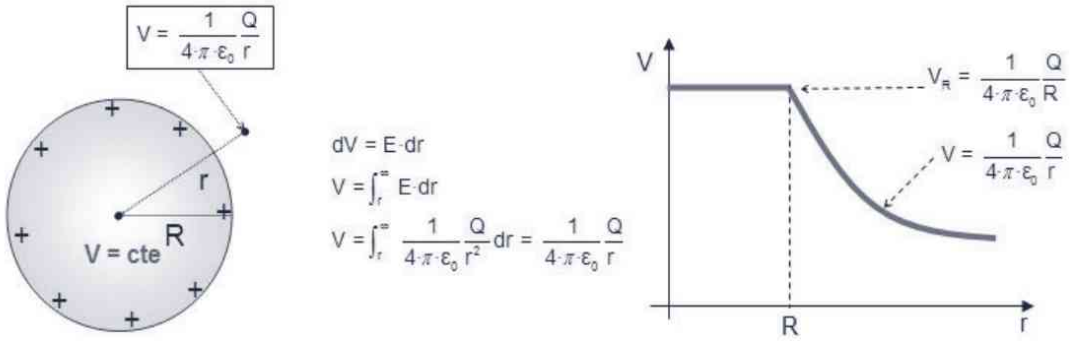


Figura 1.31. Potencial V de una esfera conductora maciza

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

1.18 INTENSIDAD DE CAMPO *E* Y POTENCIAL ELÉCTRICO *V* DEBIDO A UNA CORTEZA ESFÉRICA CONDUCTORA CARGADA

Considerando dos superficies gaussianas, una para el interior y otra para el exterior de la corteza de superficie *S*, con una densidad de carga eléctrica σ ($\sigma = Q/S$), *figura 1.32*. Procediendo de forma análoga a los casos anteriores, se obtienen los mismos valores para el campo eléctrico ***E*** y para el potencial *V*, que los obtenidos en el caso de una esfera conductora maciza.

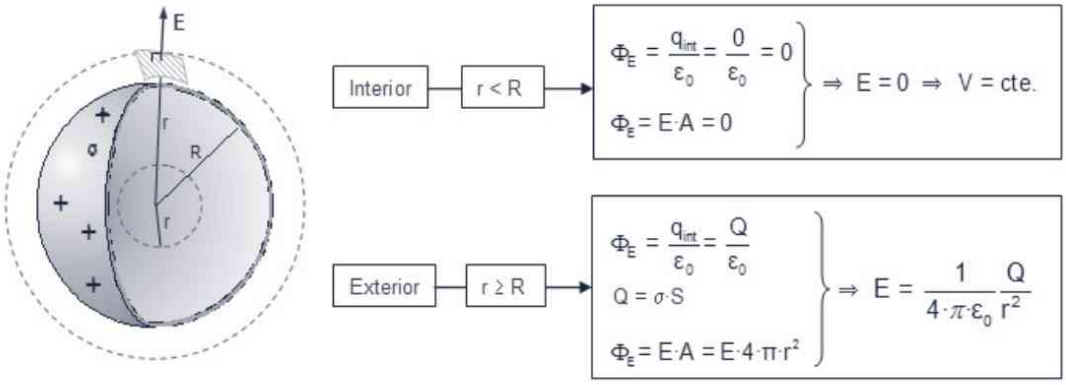


*Figura 1.32. Campo **E** y potencial V en una corteza esférica conductora.*

1.19 INTENSIDAD DE CAMPO *E* Y POTENCIAL ELÉCTRICO *V* DEBIDO A UN VOLUMEN ESFÉRICO CON CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA

En este caso las cargas están uniformemente distribuidas por el volumen de la esfera con una densidad volumétrica ρ (C/m^3), *figura 1.33*. El campo exterior tiene el mismo valor que en el caso de la esfera conductora, pero el campo interior es una función lineal del radio *r*.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

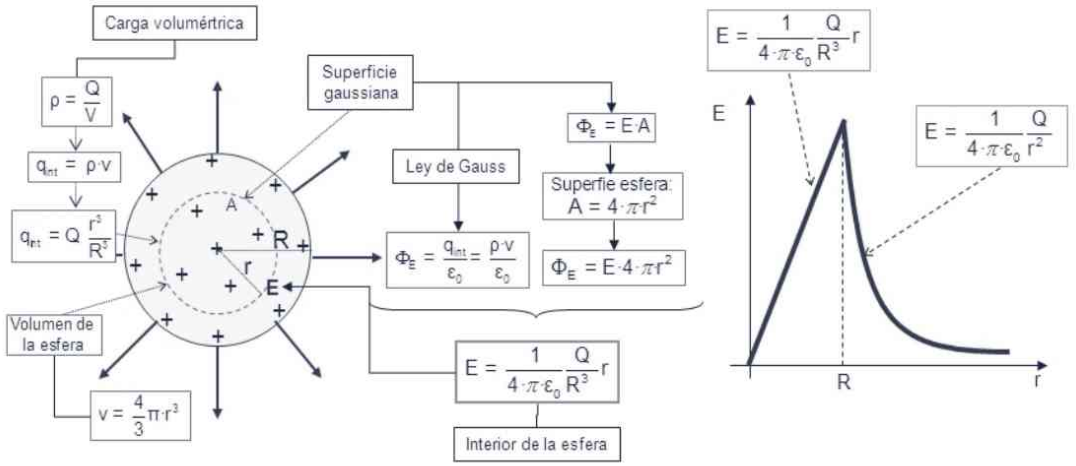


*Figura 1.33. Campo **E** de una esfera aislante maciza*

Para hallar el potencial se ha de considerar, *figura 1.34*, el interior y el exterior del conductor, teniendo el potencial exterior los mismos valores que en el caso de una esfera conductora y los valores para los puntos interiores son una función parabólica de *r*.

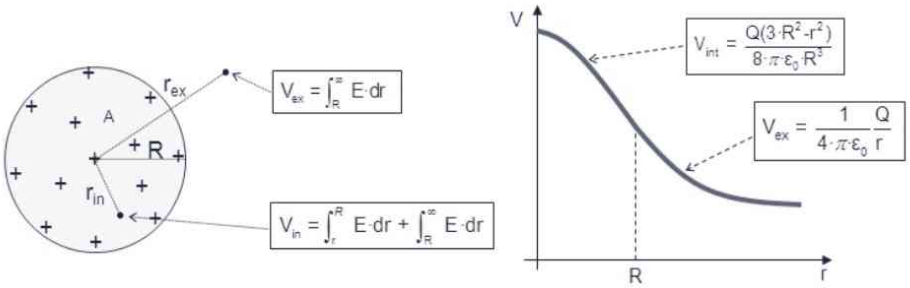


Figura 1.34. Potencial V de una esfera aislante maciza

1.20 INTENSIDAD DE CAMPO ELÉCTRICO *E* Y DIFERENCIA DE POTENCIAL V_{AB} DEBIDO A UNA CARGA LINEAL UNIFORME λ DE LONGITUD INFINITA

Sea un conductor rectilíneo con una distribución uniforme de carga lineal λ (C/m), *figura 1.35*. Esta distribución crea un campo eléctrico radial, pues como se ve en la parte derecha de la *figura 1.35*, para ocho cargas, ya el campo es aproximadamente radial y a medida que aumenta el número de cargas la dirección del campo eléctrico se hace cada vez más perpendicular a la línea de cargas.

Se toma como superficie gaussiana un cilindro de radio *r*. Aplicando la Ley de Gauss, teniendo en cuenta que en cada área elemental A_i el campo ***E*** es perpendicular a ella

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

y el flujo eléctrico Φ_C a través de las dos superficies circulares del cilindro es nulo (no pasan líneas de fuerza), se tiene para el módulo de $\boldsymbol{E}$:

$$E = \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r} \qquad [1.27]$$

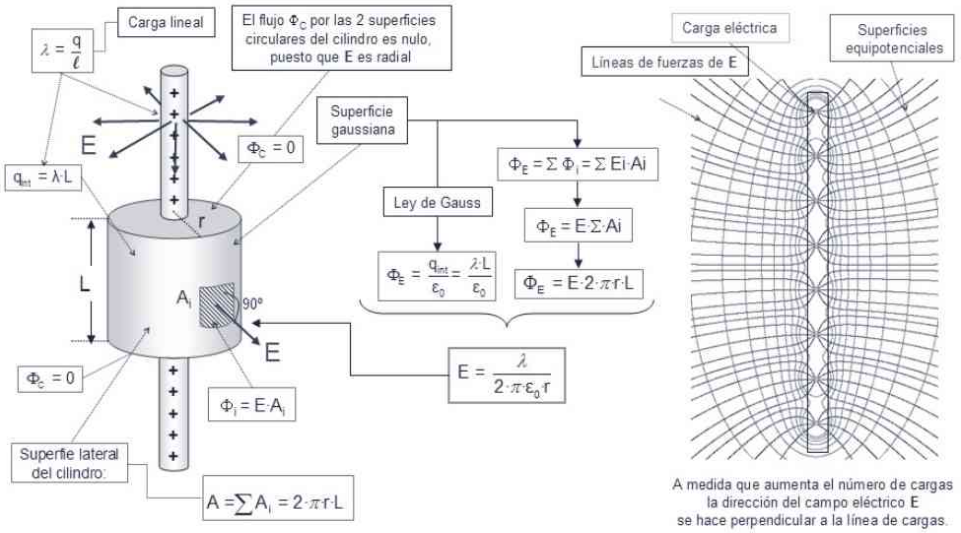


*Figura 1.35. Campo **E** creado por una carga lineal uniforme λ*

Para el cálculo de la diferencia de potencial V_{ab} entre dos puntos distantes del eje del conductor las distancias *a* y *b*, *figura 1.36*, como el campo $\boldsymbol{E}$ tiene sólo componente radial, se tiene:

$$V_{ab} = \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\,\mathrm{Ln}\,\frac{r_b}{r_a} \qquad [1.28]$$

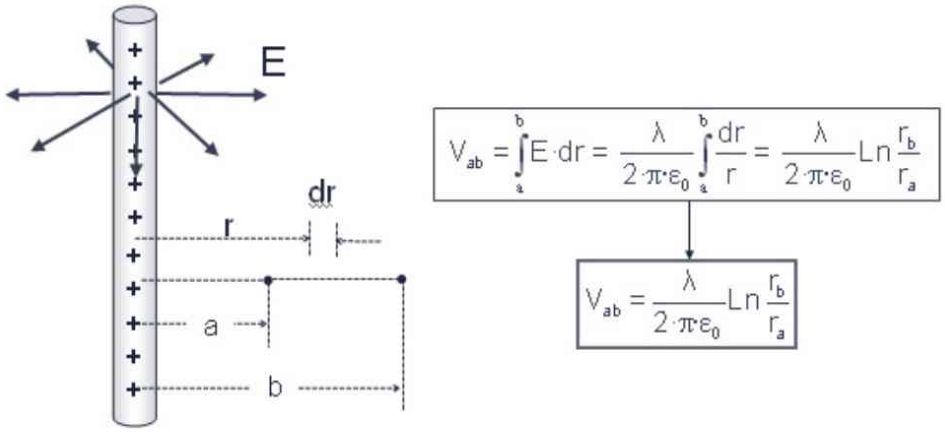


Figura 1.36. Ddp creado por una carga lineal uniforme λ

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

1.21 INTENSIDAD DE CAMPO ELÉCTRICO *E* DEBIDO A UN PLANO INFINITO DE DISTRIBUCIÓN UNIFORME DE DENSIDAD DE CARGA

Sea un plano infinito con una densidad superficial de carga σ (C/m^2), *figura 1.37*. Para hallar el módulo del campo eléctrico ***E*** se elige como superficie gaussiana un cilindro, con su eje perpendicular al plano cargado y de superficie circular *A*, obteniéndose:

$$E = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0} \qquad [1.29]$$

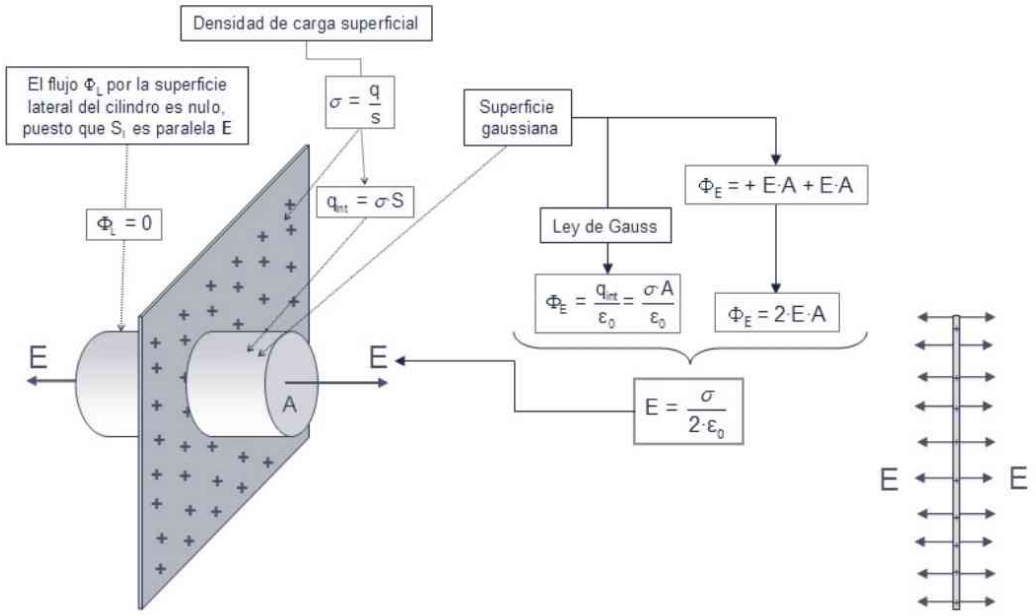


*Figura 1.37. Campo **E** creado por una carga superficial uniforme σ*

1.22 INTENSIDAD DE CAMPO ELÉCTRICO *E* DEBIDO A DOS PLANOS INFINITOS PARALELOS CARGADOS CON CARGAS OPUESTAS

El campo eléctrico ***E*** resultante se obtiene aplicando el principio de superposición a los campos eléctricos $\boldsymbol{E}_+$ y $\boldsymbol{E}_-$ debidos a cada una de las superficies, *figura 1.38.*

En el exterior de las superficies el campo resultante es nulo, $\boldsymbol{E} = 0$, resultado de la suma de dos vectores de igual módulo pero sentidos contrarios. En el interior de las superficies los vectores tienen el mismo módulo y el mismo sentido, obteniéndose para el campo eléctrico:

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad [1.30]$$

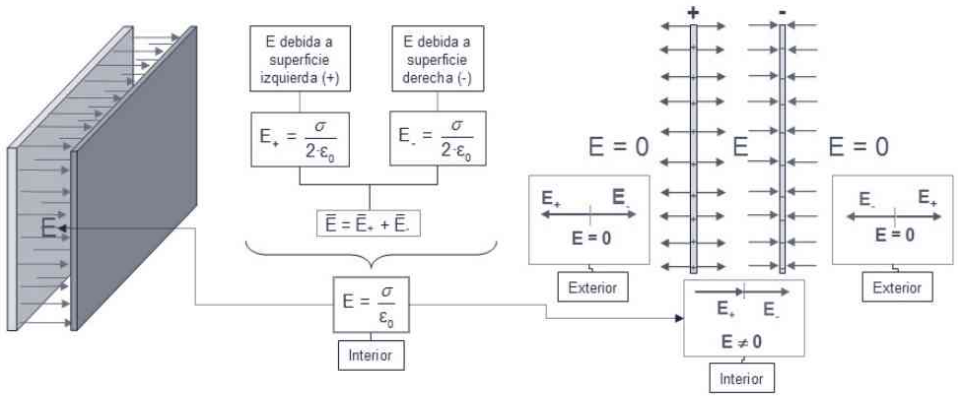


*Figura 1.38. Campo **E** debido a dos planos infinitos paralelos cargados con cargas opuestas*

1.23 CAMPO EN LA PROXIMIDAD DE LA SUPERFICIE DE UN CONDUCTOR (TEOREMA DE COULOMB)

Se ha visto que, el campo eléctrico en el interior de un conductor cargado en equilibrio es nulo, $\boldsymbol{E} = 0$, y que en la superficie del conductor $\boldsymbol{E}$ es perpendicular a dicha superficie. Considérese un conductor cargado con una densidad de carga σ (C/m^2). Si se toma como superficie gaussiana un pequeño cilindro, cuyo eje es perpendicular a la superficie, de área circular A, una de ellas en el interior del conductor y la otra en el exterior inmediatamente próxima a la superficie del conductor, *figura 1.39,* se tiene para la intensidad de campo eléctrico en las proximidad de la superficie del conductor:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad [1.31]$$

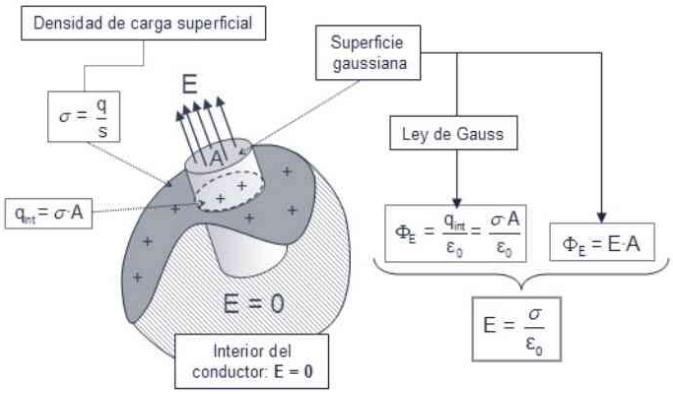


*Figura 1.39. Campo **E** en la proximidad de la superficie de un conductor*

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

1.24 EL POTENCIAL DE UN CONDUCTOR AISLADO ES EL MISMO EN TODOS SUS PUNTOS

El potencial de un conductor cargado en equilibrio electrostático es el mismo en todos sus puntos:

- **En el interior del conductor** se ha visto que el campo eléctrico $\boldsymbol{E} = 0$, como por otra parte, $dV_{ba} = -\vec{E}\cdot\vec{dl}$, es decir que si el campo $\boldsymbol{E} = 0$ no existe variación de V, o lo que es lo mismo, el potencial en el interior del conductor es constante.

- **En la superficie del conductor**, donde se encuentra la carga neta que está en reposo, el potencial electrostático tiene que ser constante a lo largo de toda la superficie, pues en caso contrario la carga neta se desplazaría de un punto a otro de la superficie como consecuencia de una variación en el potencial. Pero, además, el potencial en el interior tiene que ser igual al potencial en la superficie. Si no fuera así, de nuevo, existiría desplazamiento de carga neta de la superficie al interior (o viceversa, dependiendo del signo de la carga neta) incumpliéndose la condición de equilibrio electrostático.

Se concluye que un conductor en equilibrio electrostático constituye un volumen equipotencial.

1.25 CAMPO EN EL INTERIOR DE UN CONDUCTOR HUECO, SIN CARGA Y CON CARGA

En un conductor cargado y en equilibrio electrostático, **con una cavidad interior**, *figura 1.40*, la carga eléctrica neta está localizada únicamente en su superficie exterior.

Si se toma una superficie gaussiana, *figura1.40*, alrededor de la cavidad, como en todos los puntos en el interior el campo eléctrico ha de ser nulo, por estar sus cargas en equilibrio electrostático, el flujo a través de dicha superficie es nulo, lo que implica que la carga neta en su interior es nula. Se puede reducir la superficie S hasta que coincidiese con la superficie de la cavidad y el resultado sería el mismo.

Este es el fundamento de la **pantalla electrostática**, o **jaula de Faraday**, *figura 1.40 derecha*, que se utiliza para aislar un recinto de la influencia de campos eléctricos externos. Se le llama jaula porque para ser efectiva, en muchos casos, no necesita ser compacta y basta con unas barras metálicas entrelazadas en forma de jaula.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

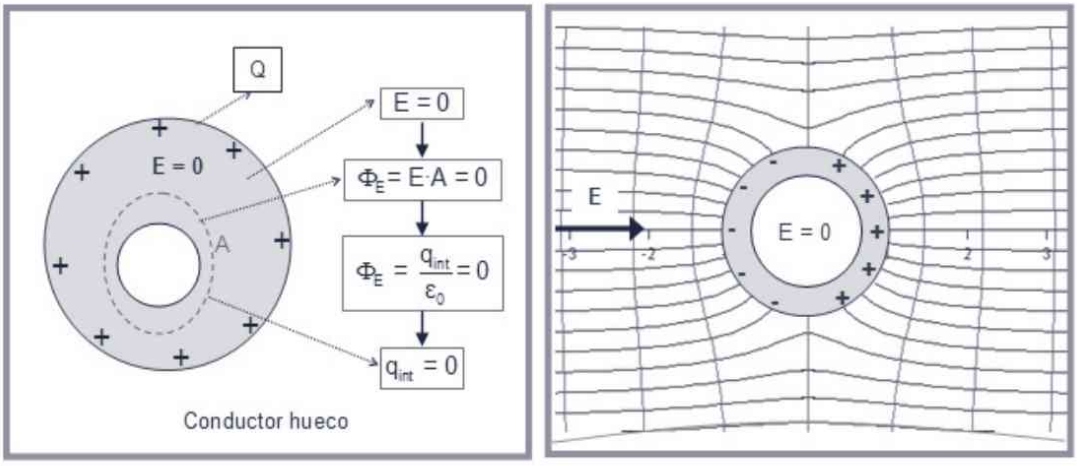


Figura 1.40. Conductor hueco y pantalla electrostática

Si se introducen cargas dentro de la cavidad, *figura 1.41,* estas se "reflejan" en la superficie externa del conductor, es decir, sobre la superficie externa del conductor aparece una carga neta igual a la introducida en la cavidad.

Como se ve en la *figura 1.41 izquierda*, al introducir en la cavidad una carga +4*q*, aparecen sobre la superficie externa del conductor +4*q* nuevas cargas, debidas al desplazamientos de -4*q*, desde la superficie externa del conductor hacia la superficie de la cavidad, originado por el efecto inductivo de las +4q introducidas.

En la *figura 1.41 derecha* se explica el fenómeno mediante la Teoría de Gauss.

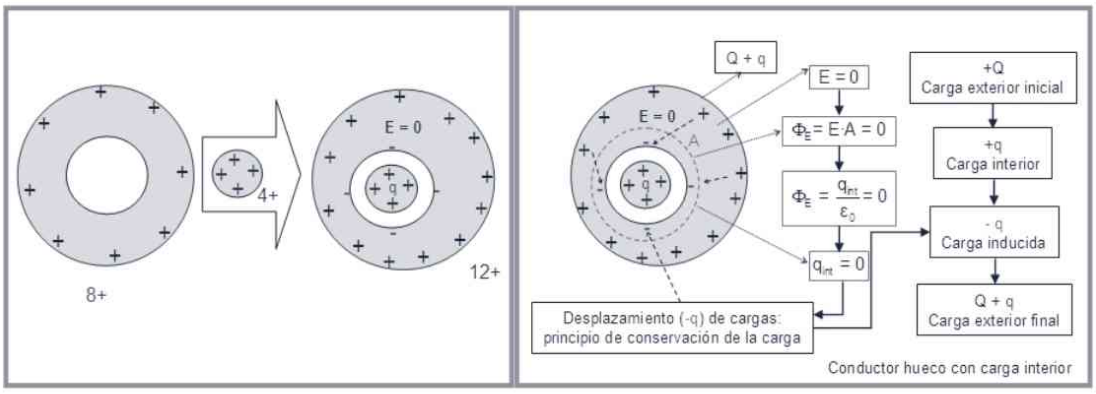


Figura 1.41. Conductor hueco con carga interior

Observa:

- **El cable de guarda** que está colocado por encima de los conductores de las líneas de alta tensión une todas las torres y está unido a tierra, hace la función de una jaula de Faraday incompleta, protegiendo al resto de conductores y a las

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

torres, de la influencia eléctrica de las nubes y, por tanto, de las descargas eléctricas debidas al rayo.

- Los cables subterráneos tienen una cubierta metálica que actúa como jaula de Faraday.

- Al permanecer en el interior del coche durante una tormenta eléctrica, su carrocería metálica actúa como una jaula de Faraday frente a las descargas eléctricas. Por la misma razón, al caer un rayo en un avión, la descarga afecta sólo al exterior y no al interior (personas, combustible, etc.).

1.26 CAMPO ELÉCTRICO SOBRE LA SUPERFICIE DE UN CONDUCTOR. PRESIÓN ELECTROSTÁTICA

Considérese la superficie gaussiana del *apartado 1.23*, *figura 1.39*, y elíjase la superficie *A* pero, ahora, formando parte de la superficie del conductor, *figura 1.42*. En el interior del conductor, puesto que $\boldsymbol{E} = 0$, se ha de cumplir que el campo $\boldsymbol{E_A}$ debido a las cargas de dicha superficie y el campo $\boldsymbol{E_q}$ debido al resto de cargas del conductor son iguales pero de sentido contrario ($\boldsymbol{E_A} = -\boldsymbol{E_q}$). En el exterior, en la proximidad del conductor, se ha visto que el campo $E = \sigma/\varepsilon_0$, de donde se deduce, *figura 1.42*, que sobre las cargas eléctricas pertenecientes a la superficie *A* actúa un campo eléctrico $\boldsymbol{E_A}$, de módulo:

$$E_A = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0} \qquad [1.32]$$

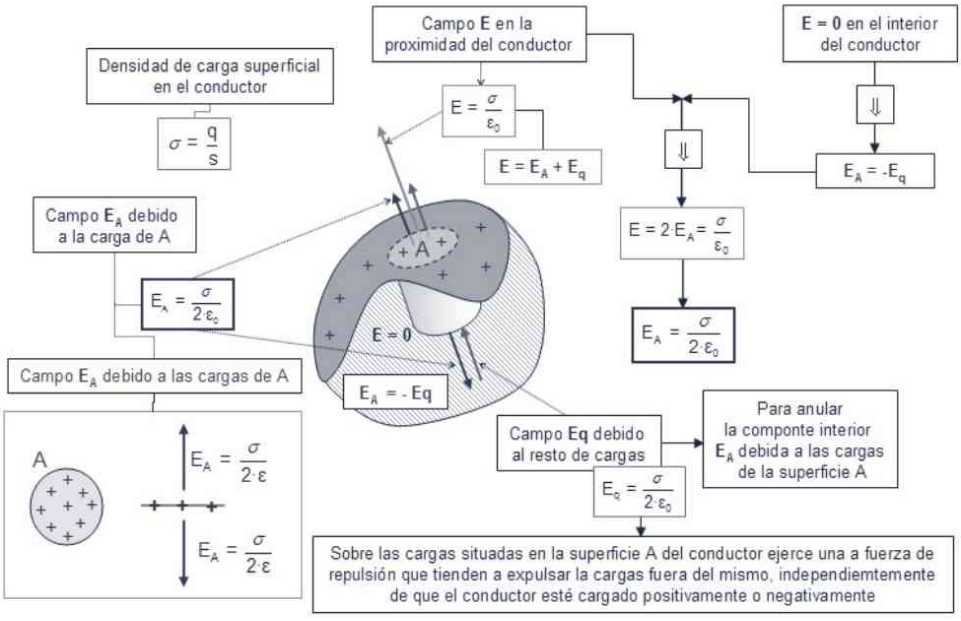


*Figura 1.42. Campo **E** en la superficie de un conductor*

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Sobre las cargas situadas en la superficie *A* del conductor, el resto de cargas ejercen una fuerza de **repulsión** que tiende a expulsar las cargas fuera del mismo, independientemente de que el conductor esté cargado positiva o negativamente. El módulo de la fuerza resultante (*fórmula [1.9]*) sobre la carga en *A* es:

$$F_A = E_q \cdot q_A$$

$$F_A = \frac{\sigma}{2\cdot\varepsilon_0}\sigma\cdot A = \frac{\sigma^2\cdot A}{2\cdot\varepsilon_0}$$

Como presión es fuerza por unidad de superficie ($P = F/S$), se obtiene la llamada **presión electrostática**:

$$P_A = \frac{\sigma^2}{2\cdot\varepsilon_0} \qquad [1.33]$$

Siendo las unidades en el sistema internacional: *P* en pascales (N/m^2) y σ (C/m^2).

Si partes del conductor se encuentran con una densidad de carga σ positiva elevada, o lo que es lo mismo, un déficit de electrones, captará electrones de las moléculas del medio circundante (**ionización**), por ejemplo el aire, que al quedar cargadas positivamente son repelidas por el conductor, produciéndose el fenómeno conocido como **viento eléctrico**. En el caso de que partes del conductor se encuentren con una densidad de carga σ negativa elevada, exceso de electrones, estos serán expulsados y repelidos por el conductor produciéndose también el viento eléctrico.

1.27 EN UN CONDUCTOR LAS CARGAS ELÉCTRICAS SE ACUMULAN EN LAS PUNTAS

Considérense dos esferas conductoras, suficientemente alejadas para que su influencia sea nula, de radios *R* y *r*, cargadas con cargas *Q* y *q*, unidas mediante un hilo conductor, lo que hace que ambas esferas estén al mismo potencial, constituyendo en realidad un único conductor, *figura 1.43*. Haciendo las operaciones correspondientes, *figura 1.43*, se obtiene que las densidades de cargas son inversamente proporcionales a los radios:

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_r} = \frac{r}{R} \qquad [1.34]$$

Es decir, la densidad de carga es mayor en la esfera de menor radio.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

En un conductor de cualquier forma, esto significa que, la densidad de cargas es máxima (esto implica mayor campo eléctrico ***E***) allí donde el radio de curvatura sea mínimo, o sea, en las puntas.

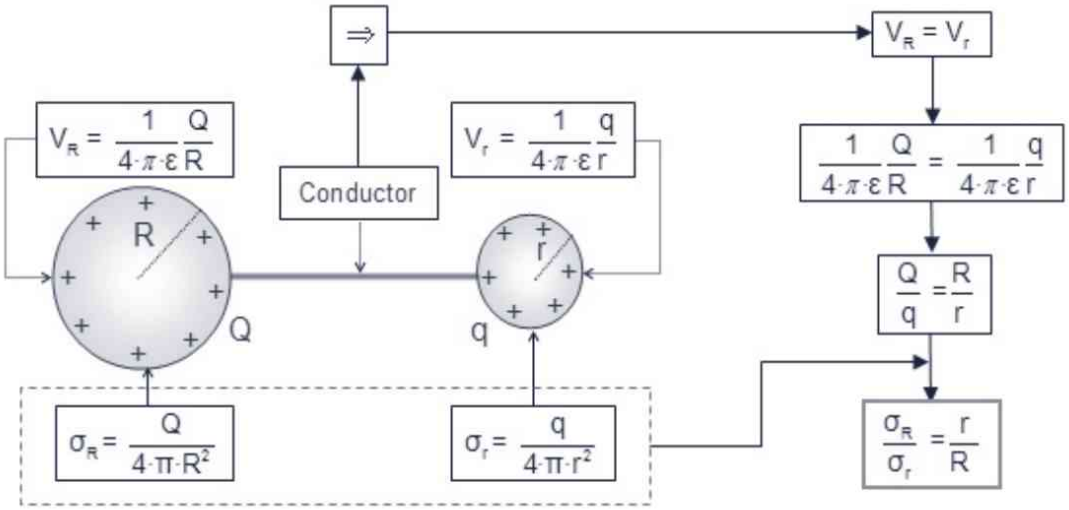


Figura 1.43. Las cargas eléctricas se acumulan en las puntas

Observa:

- Este efecto, junto a la presión electrostática, da lugar al **efecto corona**, que es un fenómeno eléctrico que se produce en los conductores de las líneas de alta tensión (elevado ***E***) debido a la ionización del aire circundante y se manifiesta en forma de halo luminoso a su alrededor, acompañado de un zumbido característico, *figura 1.44 izquierda*. Dado que los conductores suelen ser de sección circular, el halo adopta una forma de corona, de ahí el nombre del fenómeno. Da lugar a una pérdida de energía que es necesario evitar y una forma de hacerlo es empleando conductores de mayor diámetro (se reduce la curvatura y disminuye el efecto de punta).

- El **pararrayos** es un dispositivo formado por una o más barras metálicas terminadas en punta y unidas con la tierra (al agua, en los barcos) mediante un conductor, y que se coloca sobre los edificios o en la parte alta de los barcos, para preservarlos de los efectos del rayo, *figura 1.44 derecha*. El rayo se debe a un desequilibrio eléctrico entre nubes, o entre la tierra y las nubes. Si la base de la nube está cargada negativamente, atrae cargas positivas de la tierra que está debajo. La diferencia de potencial aumenta hasta que tiene lugar una repentina descarga, que es el rayo. La mayoría de los pararrayos están fundados en el efecto de las puntas. El campo eléctrico (debido al efecto punta) en el extremo del pararrayos es lo suficientemente intenso para ionizar el aire, facilitando la descarga a tierra a través del pararrayos, evitándose de esta manera que el rayo caiga en la zona que se quiere proteger.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

- En las partes posteriores de las alas, los **aviones** poseen unas varillas metálicas para facilitar las descargas eléctricas de las cargas acumuladas debidas al rozamiento con el aire, e impedir que se acumulen, con el consiguiente peligro en el momento del aterrizaje (contacto con personas, combustibles, etc.).

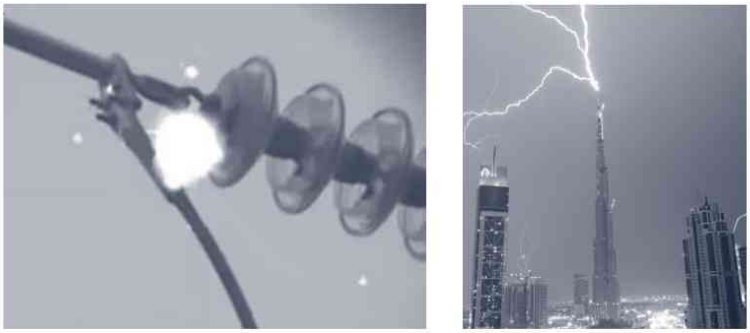


Figura 1.44. Efecto corona. Pararrayos

1.28 RESUMEN DE LAS CARACTERÍSTICAS DE UN CONDUCTOR CARGADO EN EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO

A continuación, *figura 1.45*, se hace un resumen de las características de un conductor cargado en equilibrio electroestático:

- Campo eléctrico E en el interior nulo.
- Campo eléctrico E en la superficie ($\boldsymbol{E} = \sigma/2 \cdot \varepsilon_0$) perpendicular a dicha superficie.
- Cargas eléctricas netas: ninguna en el interior, todas en la superficie.
- Potencial constante: potencial en el interior igual al potencial en el exterior.
- En un conductor de forma irregular, la densidad de carga superficial es mayor en puntos donde el radio de curvatura de la superficie es menor.

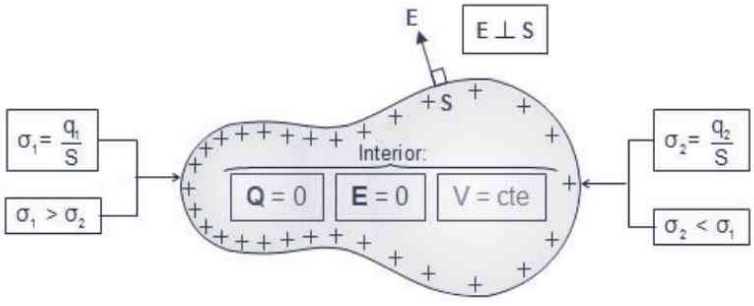


Figura 1.45. Conductor cargado en equilibrio electrostático

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

1.29 RESUMEN DE CONCEPTOS Y FÓRMULAS DE LA ELECTROSTÁTICA

En la *figura 1.46* se hace un resumen de conceptos y fórmulas de este capítulo.

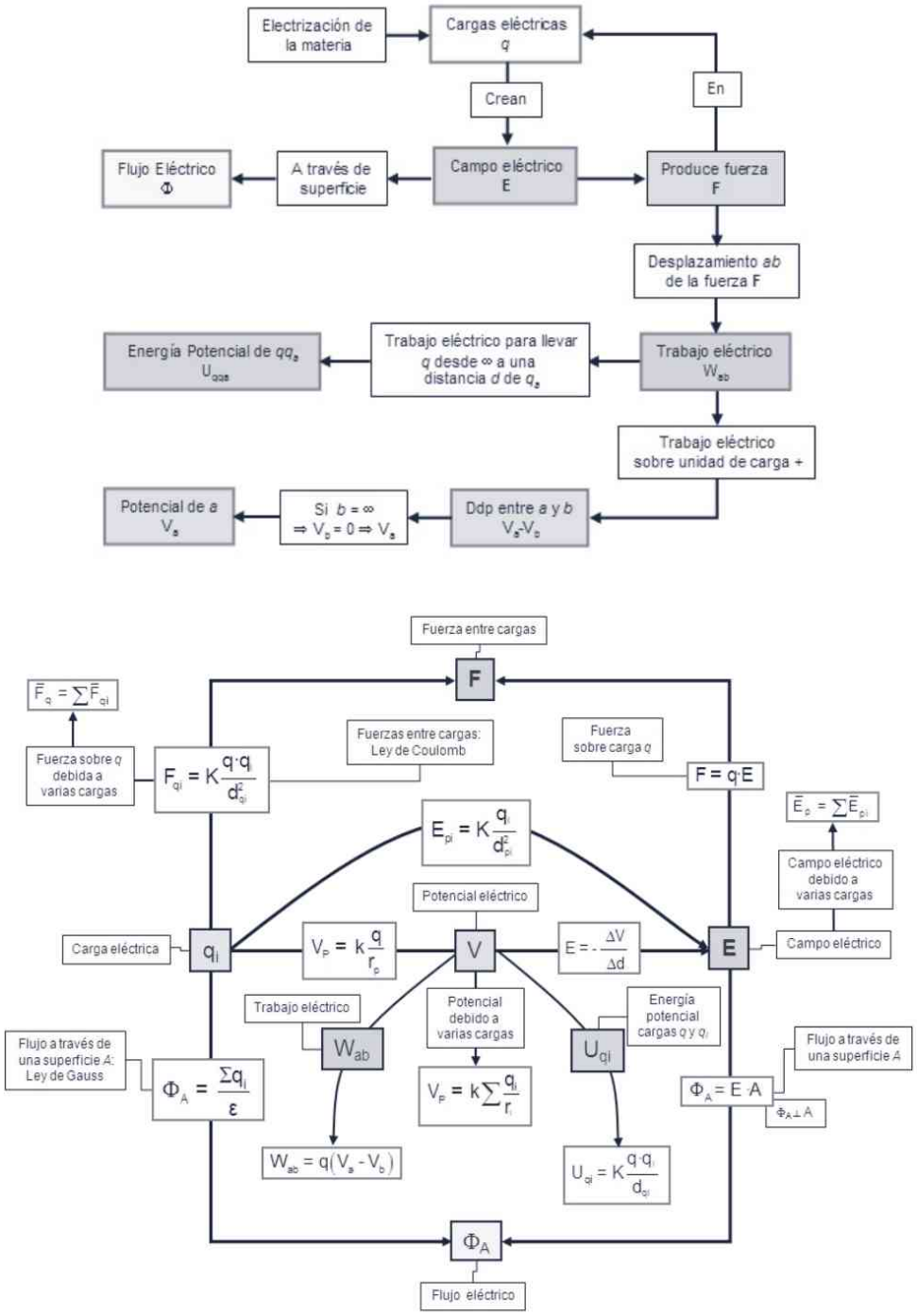


Figura 1.46. Mapa conceptual y resumen de fórmulas de este capítulo

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

1.30 EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Ejercicio 1.30.1

Una carga $q_1 = 2$ μC está situada en el vacío, *figura 1.47.* Calcular:

1. Potencial creado por la carga q_1 en un punto A distante 2 m y en un punto B distante 3 m.
2. Trabajo para desplazar una carga $q_2 = 4$ μC desde A hasta B.
3. Trabajo para desplazar una carga $q_2 = -4$ μC desde A hasta B.
4. Intensidad de campo eléctrico en el punto A.
5. Módulo, dirección y sentido de la fuerza sobre la carga $q_2 = 4$ μC situada en el punto A.

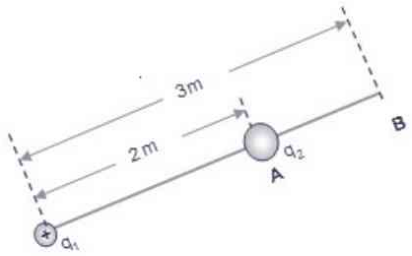


Figura 1.47. Ejercicio 1.30.1

Solución:

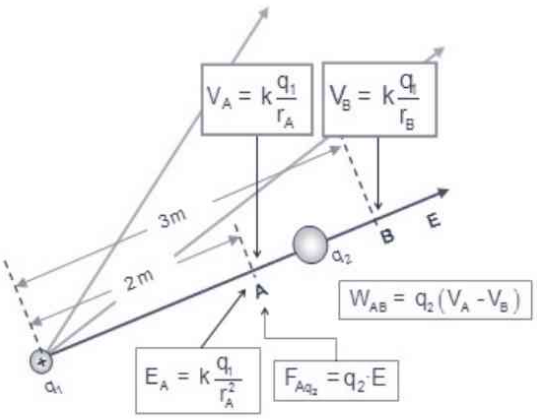


Figura 1.48. Ejercicio 1.30.1. Solución

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

a)

$$V_A = k\frac{q_1}{r_A} = 9\cdot10^9\,\frac{2\cdot10^{-6}}{2} = 9.000\ V$$

$$V_B = k\frac{q_1}{r_B} = 9\cdot10^9\,\frac{2\cdot10^{-6}}{3} = 6.000\ V$$

b)

$$W_{AB} = q_2\cdot(V_A - V_B) = 4\cdot10^{-6}\cdot(9.000 - 6.000) = 12\cdot10^{-3}\ J$$

El trabajo es positivo, luego lo realiza la fuerza del campo (fuerzas de igual signo se repelen).

c)

$$W_{AB} = q_2\cdot(V_A - V_B) = -4\cdot10^{-6}\cdot(9.000 - 6.000) = -12\cdot10^{-3}\ J$$

El trabajo es negativo. Se realiza en contra de la fuerza del campo, es necesaria una fuerza exterior si se quiere trasladar la carga de A a B (fuerzas de distinto signo se atraen).

d)

$$E_A = k\frac{q_1}{r_A^2} = 9\cdot10^9\cdot\frac{2\cdot10^{-6}}{2^2} = 4.500\ N/C$$

e) La fuerza tiene la dirección de la recta que une los centros de las dos cargas, sentido de repulsión (cargas del mismo signo) y el módulo es $18\cdot10^{-3}$ N, *figura 1.48*.

$$F_{Aq_2} = q_1\cdot E = q_2\cdot E = 4\cdot10^{-6}\cdot4.500 = 18\cdot10^{-3}\ N$$

Ejercicio 1.30.2

Se disponen cuatro cargas eléctricas puntuales en los vértices de un cuadrado, *figura 1.49*. Determinar gráficamente el vector intensidad de campo eléctrico ***E*** en el centro del cuadrado para cada uno de los casos representados en la figura.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

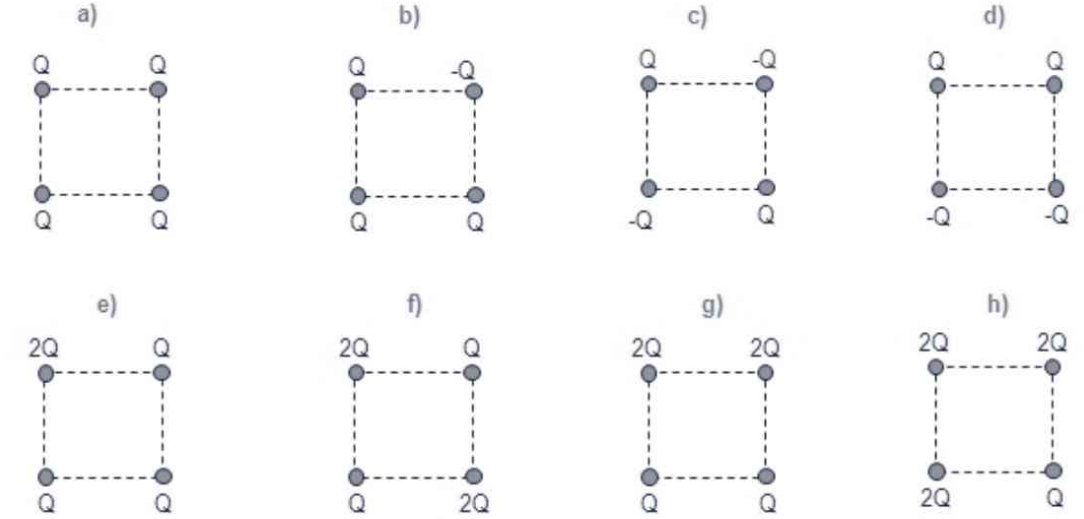


Figura 1.49. Ejercicio 1.30.2

Solución:

Ver la *figura 1.50*.

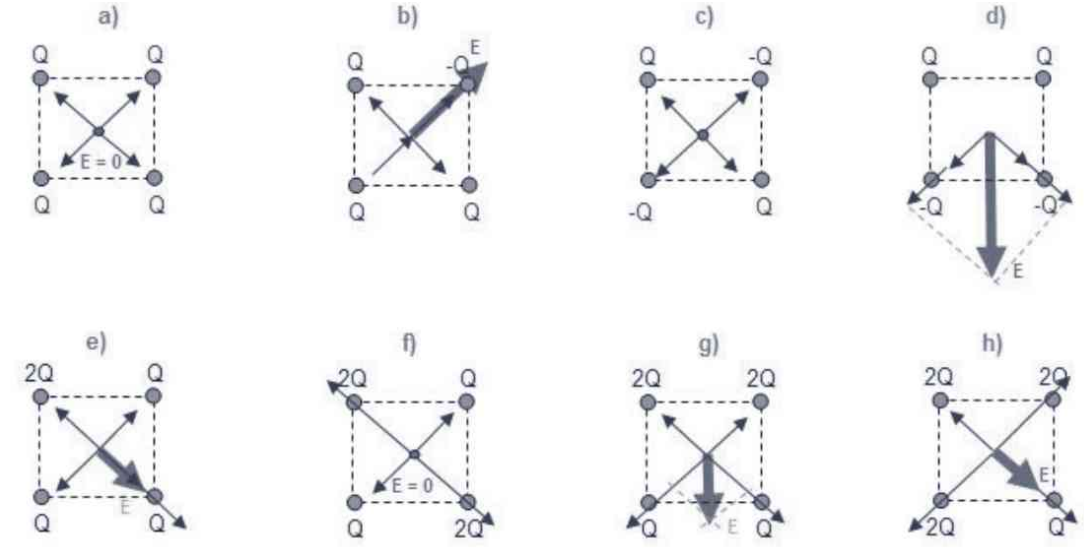


Figura 1.50. Ejercicio 1.30.2. Solución

Ejercicio 1.30.3

Un conductor de forma esférica se coloca próximo a un cuerpo cargado con cargas negativas, *figura 1.51*. Explicar qué ocurre en la esfera con su carga eléctrica Q y su potencial V:

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

a) Si la esfera se encuentra aislada.

b) Si la esfera se encuentra conectada a tierra.

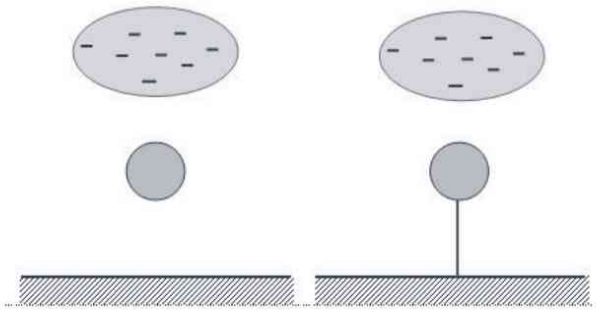


Figura 1.51. Ejercicio 1.30.3. Solución

Solución:

a) El conductor esférico, por influencia, sufre un desplazamiento de cargas, las positivas se aproximan a las cargas inductoras y las negativas se alejan, *figura 1.52*. Su carga neta es nula, $Q = 0$, y su potencial distinto de cero, $V \neq 0$ (menor que el de la carga inductora pero mayor que el de tierra, que es cero).

b) Las cargas negativas del conductor esférico se desplazan hacia tierra a través del conductor, quedando cargado positivamente, $+Q \neq 0$, pero su potencial es cero, $V = 0$ (el de tierra).

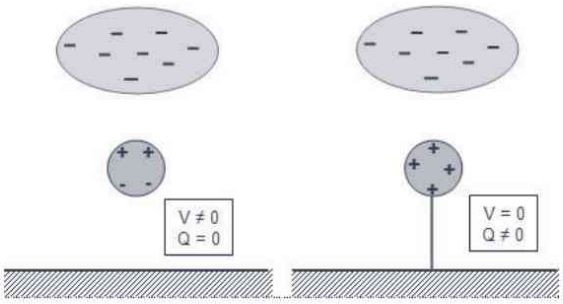


Figura 1.52. Ejercicio 1.30.3. Solución

Ejercicio 1.30.4

En el vacío, en los tres vértices de un cuadrado de 40 cm de lado se han situado cargas eléctricas de +125 μC, *figura 1.53*. Determinar:

a) El campo eléctrico en el vértice *a*.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

b) El trabajo necesario para trasladar una carga de -10 μC desde el vértice *a* al centro del cuadrado (punto *b*).

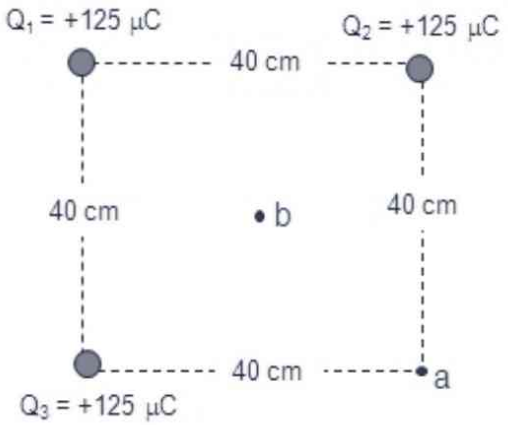


Figura 1.53. Ejercicio 1.30.4

Solución:

Ver la figura 1.54.

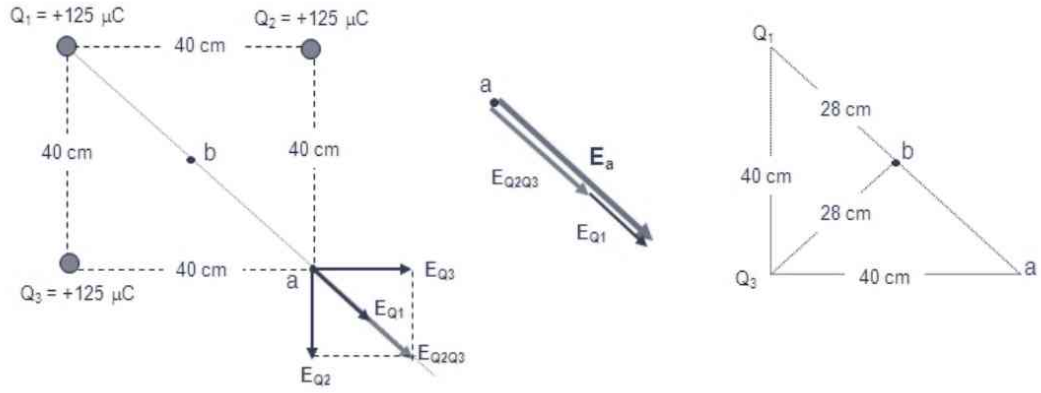


Figura 1.54. Ejercicio 1.30.4. Solución

a) Intensidad de campo eléctrico creado por cada carga en *a*:

$$E_{ai} = 9\cdot10^{9}\,\frac{q_i}{d_{ai}^2}$$

$$\bar{E}_a = \bar{E}_{aQ1} + \bar{E}_{aQ2} + \bar{E}_{aQ3} \quad \textbf{(suma vectorial)}$$

Campo en *a* debido a Q_1:

$$E_{aQ1} = 9\cdot10^9 \frac{125\cdot10^{-6}}{0,56^2} = 3,55\cdot10^6 \text{ N/C}$$

$$d_{Q1a} = \sqrt{0,4^2 + 0,4^2} = 0,56$$

Campo en *a* debido a Q_2:

$$E_{aQ2} = 9\cdot10^9 \frac{125\cdot10^{-6}}{0,4^2} = 7,03\cdot10^6 \text{ N/C}$$

Campo den *a* debido a Q_3:

$$E_{aQ3} = 9\cdot10^9 \frac{125\cdot10^{-6}}{0,4^2} = 7,03\cdot10^6 \text{ N/C}$$

Resultante en *a* de Q_2 y Q_3:

$$E_{aQ2Q3} = \sqrt{E_{aQ2}^{\ 2} + E_{aQ3}^{\ 2}}$$

$$E_{aQ2Q3} = \sqrt{(7,03\cdot10^6)^2 + (7,03\cdot10^6)^2} = 9,94\cdot10^6 \text{ N/C}$$

Intensidad del campo eléctrico en *a* E_a (resultante en *a* de Q_1, Q_2 y Q_3):

$E_a = E_{aQ1} + E_{aQ2Q3}$ (suma vectorial = suma aritmética, pues tienen la misma dirección)

$$E_a = 3,55\cdot10^6 + 9,94\cdot10^6 = 13,49\cdot10^6 \text{ N/C}$$

b) Es necesario conocer el potencial del punto *a* y el potencial del punto *b*, pues:

$$W_{ab} = q\cdot(V_a - V_b)$$

El potencial en cada punto está dado por:

$$V_{pqi} = 9\cdot10^9 \frac{q_i}{d_{pqi}}$$

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

El potencial en el punto *a* es:

$$V_a = V_{aQ1} + V_{aQ2} + V_{aQ3} \quad \text{(suma aritmética)}$$

$$V_a = 9\cdot10^9\left(\frac{125\cdot10^{-6}}{0,56}+\frac{125\cdot10^{-6}}{0,4}+\frac{125\cdot10^{-6}}{0,4}\right)=7,63\cdot10^6\ \text{V}$$

El potencial en el punto *b* es:

$$V_b = V_{bQ1} + V_{bQ2} + V_{bQ3} \quad \text{(suma aritmética)}$$

$$V_b = 9\cdot10^9\left(\frac{125\cdot10^{-6}}{0,28}+\frac{125\cdot10^{-6}}{0,28}+\frac{125\cdot10^{-6}}{0,28}\right)=12,05\cdot10^6\ \text{V}$$

$$d_{Q2b} = d_{Q3b} = \sqrt{0,4^2 - 0,28^2} = 0,28\ \text{cm}$$

El trabajo necesario para trasladar la carga de -10 μC desde *a* hasta *b*.

$$W_{ab} = q\cdot(V_a - V_b) = -10\cdot10^{-6}\cdot(7,63 - 12,05)\cdot10^6 = 44,2\ \text{julios}$$

El trabajo tiene signo positivo, significa que es realizado por las fuerzas eléctricas debidas al campo eléctrico.

Si la carga a trasladar entre *a* y *b* tuviese signo negativo, significa que el trabajo lo ha de realizar una fuerza externa al campo. Así, para trasladar una carga de +10 μC del punto *a* al punto *b*, se necesitaría una fuerza externa que ha de realizar un trabajo de 44,2 julios.

Ejercicio 1.30.5

Elegir la respuesta correcta respecto al flujo que pasa por cada una de las superficies indicadas en la *figura 1.55.*

1. $\Phi_a = \Phi_b < \Phi_c < \Phi_d = \Phi_e$
2. $\Phi_b = \Phi_e > \Phi_a = \Phi_c = \Phi_d$
3. $\Phi_a = \Phi_b = \Phi_c < \Phi_d = \Phi_e$
4. $\Phi_a = \Phi_b = \Phi_c = \Phi_d < \Phi_e$
5. $\Phi_b = \Phi_e > \Phi_a = \Phi_d > \Phi_c$

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

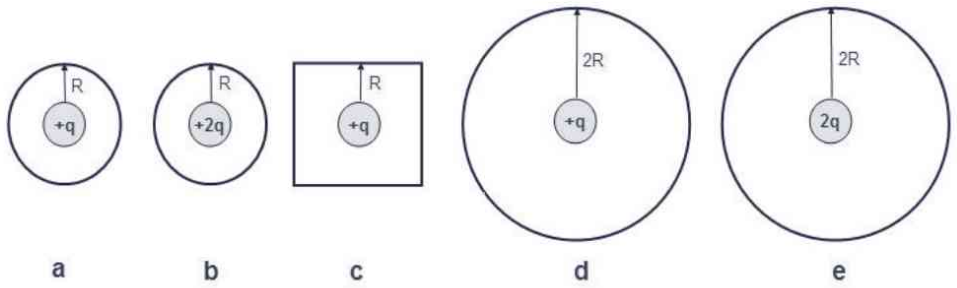


Figura 1.55. Ejercicio 1.30.5

Solución:

Respuesta correcta la *2* (ley de Gauss, $\Phi = q_{int}/\varepsilon_0$).

Ejercicio 1.30.6

Una superficie esférica rodea una carga eléctrica de -2 culombios. Explicar qué ocurre con el flujo a través de la superficie esférica en cada uno de los siguientes casos:

a) La carga se hace el doble.

b) El radio de la esfera se duplica.

c) La superficie se sustituye por un cubo.

d) La carga se coloca a la mitad del radio.

e) Se coloca en el interior de la esfera, junto a la carga existente, una carga de +2 culombios.

Solución:

a) El flujo a través de la esfera se obtiene a través del Ley de Gauss ($\Phi = Q_{int}/\varepsilon_0$). Dado que la carga se hace el doble el flujo también se duplica.

b) El flujo no se modifica, todo el que pasa por la esfera inicial pasa también por la esfera de doble radio (Φ sólo depende de la carga interior).

c) El flujo no depende de la forma de la superficie exterior, sólo depende de la carga interior (ley de Gauss).

d) El flujo no se modifica, sólo depende de la carga interior (ley de Gauss).

e) El flujo se hace cero, la carga neta interior es (-2 + 2 = 0 C).

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Ejercicio 1.30.7

Se encierra una carga de +8 culombios en el interior de una esfera conductora que no posee carga eléctrica, tal como indica la *figura 1.56*. Debido a esta carga, ¿existe en el exterior de la esfera campo eléctrico?

a) ¿Si la esfera está aislada?

b) ¿Si la superficie de la esfera está conectada a tierra?

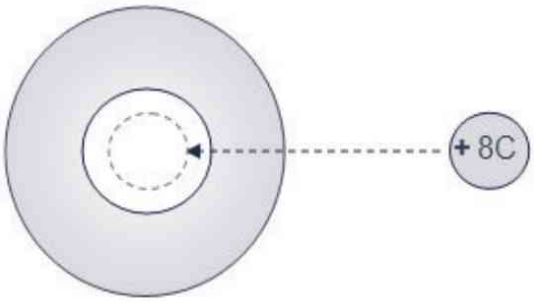


Figura 1.56. Ejercicio 1.30.7

Solución:

a) En el exterior de la esfera se distribuye una carga eléctrica de +8 C, debido a la inducción en la cara interna de la esfera de una carga de -8 C. Existe un flujo hacia el exterior y por tanto campo eléctrico, *figura 1.57 izquierda*.

b) Al estar la esfera conectada a tierra, las cargas eléctricas positivas de la superficie se dirigen a tierra (circulan electrones de la tierra a la superficie de la esfera hasta neutralizar las cargas positivas) quedando descargada la superficie y por tanto no existe campo eléctrico exterior a la esfera, *figura 1.57 derecha.*

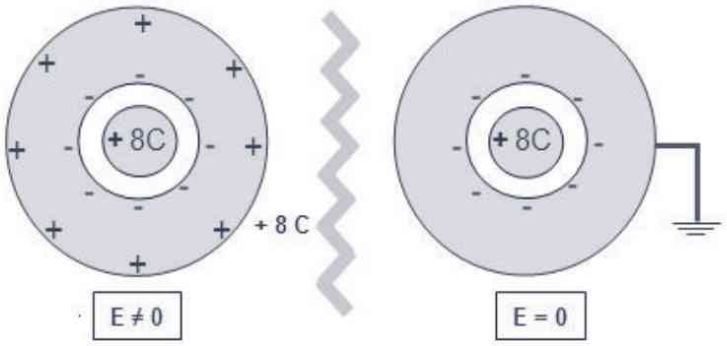


Figura 1.57. Ejercicio 1.30.7. Solución

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Ejercicio 1.30.8

En un conductor cargado en equilibrio electrostático, contestar verdadero o falso a los siguientes apartados:

a) El campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ es constante en el interior y tiene su valor máximo.

b) El campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ es constante en el interior y tiene valor cero.

c) El módulo del campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ es constante en la superficie.

d) En la superficie, el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ es perpendicular a la superficie.

e) El potencial V en la superficie es mayor que en el interior.

f) El potencial V en la superficie es mayor en las zonas que terminan en punta.

g) El campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ en la superficie es mayor en la zona que termina en punta.

h) La densidad de carga σ es constante en la superficie.

Solución:

a) Falso ($\boldsymbol{E} = 0$).

b) Verdadero.

c) Falso [depende de la densidad de carga ($\boldsymbol{E} = \sigma/2 \cdot \varepsilon_0$)]

d) Verdadero.

e) Falso (V = cte).

f) Falso (el potencial es constante en todo el conductor).

g) Verdadero. Existe más densidad de carga σ y por tanto mayor campo $\boldsymbol{E}$ ($\boldsymbol{E} = \sigma/2 \cdot \varepsilon_0$).

h) Falso (es mayor en las zonas de menos radio de curvatura, $\sigma_R/\sigma_r = r/R$).

Ejercicio 1.30.9

En un conductor cargado conectado a tierra, contestar verdadero o falso a los siguientes apartados:

a) La carga total es nula.

b) La densidad de carga σ superficial es uniforme en todos los puntos.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

c) La densidad de carga σ superficial tiene el mismo signo en todos los puntos.

d) El potencial es nulo.

e) El campo eléctrico es nulo en todos los puntos de la superficie.

Solución:

a) Falso (como ejemplo, ver *figura 1.58*).

b) Falso (figura 1.58).

c) Falso (figura 1.58).

d) Verdadero (conectado a tierra potencial $V = 0$).

e) Falso ($\boldsymbol{E} = \sigma/2 \cdot \varepsilon_0$).

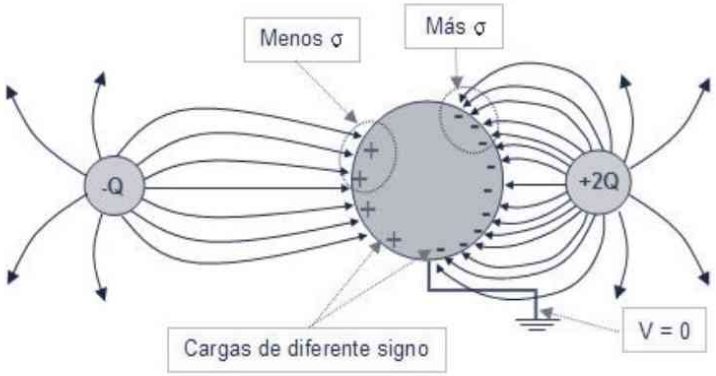


Figura 1.58. Ejercicio 1.30.9

Ejercicio 1.30.10

En el cuerpo conductor cargado de la *figura 1.59*, compárense los valores en los puntos indicados, *A* y *B* en la superficie y *C* en el interior, de las siguientes magnitudes:

a) Módulo de la intensidad de campo eléctrico $\boldsymbol{E}$.

b) Potencial eléctrico V.

c) Densidad de carga σ.

d) Diferencia de potencial V_{AB}.

e) Diferencia de potencial V_{AC}.

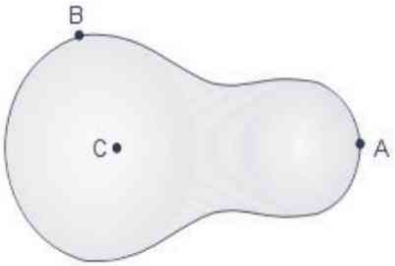


Figura 1.59. Ejercicio 1.30.10

Solución:

a) E_A (menor radio de curvatura) > E_B > E_C ($E_C = 0$).

b) $V_A = V_B = V_C$.

c) σ_A (menor radio de curvatura) > σ_B > σ_C ($\sigma_C = 0$).

d) $V_{AB} = V_A - V_B = 0$.

e) $V_{AC} = V_A - V_C = 0$.

Capítulo 2

CONDENSADOR

Objetivos:

- Exponer los principios teóricos del condensador como dispositivo para almacenar cargas eléctricas.
- Describir el comportamiento del condensador en la carga y descarga.
- Exponer el concepto de polarización eléctrica.
- Clasificar los dieléctricos según sus propiedades eléctricas.
- Conocer la importancia del dieléctrico en la capacidad de un condensador.
- Conocer los tipos de condensadores de uso más frecuente.
- Explicar la generalización de la Ley de Gauss.
- Conocer las diferentes maneras de asociar condensadores.
- Exponer situaciones observables que ayuden a entender los contenidos de esta unidad didáctica.
- Resolver ejercicios y problemas con contenidos propios de esta unidad didáctica.

2.1 CAPACIDAD DE UN CONDUCTOR

En el *apartado 1.16*, se ha visto que la carga neta Q de un conductor cargado en equilibrio electrostático se distribuye en la superficie del mismo y que todo el conductor se encuentra al mismo potencial V (referido a potencial nulo en el infinito). Experimentalmente se comprueba que la carga Q y el potencial V del conductor en equilibrio electrostático es una constante para dicho conductor, llamada capacidad C del conductor, que depende únicamente de la geometría (tamaño, forma, etc.) del conductor y del medio en el que está inmerso.

$$C = \frac{Q}{V} \qquad [2.1]$$

En el sistema internacional de medidas SI, la unidad de capacidad es el culombio/voltio que se le llama **faradio** (F). Como el faradio es una unidad de medida enormemente grande, se utilizan más los submúltiplos, el microfaradio (1 μF = 10^{-6} F), el nanofaradio (1 nF = 10^{-9} F), y el picofaradio (1 pF = 10^{-12} F).

Si un conductor esférico A cargado que se pone en contacto con otros dos conductores, sin carga, B y C como se explicó en el *apartado 1.27*, los tres conductores quedan al mismo potencial V, si embargo las cargas de ellos (Q_A, Q_B, Q_C) son distintas, indicando que tienen distinta capacidad. Se tiene un símil hidráulico cuando se unen tres depósitos de distinta capacidad, *figura 2.1*. Los tres depósitos quedan con la misma altura (potencial) pero con diferente cantidad de líquido (carga), dependiendo de su volumen (capacidad).

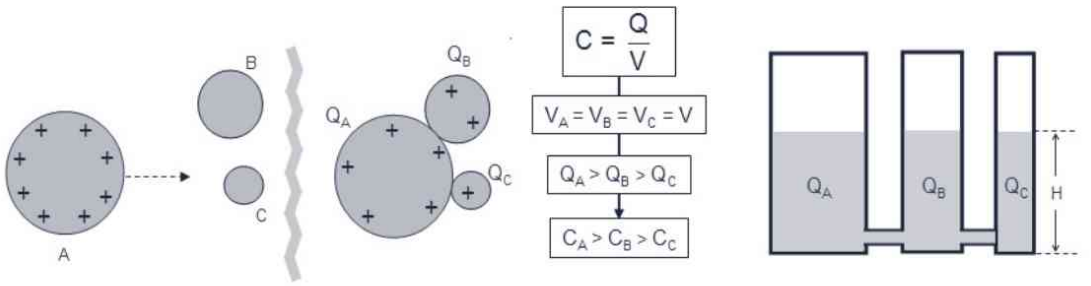


Figura 2.1. Capacidad de un conductor

Así, si un conductor en equilibrio electrostático tiene una carga Q_1 con un potencial V_1, si la carga fuera Q_2 su potencial sería V_2, si la carga fuera Q_3 su potencial sería V_3, etc., tal que, su capacidad C, se mantiene constante, *figura 2.1*:

$$C = \frac{Q_1}{V_1} = \frac{Q_2}{V_2} = \frac{Q_3}{V_3} \qquad [2.2]$$

En el símil hidráulico de la *figura 2.2,* en un depósito, al aumentar la cantidad de líquido que contiene Q_i (carga) aumenta la altura H_i (potencial), cumpliéndose que Q_i/H_i = cte. (litros/m^2).

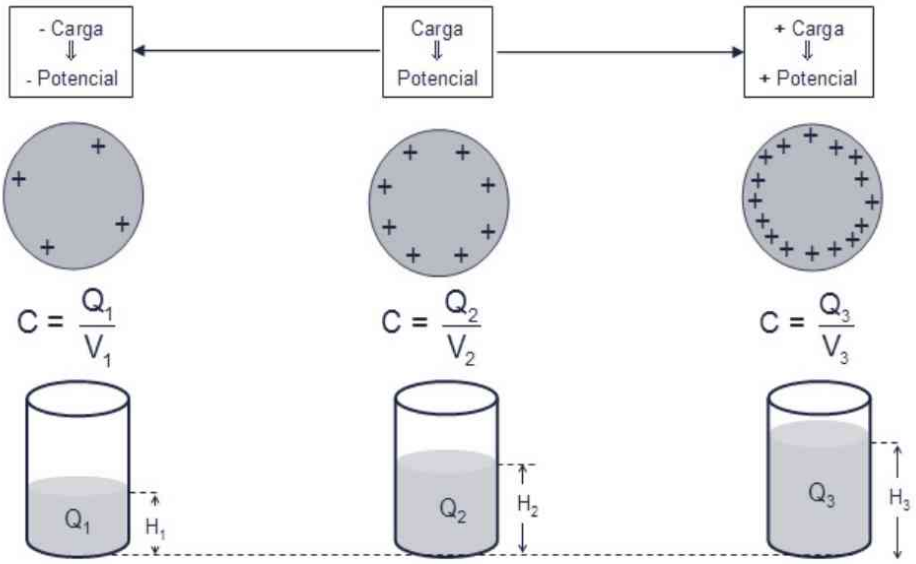


Figura 2.2. Constancia en la relación Q_i/V_i

Nótese que no se puede hablar de la capacidad de un dieléctrico, porque en su interior puede haber campo eléctrico (lo que no ocurre en los conductores) y como consecuencia, su potencial es distinto en sus diversos puntos (en los conductores el potencial es el mismo en todo su volumen). Por tanto, no tiene sentido hablar de capacidad eléctrica como constante de proporcionalidad entre su carga y su potencial.

2.2 CAPACIDAD DE UNA ESFERA

Sea una esfera conductora de radio *r* conteniendo una carga *Q,* aislada en el vacío. El potencial en el centro de la esfera (igual que en todos sus puntos, dado que la esfera es conductora y, por tanto, con todas las cargas uniformemente distribuidas en la superficie a la misma distancia *r* del centro) se obtiene por la *fórmula [1.26]*:

$$V_r = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

Para la capacidad *C* de la esfera, se tiene:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{Q}{r}} = 4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r \qquad [2.3]$$

Observa:

El faradio es una unidad de capacidad enormemente grande. Para comprobarlo, considérese una esfera conductora cuyo radio sea igual al de la Tierra (6.500 km). Su capacidad sería, *fórmula [2.3]:*

$$C = 4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r = 4\cdot\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 6.500\cdot 10^{3} = 722\cdot 10^{-6}\ F = 722\ \mu F$$

Es decir, su capacidad 0,722 mF, es del orden de una milésima de faradio.

2.3 CONDENSADOR. CONDENSADOR PLANO

Aunque el concepto de capacidad de un conductor aislado es importante, no es útil para el almacenamiento de cargas eléctricas, para lo cual se utiliza el condensador.

El **condensador** es un dispositivo que consta de dos superficies conductoras separadas por un aislante (el dieléctrico) y que permite almacenar cargas eléctricas. Existen diferentes tipos, siendo muy frecuentes los planos.

Un **condensador plano** está formado por dos láminas (armaduras o placas) metálicas planas y paralelas de superficie *S*, separadas una distancia *d* (muy pequeña comparada con las dimensiones de las láminas). Entre las láminas hay un dieléctrico (material no conductor: aire, mica, papel, etc.) que, entre otras cosas, impide el contacto eléctrico entre ellas, *figura 2.3*.

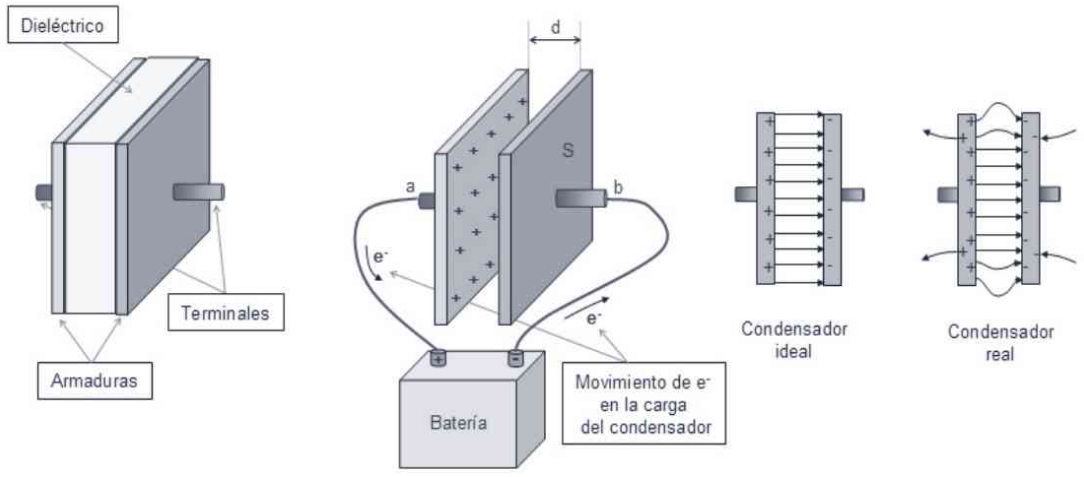


Figura 2.3. Condensador plano

El condensador, inicialmente sin carga, se **carga** uniendo los terminales de sus armaduras, por ejemplo, a una batería de corriente continua, *figura 2.3,* la cual retira electrones de la armadura que está conectada a su terminal positivo y los lleva a la

armadura conectada a su terminal negativo. La batería realiza un trabajo eléctrico de separación de cargas ($W = q \cdot V_{ab}$, *fórmula [1.11]*), lo que implica un gasto de energía. Este trabajo de trasvase de cargas, más rápido al principio y más lento al final (mayor atracción/repulsión de las cargas eléctricas), que se estudiará en el próximo capítulo, termina cuando la diferencia de potencial en los terminales de la batería se iguale con la diferencia de potencial en los terminales del condensador V_{ab}.

Aunque la carga neta se distribuye uniformemente en la superficie de un conductor cargado (*apartado 1.16*), sin embargo, en el condensador, al existir dos conductores con cargas opuestas, éstas se atraen y se distribuirán mayoritariamente en las superficies internas de cada armadura. En realidad, quedan algunas cargas en las superficies exteriores de las armaduras, produciendo líneas de campo eléctrico en el exterior del condensador, existiendo, además, distorsión del campo eléctrico en los bordes de dichas armaduras, *figura 2.3*. Estos efectos se pueden reducir cuando las armaduras son muy grandes en comparación de la distancia entre ellas. Si las armaduras se suponen infinitas se obtiene el **condensador ideal**, *apartado 1.22.*

En la *figura 2.4* están representados algunos tipos de condensadores y su simbología. El **condensador electrolítico** tiene este nombre porque un electrolito forma parte del dieléctrico, lo que permite obtener elevadas capacidades, con una buena relación capacidad/tamaño. Se caracterizan, además, por tener polaridad, lo que no hay que tener en cuenta en otros condensadores, por lo que cada terminal se debe conectar a su correspondiente polaridad.

En un condensador de **capacidad variable**, unas láminas metálicas que forman una armadura, respecto a otras fijas que forman la otra armadura, puede variar su posición al girar solidarias a un eje variando así su capacidad. Estos condensadores se encuentran frecuentemente en los aparatos de radio en los circuitos sintonizadores de emisoras.

Los condensadores reales tienen asociadas a su capacidad, una resistencia y una inductancia. Estas magnitudes, y sus efectos, se estudiarán en capítulos posteriores.

Figura 2.4. Diferentes tipos de condensadores

Capacidad de un condensador plano

Para el estudio se considerará el condensador plano ideal, *figura 2.5*, aunque el resultado que se obtenga es aplicable, con bastante aproximación, a los condensadores planos reales.

Sea, pues, un condensador plano ideal cargado, formado por dos láminas conductoras planas infinitas, una con carga $+q$ y la otra con carga $-q$, distribuidas uniformemente por su superficie con una densidad superficial de carga constante σ, ($\sigma = q/S$), con una separación entre láminas d y el vacío entre ellas. La capacidad del condensador se obtiene por la relación:

$$C = \frac{q}{V_{ab}} \qquad [2.4]$$

Donde q es la carga de una de las armaduras y V_{ab} la diferencia de potencial entre las dos armaduras.

La capacidad C es una medida de la propiedad que tiene el condensador para almacenar cargas eléctricas. A mayor valor de C, más cantidad de carga q puede almacenar en sus armaduras para una diferencia de potencial dada V_{ab} entre las mismas. Aunque la carga neta almacenada en un condensador es nula, por convención, se llama carga del condensador al valor absoluto de la carga sobre una de las armaduras.

A continuación se obtiene la expresión de la capacidad del condensador, que es función, únicamente, de su geometría y del dieléctrico (en este caso el vacío).

En el *apartado 1.22* se ha visto que el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ en el interior de dos planos conductores paralelos infinitos, cargados con cargas opuestas y con una densidad de carga por placa σ es, *fórmula [1.31]*:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Todas las líneas del campo electrostático que salen de la armadura con carga $+q$ terminan en la otra armadura con carga $-q$. Se dice que los conductores (armaduras) que forman el condensador experimentan una influencia electrostática total.

A continuación se determina la diferencia de potencial entre las armaduras. Como el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ es uniforme, teniendo en cuenta que $V_{ab} = E \cdot d$, *fórmula [1.11]*, se obtiene para la capacidad del condensador, *figura 2.5*:

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \qquad [2.5]$$

Expresándose S en m^2, d en m, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m y C en faradios (F).

Se puede poner también: $\varepsilon_0 = 1/(4\pi \cdot 9 \cdot 10^9)$ F/m

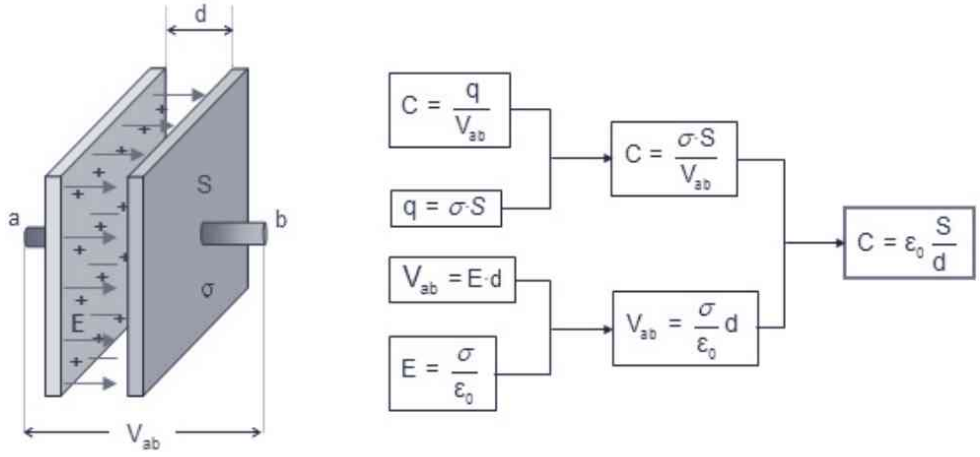


Figura 2.5. Capacidad de un condensador plano ideal

El uso de condensadores es muy variado, por ejemplo: eliminar la chispa que se produce en la apertura de un circuito inductivo, sintonizar emisoras en un receptor de radio, mejorar la señal rectificada de corriente alterna para utilizarla en aparatos que funcionan con corriente continua, aumentar el rendimiento en la transmisión de energía en corriente alterna, mejorar el factor de potencia de las instalaciones eléctricas, almacenar energía para utilizar en los flashes de las cámaras fotográficas, dispositivos de filtrado de señales, etc.

Fuerza de atracción entre las armaduras de un condensador plano

Cada armadura origina un campo eléctrico $E_0/2 = \sigma/(2 \cdot \varepsilon_0)$, *apartado 1.22,* ejerciendo una fuerza atractiva $F = E \cdot q$, *fórmula [1.9],* sobre la otra armadura (de distinto signo y con una carga $q = \sigma \cdot S$), es decir:

$$F = q \cdot \frac{E_0}{2} = \sigma \cdot S \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0} = \frac{S \cdot \sigma^2}{2 \cdot \varepsilon_0} \qquad [2.6]$$

Observa:

En una línea eléctrica los conductores se comportan como las armaduras de un condensador. Si la línea es corta su efecto es despreciable, pero si la línea es muy larga, como por ejemplo las líneas de AT, o, subterránea de distribución (conductores muy próximos y longitud apreciable), entonces no se pueden despreciar sus efectos capacitivos.

2.4 CONDENSADOR PLANO: EFECTO DE UN DIELÉCTRICO

Al introducir un material dieléctrico entre las armaduras de un condensador, su capacidad aumenta en un factor ε_r mayor que uno, que depende solamente de la naturaleza del material aislante. A este valor se le llama **permitividad relativa (constante dieléctrica)** ε_r del medio.

La *figura 2.6* muestra un voltímetro conectado entre los bornes de un condensador cargado con una carga q en cada armadura y una diferencia de potencial V_0. Cuando se inserta entre las placas un dieléctrico sin carga (mica, vidrio, parafina, etc.) se comprueba que la diferencia de potencial *disminuye* a un valor más pequeño V. Cuando se retira el dieléctrico, la diferencia de potencial recupera su valor anterior V_0, lo que demuestra que las cargas originales de las armaduras no han cambiado, pues la capacidad del condensador tiene la configuración inicial C_0 ($q = C_0 \cdot V_0$).

La capacidad original C_0 es $C_0 = qIV_0$ y la capacidad C con el dieléctrico entre las armaduras es $C = q/V$. La carga q es la misma en ambos casos, y $V < V_0$, por tanto, se concluye que la capacidad C con el dieléctrico presente es *mayor* que C_0. Como la superficie de las placas y la distancia entre ellas no han cambiado, el aumento de C, necesariamente, ha de ser debido al aumento de la permitividad ε debida al dieléctrico, tal que $\varepsilon > \varepsilon_0$, pudiéndose poner que:

$$C = \varepsilon \frac{S}{d} \qquad [2.7]$$

siendo:

$$\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \qquad [2.8]$$

En la fórmula son ε y ε_r la permitividad absoluta y la permitividad relativa, respectivamente, del dieléctrico; ε_0 la permitividad del vacío ($8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m). En la *tabla 1.2*, se dan los valores de ε_r para algunos materiales.

Nótese que el razonamiento anterior es válido siempre que el dieléctrico ocupe *la **totalidad** del espacio* entre las armaduras, en caso contrario, no sería válido, pues habría que tener en cuenta la permitividad del dieléctrico y la del aire (en el espacio no ocupado por el dieléctrico).

Permitividad relativa ε_r (20 ºC)	
Material	ε_r
Vacío	1
Aire	1,0006
Ebonita	3
PVC	3,2
Mica	4,5 - 8
Vidrio	7
Glicerina	42
Agua	82

Tabla 2.1

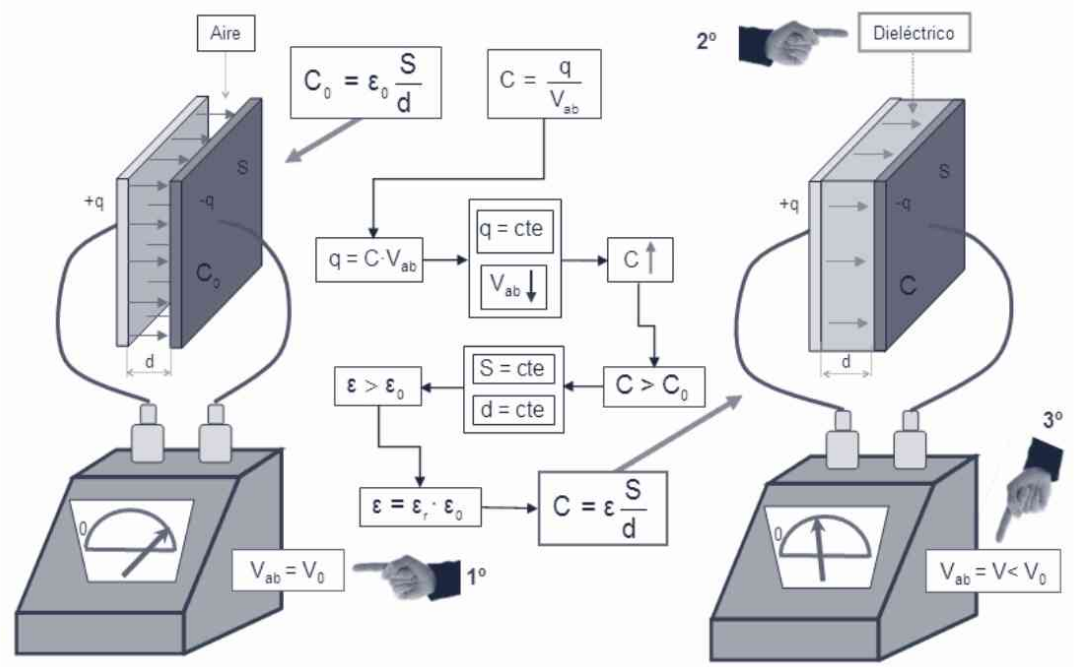


Figura 2.6. Efecto de un dieléctrico en la capacidad de un condensador con carga constante

Por otra parte, puesto que $V_{ab} = q/C$, si la capacidad queda multiplicada por el factor ε_r significa, puesto que q = cte, que la diferencia de potencia V_{ab} queda divida, también, por el factor ε_r y por tanto como $E = V_{ab}/d$, el campo eléctrico queda dividido por el mismo factor ε_r, es decir:

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} \qquad [2.9]$$

Esta disminución del campo eléctrico es debida a la densidad de carga inducida σ_i en el dieléctrico, que crea un campo despolarizante $\boldsymbol{E_i}$ de signo opuesto al campo exterior $\boldsymbol{E_0}$, como resultado de la redistribución de las cargas positivas y negativas en el interior del dieléctrico, lo que se denomina **polarización**, *figura 2.7.*

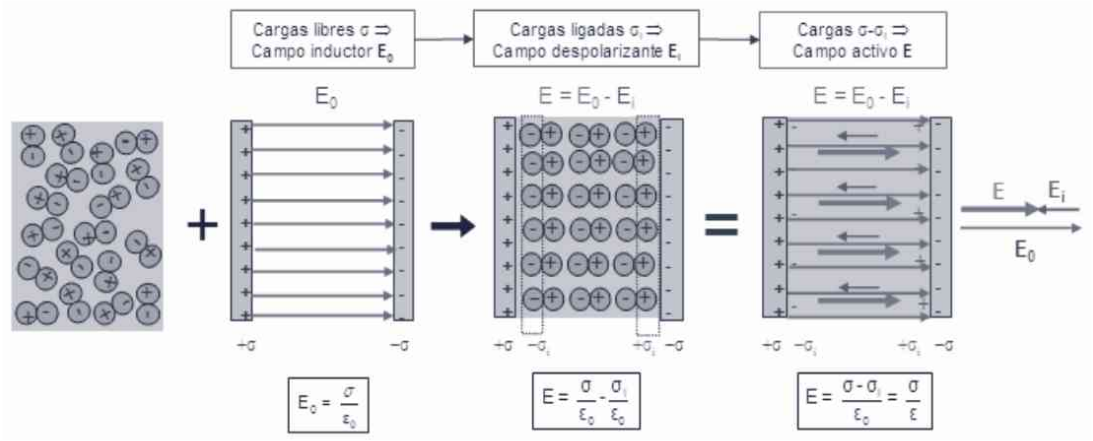


Figura 2.7. Efecto de un dieléctrico en la capacidad del condensador: polarización

Las cargas eléctricas de **polarización** sobre el dieléctrico, a las que les corresponden las densidades σ_i, también se les llama **cargas ligadas**, debido a que no pueden dejar de formar parte del aislante, en contraposición a las cargas de las armaduras (conductores), correspondientes a la densidad de carga σ, que son **cargas libres**.

De acuerdo con lo anterior, en el condensador, se tienen en los siguientes campos eléctricos:

a) El campo **inductor** $\boldsymbol{E_0}$, debido a las cargas libres del conductor: $E_0 = \sigma/€_0$.

b) El campo **despolarizante** $\boldsymbol{E_i}$, debido a las cargas de polarización: $E_i = \sigma_i/€_0$

c) El campo **activo** $\boldsymbol{E}$, resultante de los dos anteriores: $E = (\sigma - \sigma_i)/ €_0 = \sigma/€$.

Si la prueba de introducción del dieléctrico entre las armaduras del condensador se hace **manteniendo constante la diferencia de potencial** $\boldsymbol{V_{ab}}$ entre sus placas, por ejemplo mediante una batería, el aumento en la capacidad del condensador se debe al aumento de la carga q en las placas del mismo ($q = q_0 \cdot \varepsilon_r > q_0$).

Considerando, como suele ser en los dieléctricos más comunes, que la carga inducida en el dieléctrico es directamente proporcional al campo inductor, se tiene, *figura 2.7.*

Campo entre armaduras sin dieléctrico, *fórmula [1.31]*:

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad [2.10]$$

Campo entre armaduras con dieléctrico:

$$E = E_0 - E_i = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma - \sigma_i}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad [2.11]$$

Teniendo en cuenta la *fórmula [2.9]* ($E = E_0/\varepsilon_r$):

$$\sigma_i = \sigma\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \qquad [2.12]$$

Que demuestra que a medida que aumenta ε_r, aumenta la carga inducida. A partir de esta ecuación, se puede poner:

$$E_i = E_0\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \qquad [2.13]$$

La fórmula anterior, a diferencia de la *fórmula [2.7]* de la capacidad de un condensador ($C = \varepsilon \cdot C/d$), es válida aunque el dieléctrico no ocupe totalmente el espacio entre las armaduras.

2.5 RUPTURA DEL DIELÉCTRICO. RIGIDEZ DIELÉCTRICA DE LOS MATERIALES

Como se ha dicho, un campo eléctrico da lugar a pequeños desplazamientos de las cargas ligadas en las moléculas del dieléctrico. Si el campo eléctrico es muy fuerte, puede sacar a los electrones de las moléculas, que se acelerarán bajo la acción de dicho campo. De este modo, el dieléctrico se puede volver conductor, dando lugar a corrientes muy grandes. Este fenómeno se conoce como **ruptura dieléctrica** (también se dice que se ha producido la descarga disruptiva). El campo eléctrico máximo $\boldsymbol{E_c}$ que puede resistir un material dieléctrico sin que se produzca ruptura recibe el nombre de **rigidez dieléctrica**, no es un parámetro intrínseco del material sino que depende, además, de otros factores extrínsecos, tales como geometría de muestra y proceso de fabricación o entorno del material. Algunos valores medios para diferentes materiales se presentan en la *tabla 2.2.*

Dieléctrico	E_c (x10^6 kV/m)
Aire seco (1 atmosfera)	3
Oxígeno	0,55
Hidrógeno	1,55
Porcelana	4
Mica	12
Papel	12
Madera	14
Polietileno	18
Agua destilada	65-70
Aceite transformador	110

Tabla 2.2

En un condensador, se define el potencial de ruptura como la máxima diferencia de potencial que se puede establecer entre sus placas antes de que se produzca la ruptura del dieléctrico situado entre las mismas. El potencial de ruptura determina la máxima carga Q_{max} que se puede almacenar en las placas del condensador.

2.6 CONDENSADOR CILÍNDRICO. GENERALIZACIÓN DE LA FÓRMULA DE LA CAPACIDAD DEL GENERADOR PLANO

Un condensador cilíndrico está formado por una superficie conductora cilíndrica de radio r_1 densidad de carga uniforme λ y carga $+Q$, que es concéntrica con otra superficie de radio r_2 mayor y carga $-Q$ también uniformemente cargada, *figura 2.8*.

Considerando que la longitud L es grande comparada con r_1 y r_2, puede despreciarse la dispersión del campo eléctrico en los extremos del condensador. Para hallar la capacidad C, de forma análoga a como se hizo en el *apartado 1.20* para la obtención del campo eléctrico y diferencia de potencial en una distribución de carga lineal, se obtiene, al estar cargado el condensador con una carga Q, *figura 2.8*, el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ y la diferencia de potencial V_{ab} entre sus placas, a partir de la cual se obtiene para la capacidad:

$$C = \frac{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot L}{\mathrm{Ln}\frac{r_2}{r_1}} \qquad [2.14]$$

Los condensadores planos pueden tener una estructura cilíndrica, tal como se aprecia en *la figura 2.8 derecha.* En efecto, lo que se ha hecho con las tres superficies (armadura-dieléctrico-armadura) es enrollarlas para que ocupen menos espacio.

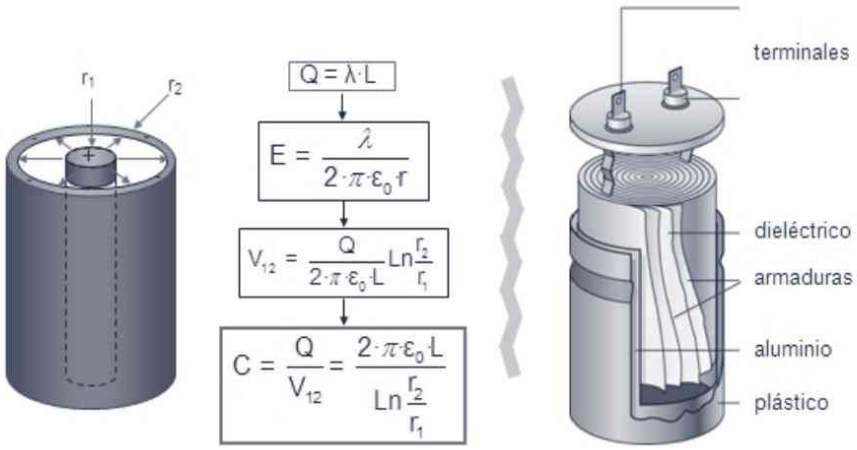


Figura 2.8. Condensador cilíndrico (izquierda). Condensador plano (derecha)

Cuando un condensador concéntrico de forma cualquiera, cumple con la condición de tener armaduras de gran superficie S ($L > r$), con una distancia d entre las armaduras, pequeña y constante, su capacidad se puede obtener con bastante aproximación por la fórmula del condensador plano ($C = \varepsilon \cdot S/d$).

En efecto, en la *fórmula [2.14]* del condensador cilíndrico, se puede poner, haciendo $r_1 = r$ y $r_2 = r + d$, en la forma:

$$C = \frac{2\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot L}{\mathrm{Ln}\left(r + \frac{d}{r}\right)}$$

Si se cumple que:

$$\frac{d}{r} << 1 \Rightarrow \mathrm{Ln}\left(r + \frac{d}{r}\right) = \frac{d}{r}$$

Queda demostrado:

$$C = \frac{2\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot L}{\frac{d}{r}} = \frac{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot L\cdot r}{d} = \frac{2\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot S}{d}$$

2.7 DIELÉCTRICOS. POLARIZACIÓN

En los materiales dieléctricos o aislantes no existen electrones libres que se puedan desplazar por ellos, todos se encuentran ligados a sus átomos y moléculas. Por eso, cuando se aplica un campo externo a un dieléctrico su comportamiento es muy distinto al de los conductores. Sus moléculas, sometidas a un campo eléctrico $\boldsymbol{E_0}$, experimentan modificaciones que explican sus propiedades, es el fenómeno de **polarización**.

Las moléculas de los dieléctricos pueden ser de dos tipos: *polares* o *no polares.*

Dieléctricos polares: polarización por orientación

En estas moléculas (H_2O, NH_3, etc.) las cargas eléctricas positivas y negativas no tienen la misma distribución espacial y sus centros geométricos no coinciden, *figura 2.9 izquierda,* incluso en ausencia de campo externo. Las cargas + y - separadas forman lo que se denomina un **dipolo eléctrico** $\boldsymbol{p}$, *figura 2.10*. Su propiedad más interesante consiste en la capacidad de orientarse en la dirección de un campo externo $\boldsymbol{E_0}$.

Dieléctricos no polares: polarización por deformación

En las moléculas no polares (CO_2, O_2, H_2, etc.) y en los átomos, *figura 2.9 derecha*, los centros geométricos de las cargas eléctricas positivas y negativas coinciden debido a su disposición simétrica. En ausencia de campo no existe separación de cargas y las moléculas están orientadas aleatoriamente (el momento dipolar de sus moléculas es $p = 0$). Si un dieléctrico de este tipo se sitúa en un campo $\boldsymbol{E_0}$, produce una deformación de la molécula (atrae a las cargas negativas y empuja a las positivas), separación de cargas, orientándose sus moléculas (momento dipolar $p \neq 0$).

En definitiva, un átomo o una molécula de un aislante se transforman por polarización en un sistema de cargas, positivo y negativo, a pequeña distancia una de otra, formando un **dipolo**.

Nótese que en el proceso de polarización de un dieléctrico su carga no cambia: simplemente tiene lugar una separación entre la carga positiva y negativa del dieléctrico pero su carga neta no cambia.

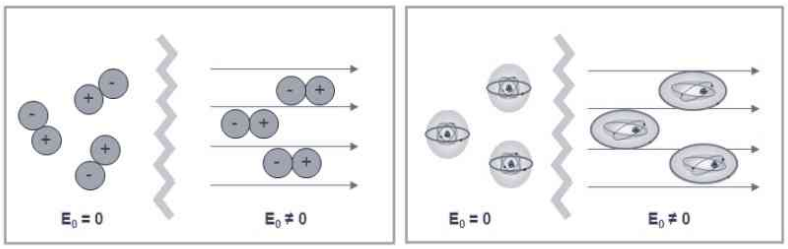


Figura 2.9. Izquierda: polarización por orientación. Derecha: polarización por deformación

Existen pues, dos tipos de dieléctricos, polares y no polares, y dos formas de polarización, orientación de dipolos permanentes (polarización por orientación) y polarización de moléculas no polares (polarización por deformación). En ambos casos la polarización tiene carácter elástico, es decir, cesa más o menos por completo en cuanto deja de actuar el campo eléctrico $\boldsymbol{E_0}$.

En las moléculas ya sean polares o no polares, la redistribución de cargas debido al campo externo $\boldsymbol{E_0}$ da lugar a que aparezcan en la superficie del dieléctrico ciertas cargas ligadas σ_i que no se compensan, lo que sí ocurre en el interior del dieléctrico, *figura 2.11*.

En ausencia de campo, los dipolos moleculares están orientados al azar e interaccionan continuamente unos con otros. El momento dipolar resultante es cero. Al aplicar el campo externo los momentos $\boldsymbol{\tau}$ en cada dipolo, *figura 2.10*, tienden a orientarlos en la dirección del campo, aunque la agitación térmica no cesa y la orientación no es completa, a menos que el campo sea muy intenso y la temperatura muy baja.

$$\tau = F \cdot d \cdot \text{sen}\,\alpha = q \cdot d \cdot E \cdot \text{sen}\,\alpha$$

Se define el **momento dipolar** $\boldsymbol{p}$ de dos cargas opuestas $+q$ y $-q$, separadas una distancia d como el vector, en el eje del dipolo, orientado, de $-q$ a $+q$, y de módulo el par máximo (sen $\alpha = 1$) para el campo $\boldsymbol{E}$ unidad:

$$p = q \cdot d \qquad [2.15]$$

La rotación del dipolo en un campo $\boldsymbol{E}$ tiende a llevar el vector $\boldsymbol{p}$ sobre el vector $\boldsymbol{E}$.

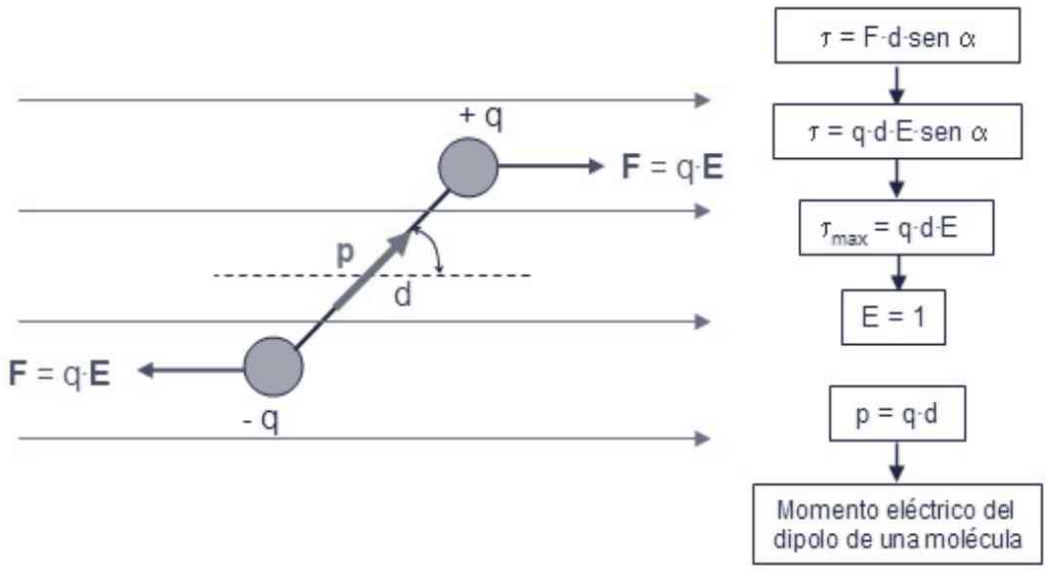


Figura 2.10. Momento dipolar

Un bloque dieléctrico sometido a un campo eléctrico uniforme, *figura 2.11*, polariza sus moléculas y, suponiendo que está totalmente polarizado (los momentos dipolares de sus moléculas alineados con el campo), se crea sobre la superficie A del bloque (perpendicular al campo inductor) cargas inducidas $+q_i$ y $-q_i$ separadas una distancia d, con un momento dipolar, *fórmula [2.15]*:

$$p_i = q_i\, d$$

El momento dipolar resultante de todos los dipolos del bloque del dieléctrico es:

$$\Sigma p_i = \Sigma q_i\, d$$

Por definición, se llama **polarización eléctrica** $\boldsymbol{P}$ del dieléctrico al momento dipolar resultante por unidad de volumen.

$$P = \frac{\sum p_i}{V}$$

De donde, teniendo en cuenta que $V = A \cdot d$ y $\Sigma p_i = \sigma_i \cdot A \cdot d$, *figura 2.11,* se tiene:

$$P = \sigma_i \qquad [2.16]$$

El módulo P del vector polarización es igual a la densidad superficial de carga de polarización σ_i.

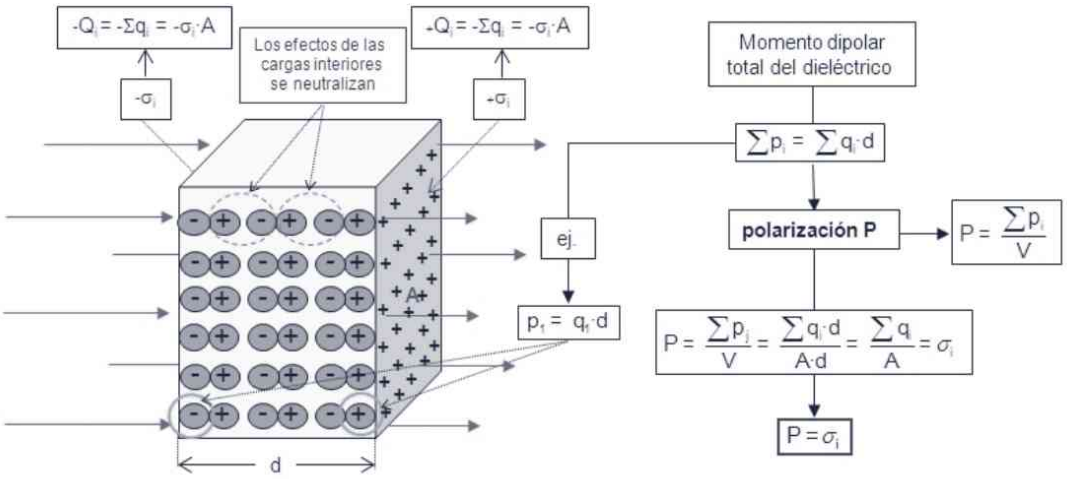


Figura 2.11. Polarización del dieléctrico

Se puede sustituir la estructura microscópica de todos los dipolos eléctricos, por un volumen de dieléctrico con densidades superficiales de carga ligada σ_i, que originan un campo eléctrico $\boldsymbol{E_i}$ que se opone al campo eléctrico externo $\boldsymbol{E_0}$, *figura 2.11.*

Debido a un campo eléctrico ***E*** los dieléctricos *isotrópicos* (propiedades eléctricas independientes de la dirección del campo eléctrico), *homogéneos* (las propiedades eléctricas son independientes de la posición del dieléctrico), y *lineales* (la polarización ***P*** es directamente proporcional a la del campo eléctrico ***E*** neto, (debido tanto a las cargas libres como a las de polarización) los dieléctricos se polarizan apareciendo el vector polarización ***P***, cuyo módulo es:

$$\bar{P} = \varepsilon_0 \cdot \chi \cdot \bar{E} \qquad [2.17]$$

La constante χ se denomina **susceptibilidad eléctrica** e indica la mayor o menor facilidad de la sustancia para ser polarizada (en el vacío $\chi = 0$, ya que no hay moléculas que puedan polarizarse).

El campo eléctrico total ***E*** en el dieléctrico es:

$$\bar{E} = \bar{E}_0 + \bar{E}_i$$

Como los campos $\boldsymbol{E_0}$ e $\boldsymbol{E_i}$, en los dieléctricos de uso más frecuente, tienen la misma dirección pero signo opuesto, se tiene para el módulo de ***E***:

$$E = E_0 - E_i$$

Aplicando la Ley de Gauss a la superficie cerrada indicada en la *figura 2.12* (carga del dieléctrico polarizado) y haciendo las operaciones correspondientes se obtiene, *figura 2.12,* el módulo del campo eléctrico ***E*** en el seno del dieléctrico:

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

Resultado que ya se había previsto razonando sobe el efecto del dieléctrico en la capacidad de un condensador.

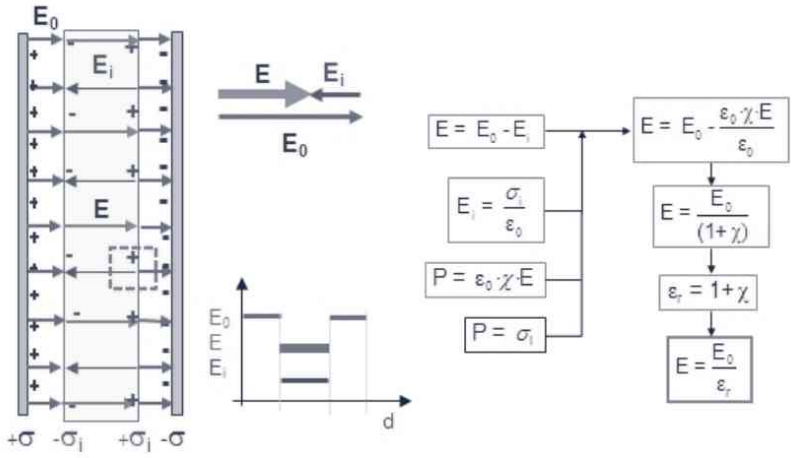


Figura 2.12. Campo eléctrico E en el interior de un dieléctrico

No en todos los dieléctricos la relación entre el campo eléctrico y la polarización es lineal, *fórmula [2.17].* En algunos de ellos, aunque el campo eléctrico se anule, la polarización sigue siendo distinta de cero. El valor de la polarización cuando el campo eléctrico es nulo se llama *polarización remanente*. Los materiales en que esto ocurre, ejemplo titanio de bario, se les llama **materiales ferroeléctricos** y la propiedad ferroelectricidad. Reciben este nombre por su semejanza con el fenómeno de ferromagnetismo, que se estudiará en el *capítulo 5*.

2.8 DESPLAZAMIENTO ELÉCTRICO D

A partir de la *fórmula [2.11]* se tiene la expresión de la densidad de cargas libres sobre la superficie de las armaduras en función del campo eléctrico en el dieléctrico y de la polarización del mismo:

$$E = \frac{\sigma - \sigma_i}{\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma = \varepsilon_0 \cdot E + \sigma_i \Rightarrow \sigma = \varepsilon_0 \cdot E + P$$

J. C. Maxwell (1.831-1.879) con objeto de facilitar el estudio del campo electromagnético, introdujo el concepto del vector desplazamiento eléctrico ***D***, como:

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \cdot \bar{E} + \bar{P} \qquad [2.18]$$

Como, $P = \varepsilon_0 \cdot \chi \cdot E$, $\varepsilon_r = 1 + \chi$, $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$,se tiene:

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \cdot \bar{E} + \bar{P} = \varepsilon_0 \cdot \bar{E} + \varepsilon_0 \cdot \chi \cdot \bar{E} = \varepsilon_0 \cdot \bar{E} \cdot (1 + \chi) = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \bar{E} = \varepsilon \cdot \bar{E}$$

$$\bar{D} = \varepsilon \cdot \bar{E} \qquad [2.19]$$

Su unidad es el C/m^2.

Nótese que:

- Sólo las cargas libres son fuentes del desplazamiento ***D*** ($D = \sigma$).
- Las cargas libres y ligadas son fuentes del campo eléctrico ***E*** ($E = (\sigma - \sigma_i)/\varepsilon_0$).
- Sólo las cargas ligadas son fuentes de la polarización ***P*** ($P = \sigma_i$).

2.9 LEY DE GAUSS EN PRESENCIA DE UN DIELÉCTRICO

Se tiene un campo eléctrico con presencia de un dieléctrico, se aplica la ley de Gauss a la superficie gaussiana de forma cilíndrica tal como se indica en la *figura 2.13,* y se consideran los siguientes flujos:

- $\boldsymbol{\Phi}_E$ el flujo debido al campo $\boldsymbol{E}$ a través de la superficie A (circular y perpendicular a $\boldsymbol{E}$) del cilindro, ($\boldsymbol{\Phi}_E = E \cdot A$).

- $\boldsymbol{\Phi}_D$ el flujo debido al desplazamiento $\boldsymbol{D}$ a través de la superficie A (circular y perpendicular a $\boldsymbol{D}$) del cilindro, ($\boldsymbol{\Phi}_D = D \cdot A$).

El flujo neto a través de las superficies laterales del cilindro es, en la superficie izquierda nulo (el campo eléctrico está confinado dentro de las dos superficies conductoras), en la superficie derecha debido al vector $\boldsymbol{E}$, en el caso del campo y al vector $\boldsymbol{D}$ en el caso del desplazamiento.

Se tiene, *figura 2.13*:

- Considerando las cargas totales (libres y de polarización) dentro de la superficie gaussiana:

$$\Phi_E = \frac{Q_{Total}}{\varepsilon_0} \qquad [2.20]$$

- Considerando sólo las cargas libres dentro de la superficie gaussiana:

$$\Phi_E = \frac{Q_{Libres}}{\varepsilon} \qquad [2.21]$$

- Considerando el flujo $\boldsymbol{\Phi}_D$ debido al vector desplazamiento $\boldsymbol{D}$ ($\boldsymbol{\Phi}_D = D \cdot A$):

$$\Phi_D = Q_{Libres} \qquad [2.22]$$

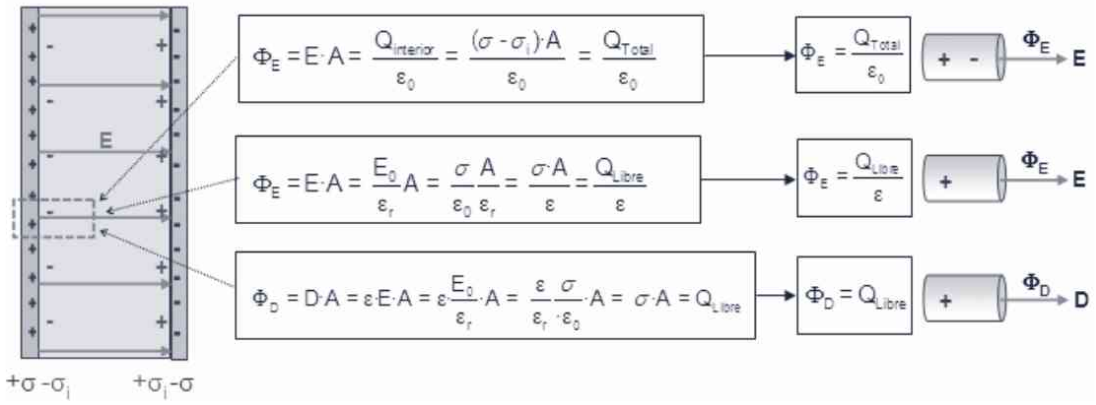


Figura 2.13. Ley de Gauss en presencia de dieléctricos

2.10 FINALIDAD DEL DIELÉCTRICO EN LOS CONDENSADORES

La mayor parte de los condensadores tienen entre sus armaduras un dieléctrico, diferente al aire (papel, plástico, vidrio, mica, etc.) con una triple finalidad:

1. **De tipo mecánico**. Además de resolver el problema de mantener sin contacto físico dos placas metálicas separadas una distancia muy pequeña, puesto que las armaduras tienen cargas opuestas, existe entre ellas una fuerza eléctrica de atracción elevada por estar separadas una distancia muy pequeña (las armaduras deben estar muy próximas para obtener una capacidad grande), la introducción del dieléctrico (aislante) resuelve, también, este problema.

2. **De tipo eléctrico (rigidez dieléctrica)**. De la definición de la capacidad de un condensador ($C = q/V_{ab}$) se podría pensar que se puede aumentar indefinidamente la carga q de un condensador, simplemente aumentando la diferencia de potencia V_{ab} entre sus armaduras. Esto no es posible porque llega un momento en el que, para una cierta tensión V_{ab} (o intensidad de campo $\boldsymbol{E}$) suficientemente elevada, los electrones saltan de la armadura negativa a la positiva por el interior del condensador, es decir, se produce una descarga eléctrica en su interior, destruyendo el condensador al convertirse éste en conductor. La mayoría de los dieléctricos tienen un campo de ruptura mayor que el aire (o vacío) por lo que podrán soportar mayores tensiones. En los condensadores, junto con la capacidad, se indica la tensión máxima que pueden soportar en uso continuo.

3. **De tipo eléctrico (capacidad eléctrica)**. Está basada en que la capacidad de un condensador de una geometría dada es en general mayor con dieléctrico, diferente al aire, entre sus armaduras que sin él, razón muy importante, no sólo económica sino también de aprovechamiento del espacio, etc.

2.11 ENERGÍA DE UN CONDENSADOR CARGADO

La energía eléctrica almacenada en un condensador es igual al trabajo que se necesitó para cargarlo, es decir, para separar cargas opuestas y colocarlas en conductores diferentes. Cuando se descarga el condensador, esta energía almacenada se recupera en forma de trabajo realizado por las cargas eléctricas.

En el proceso de carga de un condensador se transfieren electrones de la armadura positiva a la negativa a través de la fuente o batería. Esto es equivalente a la transferencia de carga positiva $+q$ desde la armadura negativa del condensador (potencial bajo) a la armadura positiva del mismo (potencial alto) a través de la fuente, para lo cual se requiere realizar un trabajo W sobre dicha carga $+q$, energía que es suministrada por la fuente y almacenada en él en forma de energía potencial eléctrica.

Considérese un condensador de capacidad C descargado. En el curso de la carga, *figura 2.14*, tanto la carga q como la diferencia de potencial v aumentan, mientras que C permanece constante. En todo momento se tiene que $q = v \cdot C$. Adquirido una diferencia de potencial v, un pequeño aumento de la carga Δq (que permite considerar v constante) implica comunicar una energía ΔW:

$$\Delta W = v \cdot \Delta q$$

Al final de la carga, el condensador habrá adquirido una carga Q (OA) y una diferencia de potencial V (AB), de tal manera que la energía total W comunicada al sistema es el resultado de la suma de todas las áreas ΔW, comprendidas entre los puntos O y A, es decir, el área del triángulo OAB, con lo que se tiene:

$$W = \frac{1}{2}Q \cdot V = \frac{1}{2}C \cdot V^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad [2.23]$$

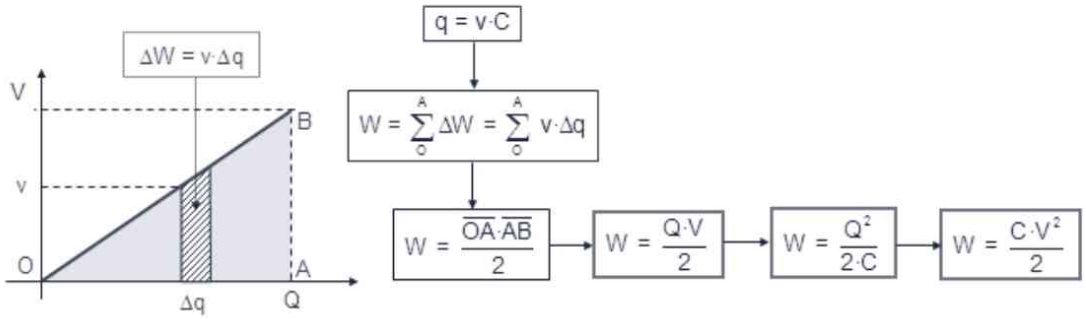


Figura 2.14. Energía de un condensador cargado

La fórmula de la energía almacenada por el condensador, *fórmula [2.23],* se puede poner en función de las magnitudes que se refieren únicamente al dieléctrico. Para ello, considérese un condensador plano de superficie de armadura S, distancia entre ellas d, ocupada dicha distancia por un volumen de dieléctrico υ de permitividad ε, se tiene:

$$W = \frac{1}{2}C \cdot V^2 = \frac{1}{2}\,\varepsilon\frac{S}{d}\,(E \cdot d)^2 = S \cdot d\frac{1}{2}\varepsilon \cdot E^2 = \upsilon\frac{1}{2}D \cdot E \qquad [2.24]$$

Siendo υ el volumen del dieléctrico ($\upsilon = S \cdot d$), E y D el campo y el desplazamiento en el seno del dieléctrico.

La energía almacenada se puede expresar por unidad de volumen, obteniéndose la **densidad de energía** w:

$$w = \frac{W}{\upsilon} = \frac{1}{2}D \cdot E = \frac{1}{2}D \cdot \frac{D}{\varepsilon} = \frac{D^2}{2 \cdot \varepsilon} \qquad [2.25]$$

De esta fórmula se deduce una consecuencia importante: la energía eléctrica almacenada por el condensador está localizada en el **dieléctrico** (en la fórmula no aparece ninguna magnitud relacionada con las características de las armaduras).

Se tiene un símil interesante si se compara la fórmula anterior con la que proporciona la energía potencial mecánica de un resorte (constante elástica *K*) alargado una longitud *x*, debido a una fuerza *F*. Se tiene:

Energía por unidad de volumen debida al desplazamiento eléctrico:

$$w = \frac{1}{2} D \cdot E$$

Energía potencial mecánica de un resorte:

$$W = \frac{1}{2} K \cdot x^2 = \frac{1}{2} K \cdot x \cdot x = \frac{1}{2} F \cdot x$$

La fuerza *F* se corresponde con el campo eléctrico *E* y la longitud alargada (desplazamiento) *x* corresponde al desplazamiento *D,* razón por la cual Maxwell dio a esta magnitud eléctrica dicho nombre. Así, bajo la acción del campo eléctrico creado por las armaduras, las moléculas del dieléctrico están sometidas a un desplazamiento elástico, de la misma forma que un resorte sufre un desplazamiento elástico (dentro de su límite de elasticidad) por la acción de una fuerza externa.

Observa:

Cuando se trabaja con condensadores se han de cortocircuitar previamente sus terminales, lo que permite la descarga de la energía almacenada, y de esta manera se evita una descarga a través de la persona que los manipula. Esto también se ha de realizar con las líneas de capacidad apreciable (líneas de AT y líneas subterráneas de distribución) uniendo sus terminales entre sí y estos con tierra.

Mediante el cálculo diferencial, la fórmula $\Delta W = v \cdot \Delta q$, se puede poner en la forma $dW = v \cdot dq$, de donde se tiene, para la energía almacenada por un condensador:

$$W = \int_0^Q v \cdot dq = \int_0^Q \frac{q}{C} \cdot dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

2.12 COMPORTAMIENTO DE UN CONDUCTOR Y UN DIELÉCTRICO EN UN CAMPO ELÉCTRICO

Se ha visto en el *apartado 1.10* el comportamiento de conductores y aislantes en el seno de un campo eléctrico. Ahora, a tenor de los contenidos vistos posteriormente, se profundiza en el tema.

Tanto en el dieléctrico como en el conductor, en presencia de un campo eléctrico, se produce una redistribución de cargas (ligadas en el dieléctrico, móviles en el conductor) modificando en sus proximidades dicho campo eléctrico.

En el dieléctrico, tal como se ha explicado, se produce un campo eléctrico inducido de sentido contrario al campo externo, de módulo menor que el del campo externo, de manera que existe un campo eléctrico total en el interior del dieléctrico de menor intensidad que el campo externo (menor densidad de líneas de campo eléctrico en el interior del dieléctrico que en el exterior).

En el conductor, el campo externo desplaza las cargas móviles del mismo (los electrones de conducción en los conductores metálicos) hasta que se alcanza una situación estacionaria. Estas cargas móviles redistribuidas originan un campo eléctrico en el interior del conductor de sentido contrario al campo externo, de módulo igual al del campo externo. En consecuencia, el campo eléctrico total en el interior del conductor es nulo (no hay líneas de campo eléctrico en el interior en situación estacionaria) y, por tanto, todo su volumen es equipotencial.

En la *figura 2.15* se explican gráficamente estos fenómenos mediante una esfera aislante (*figura central*) y conductora (*figura derecha*) que se introducen en un campo eléctrico uniforme (*figura izquierda*).

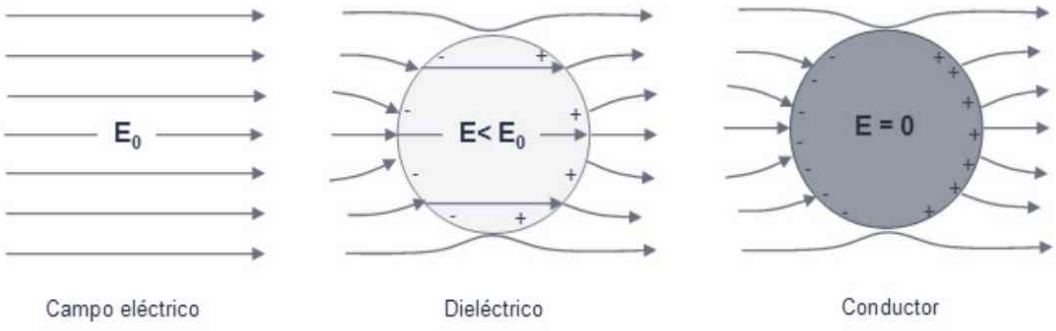


Figura 2.15. Dieléctrico y conductor en el interior de un campo eléctrico

2.13 ANALOGÍA HIDRÁULICA DE UN CONDENSADOR

En la *figura 2.16* se presenta una analogía entre un circuito con condensador y circuito hidráulico. Éste está constituido por dos depósitos de agua con diferentes alturas, un recipiente con una membrana elástica que impide el paso de agua a través de ella y tres llaves de paso, todos unidos mediante las tuberías correspondientes.

Para que exista desplazamiento de agua del depósito de la izquierda hacia el de la derecha, es preciso que la membrana se deforme, para lo cual debe haber mayor presión en su lado izquierdo que en su lado derecho, es decir, es necesaria una diferencia de alturas Δh. De la misma manera que, para que el condensador se cargue con una carga Q, es necesario que exista una diferencia de potencial V_{ab} entre sus armaduras ($Q = V_{ab} \cdot C$).

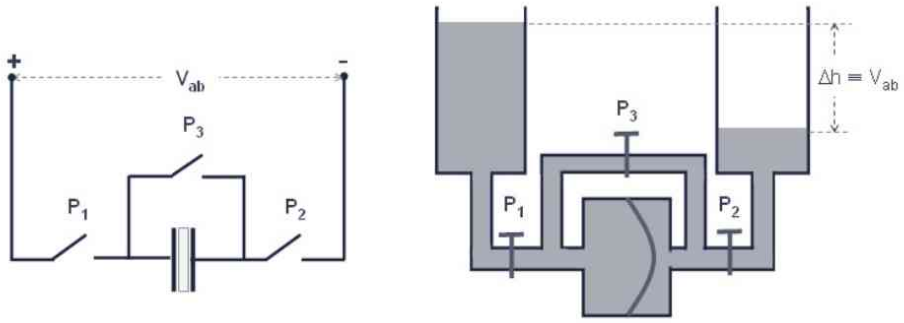


Figura 2.16. Condensador y símil hidráulico

- **Carga del condensador.** Se cierran los contactos P_1 y P_2 y se deja abierto P_3. Se produce un desplazamiento de cargas eléctricas: positivas del polo positivo a la armadura conectada a él (en realidad lo que se produce es un desplazamiento de electrones de la armadura al polo positivo, pero el efecto es el mismo), negativas del polo negativo a la armadura conectada a él. El condensador adquiere una carga ($Q = V_{ab} \cdot C$) y almacena energía eléctrica ($W = ½ \cdot (Q \cdot V_{ab})$. Si la tensión V_{ab} supera la tensión de ruptura del condensador, éste se perfora (se vuelve conductor) dejando de cumplir su función (almacenar cargas eléctricas).

- **"Carga" del recipiente con membrana.** Se abren las llaves de paso P_1 y P_2 y se deja cerrada la P_3. La diferencia de altura Δh (diferencia de potencial V_{ab}) entre los dos depósitos origina una diferencia de presión que hace deformar la membrana hacia la derecha. La cantidad de agua (carga $Q = V_{ab} \cdot C$) que pasa del depósito izquierdo al recipiente con membrana, y de éste hacia el depósito de la derecha, depende de la diferencia de alturas Δh, y de una característica propia de la membrana (capacidad C del condensador), que depende a su vez de la superficie de la membrana (superficie S del dieléctrico) y de su elasticidad (permitividad ε del dieléctrico). El desplazamiento de agua (desplazamiento de cargas eléctricas) cesa para una cierta deformación de la membrana, tal que, la presión que origina sobre el agua iguale a la presión debida a la diferencia de alturas final. Si esta diferencia de alturas supera la que la membrana puede

soportar (tensión de ruptura del dieléctrico), la membrana se rompe (dieléctrico perforado). El desplazamiento de la membrana se transforma en energía potencial elástica.

- **Descarga del condensador.** Una vez cargado el condensador se abren los contactos P_1 y P_2 y se cierra P_3. Se produce un desplazamiento de electrones desde la armadura negativa hacia la positiva hasta que $V_{ab} = 0$, quedando al final el condensador descargado. Se recupera la energía eléctrica almacenada ($W = ½ \cdot (Q \cdot V_{ab})$.

- **"Descarga" del recipiente con membrana.** Se cierran llaves de paso P_1 y P_2 y se abre la P_3. Se produce un desplazamiento de agua en el recipiente con membrana hasta que la presión en ambos lados se iguale ($V_{ab} = 0$), volviendo la membrana a su posición inicial (condensador descargado). Se recupera la energía potencial elástica.

2.14 ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES

Las asociaciones de condensadores en los circuitos tienen como finalidad conseguir un efecto análogo al que produciría un solo condensador de características definidas del que no se dispone, o bien por exigencias propias del circuito. La asociación se puede hacer: en paralelo, en serie y mixta.

En las asociaciones se puede calcular la capacidad equivalente, es decir, reemplazar la asociación por un único condensador equivalente, que es aquel condensador que produce los mismos efectos (almacenar la misma carga, estar sometido a la misma diferencia de potencial y almacenar la misma energía eléctrica) en el circuito que la asociación a la que reemplaza.

2.15 ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES EN PARALELO

Considérense tres condensadores asociados en paralelo, *figura 2.17.* Las armaduras izquierdas (con signo positivo por estar conectadas al borne positivo de la fuente) de los tres condensadores están al mismo potencial. Las armaduras derechas (con signo negativo) también están al mismo potencial. En consecuencia, la diferencia de potencial V_{ab} de los tres condensadores es la misma e igual a la de la fuente.

Cada condensador se carga con una carga diferente q_i ($q_i = C_i \cdot V_{ab}$). Por otra parte, el condensador equivalente con capacidad C que reemplaza a la asociación en paralelo de los tres condensadores, para producir los mismos efectos que la asociación, tendrá que almacenar la carga total q ($q = C \cdot V_{ab}$) de los tres condensadores ($q = q_1 + q_2 + q_3$) al estar sometido a la misma diferencia de potencial de la asociación V_{ab}. Se obtiene, *figura 2.17*:

$$C = (C_1 + C_2 + C_3) = \sum C_i \qquad [2.26]$$

Este análisis se puede hacer con cualquier número de condensadores, obteniéndose que, la capacidad equivalente de una asociación de condensadores en paralelo es igual a la suma de las capacidades de cada uno de los condensadores de la asociación. Interesa pues una asociación en paralelo cuando se desee una capacidad equivalente mayor que cualquiera de los condensadores asociados, consiguiéndose de esta forma acumular grandes cantidades de carga con diferencias de potencial pequeñas.

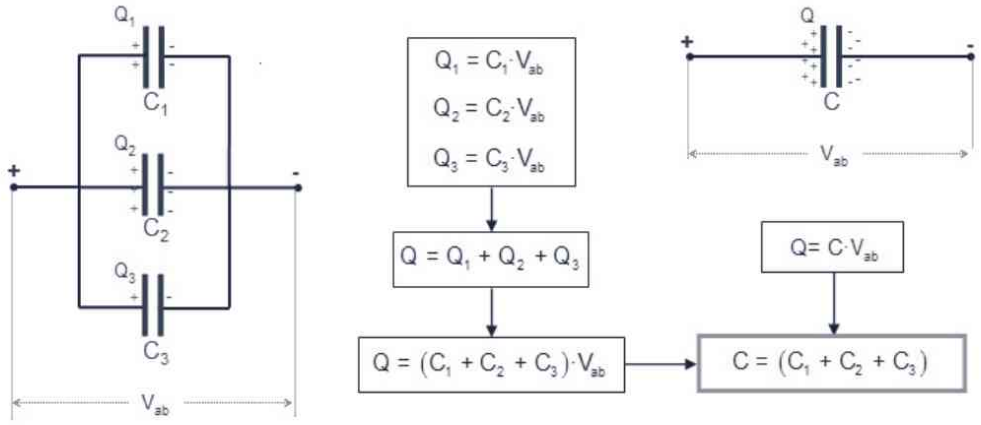


Figura 2.17. Condensadores en paralelo

2.16 ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES EN SERIE

En la *figura 2.18* se tienen tres condensadores asociados en serie, estando conectada la asociación a una fuente de corriente continua que somete a la asociación a una diferencia de potencial V_{ab}.

En el proceso de carga, la fuente desplaza electrones de la armadura izquierda de C_1 a la armadura derecha de C_3 a través de la fuente, adquiriendo las armaduras los signos que se indican en dicha figura y con igual carga. Los electrones de la armadura izquierda de C_3 son repelidos desplazándose hacia la izquierda, quedando la armadura derecha de C_2 cargada con $-q$ y la armadura izquierda de C_3 con $+q$. Al mismo tiempo, los electrones de la armadura izquierda de C_2 son repelidos desplazándose hacia la izquierda, quedando la armadura derecha de C_1 cargada con $-q$ y la armadura izquierda de C_2 con $+q$.

En definitiva, la carga adquirida por cada condensador es la misma en todos ellos ($q = q_1 = q_2 = q_3$). Obsérvese que la fuente sólo desplaza una cantidad de carga q, las armaduras interiores se cargan por inducción. Cada condensador estará a una ddp V_i ($V_i = Q/C_i$), y se ha de cumplir que la ddp total ha de ser igual a la suma de las tensiones parciales ($V_{ab} = V_{ac} + V_{cd} + V_{db}$).

Por otra parte, el condensador equivalente de capacidad C que substituya a la asociación, para que produzca los mismos efectos en el circuito que los que produce la asociación, tendrá que almacenar una carga q ($q = C \cdot V_{ab}$), la misma que desplazó la fuente para cargar los dos condensadores de la asociación) a la ddp V_{ab}. Se obtiene, *figura 2.18*:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \sum \frac{1}{C_i} \qquad [2.27]$$

Este análisis se puede hacer con cualquier número de condensadores, obteniéndose que, la inversa de la capacidad equivalente 1/C de una asociación en serie de condensadores es igual a la suma de las inversas de las capacidades de cada uno de los condensadores de la asociación. Obsérvese que la capacidad equivalente de la asociación en serie disminuye a medida que se añaden condensadores a dicha asociación, siendo la capacidad del condensador equivalente inferior a la del condensador de la asociación de menor capacidad. Se deduce que interesa montar una asociación en serie cuando se desee obtener una capacidad equivalente menor que cualquiera de las capacidades asociadas, con la ventaja de que cada condensador de la asociación está sometido a una parte de la tensión total, reduciéndose así el riesgo de perforación del dieléctrico.

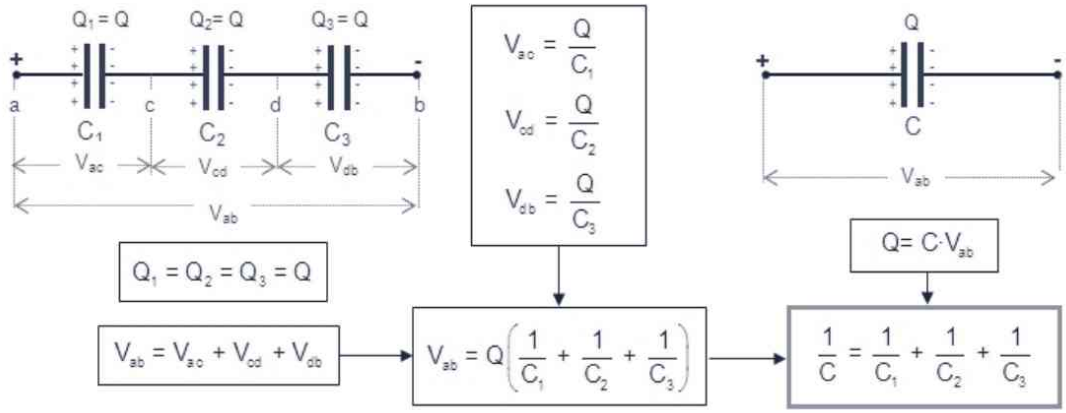


Figura 2.18. Condensadores en serie

2.17 ASOCIACIÓN MIXTA DE CONDENSADORES

En un circuito con asociación mixta de condensadores, unos están asociados en paralelo y otros en serie. El circuito se resuelve identificando las asociaciones en serie o paralelo e ir reduciendo el circuito, hasta conseguir un único condensador final que será el equivalente que se busca, *figura 2.19*. Ver el *ejemplo 2.19.6.*

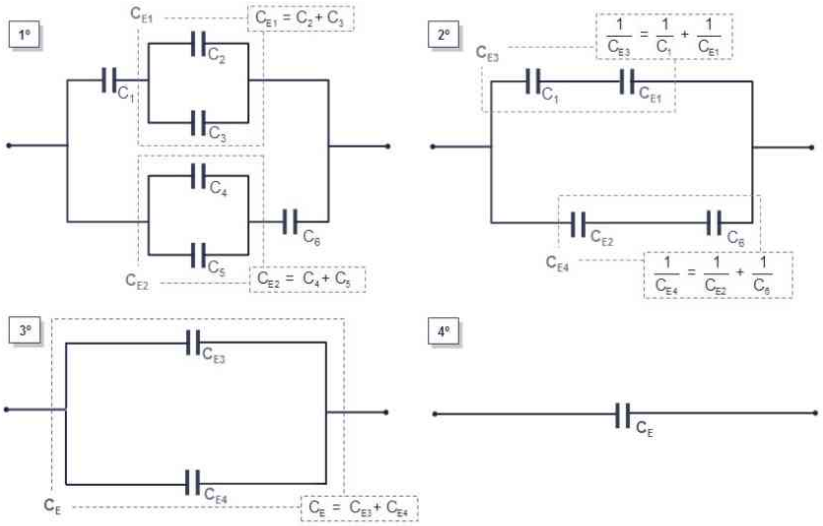


Figura 2.19. Asociación mixta de condensadores

2.18 RESUMEN DE CONCEPTOS Y FÓRMULAS DE ESTE CAPÍTULO

En la *figura 2.20* se hace un resumen de conceptos y en la *tabla 2.3* de fórmulas.

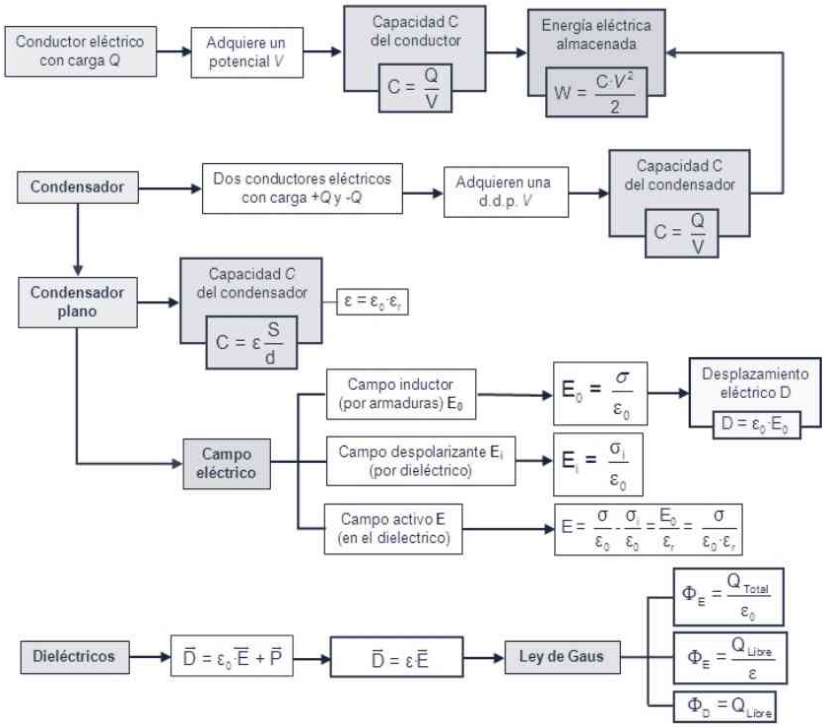


Figura 2.20. Resumen de conceptos

Capacidad de un conductor	$C = \frac{Q}{V}$
Permitividad, absoluta, relativa, vacío	$\varepsilon = \varepsilon \cdot \varepsilon_0$
Capacidad de una esfera	$C = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r$
Capacidad de un condensador cilíndrico	$C = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot L}{Ln \frac{r_2}{r_1}}$
Capacidad de un condensador plano	$C = \varepsilon \frac{S}{d}$
Fuerza entre armaduras	$F = q \cdot \frac{E}{2} = \sigma \cdot S \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon} = \frac{S \cdot \sigma^2}{2 \cdot \varepsilon}$
Energía almacenada	$W = \frac{1}{2} Q \cdot V = \frac{1}{2} C \cdot V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$
Asociación en paralelo	$C = (C_1 + C_2 + C_3) = \sum C_i$
Asociación en serie	$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \sum \frac{1}{C_i}$

Tabla 2.3

2.19 EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Ejercicio 2.19.1

En el vacío una esfera de 10 cm de radio posee una carga de 0,5 μC. Calcular:

a) El potencial en un punto de su superficie.

b) La densidad superficial de carga.

c) Energía eléctrica almacenada.

d) Si se pone en contacto con una esfera, descargada, de 5 cm de radio, hallar el potencial de ambas esferas y la carga de cada una.

e) En el caso del apartado anterior, ¿qué se puede decir de la densidad de carga en cada esfera?

Solución:

a) El potencial en un punto de su superficie, *fórmula [1.26]*.

$$V = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{Q}{r} = 9\cdot10^9\,\frac{0{,}5\cdot10^{-6}}{10\cdot10^{-2}} = 45.000\ V$$

b) La densidad superficial de carga.

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{0{,}5\cdot10^{-6}}{4\cdot\pi\cdot,0{,}1^2} = 3{,}98\cdot10^{-6}\ C/m^2$$

c) Energía eléctrica almacenada, *fórmula [2.24]*.

$$W = \frac{1}{2}Q\cdot V = \frac{1}{2}0{,}5\cdot10^{-6}\cdot45.000 = 11{,}2\cdot10^{-3}\ J$$

d) Si se pone en contacto con una esfera, descargada, de 5 cm de radio, hallar el potencial de ambas esferas y la carga de cada una.

La capacidad de cada esfera es:

$$C_1 = 4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r_1 = 4\cdot\pi\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot10\cdot10^{-2} = 11{,}1\cdot10^{-12}\ F = 11{,}1\ pF$$

$$C_2 = 4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r_2 = 4\cdot\pi\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot5\cdot10^{-2} = 5{,}55\cdot10^{-12}\ F = 5{,}55\ pF$$

La capacidad del conjunto de las dos esferas unidas:

$$C = C_1 + C_2 = 11{,}1 + 5{,}55 = 16{,}65\ pF$$

Al unirse, el potencial *V* es el mismo para ambas esferas y la carga total es 0,5 μC:

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{0{,}5\cdot10^{-6}}{16{,}65\cdot10^{-12}} = 30.003\ V$$

$$Q_1 = C_1\cdot V = 11{,}1\cdot10^{-12}\cdot30.003 = 0{,}333\ \mu C$$

$$Q_2 = C_2\cdot V = 5{,}55\cdot10^{-12}\cdot30.003 = 0.166\ \mu C$$

e) En el caso del apartado anterior, ¿qué se puede decir de la densidad de carga en cada esfera?

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{S_1} = \frac{0{,}333\cdot 10^{-6}}{4\cdot\pi\cdot,0{,}1^2} = 2{,}65\cdot 10^{-6}\ \text{C/m}^2$$

$$\sigma_1 = \frac{Q_2}{S_2} = \frac{0{,}166\cdot 10^{-6}}{4\cdot\pi\cdot,0{,}05^2} = 5{,}28\cdot 10^{-6}\ \text{C/m}^2$$

La densidad de carga es mayor en la esfera de menor radio (*apartado 1.27*).

Ejercicio 2.19.2

Un condensador plano está formada por dos armaduras cuadradas de 4 cm de lado, separadas 2 mm. Calcular:

a) La carga que adquiere el condensador y el campo eléctrico entre las armaduras, cuando se conecta a una batería de 12 V, no existiendo dieléctrico entre las armaduras.

b) Con el condensador *desconectado* de la batería, una vez cargado, se inserta un dieléctrico de permitividad relativa 3 entre las armaduras. Determinar los nuevos valores de la carga, capacidad y tensión en el condensador y campo eléctrico entre las armaduras.

c) Con el condensador *conectado* a la batería, se inserta un dieléctrico de permitividad relativa 3 entre las armaduras. Determinar los nuevos valores de la carga, capacidad y tensión en el condensador. También el valor de la carga inducida y del campo eléctrico entre las armaduras.

d) Fuerza entre las armaduras en cada uno de los casos anteriores.

e) Desplazamiento eléctrico en cada uno de los casos anteriores.

Solución:

a) Capacidad del condensador, *fórmula [2.5]:*

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d} = \frac{1}{4\pi\cdot 9\cdot 10^9}\frac{\left(4\cdot 10^{-2}\right)^2}{2\cdot 10^{-3}} = 7\cdot 10^{-12}\ \text{F} = 7\ \text{pF}$$

Carga que adquiere, *fórmula [2.4]*:

$$Q_0 = C_0 \cdot V_{ab} = 7 \cdot 10^{-12} \cdot 12 = 84 \cdot 10^{-12}\ C = 84\ pC$$

Campo eléctrico, *fórmula [1.11]*:

$$E_0 = \frac{V}{d} = \frac{12}{2 \cdot 10^{-3}} = 6 \cdot 10^3\ V/m$$

b) La carga del condensador sin dieléctrico, calculada en el *apartado a*, es 84 pF.

Al insertar el dieléctrico, la nueva capacidad del condensador, *fórmula [2.7]*, es:

$$C = \varepsilon_r \cdot C_0 = 3 \cdot 7 = 21\ pF$$

Ahora la ddp no es la de la batería (12 V), sino que su valor es, *fórmula [2.4]*:

$$V_{ab} = \frac{Q_0}{C_0} = \frac{84 \cdot 10^{-12}}{21 \cdot 10^{-12}} = 4\ V$$

El campo eléctrico entre las armaduras se obtiene por $E = V/d$, *fórmula [1.11]*, como ahora V es menor, el campo eléctrico E es también menor.

$$E = \frac{V_{ab}}{d} = \frac{4}{2 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^3\ V/m$$

También por la *fórmula [2.11]:*

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon \cdot S} = \frac{84 \cdot 10^{-12}}{3 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 16 \cdot 10^{-4}} = 2 \cdot 10^3\ V/m$$

También a través de la carga inducida, *fórmula [2.12]:*

$$\sigma_i = \sigma\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \Rightarrow Q_i = Q\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) = 84 \cdot 10^{-12}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 56 \cdot 10^{-12}\ C$$

de donde:

$$E = \frac{\sigma - \sigma_i}{\varepsilon_0} = \frac{Q - Q_i}{\varepsilon_0 \cdot S} = \frac{(84 - 56)\cdot 10^{-12}}{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 16\cdot 10^{-4}} = 2\cdot 10^3 \text{ V/m}$$

También por la *fórmula [2.9]*:

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{6\cdot 10^3}{3} = 2\cdot 10^3 \text{ V/m}$$

c) Al insertar el dieléctrico, la nueva capacidad del condensador, *fórmula [2.7]*, es:

$$C = \varepsilon_r \cdot C_0 = 3\cdot 7 = 21 \text{ pF}$$

Por otra parte, al permanecer conectado a la batería, el condensador está sometido a la misma tensión de 12 V, por lo que la nueva carga que adquiere es, *fórmula [2.4]:*

$$Q = C\cdot V_{ab} = 21\cdot 10^{-12}\cdot 12 = 252\cdot 10^{-12}\,C = pC$$

Es decir, la carga almacenada se ha multiplicado por tres.

El campo eléctrico entre las armaduras se obtiene por la *fórmula [1.11]*, $E = V_{ab}/d$, luego como no ha cambiado ni V_{ab} ni d, el campo eléctrico *entre las armaduras* es el mismo antes y después de poner el dieléctrico:

$$E = E_0 = \frac{V_{ab}}{d} = \frac{12}{2\cdot 10^{-3}} = 6\cdot 10^3 \text{ V/m}$$

Como la densidad de carga de las armaduras:

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{252\cdot 10^{-12}}{\left(4\cdot 10^{-2}\right)^2} = 15{,}75\cdot 10^{-8} \text{ C/m}^2$$

El campo E se puede calcular también por la *fórmula [2.11]:*

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{15{,}75\cdot 10^{-8}}{3\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} = 5.932 \text{ V/m } 6\cdot 10^3 \text{ V/m}$$

También a través de la carga inducida, *fórmula [2.12]:*

$$\sigma_i = \sigma\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right) = 15{,}75\cdot10^{-8}\left(1-\frac{1}{3}\right) = 10{,}5\cdot10^{-8}\ \text{C/m}^2$$

Campo eléctrico, *fórmula [2.11]*:

$$E = \frac{\sigma - \sigma_i}{\varepsilon_0} = \frac{(15{,}75-10{,}5)\cdot10^{-8}}{8{,}85\cdot10^{-12}} = 5.932\ \text{V/m} \simeq 6\cdot10^{3}\ \text{V/m}$$

d) Fuerza entre las armaduras, *fórmula [2.6]*:

- Fuerzas sin dieléctrico (a):

$$F = q\cdot\frac{E_0}{2} = 84\cdot10^{-12}\,\frac{6\cdot10^{3}}{2} = 252\cdot10^{-9}\ \text{N}$$

- Fuerzas con dieléctrico y condensador desconectado a la batería (b):

$$F = q\cdot\frac{E}{2} = 84\cdot10^{-12}\,\frac{2\cdot10^{3}}{2} = 84\cdot10^{-9}\ \text{N}$$

- Fuerzas con dieléctrico y condensador conectado de la batería (c):

$$F = q\cdot\frac{E}{2} = 252\cdot10^{-12}\,\frac{6\cdot10^{3}}{2} = 756\cdot10^{-9}\ \text{N}$$

e) Desplazamiento eléctrico, *fórmula [2.19]* o por la *fórmula [2.22]*:

- Desplazamiento sin dieléctrico y condensador conectado a la batería (a):

$$D = \varepsilon_0\cdot E_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}\cdot6\cdot10^{3} = 53{,}1\cdot10^{-9}\ \text{C/m}^2$$

$$\Phi_D = Q_{\text{Libres}} \Rightarrow D\cdot S = Q_{\text{Libres}} \Rightarrow D = \frac{Q_{\text{Libres}}}{S} = \sigma_{\text{Libres}} = \frac{84\cdot10^{-12}}{16\cdot10^{-4}} = 52{,}5\cdot10^{-9}\ \text{C/m}^2$$

- Desplazamiento con dieléctrico y condensador desconectado de la batería (b):

$$D = \varepsilon\cdot E = 3\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot2\cdot10^{3} = 53{,}1\cdot10^{-9}\ \text{C/m}^2$$

$$D = \sigma_{Libres} = \frac{84 \cdot 10^{-12}}{16 \cdot 10^{-4}} = 52{,}5 \cdot 10^{-9}\ C/m^2$$

– Desplazamiento con dieléctrico y condensador conectado a la batería (c):

$$D = \varepsilon \cdot E = 3 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \cdot 10^{3} = 159{,}3 \cdot 10^{-9}\ C/m^2$$

$$D = \sigma_{Libres} = \frac{252 \cdot 10^{-12}}{\left(4 \cdot 10^{-2}\right)^2} = 157{,}5 \cdot 10^{-9}\ C/m^2$$

Ejercicio 2.19.3

Calcular la energía almacenada en el condensador del ejercicio anterior (condensador plano formado por dos armaduras cuadradas de 4 cm de lado, separadas 2 mm) en los casos expuestos:

a) Cuando se conecta a una batería de 12 V, no existiendo dieléctrico entre las armaduras.

b) Con el condensador *desconectado* de la batería, una vez cargado, se inserta un dieléctrico de permitividad relativa 3 entre las armaduras.

c) Con el condensador *conectado* a la batería, se inserta un dieléctrico de permitividad relativa 3 entre las armaduras.

Solución:

Utilizando la fórmula [2.23]:

a)

$$W = \frac{1}{2} C \cdot V^2 = \frac{1}{2} 7 \cdot 10^{-12} \cdot 12^2 = 504 \cdot 10^{-12}\ J$$

b)

$$W = \frac{1}{2} C \cdot V^2 = \frac{1}{2} 21 \cdot 10^{-12} \cdot 4^2 = 168 \cdot 10^{-12}\ J$$

c)

$$W = \frac{1}{2} C \cdot V^2 = \frac{1}{2} 21 \cdot 10^{-12} \cdot 12^2 = 1.512 \cdot 10^{-12}\ J$$

Ejercicio 2.19.4

¿En cuanto aumentará la energía almacenada en un condensador al duplicar la diferencia de potencial entre sus armaduras?

Solución:

Puesto que no se modifica ni la geometría ni el dieléctrico del condensador, su capacidad permanecerá constante. Utilizando la *fórmula [2.23]*, se tiene:

Energía almacenada con la tensión V:

$$W_0 = \frac{1}{2} C \cdot V^2$$

Energía almacenada con la tensión $2 \cdot V$:

$$W = \frac{1}{2} C \cdot (2 \cdot V)^2 = \frac{1}{2} C \cdot 4 \cdot V^2$$

$$\frac{W}{W_0} = 4 \quad \Rightarrow \quad W = 4 \cdot W_0$$

La energía eléctrica almacenada en el condensador se ha multiplicado por cuatro.

Ejercicio 2.19.5

Se tienen tres condensadores de 2, 3 y 6 μF cada uno. Se asocian en paralelo y el conjunto se conecta a una diferencia de potencial de 12 V. Calcular:

a) Capacidad equivalente de la asociación.

b) Carga almacenada por la asociación.

c) Energía eléctrica almacenada por la asociación.

d) Carga, ddp y energía de cada condensador.

Solución:

a) Capacidad equivalente de la asociación, *fórmula [2.27]*:

$$C = \sum C_i = 2 + 3 + 6 = 11 \ \mu F$$

b) Carga almacenada por la asociación.

$$Q = C \cdot V = 11 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 132 \cdot 10^{-6}\ C = 132\ \mu C$$

c) Energía eléctrica almacenada por la asociación.

$$W = \frac{1}{2} C \cdot V^2 = \frac{1}{2} 11 \cdot 10^{-6} \cdot 12^2 = 0{,}792 \cdot 10^{-3}\ J$$

d) Carga, ddp y energía de cada condensador.

$$V = V_1 = V_2 = V_3 = 12\ V$$

$$Q_1 = C_1 \cdot V = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 24 \cdot 10^{-6}\ C = 24\ \mu C$$

$$Q_2 = C_2 \cdot V = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 36 \cdot 10^{-6}\ C = 36\ \mu C$$

$$Q_3 = C_3 \cdot V = 6 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 72 \cdot 10^{-6}\ C = 72\ \mu C$$

Se comprueba que la suma de las cargas coincide con la carga total hallada en el apartado *b*.

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 24 + 36 + 72 = 132\ \mu C$$

Para las energías:

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 \cdot V^2 = \frac{1}{2} 2 \cdot 10^{-6} \cdot 12^2 = 0{,}144 \cdot 10^{-3}\ J$$

$$W_2 = \frac{1}{2} C_2 \cdot V^2 = \frac{1}{2} 3 \cdot 10^{-6} \cdot 12^2 = 0{,}216 \cdot 10^{-3}\ J$$

$$W_3 = \frac{1}{2} C_3 \cdot V^2 = \frac{1}{2} 6 \cdot 10^{-6} \cdot 12^2 = 0{,}432 \cdot 10^{-3}\ J$$

Se comprueba que la suma de las energías coincide con la energía de la asociación total hallada en el apartado *c*.

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = (0{,}144 + 0{,}216 + 0{,}432) 10^{-3} = 0{,}792 \cdot 10^{-3}\ J$$

Ejercicio 2.19.6

Se tienen tres condensadores de 1, 3 y 6 μF cada uno. Se asocian en serie y el conjunto se conecta a una diferencia de potencial de 12 *V*. Calcular:

a) Capacidad equivalente de la asociación.

b) Carga almacenada por la asociación.

c) Energía eléctrica almacenada por la asociación.

d) Carga, ddp y energía de cada condensador.

Solución:

a) Capacidad equivalente de la asociación, *fórmula [2.28]*:

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{9}{6} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{6}{9} = 0{,}67\ \mu F$$

b) Carga almacenada por la asociación.

$$Q = C \cdot V = 0{,}67 \cdot 12 \cdot 10^{-6} = 8 \cdot 10^{-6}\ C = 8\ \mu C$$

c) Energía eléctrica almacenada por la asociación.

$$W = \frac{1}{2} C \cdot V^2 = \frac{1}{2} 0{,}67 \cdot 10^{-6} \cdot 12^2 = 0{,}048 \cdot 10^{-3}\ J$$

d) Carga, ddp y energía de cada condensador.

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3 = 8\ \mu C$$

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{8 \cdot 10^{-6}}{1 \cdot 10^{-6}} = 8\ V$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{8 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-6}} = 2{,}7\ V$$

$$V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{8 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 10^{-6}} = 1{,}3\ V$$

Se comprueba que la suma de las ddp de cada condensador coincide con la ddp total:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 8 + 2{,}7 + 1{,}3 = 12\ V$$

Para las energías:

$$W_1 = \frac{1}{2}C_1 \cdot V^2 = \frac{1}{2}1 \cdot 10^{-6} \cdot 8^2 = 0{,}032 \cdot 10^{-3}\ J$$

$$W_2 = \frac{1}{2}C_2 \cdot V^2 = \frac{1}{2}3 \cdot 10^{-6} \cdot 2{,}7^2 = 0{,}011 \cdot 10^{-3}\ J$$

$$W_3 = \frac{1}{2}C_3 \cdot V^2 = \frac{1}{2}6 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}3^2 = 0{,}005 \cdot 10^{-3}\ J$$

Se comprueba que la suma de las energías coincide con la energía de la asociación hallada en el apartado *c*.

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = (0{,}032 + 0{,}01 + 0{,}005)10^{-3} = 0{,}48 \cdot 10^{-3}\ J$$

Ejercicio 2.19.7

La asocian de condensadores de la *figura 2.21*, cuyas capacidades están expresadas en μF, se conectan a una diferencia de potencial $V_{AB} = 12\ V$. Calcular:

a) Capacidad equivalente de la asociación.

b) Carga almacenada por el condensador $C_3 = 6$ μF.

c) Diferencia de potencial en el condensador $C_1 = 2$ μF.

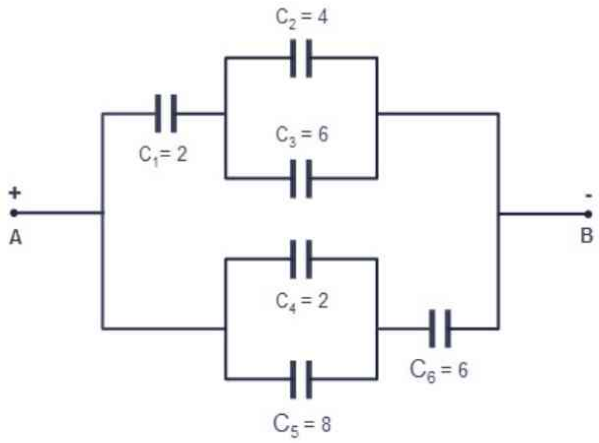


Figura 2.21. Ejercicio 2.16

Solución:

a) Capacidad equivalente de la asociación.

Se van reduciendo los elementos del circuito tal como se muestra en la *figura 2.22*, obteniéndose para el conjunto de la asociación la capacidad equivalente de 7,85 μF.

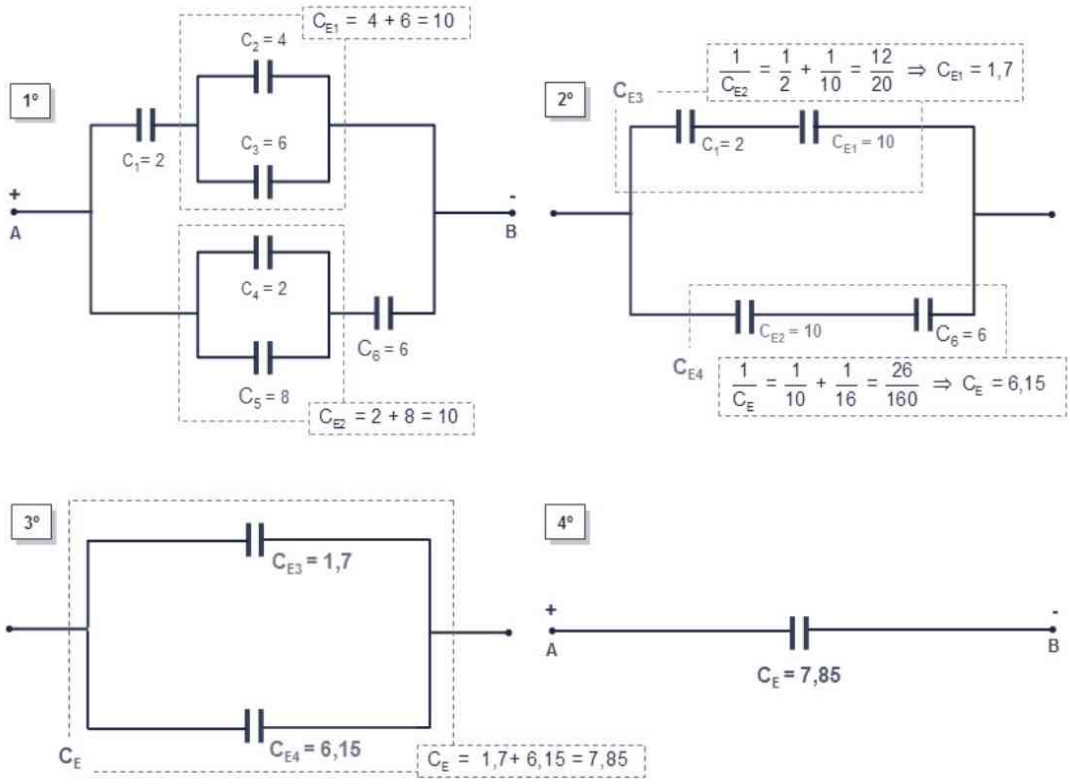


Figura 2.22. Solución del ejercicio 2.16

b) Carga almacenada por el condensador $C_3 = 6$ μF.

Se halla la carga del condensador equivalente C_{E3}:

$$Q_{E3} = C_{E3} \cdot V_{ab} = 1,7 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 20,4 \cdot 10^{-6}\,C$$

Los condensadores C_1 y C_{E1} (en serie) tienen igual carga e igual a $Q_{E3} = 20,4 \cdot 10^{-6}$ C.

La ddp en los extremos de C_{E1} es:

$$V_{E1} = \frac{Q_{E1}}{C_{E1}} = \frac{20{,}4 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 10^{-6}} = 2\ \text{V}$$

La ddp V_3 en los extremos de C_3 es la misma que la de C_{E1} que es 2 V. De donde:

$$Q_3 = C_3 \cdot V_3 = 6 \cdot 10^{-6} \cdot 2 = 12 \cdot 10^{-6}\ \text{C} = 12\ \mu\text{C}$$

c) Diferencia de potencial en el condensador $C_1 = 2\ \mu\text{F}$.

Como se ha dicho, los condensadores C_1 y C_{E1} (en serie) tienen igual carga e igual a $Q_{E3} = 20{,}4 \cdot 10^{-6}$ C.

La ddp V_1 en los extremos de C_1 es:

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{20{,}4 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-6}} = 10\ \text{V}$$

Obsérvese que la ddp V_1 (10 V) más la ddp V_{E1} (2V) ha de ser igual a la ddp entre los puntos A y B, V_{AB} (12 V).

Ejercicio 2.19.8

Mediante una batería de 12 V se carga un condensador $C_1 = 4\ \mu\text{F}$. Otro condensador $C_2 = 6\ \mu\text{F}$ se carga mediante una batería de 24 V. A continuación, estando los condensadores cargados, se desconectan de las respectivas baterías y se conectan los condensadores en paralelo. Calcular:

a) La carga y ddp en cada condensador en la conexión en paralelo.

b) La energía almacenada antes y después de conectarlos en paralelo. Explicar el resultado.

Solución:

a) La carga y ddp en cada condensador en la conexión en paralelo.

La carga inicial, *figura 2.23.a,* adquirida por el condensador C_1 es: $Q_{1i} = C_1 \cdot V_{1i} = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 48\ \mu\text{C}$

La carga inicial, *figura 2.23.a,* adquirida por el condensador C_2 es: $Q_{2i} = C_2 \cdot V_{2i} = 6 \cdot 10^{-6} \cdot 24 = 144\ \mu C$

La carga inicial de ambos condensadores es: $Q_i = Q_{1i} + Q_{2i} = 48 + 144 = 192\ \mu C$

El conectar ambos condensadores en paralelo implica que las cargas se redistribuyan, *figura 2.23.b y c,* de tal manera que, al final del proceso, la ddp V_f *sea* igual para ambos condensadores por lo que se ha de cumplir:

$$V_f = \frac{Q_{1f}}{C_1} = \frac{Q_{2f}}{C_2}$$

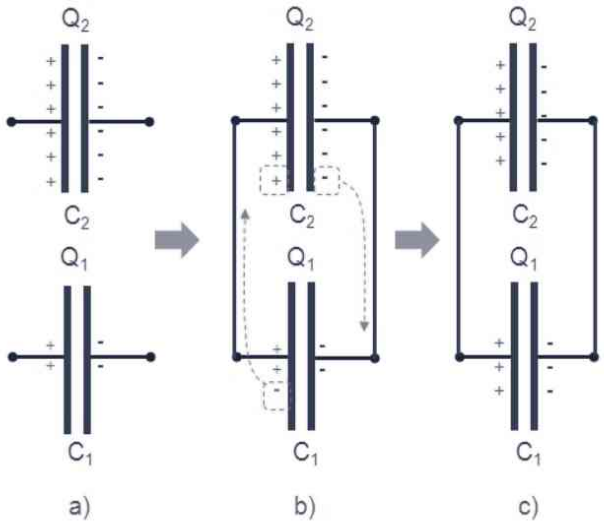


Figura 2.23. Conexión en paralelo de los condensadores del ejercicio 2.19.8

Por el principio de conservación de las cargas, *apartado 1.2*, la carga final Q_f de ambos condensadores ha de ser igual que la carga inicial Q_i, por lo que se ha de cumplir para las cargas finales, Q_{1f} y Q_{2f}, de cada condensador:

$$Q_{1f} + Q_{2f} = Q_f = Q_i$$

En definitiva, se tiene un sistema de ecuaciones con dos incógnitas:

$$\frac{Q_{1f}}{4} = \frac{Q_{2f}}{6}$$

$$Q_{1f} + Q_{2f} = 192$$

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$Q_{1f} = 76{,}8\ \mu C$$

$$Q_{2f} = 115{,}2\ \mu C$$

Para la ddp de cada condensador:

$$V_f = \frac{Q_{1f}}{C_1} = \frac{76{,}8 \cdot 10^{-12}}{4 \cdot 10^{-12}} = 19{,}2\ V$$

Que, evidentemente, se puede obtener también por:

$$V_f = \frac{Q_{2f}}{C_2} = \frac{115{,}2 \cdot 10^{-12}}{6 \cdot 10^{-12}} = 19{,}2\ V$$

Una vez obtenidas las cargas iniciales de cada condensador, este apartado del problema también se puede resolver de la siguiente forma:

Carga del conjunto al estar asociados en paralelo:

$$Q_f = Q_i = Q_{1i} + Q_{2i} = 48 + 144 = 192\ \mu C$$

Al estar asociados en paralelo la capacidad equivalente es, *fórmula [2.26]*:

$$C_E = C_1 + C_2 = 6 + 4 = 10\ \mu F$$

La ddp de la asociación en paralelo y por tanto de cada condensador:

$$V_f = \frac{Q_f}{C_E} = \frac{192 \cdot 10^{-12}}{10 \cdot 10^{-12}} = 19{,}2\ V$$

La carga de cada condensador, *fórmula [2.4]:*

$$Q_{1f} = V_E \cdot C_1 = 19{,}2 \cdot 4 \cdot 10^{-6} = 76{,}8\ \mu C$$

$$Q_{2f} = V_E \cdot C_2 = 19{,}2 \cdot 6 \cdot 10^{-6} = 115{,}2\ \mu C$$

b) La energía almacenada antes y después de conectar en paralelo. Explicar el resultado.

$$W_i = \frac{1}{2}C_1 \cdot V_{1i}^2 + \frac{1}{2}C_2 \cdot V_{2i}^2 = \frac{1}{2}4 \cdot 10^{-6} \cdot 12^2 + \frac{1}{2}6 \cdot 10^{-6} \cdot 24^2 = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

$$W_f = \frac{1}{2}C_1 \cdot V_{1f}^2 + \frac{1}{2}C_2 \cdot V_{2f}^2 = \frac{1}{2}4 \cdot 10^{-6} \cdot 19{,}2^2 + \frac{1}{2}6 \cdot 10^{-6} \cdot 19{,}2^2 = 1{,}8 \cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

La diferencia energética ($0{,}2 \cdot 10^{-3}$ J) existente entre la energía de los condensadores antes y después de conectarse en paralelo se debe a que durante la redistribución de la carga al conectarse en paralelo se produce calor en los conductores que unen las placas debido al paso de dichas cargas eléctricas, calor en el dieléctrico por el cambio de polarización, y energía radiada en forma electromagnética.

Ejercicio 2.19.9

Mediante una batería de 12 V se carga un condensador C_1 = 4 μF. Otro condensador C_2 = 6 μF se carga mediante una batería de 24 V. A continuación, estando los condensadores cargados, se desconectan de las respectivas baterías y se conectan los condensadores en serie (conectando todas las armaduras de signo contrario entre sí). Calcular:

a) La carga y ddp en cada condensador.

b) La energía almacenada antes y después de conectarlos en serie. Explicar el resultado.

Solución:

Los datos de este ejercicio son los mismos que los del ejercicio anterior, salvo que, ahora los condensadores se conectarán en serie.

a) La carga y ddp en cada condensador en la conexión en serie.

La carga inicial, *figura 2.24.a*, adquirida por el condensador C_1 es: $Q_{1i} = C_1 \cdot V_{1i} = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 48\ \mu\text{C}$

La carga inicial, *figura 2.24.a*, adquirida por el condensador C_2 es: $Q_{2i} = C_2 \cdot V_{2i} = 6 \cdot 10^{-6} \cdot 24 = 144\ \mu\text{C}$

A continuación se conectan en serie conectando las armaduras de signo contrario entre sí, *figura 2.23.b.*

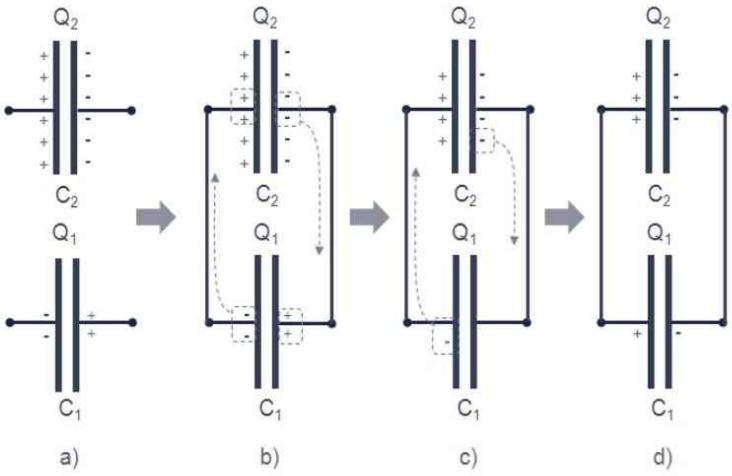


Figura 2.24. Conexión en serie de los condensadores del ejercicio 2.19.9

En la conexión se produce una neutralización de las cargas eléctricas: los -48 μC de la armadura izquierda de C_1 se desplazan hasta la armadura izquierda de C_2 neutralizando +48 μC de los +144 μC de dicha armadura, al mismo tiempo se produce un desplazamiento de -48 μC desde la armadura derecha de C_2 hasta la armadura derecha de C_1, neutralizando los +48 μC que contiene, *figura 2.24.b*. Los 96 μC restantes (144 - 48 = 96) del condensador C_2 se han de repartir con el condensador C_1, *figura 2.24.c*. Los +96 μC con la armadura izquierda de C_1 y los -96 μC con la armadura derecha de C_1. Nótese cómo ahora los condensadores quedan conectados en paralelo (armaduras de la misma polaridad unidas), *figura 2.24.d,* por lo que la ddp final de ambos condensadores es la misma y el reparto de cargas se realizará proporcionalmente a la capacidad de cada condensador ($Q = C \cdot V$)

Al quedar asociados en paralelo la capacidad equivalente es, *fórmula [2.26]:*

$$C_E = C_1 + C_2 = 6 + 4 = 10\ \mu F$$

La ddp de la asociación en paralelo y por tanto de cada condensador:

$$V_f = \frac{Q_f}{C_E} = \frac{96 \cdot 10^{-12}}{10 \cdot 10^{-12}} = 9{,}6\ V$$

La carga de cada condensador, *fórmula [2.4]:*

$$Q_{1f} = V_E \cdot C_1 = 9{,}6 \cdot 4 \cdot 10^{-6} = 38{,}4\ \mu C$$

$$Q_{2f} = V_E \cdot C_2 = 9{,}6 \cdot 6 \cdot 10^{-6} = 57{,}6\ \mu C$$

b) La energía almacenada antes y después de conectar en paralelo. Explicar el resultado.

$$W_1 = \frac{1}{2}C_1 \cdot V_{1i}^2 + \frac{1}{2}C_2 \cdot V_{2i}^2 = \frac{1}{2}4 \cdot 10^{-6} \cdot 12^2 + \frac{1}{2}6 \cdot 10^{-6} \cdot 24^2 = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

$$W_f = \frac{1}{2}C_1 \cdot V_f^2 + \frac{1}{2}C_2 \cdot V_{2f}^2 = \frac{1}{2}4 \cdot 10^{-6} \cdot 9{,}6^2 + \frac{1}{2}6 \cdot 10^{-6} \cdot 9{,}6^2 = 0{,}46 \cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

La diferencia energética ($1{,}54 \cdot 10^{-3}$ J) existente entre la energía de los condensadores antes y después de conectarse en serie se debe a que durante la redistribución de la carga al conectarse en serie se produce calor en los conductores que unen las placas debido al paso de dichas cargas eléctricas, calor en el dieléctrico por el cambio de polarización, y energía radiada en forma electromagnética.

Ejercicio 2.19.10

Un condensador plano de 100 cm^2, distancia entre armaduras 1 cm y dieléctrico aire se conecta a una batería de 100 V. Una vez cargado se desconecta de la batería y se introduce entre sus armaduras un dieléctrico de permitividad $\varepsilon_r = 7$ y ancho 0,5 cm. Una vez cargado y desconectado de la batería, calcular:

a) Antes de introducir el dieléctrico: capacidad del condensador, carga y densidad de carga de sus armaduras, campo eléctrico entre sus armaduras, desplazamiento eléctrico, ddp entre sus armaduras.

b) Después de introducir el dieléctrico: capacidad del condensador, carga y densidad de carga de sus armaduras, campo eléctrico entre sus armaduras, desplazamiento eléctrico, ddp entre sus armaduras.

Solución:

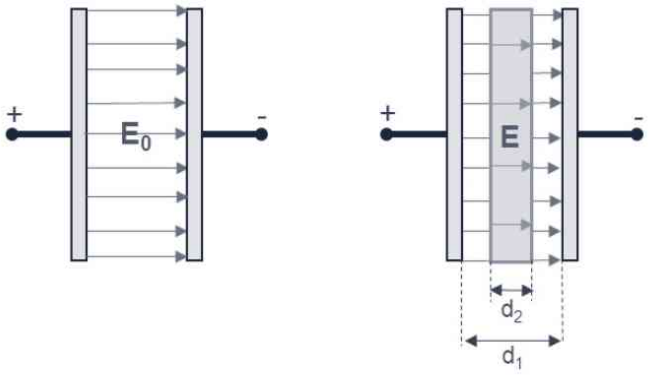


Figura 2.25. Condensador sin dieléctrico y con dieléctrico. Ejercicio 2.19.10

a) Antes de introducir el dieléctrico, *figura 2.25 izquierda*:

Capacidad del condensador, *fórmula [2.5]:*

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d} = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{100\cdot 10^{-4}}{1\cdot 10^{-2}} = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \text{F} = 8{,}85\ \text{pF}$$

Carga eléctrica, *fórmula [2.4]:*

$$Q = C\cdot V = 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 100 = 8{,}85\cdot 10^{-10}\ \text{C} = 0{,}885\ \text{nC}$$

La densidad superficial de carga de sus armaduras:

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{0{,}885\cdot 10^{-9}}{100\cdot 10^{-4}} = 88{,}5\cdot 10^{-9}\ \text{C/m}^2 = 88{,}5\ \text{nC/m}^2$$

Campo eléctrico, *fórmula [1.11*]:

$$E_0 = \frac{V}{d} = \frac{100}{1\cdot 10^{-2}} = 10^4\ \text{V/m}$$

Desplazamiento eléctrico, *fórmula [2.19]* o por la *fórmula [2.22]:*

$$D = \varepsilon_0\cdot E_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 10^4 = 8{,}85\cdot 10^{-8}\ \text{C/m}^2$$

$$\Phi_D = Q_{\text{Libres}} \Rightarrow D\cdot S = Q_{\text{Libres}} \Rightarrow D = \frac{Q_{\text{Libres}}}{S} = \sigma_{\text{Libres}} = \frac{8{,}85\cdot 10^{-10}}{100\cdot 10^{-4}} = 8{,}85\cdot 10^{-8}\ \text{C/m}^2$$

La ddp entre sus armaduras sigue siendo 100 V, pues no ha variado ni la carga ni la capacidad ($V = Q/C$).

b) Después de introducir el dieléctrico, *figura 2.25 derecha*:

Para calcular la capacidad del condensador no se puede aplicar la fórmula $C = \varepsilon \cdot S/d$, *fórmula [2.5]*, pues el dieléctrico no ocupa la totalidad del espacio entre las armaduras. Pero se puede calcular la capacidad mediante la *fórmula [2.4], $Q = C \cdot V$.*

La carga eléctrica *de sus armaduras* permanece constante: 0,885 nC.

La *densidad* superficial de carga de sus armaduras ($\sigma = D$) permanece constante: 88,5 nC/m^2.

Para obtener la ddp entre sus armaduras se ha de tener en cuenta que el dieléctrico no ocupa todo el espacio entre ellas, sino que existe el campo E_0 en el recorrido $d_1 - d_2$ y el campo E en el recorrido d_2, por lo que la ecuación anterior toma la forma:

$$V = E_0 \cdot (d_1 - d_2) + E \cdot d_2$$

Por otra parte, se tiene, para el desplazamiento eléctrico D, el campo eléctrico en el aire E_0, y el campo eléctrico en el dieléctrico E:

$$D = \varepsilon_0 \cdot E_0 = \sigma = 8{,}85 \cdot 10^{-8}\ C/m^2 \Rightarrow E_0 = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-8}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}} = 10^4\ V/m$$

$$D = \varepsilon \cdot E = 8{,}85 \cdot 10^{-8}\ C/m^2 \Rightarrow E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-8}}{7 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} = 1.428\ V/m$$

Lo que permite calcular la ddp V entre las armaduras:

$$V = E_0 \cdot (d_1 - d_2) + E \cdot d_2 = 10^4 \cdot (1-0{,}5) \cdot 10^{-2} + 1.428 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-2} = 57{,}14\ V$$

Nótese cómo el desplazamiento eléctrico D es el mismo en los dos dieléctricos, aire y el de permitividad $\varepsilon_r = 7$, pero no así el campo eléctrico, que es E_0 y E respectivamente.

Capacidad del condensador:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{88{,}5 \cdot 10^{-9}}{57{,}14}\ 15{,}6 \cdot 10^{-12}\ F = 15{,}6\ pF$$

Capítulo 3

CORRIENTE CONTINUA

Objetivos:

- Definir los conceptos de circuito eléctrico y elementos pasivos y activos en los circuitos.
- Identificar las partes de un circuito eléctrico.
- Diferenciar diferentes tipos de corrientes.
- Definir las magnitudes fundamentales en electrocinética: intensidad de la corriente, densidad de corriente, tensión, fuerza electromotriz, fuerza contraelectromotriz, trabajo eléctrico, potencia eléctrica, resistencia eléctrica.
- Relacionar las magnitudes de un circuito eléctrico con su unidad de medida correspondiente y su aparato de medida.
- Establecer la ley de Ohm.
- Definir la resistividad, y conocer su dependencia con la temperatura.
- Conocer los efectos energéticos de la corriente eléctrica y el efecto Joule.
- Emplear el calor específico de los cuerpos para determinar la elevación de su temperatura.
- Relacionar el calentamiento de un conductor con su resistencia y la intensidad que circula por él.

- Calcular la resistencia equivalente de asociaciones de resistencias, en serie, en paralelo y mixta.
- Determinar la caída de tensión en una línea eléctrica.
- Determinar la sección de un conductor atendiendo a criterios térmicos, de caída de tensión y de protección.
- Distinguir los diferentes tipos de generadores de tensión y de intensidad.
- Conocer la equivalencia entre asociaciones de fuentes.
- Realizar transformaciones entre fuentes de tensión y de intensidad.
- Exponer situaciones prácticas observables que ayuden a entender los contenidos de esta unidad didáctica.
- Resolver ejercicios y problemas con contenidos propios de esta unidad didáctica.

3.1 ELECTROCINÉTICA. CIRCUITO ELÉCTRICO. ELEMENTOS ACTIVOS Y PASIVOS EN LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS

En la Electrostática se estudian los sistemas constituidos por cargas eléctricas en **reposo**, ya sean puntuales o distribuidas de forma continua. En Electrocinética se estudia el **movimiento** de las cargas eléctricas a través de los medios materiales sólidos, líquidos y gaseosos.

El conjunto de elementos a través de los cuales pueden circular las cargas eléctricas se denomina **circuito eléctrico**. Estos elementos pueden ser: **activos** (generador de tensión, generador de intensidad), que suministran energía eléctrica al circuito, o **pasivos** (resistencia R, condensador C, bobina L, otros) que, disipan, almacenan energía eléctrica o transforman la energía eléctrica en otro tipo de energía, *figura 3.1.*

Un circuito eléctrico excitado mediante elementos activos produce, en su régimen permanente, una respuesta que es función de los diferentes elementos que lo componen y de la forma de la función de excitación, teniéndose las siguientes variables: carga eléctrica Q, intensidad de la corriente i, diferencia de potencial (ddp) o tensión v y potencia p. Previo al régimen permanente existe un régimen transitorio, de duración muy pequeña, que es característico de cada circuito (p. ej., carga de un condensador) y que se estudiará en próximos capítulos.

Para los valores de las variables que dependan del tiempo se utiliza la expresión minúscula (p. ej., *i, v, p*) y para los valores que no dependan del tiempo la expresión mayúscula (p. ej., *I, V, P*).

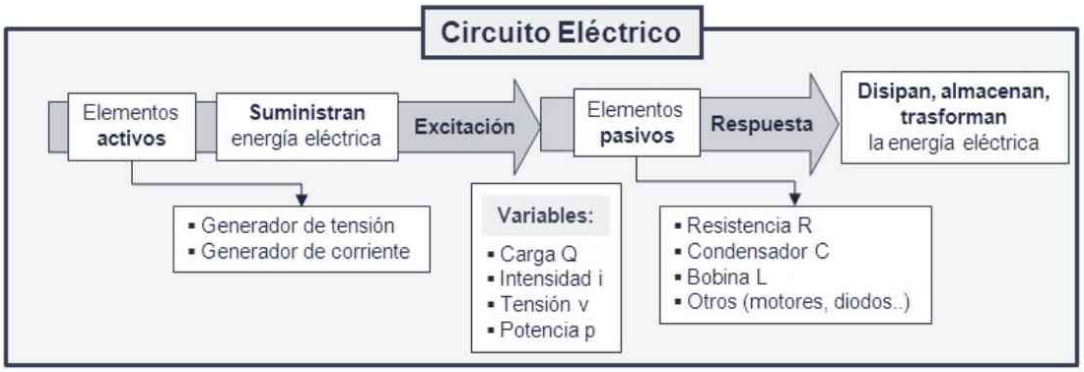


Figura 3.1. Circuito eléctrico: elementos activos, pasivos y variables

Además de los elementos activos y pasivos mencionados, pueden existir otros elementos en un circuito eléctrico, de tal manera que un circuito básico, *figura 3.2,* está formado por:

- El **generador**, el elemento activo, que comunica energía eléctrica a los electrones haciendo posible que exista ddp en el circuito. Esto se consigue mediante la transformación de alguna forma de energía en energía eléctrica (p.ej., la batería, que transforma energía química en eléctrica).

- El **receptor**, el elemento pasivo, que transforma la energía eléctrica recibida en otro tipo de energía (p. e., una lámpara que transforma la energía eléctrica en lumínica y calorífica).

- Los **conductores** que unen los distintos elementos del circuito permitiendo el paso de la corriente eléctrica (p .ej., conductores de Cu).

- **Elementos de control**, que controlan las variables del circuito, por ejemplo, un **interruptor**, que abre o cierra el circuito impidiendo o permitiendo, respectivamente, el paso de la corriente eléctrica. Otros elementos de control son: los conmutadores, los termostatos, los seccionadores, etc.

- **Elementos de protección del circuito**, que tienen la misión de proteger la instalación, por ejemplo, el **fusible**, que abre (fundiéndose) el circuito cuando por él circula una intensidad superior para la que fue calculado. Otros elementos de protección son los interruptores automáticos (por sobreintensidad, sobretensión, etc.).

- **Elemento de protección para el usuario**, en los casos de que exista riesgo para las personas (p.ej., la protección mediante interruptor diferencial).

- **Elementos de medida**, que permiten conocer las variables eléctricas del circuito (p. ej., el amperímetro).

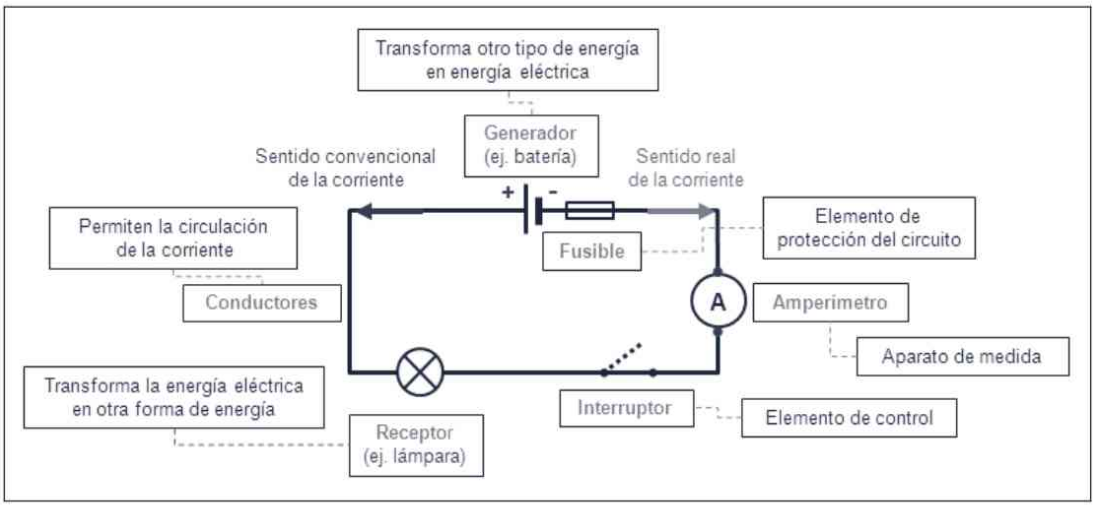
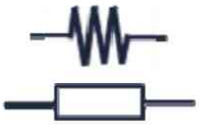


Figura 3.2. Circuito eléctrico: elementos básicos

En la *tabla 3.1*, se muestran algunos elementos, y su simbología, de uso frecuente.

Elemento	Símbolo	Elemento	Símbolo
Batería		Fuente de tensión	
Conductor		Fuente de intensidad	
Interruptor		Motor	
Interruptor automático		Resistencia	

Conexión		Resistencia variable	
Fusible		Condensador	
Pulsador		Bobina	
Lámpara		Masa	

Tabla 3.1. Simbología de algunos elementos eléctricos de uso frecuente

La excitación de un circuito eléctrico puede ser debida, *figura 3.3,* a una magnitud:

- **Unidireccional**, que supone la circulación de cargas eléctricas en un solo sentido, que a su vez puede ser:
  - *Constante en el tiempo* (corriente continua, abreviado CC en español, ***DC*** en inglés de *direct current*).
  - *Periódica*. Existe un ciclo que se repite.
  - *No periódica*. No existe un ciclo que se repita.
- **Alterna**, que supone la circulación de cargas eléctricas en los dos sentidos, que a su vez puede ser:
  - *Periódica sinusoidal* (corriente alterna, abreviado CA en español, AC en inglés de *alternating current*). Un ciclo de forma sinusoidal se repite periódicamente.
  - *Periódica no sinusoidal*. Existe un ciclo no sinusoidal que se repite.
  - *No periódica*. No existe un ciclo que se repita.

En Electrotecnia las formas más frecuentes de la señal de excitación (tensión v o intensidad i) son, la continua, en los circuitos de corriente continua (CC) y la alterna sinusoidal, en los circuitos de corriente alterna (CA).

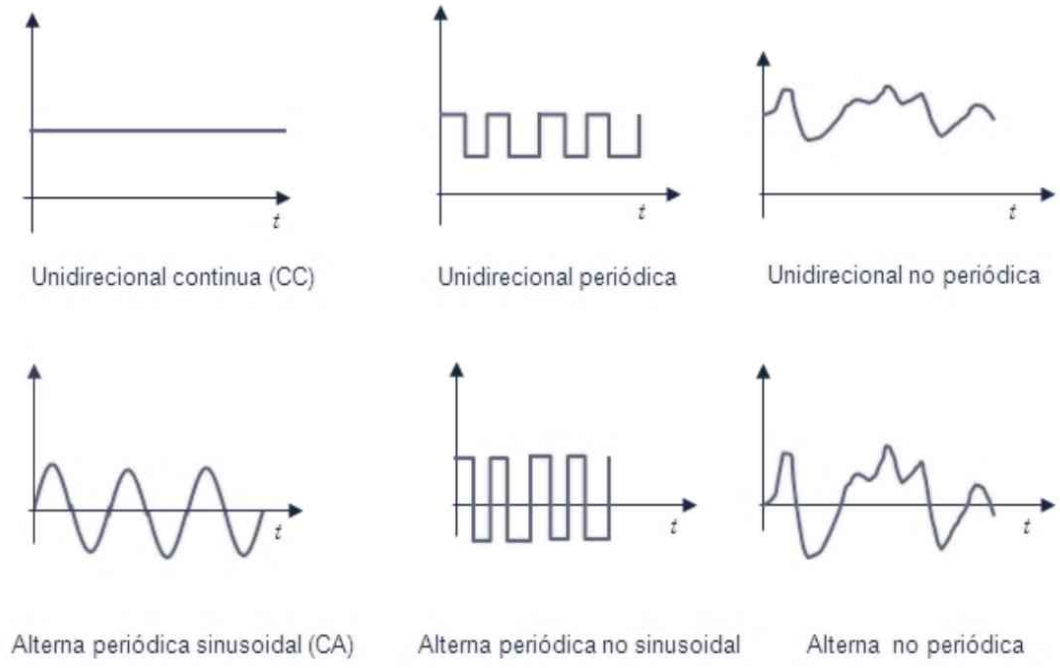


Figura 3.3. Diferentes formas de excitación de un circuito eléctrico

3.2 CORRIENTE ELÉCTRICA. INTENSIDAD DE LA CORRIENTE

En los capítulos anteriores se explicó cómo al poner en contacto dos **conductores** a diferente potencial se produce una circulación de cargas eléctricas desde el conductor de mayor potencial al del menor potencial. Esta circulación de cargas eléctricas constituye una corriente eléctrica.

Este es un proceso similar al que ocurre al comunicar dos depósitos que contienen un líquido con diferentes alturas, *figura 3.4.a.* Al abrir la llave de paso P_1 se produce una circulación de agua desde el depósito de mayor altura hacia el depósito de menor altura, hasta que las alturas se igualen, *figura 3.4.b.* Si se quiere que el flujo de agua continúe se ha de producir un nuevo desequilibrio de alturas, por ejemplo, mediante una bomba B, *figura 3.4.c.* De forma análoga, la circulación de cargas entre los dos conductores comienza al cerrarse el interruptor P_1 y finaliza cuando se hayan igualado sus potenciales. Si se quiere que el flujo de cargas continúe se ha de producir una nueva diferencia de potencial, por ejemplo, mediante un generador E, como se verá en el próximo apartado.

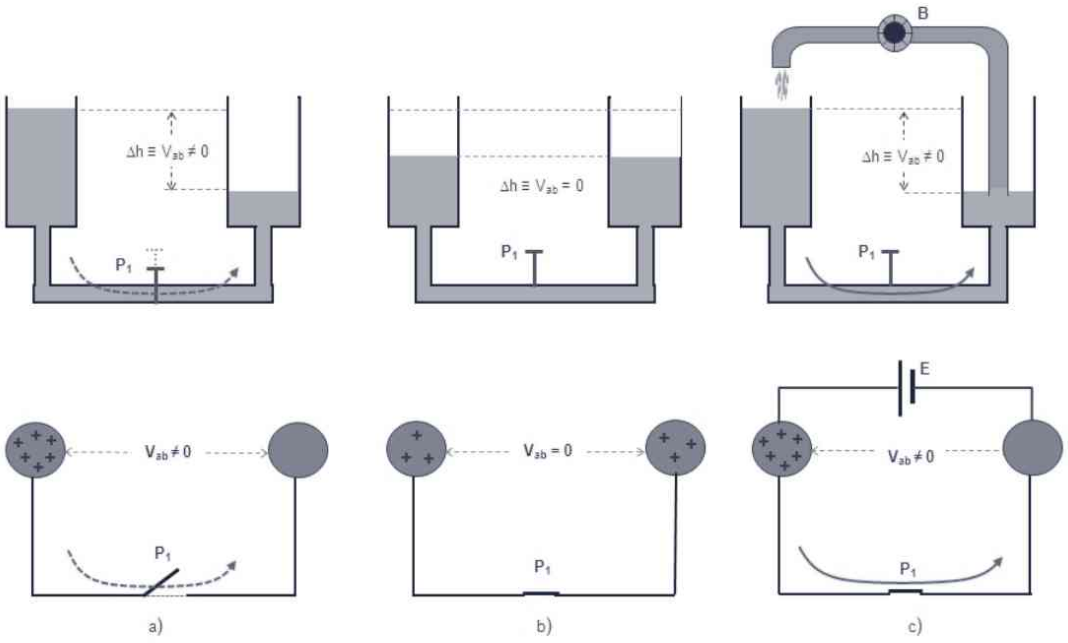


Figura 3.4. Circuito hidráulico y circuito eléctrico

Se denomina, *figura 3.5.a,* **intensidad *I*** de la corriente (valor medio) a la cantidad de cargas eléctricas *Q* que pasan por una sección transversal *S* de un conductor en un determinado tiempo *t*:

$$I = \frac{Q}{t} \qquad [3.1]$$

Cuando interesa el valor **instantáneo de la intensidad *i*** de la corriente se tendrá que considerar un tiempo muy pequeño Δt (tal que $\Delta t \rightarrow 0$) al que le corresponderá una carga ΔQ, *figura 3.5.b.*

$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad [3.2]$$

La unidad de intensidad en el SI es el culombio/segundo (C/s) y se le denomina **amperio** (A), en honor del científico francés A. M. Ampére (1775-1836).

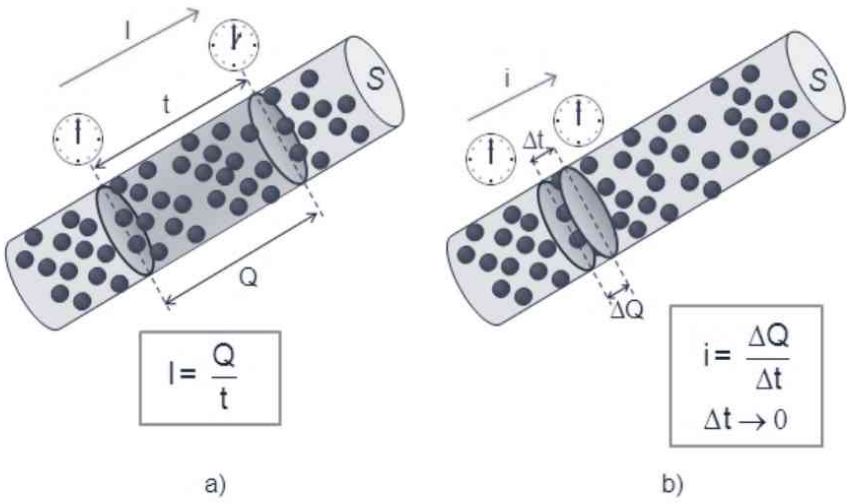


Figura 3.5

La corriente eléctrica, como se ha visto en el *capítulo 1*, **en los conductores sólidos**, es debida a un flujo de electrones, y por tanto su sentido es del polo negativo al polo positivo en el exterior de los generadores (*sentido real de la corriente*). Pero esto no se sabía cuando se hicieron los primeros estudios en el siglo XIX, adoptando los científicos de aquella época como sentido de la corriente eléctrica el sentido del desplazamiento de las cargas eléctricas positivas. En este caso, como las cargas se desplazan en el sentido de potenciales decrecientes (*apartado 1.9*), su sentido ha de ser del polo + al polo negativo – en el exterior de los generadores (*sentido convencional de la corriente)* y del polo negativo al positivo en el interior de los generadores (aumento del potencial de los electrones). Puesto que el movimiento de partículas de carga negativa en un sentido es equivalente al movimiento de partículas positivas en sentido contrario, *figura 3.6*, utilizar un sentido u otro no influye en la aplicación de las leyes eléctricas ni en el desarrollo de los cálculos. En este libro, si no se dice lo contrario, se considera el sentido de la corriente convencional. Por otra parte, la corriente eléctrica no siempre es debida a electrones, puede deberse a otros tipos de cargas (iones positivos, iones negativos y "huecos").

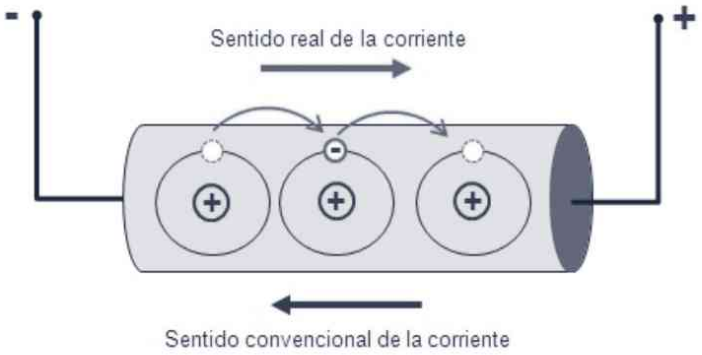


Figura 3.6. Sentido de la corriente en los conductores metálicos

Observa:

Puesto que no existe retardo entre la conexión de un circuito y sus efectos, por ejemplo, entre pulsar un interruptor y ver la luz, se suele pensar que en un circuito eléctrico los electrones se desplazan a gran velocidad, comparable con la velocidad de la luz. Pero esto no es así. Es el campo eléctrico el que se propaga a la velocidad de la luz por el cable, poniendo en movimiento todos los electrones del conductor, pero los electrones se mueven a una velocidad pequeñísima (se demuestra en el párrafo siguiente). Los electrones que pasan por la bombilla son los que producen la luz y no los que pasan por el interruptor, que llegarán, si se mantiene el interruptor cerrado, muchísimo tiempo después. Ocurre algo similar con la transmisión de un líquido en un circuito hidráulico, *figura 3.4.a.* Cuando se abre la llave de paso P_1, si existe agua en ambos depósitos, el depósito de la derecha comienza a subir casi inmediatamente debido a que llega agua, pero no es el agua que acaba de pasar por la llave, que llegará mucho después, sino el líquido próximo al depósito derecho que es "empujado" por la masa del líquido anterior a él.

Observa:

La corriente es algo más que electrones. Efectivamente, los metales sólidos, en los que la corriente eléctrica es un flujo de electrones, como se ha visto, no son los únicos conductores posibles. Existen muchas sustancias (líquidos y gases) en las que los átomos cargados positivamente (iones) se mueven, y crean una corriente eléctrica (corriente iónica). Entonces, una corriente eléctrica puede ser un flujo de cargas positivas, o un flujo de cargas negativas, o ambos flujos de forma simultánea. El tipo de flujo y por tanto el sentido de la corriente, vendrá determinado por el conductor.

Por ejemplo, en un circuito formado por una batería, una bombilla y el cable que los une, a lo largo del cable y del filamento de la bombilla habrá una corriente de electrones; pero en el interior (líquido) de la batería hay corrientes de iones positivos y negativos, no hay una corriente de electrones. En el exterior de la batería, los electrones fluyen del terminal positivo al negativo. Sin embargo, en el interior las cargas (iones) fluyen en ambos sentidos.

3.3 DENSIDAD DE CORRIENTE. VELOCIDAD DE ARRASTRE

Se define la **densidad de corriente *J*** en un conductor como un **vector** que en cada punto del mismo tiene la dirección y sentido del movimiento de las cargas positivas y cuyo módulo es igual a la intensidad que atraviesa la unidad de superficie normal al movimiento de las cargas.

Si interesa el valor medio o la distribución de cargas es uniforme en toda la sección, este flujo de cargas a través de una superficie *S* supone una densidad de corriente ***J*** cuyo módulo tiene la expresión:

$$J = \frac{I}{S} \qquad [3.3]$$

Su unidad es A/mm^2.

Si la densidad de corriente no es uniforme en toda la sección, habrá que considerar una sección ΔS (a la que le corresponde una intensidad Δi) lo suficientemente pequeña en la que se pueda considerar uniforme, es decir:

$$j = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta i}{\Delta S} \qquad [3.4]$$

La velocidad v_a con que se mueven las cargas que originan la corriente eléctrica se llama **velocidad de arrastre** de las cargas libres. En la *figura 3.7 se* muestra un cilindro imaginario en el interior de un conductor. Supóngase que los electrones libres del conductor se mueven hacia la derecha. La sección *S* es perpendicular a la dirección en que se mueven los electrones libres. La longitud del cilindro se elige igual a la longitud que recorren los electrones libres en un tiempo Δt, es decir, $\Delta L = v_a \cdot \Delta t$. En el tiempo Δt la carga eléctrica ΔQ contenida en dicho cilindro atravesará la superficie *S*, los que estén fuera del cilindro no atravesarán la superficie. Si *n* es el número de electrones libres que hay en cada unidad de volumen (e^-/cm^3), los que se encuentran en el interior del cilindro serán $n \cdot S \cdot v_a \cdot \Delta t$. Como cada electrón tiene una carga $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C (*apartado 1.2,*) la carga que atravesará la superficie *S* será, $\Delta Q = q \cdot n \cdot S \cdot v_a \cdot \Delta t$, la intensidad $I = \Delta Q/\Delta t = q \cdot n \cdot S \cdot v_a$, la densidad de corriente $J = I/S = q \cdot n \cdot v_a$, de donde se puede obtener la velocidad v_a:

$$v_a = \frac{J}{n \cdot q} \qquad [3.5]$$

Por ejemplo, para un conductor de cobre con una densidad de corriente de 2 A/mm^2, frecuente en algunas instalaciones, como el cobre tienen unos $8{,}5 \cdot 10^{22}$ electrones libres por cada cm^3, se tiene para la velocidad de los electrones una velocidad de:

$$v_a = \frac{J}{n \cdot q} = \frac{2 \cdot 10^2}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 8{,}5 \cdot 10^{22}} = \frac{2 \cdot 10^2}{13{,}6 \cdot 10^3} = 0{,}015 \text{ cm/seg}$$

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

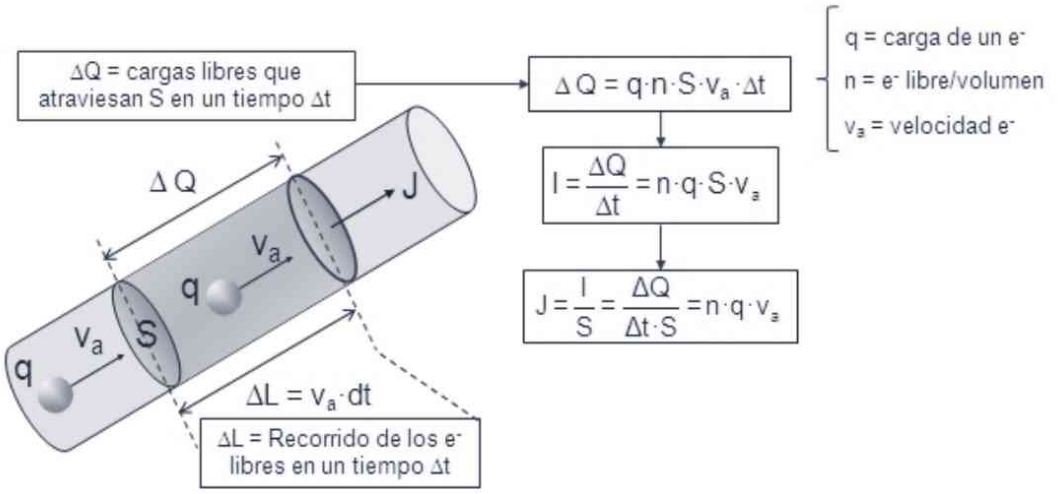


Figura 3.7. Densidad de corriente ***J*** *y velocidad de arrastre* $\mathbf{v_a}$

En general cualquiera que sea el signo de la carga de los portadores, la densidad de corriente a que dan lugar siempre tiene el sentido del campo, pues sometidas a un campo eléctrico E, las cargas libres positivas se desplazan en el sentido del campo eléctrico y el vector densidad de corriente **J** ($\mathbf{J} = n \cdot q \cdot \mathbf{v_a}$) es positivo (q y v_a positivos $\Rightarrow$ **J** positivo), las cargas libres negativas se desplazan en sentido contrario al campo, pero el vector densidad de corriente **J** es también positivo (q y $\mathbf{v_a}$ negativos $\Rightarrow$ **J** positivo).

Mediante el cálculo diferencial, las *fórmulas [3.2] y [3.4],* se puede poner en la forma:

$$i = \frac{dQ}{dt} \qquad [3.6]$$

$$j = \frac{di}{ds} \qquad [3.7]$$

3.4 DIFERENCIA DE POTENCIAL. TENSIÓN. FUERZA ELECTROMOTRIZ. DIPOLO ELÉCTRICO

En el *apartado 1.9* se definió el concepto de **diferencia de potencial eléctrico** (ddp) V_{ab}, entre dos puntos como "el trabajo desarrollado por el campo eléctrico para trasladar la unidad de carga positiva entre dichos puntos", es decir:

$$V_{ab} = \frac{W}{q} \qquad [3.8]$$

La unidad de tensión en el SI es el julio/culombio (J/C) y se le denomina **voltio** (V), en honor del físico italiano Alessandro Volta (17454-1827).

Como la ddp puede ser función del tiempo, para su valor instantáneo se tiene:

$$v = \frac{\Delta W}{\Delta q} \qquad \Delta q \to 0 \qquad [3.9]$$

En Electrotecnia a la ddp también se le suele denominar **tensión eléctrica**.

Recibe el nombre de **dipolo**, *figura 3.8,* un circuito que presenta dos terminales *a* y *b* accesibles. Conectado a una ddp V_{ab} (el primer subíndice representa el punto de mayor tensión, positivo, y el segundo subíndice el de menor tensión, negativo); se pueden dar dos casos: que la corriente entre por el terminal *a* y salga por el terminal *b*, se trata de un *dipolo receptor* (consume energía eléctrica), se tiene una caída de tensión de *a* a *b,* o bien, que la corriente salga por el terminal *a* y entre por el terminal *b*, se trata de un *dipolo generador* (suministra energía eléctrica), se tiene una elevación de tensión de *b* a *a.*

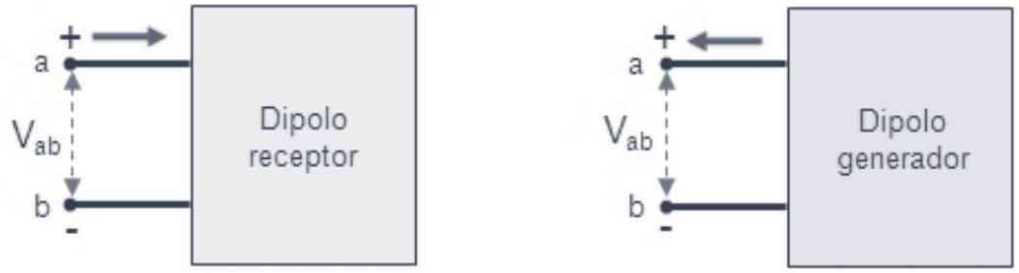


Figura 3.8. Dipolo eléctrico: tensión y corriente

Como se ha visto en el *apartado 3.2*, para que exista una circulación de cargas eléctricas entre dos puntos es preciso mantener una diferencia de potencial (ddp) entre los mismos. En los circuitos eléctricos esto se consigue mediante un generador (fuente) de fuerza electromotriz (fem) *E*. Un generador de fem comunica energía a las cargas eléctricas que pasan por él. Básicamente, lo que produce es una separación de cargas mediante un método químico (p. e.,, una batería), electromecánico (p. e., una dinamo), lumínico (p. e., un panel solar), etc. En el símil hidráulico de la *figura 3.4*, equivaldría a la bomba *B*, la cual comunica energía potencial al agua que circula por ella, permitiendo mantener una diferencia de alturas entre los depósitos.

Si por el generador pasa una carga *q* y se le suministra una energía eléctrica *W* se define la **fuerza electromotriz (fem)** ***E*** del generador como "*la energía eléctrica comunicada a la unidad de carga por la fuente*", es decir:

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

$$E = \frac{W}{q} \qquad [3.10]$$

La fem *E* puede ser de origen magnético, químico, térmico, etc., pero su efecto es el mismo: aplicar energía a cada unidad de carga eléctrica.

Por tanto, siendo sus fórmulas iguales, la unidad de la fem *E* es la misma que la de la ddp *V*, es decir, el voltio.

Nótese que, aunque la letra *E* es utilizada tanto para designar la *fem* de un generador como *el campo eléctrico*, son magnitudes diferentes.

3.5 TRABAJO ELÉCTRICO. POTENCIA ELÉCTRICA

Cuando una carga eléctrica *Q* se desplaza entre dos puntos entre los que existe una ddp V_{ab}, realiza un **trabajo eléctrico** cuyo valor se puede obtener a partir de la *fórmula [1.11]:*

$$W = Q \cdot V_{ab} \qquad [3.11]$$

La unidad de trabajo en el SI es el **julio** [julios (J) = culombios (C) · voltios (V)].

Se define la **potencia** como el trabajo realizado por la unidad de tiempo. Para valores medios se tiene:

$$P = \frac{W}{t} \qquad [3.12]$$

Sustituyendo en la fórmula anterior *W* por su valor, $W = Q \cdot V_{ab}$, y como, $Q = I \cdot t$, se tiene para la **potencia eléctrica *P***:

$$P = V_{ab} \cdot I \qquad [3.13]$$

Para valores instantáneos de la potencia se debe tomar un tiempo tan pequeño en el que el trabajo se pueda considerar constante, es decir:

$$p = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = v \cdot i \qquad [3.14]$$

Puesto que en cada instante la potencia, $p = v \cdot i$, depende de dos variables *v* e *i*, habrá que tener en cuenta los sentidos de ambas para obtener el sentido de la potencia. En el dipolo de la *figura 3.8,* el dipolo se comporta como un receptor de energía eléctrica si la

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

corriente entra por el terminal positivo del dipolo, $p > 0$. Si la corriente sale por el terminal positivo del dipolo entonces el dipolo se comporta como generador de energía eléctrica, $p < 0$.

En honor de James Watt (1736-1819) la unidad de potencia en el sistema SI es el **vatio** [vatios (W) = julios (J)/seg (s)] = voltios (V) · amperios (A)].

En Electrotecnia son submúltiplos y múltiplos frecuentes de la potencia los siguientes: milivatio (mW), kilovatio (kW), megavatio (MW), gigavatio (GW) y teravatio (TW). La equivalencia entre ellos es:

$$1\ \text{mW} = 10^{-3}\ \text{W}$$

$$1\ \text{kW} = 10^{3}\ \text{W}$$

$$1\ \text{MW} = 10^{6}\ \text{W} = 10^{3}\ \text{kW}$$

$$1\ \text{GW} = 10^{9}\ \text{W} = 10^{3}\ \text{MW}$$

$$1\ \text{TW} = 10^{12}\ \text{W} = 10^{3}\ \text{GW}$$

En la *tabla 3.2* se muestran las potencias medias de algunos receptores domésticos.

Teniendo en cuenta las *fórmulas [3.12]* y *[3.13]*, se puede expresar la **energía eléctrica** en la forma:

$$W = P \cdot t \qquad [3.15]$$

$$W = V_{ab} \cdot I \cdot t \qquad [3.16]$$

Aunque la unidad de trabajo eléctrico es el julio, como es una unidad demasiado pequeña para las cifras que usualmente se utilizan en Electrotecnia, se suele utilizar más frecuentemente el **kW · h**. A partir de la *fórmula [3.15]*, como una hora tiene 3.600 segundos, se obtiene la equivalencia entre ambas unidades:

$$1\ \text{kW} \cdot \text{h} = (1.000\ \text{J/s}) \cdot 3.600\ \text{s} = 3{,}6 \cdot 10^{6}\ \text{J}$$

Así pues, si se quiere expresar la energía en kW · h, en la *fórmula [3.15]* se ha de expresar la potencia en kW y el tiempo en horas, es decir:

$$W\,(\text{kW.h}) = P(\text{kW}) \cdot t(\text{h}) \qquad [3.17]$$

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Si se quiere saber el coste de cierto consumo de energía eléctrica W, si 1 kW · h tiene un coste de G euros, el coste en € es:

$$\text{Coste (€)} = W\ (\text{kW} \cdot \text{h}) \cdot G\ (\text{€/kW} \cdot \text{h}) \qquad [3.18]$$

A veces la potencia de algunas máquinas, especialmente para referirse a su potencia útil, se expresa en **caballos** (*CV*, caballos de vapor) o en ***HP*** (horsepower). Aunque a veces se utilizan indistintamente ambas expresiones, por ser muy próximos sus valores, la equivalencia es:

$$1\ \text{CV} = 736\ \text{W}$$

$$1\ \text{HP} = 746\ \text{W} = 1{,}0138\ \text{CV}$$

Potencias medias de receptores domésticos			
Nombre	**Potencia** (1)	**Coste c€/h** (2)	**Equivalencia**
Bombilla bajo consumo	20	0,2	1 X
Bombilla incandescente	100	1	5 X
TV/vídeo	200	2	10 X
Ordenador	250	2,5	25 X
Frigorífico	300	3	30 X
Microondas	800	8	40 X
Plancha	1.000	10	50 X
Termo eléctrico	1.500	15	75 X
Aspiradora	1.600	16	80 X
Cocina vitrocerámica	2.000	20	100 X
Lavadora de agua caliente	2.500	25	125 X

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Lavavajillas	2.500	25	125 X
Horno	2.800	28	140 X
Aire acondicionado	3.000	30	150 X

(1) Potencia media del receptor.

(2) Coste en céntimos de euros (c€) en una hora continua de funcionamiento (1 kW · h ~ 0,10 €).

Tabla 3.2. Potencias medias de receptores domésticos

Observa:

- Se debe prestar especial atención al kW · h como unidad de energía pues es frecuente hacer referencia a él como una unidad de potencia. Por ejemplo, una lámpara de 1.000 W encendida durante 1 hora supone un consumo energético de $W = p \cdot t = (1000/1000) \cdot 1 = 1$ kW · h. Es incorrecto decir que dicha lámpara tiene una potencia de 1 kW · h, o que consume una potencia de 1 kW · h.

- En la factura de energía eléctrica de una vivienda, además de otros conceptos, aparece el de "consumo eléctrico" en kWh y el de "importe" en €.

3.6 LEY DE OHM

Considérese un conductor eléctrico metálico de longitud *ab* y de sección circular y uniforme *S*, entre cuyos extremos se establece una ddp constante V_{ab}, *figura 3.9*, lo que da lugar a un campo eléctrico *E* en el interior del conductor. Debido al campo eléctrico cada electrón se verá sometido a una fuerza $\boldsymbol{F} = -q \cdot \boldsymbol{E}$. Si los electrones estuvieran en el vacío, esta fuerza produciría una aceleración que la impulsaría a grandes velocidades, sin embargo, en un medio metálico sólido, existe una red atómica ordenada que interfiere en mayor o menor medida con este movimiento, Los electrones son acelerados constantemente, y al mismo tiempo experimentan cambios de velocidad como consecuencia de los choques o interacciones. Como consecuencia se llega a una situación de equilibrio donde los incrementos de velocidad de las partículas son compensados por los choques, alcanzándose así una velocidad media de equilibrio $\boldsymbol{v_a}$.

Previo a la conexión a la ddp V_{ab}, los electrones de valencia del conductor se mueven de forma desordenada por el mismo, formando una nube electrónica (*apartado 1.3*). La conexión a la ddp y el establecimiento del campo eléctrico correspondiente, modifica la trayectoria de los electrones, pues cada uno de ellos está sometido a una fuerza $\boldsymbol{F} = -q \cdot \boldsymbol{E}$, en el sentido opuesto al campo, *figura 3.9*. Como consecuencia, a los

movimientos desordenados de los electrones se superpone un movimiento de conjunto, moviéndose los electrones hacia el extremo del conductor de potencial positivo, a una *velocidad de arrastre* $\boldsymbol{v_a}$ produciéndose una corriente eléctrica *i.*

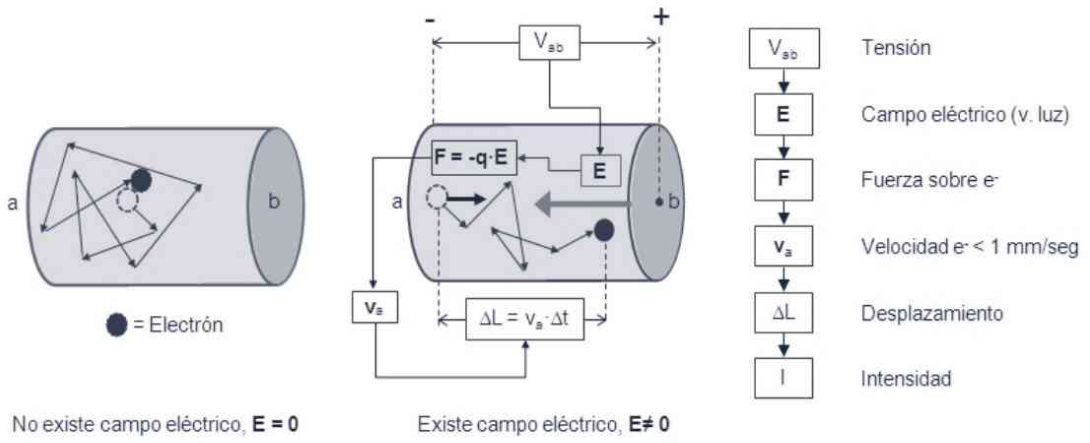


Figura 3.9. Fuerza sobre los electrones en un conductor

Para muchos materiales conductores, se cumple que la densidad de corriente en el conductor es proporcional al campo eléctrico en el interior del mismo, es decir:

$$\mathbf{J} = \gamma \cdot \mathbf{E} \qquad [3.19]$$

La constante de proporcionalidad γ se denomina *conductividad* del conductor, y es independiente del campo eléctrico aplicado *E*. Los materiales en los cuales se verifica esta relación de proporcionalidad se denominan materiales *óhmicos* (p. ej.,Cu, Al y la mayoría de los metales). Existen materiales que no cumplen esta relación de proporcionalidad y se les denominan *no óhmicos* (p. ej.,los semiconductores).

La ecuación anterior es la expresión general de la ley de Ohm, que dice:

"*En los materiales óhmicos la densidad de corriente* ***J*** *es proporcional al campo eléctrico aplicado* ***E*** *y depende de la conductividad γde dicho material*".

En Electrotecnia es más habitual trabajar con la intensidad, que con la densidad de corriente y, también, con diferencias de potencial que con campo eléctrico. Por ello, lo más frecuente es expresar la Ley de Ohm en función de la intensidad y la diferencia de potencial, como se demuestra a continuación, *figura 3.10*.

Como se ha visto, una diferencia de potencial V_{ab} entre dos puntos del conductor crea un campo eléctrico y una corriente en el mismo. Considerando una densidad de corriente uniforme en el conductor, $J = I/S$, *fórmula [3.3]*, como la ddp se obtiene por, $V_{ab} = E \cdot d$, *fórmula [1.11],* sustituyendo en la *ecuación [3.19],* se tiene:

$$\frac{I}{S} = \gamma \frac{V_{ab}}{L} \Rightarrow V_{ab} = \frac{L}{\gamma \cdot S} I$$

Se llama *resistividad* ρ a la inversa de la conductividad γ:

$$\rho = \frac{1}{\gamma} \qquad [3.20]$$

Llamando resistencia eléctrica R del conductor a:

$$R = \frac{\rho \cdot L}{S} \qquad [3.21]$$

Se obtiene finalmente:

$$V_{ab} = I \cdot R \qquad [3.22]$$

Que es la forma más conocida de la Ley de Ohm, que dice:

"*La ddp V en los extremos de un conductor óhmico por el que circula una intensidad I es directamente proporcional a dicha corriente y depende de una constante característica de cada conductor denominada resistencia eléctrica R*".

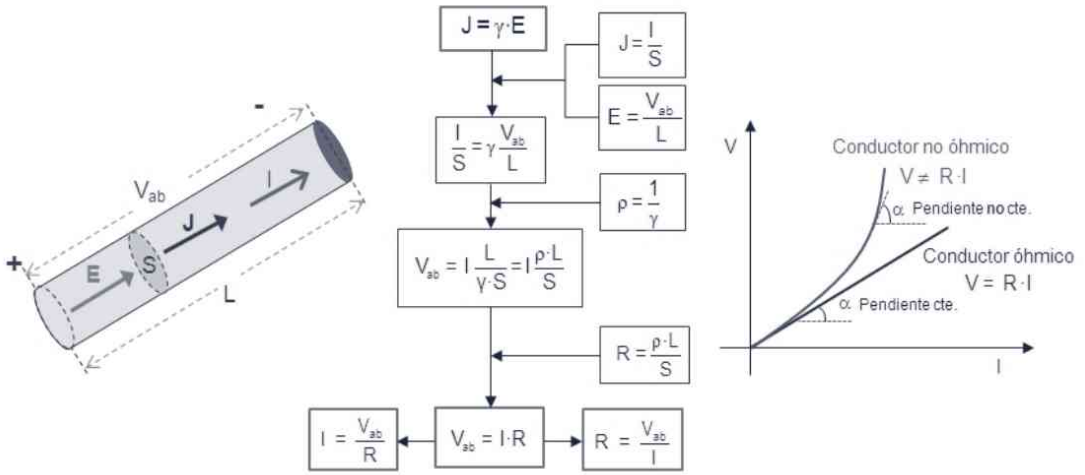


Figura 3.10. Ley de Ohm

El físico alemán G. Ohm (1789-1854) obtuvo experimentalmente la fórmula que lleva su nombre, al observar que en ciertos conductores eléctricos (*conductores óhmicos)*, existe proporcionalidad, entre la ddp V_{ab} aplicada en sus extremos y la intensidad I que circula por ellos, llamando resistencia R a la constante de proporcionalidad. Dependiendo

del valor de la resistencia se obtienen pendientes diferentes en la representación gráfica de la ley ($V = f(I)$), *figura 3.11*

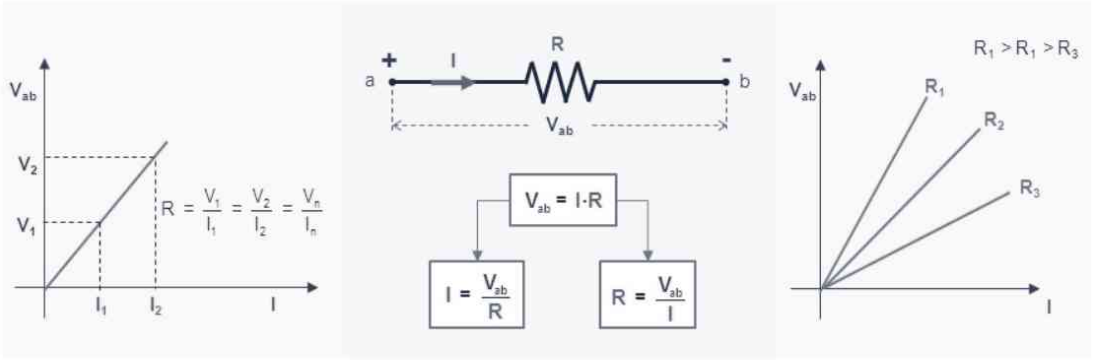


Figura 3.11

Observa:

En las líneas aéreas de AT se puede observar pájaros posados sobre un cable y no se electrocutan. Esto es así puesto que el pájaro está tocando solo un cable y de esta manera no está sometido a una ddp. Si el pájaro tocase simultáneamente otro cable (u otro elemento de la torre eléctrica), por ejemplo un pájaro de gran tamaño al abrir las alas, estaría sometido a una ddp de AT y quedaría electrocutado.

Se puede obtener la *fórmula [3.19]* de la expresión general de la Ley de Ohm, para una determinada temperatura, a partir de la *velocidad de arrastre* v_a de los electrones. Esta velocidad es proporcional al campo eléctrico E, tal que, si k es una constante de proporcionalidad característica de cada conductor, se tiene:

$$v_a = k \cdot E$$

Por otra parte, partir de la *fórmula [3.5]* se tiene:

$$J = n \cdot q \cdot v_a$$

Sustituyendo en la fórmula anterior el valor de v_a, se obtiene:

$$J = n \cdot q \cdot k \cdot E$$

Agrupando los factores que son constantes para cada conductor (n, q ,k) en una nueva constante llamada *conductividad del material* γ, se tiene la expresión general de la Ley de Ohm:

$$J = \gamma \cdot E$$

3.7 RESISTENCIA ELÉCTRICA DE UN CONDUCTOR. CONDUCTANCIA ELÉCTRICA. RESISTENCIA EN FUNCIÓN DE LA TEMPERATURA

En general, se denomina **resistencia eléctrica *R***, a la dificultad u oposición que presentan los materiales al paso de una corriente eléctrica a través de él.

En el SI la unidad de resistencia eléctrica es el *ohmio* (Ω). Puesto que $R = V/I$ se tiene que ohmios (Ω) = voltios (V)/amperios (A).

La magnitud inversa de la resistencia eléctrica R se denomina **conductancia eléctrica *G***, representa la facilidad que presentan los materiales al paso de una corriente eléctrica para circular a través de él.

$$G = \frac{1}{R} \qquad [3.23]$$

En el SI la unidad de conductancia eléctrica es el *siemens* (S). También se puede poner $1\ S = 1/\Omega = \Omega^{-1}$.

Para un conductor homogéneo de longitud L, sección uniforme S y conductividad γ, se puede poner:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{S}{\rho \cdot L} = \frac{\gamma \cdot S}{L} \qquad [3.24]$$

El **conductor** es uno de los elementos básicos en un circuito eléctrico, encargado de unir eléctricamente cada uno de los componentes de un circuito. Lo más frecuente es que sean de Cu o Al y por tanto tienen resistencia óhmica. Generalmente, su valor es muy pequeño y por ello se suele despreciar, esto es, se considera que su resistencia es nula (conductor ideal), pero en otros casos se deberá tener en cuenta su resistencia (conductor real), por ejemplo para el cálculo de la sección de los conductores de las líneas eléctricas *(apartado 3.27)*.

La resistencia de un conductor (de sección constante y homogénea) depende de su longitud L, de su sección S, del tipo de material a través de su resistividad ρ (magnitud propia de cada material **para una temperatura determinada**). Se suele referir la resistividad ρ de un conductor a una temperatura de 20 ºC ($\rho_{20º}$), por lo que para dicha temperatura la resistencia del conductor viene dada por la fórmula:

$$R_{20º} = \frac{\rho_{20º} \cdot L}{S} \qquad [3.25]$$

La resistividad ρ es una propiedad de cada conductor que está relacionada con la resistencia que ofrece cada material al paso de una corriente eléctrica, a causa de los choques que las cargas libres experimentan contra los átomos que lo conforman, dependiendo de su estructura atómica y de la temperatura (a más temperatura mayor es la agitación de los electrones y por tanto mayor dificultad al paso de la corriente). Su unidad ($\rho = R \cdot S/L = \Omega \cdot m^2/m = \Omega \cdot m$) es el $\Omega \cdot m$ (debe decirse "*ohmios metro*" y no "*ohmios por metro*"), sin embargo, es más frecuente utilizar como unidad el $\Omega \cdot mm^2/m$, siendo su equivalencia, $1\ \Omega \cdot m^2/m = 10^{-6}\ \Omega \cdot m$.

El aumento de la resistividad en los metales, y por tanto de su resistencia, con la temperatura puede ser debido tanto al calor producido en el propio conductor al paso de la corriente, como por las condiciones del lugar en el que se encuentra el conductor (al aire, bajo tubo, enterrado, etc.). Para las temperaturas comprendidas **entre** -50 ºC y 400 ºC la variación de la resistividad es aproximadamente lineal, *figura 3.12*, por lo que conociendo la resistividad a 20 ºC ($\rho_{20º}$) de un conductor, *tabla 3.3*, se puede saber su resistividad ($\rho_{Tº}$), para una temperatura diferente a 20 ºC, mediante la expresión:

$$\rho_{T^o} = \rho_{20^o}\left[1 + \alpha\,(T - 20^o)\right] \qquad [3.26]$$

Siendo: ρ_{20} la resistividad del conductor a 20 ºC, α el coeficiente de temperatura a 20 ºC del conductor (variación del valor de una resistencia de 1 Ω cuando la temperatura varía 1 ºC), T temperatura para la que se quiere obtener la resistividad ρ_T.

La resistencia R_T del conductor a la temperatura T será:

$$R_{T^o} = \frac{\rho_{T^o} \cdot L}{S} = \frac{\rho_{20^o}\left[1+\alpha(T-20^o)\right] \cdot L}{S} = \frac{\rho_{20^o} \cdot L}{S}\left[1 + \alpha\,(T - 20^o)\right]$$

$$R_{T^o} = R_{20^o}\left[1 + \alpha\,(T - 20^o)\right] \qquad [3.27]$$

Cuando el conductor se caliente se modifica su longitud (aumenta) y su sección (disminuye), pero estos cambios en la práctica se pueden despreciar porque no introducen modificaciones apreciables en la resistencia del conductor si se les tienen en cuenta.

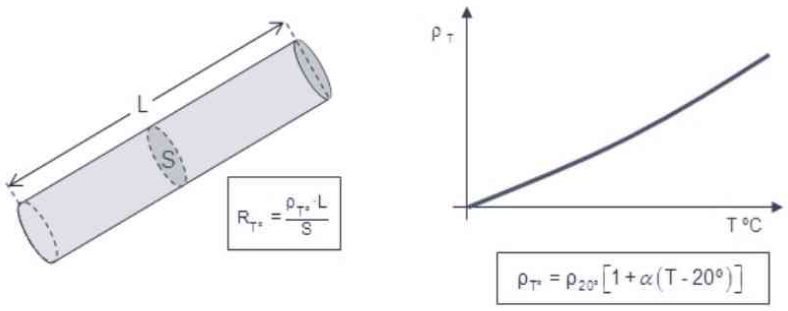


Figura 3.12. Variación de la resistencia de los metales con la temperatura (-50 ºC a 400 ºC)

La resistencia *R* de un conductor se considera concentrada en el punto medio de su longitud física (*parámetros concentrados*), aunque, en verdad, está distribuida a lo largo de toda su longitud física. Esa suposición simplifica enormemente la resolución de los problemas electrotécnicos y es válida siempre que las longitudes de los conductores no sean especialmente largos (por ejemplo, en las líneas de alta tensión con longitud superior a unos 250 ÷ 300 km) en cuyo caso es preciso considerar la naturaleza distribuida de la resistencia del conductor (*parámetros distribuidos*).

Resistividad y coeficiente de temperatura				
Material		**ρ_{20° (Ωm)**	**ρ_{20° [Ω mm^2/m]**	**Coeficiente α a 20 ºC (1/ºC)**
Conductores	Plata	$1{,}6\cdot10^{-8}$	0,016	$3{,}8\cdot10^{-3}$
	Cobre	$1{,}7\cdot10^{-8}$	0,017	$3{,}9\cdot10^{-3}$
	Oro	$2{,}4\cdot10^{-8}$	0,024	$3{,}4\cdot10^{-3}$
	Aluminio	$2{,}8\cdot10^{-8}$	0,028	$3{,}9\cdot10^{-3}$
	Hierro dulce	$7{,}8\cdot10^{-8}$	0,078	$5{,}0\cdot10^{-3}$
	Plomo	$22\cdot10^{-8}$	0,220	$4{,}3\cdot10^{-3}$
	Wolframio	$5{,}5\cdot10^{-8}$	0,055	$0{,}5\cdot10^{-3}$
	Plomo	$22\cdot10^{-8}$	0,22	$3{,}9\cdot10^{-3}$
Semiconductores	Silicio	2.300	$2{,}3\cdot10^{8}$	$-5{,}7\cdot10^{-2}$
	Germanio	0,6	$6\cdot10^{5}$	$-4{,}8\cdot10^{-2}$
Aislantes	Mica	$10^{11}\div10^{15}$	$10^{17}\div10^{21}$	-
	Madera	$10^{8}\div10^{11}$	$10^{14}\div10^{17}$	-
	Vidrio	$10^{10}\div10^{14}$	$10^{16}\div10^{20}$	-

Tabla 3.3. Resistividad y coeficiente de temperatura

En le *tabla 3.4* se tiene la conductividad del Cu y del Al para temperaturas de uso frecuente en el cálculo de la sección de los conductores de las líneas eléctricas, siendo, 20 ºC temperatura inicial del conductor, 40 ºC temperatura de trabajo, 70 ºC máxima temperatura de trabajo para conductores con aislamiento de PVC, 90 ºC máxima temperatura de trabajo para conductores con aislamiento EPR/XLPE.

Conductividad γ ([m/Ω·mm^2): valores de uso frecuente				
Temperatura	**20 ºC**	**40 ºC**	**70 ºC**	**90 ºC**
	γ_{20°	γ_{40°	γ_{70°	γ_{90°
Cu	56	52	47	44
Al	35	32	29	27

Tabla 3.4. Conductividad para temperaturas de uso frecuentes

3.8 EFECTO Y LEY DE JOULE

El paso de la corriente eléctrica *I* a través de una resistencia *R* implica una pérdida de energía *W* en las cargas eléctricas, *figura 3.13,* a la que le corresponde una potencia *P*, *fórmula [3.13].* Esta energía se disipa en forma de calor en el conductor debido a las colisiones que sufren los electrones al moverse a través de la red cristalina del mismo. Este fenómeno físico se denomina **efecto Joule,** en honor del físico inglés J. P. Joule (1818-1819).

El efecto Joule supone la aplicación del *principio de conservación de la energía* a la transformación de energía eléctrica en energía calorífica, su expresión matemática, teniendo en cuenta que 1 julio = 0,24 calorías, conocida como Ley de Joule, es:

$$W = I^2 \cdot R \cdot t \text{ (julios)} \quad \Rightarrow \quad W = 0{,}24 \cdot I^2 \cdot R \cdot t \text{ (calorias)} \qquad [3.28]$$

Expresándose: la intensidad *I* en amperios, la resistencia *R* en ohmios y el tiempo *t* en segundos.

A partir de la fórmula anterior, también se puede expresar la potencia de una resistencia, en la forma:

$$P = I^2 \cdot R = \frac{V^2}{R} \qquad [3.29]$$

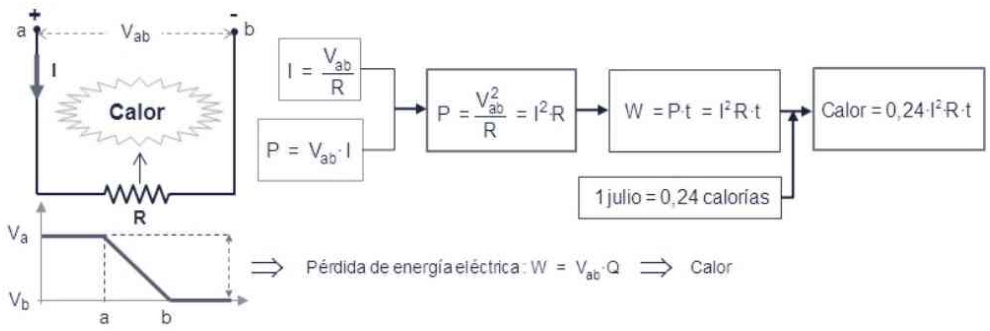


Figura 3.13. Efecto Joule

El efecto Joule puede ser deseable en los casos que expresamente se desee producir calor, como por ejemplo: estufas y aparatos de calefacción, fusibles, relés térmicos, lámparas de incandescencia, etc. En otros casos el efecto Joule es perjudicial, como por ejemplo: calentamiento de las líneas eléctricas y máquinas eléctricas en general.

3.9 RESISTOR. RESISTORES FIJOS, VARIABLES Y NO LINEALES

Además de las resistencias propias de los conductores de las líneas eléctricas, las resistencias se pueden presentar en diferentes formas, *figura 3.14*:

- **Resistor fijo.** Es un componente eléctrico que introduce una **resistencia eléctrica** determinada entre dos puntos de un circuito. Un resistor queda definido por tres magnitudes:

  - Valor nominal en Ω.

  - *Tolerancia*. Es la máxima diferencia entre el valor nominal y el valor real de la resistencia expresado en porcentaje.

  - *Disipación máxima de potencia* en W. También puede indicarse la máxima intensidad admisible (una intensidad superior estropea la resistencia).

  La identificación del valor de su resistencia se hace muchas veces mediante un código de colores, *tabla 3.5.* Por ejemplo, una resistencia de 48 kΩ ± 5%, tendrá la primera franja amarilla (4), la segunda franja gris (8), la tercera franja naranja (10^3) y la cuarta franja dorada (± 5%). El valor real de la resistencia estará comprendido entre un valor máximo de 50.400 Ω (48.000 + 5 · 48.000/100) y un valor mínimo de 45.600 Ω (48.000 – 5 · 48.000/100).

- **Resistor variable.** Es un dispositivo que tiene un contacto móvil, llamado *cursor*, que se mueve a lo largo de la superficie de una resistencia de valor total constante. Este contacto móvil divide la resistencia en dos resistencias cuyos valores son menores y cuya suma tendrá siempre el valor de la resistencia total. Las resistencias variables se dividen en dos categorías: los **potenciómetros** y los **reóstatos**.

  - *El potenciómetro.* Normalmente se utilizan en circuitos con poca **intensidad**, pues su disipación de potencia es muy pequeña.

  - *El reóstato***.** Se utiliza en circuitos en los que circulan corrientes elevadas, pues su disipación de potencia es elevada.

Como regla general, los potenciómetros se utilizan para variar niveles de tensión y los reóstatos para variar niveles de corriente.

- **Resistores dependientes no lineales.** Las resistencias lineales, como la de los metales, se ha visto que su curva característica de corriente en función de la tensión es una línea recta; cuanto mayor sea la tensión a ellas aplicada mayor será la intensidad de corriente que por ellas circula, permaneciendo su valor óhmico constante. Existen sin embargo otro tipo de resistencias en las cuales su valor óhmico depende de una magnitud externa a ellas, entre las que cabe destacar las siguientes:

  - *Las resistencias NTC* (*Negative Temperature Coefficient*), también llamadas *termistores NTC,* son resistencias cuyo coeficiente de temperatura es negativo, es decir, su resistencia desciende muy rápidamente con el aumento de temperatura.

  - *Las resistencias PTC* (*Positive Temperature Coefficient*), también llamadas *termistores PTC,* son resistencias con un coeficiente positivo de temperatura alto, es decir, su resistencia aumenta con el aumento de temperatura.

  - *Las resistencias VDR* (*Voltage Dependent Resistor*), también llamadas *varistores,* son resistencias cuyo valor aumenta al aumentar la tensión entre sus terminales.

  - *Las resistencias LDR* (*Light Dependent Resistor*), también llamadas *fotoresistores,* son resistencias cuyo valor aumenta al aumentar el nivel de iluminación.

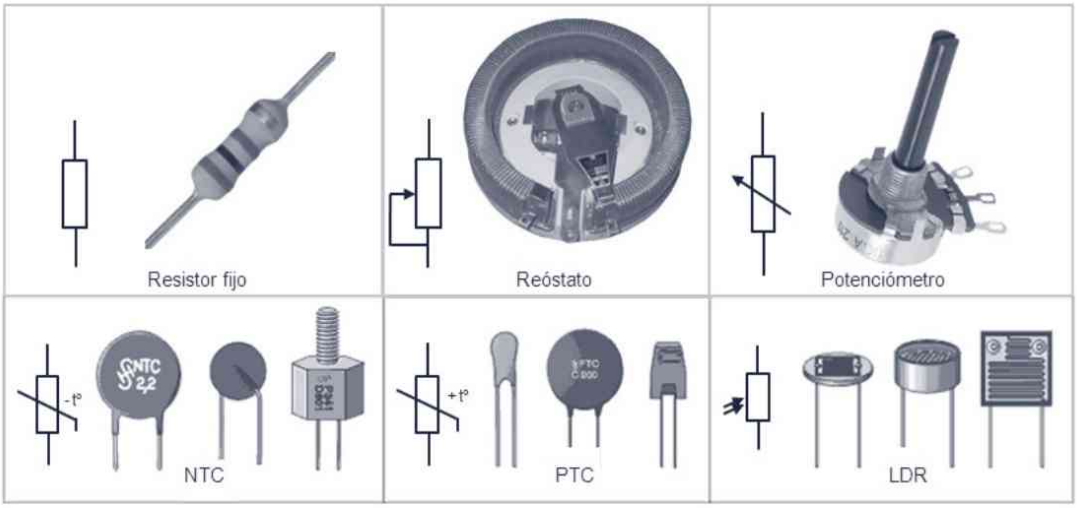


Figura 3.14. Resistencias de diferentes tipos

Código de colores para resistencias				
Color	**Cifra 1ª y 2ª**	**Cifra 3ª Multiplicador**	**Cifra 4ª Tolerancia**	
Negro	0	10^0	-	
Marrón	1	10^1	-	
Rojo	2	10^2	-	
Naranja	3	10^3	-	
Amarillo	4	10^4	-	
Verde	5	10^5	-	
Azul	6	10^6	-	
Violeta	7	10^7	-	
Gris	8	10^8	-	
Blanco	9	10^9	-	
Dorado	-	10^{-1}	± 5%	
Plata	-	10^{-2}	± 10%	
Sin color	-	-	± 20%	

Tabla 3.5. Código de colores para resistencias

3.10 ASOCIACIÓN DE RESISTENCIAS

Las asociaciones de resistencias en los circuitos tienen como finalidad conseguir un efecto análogo al que produciría una sola resistencia de características definidas de la que no se dispone, o bien por exigencias propias del circuito. La asociación se puede hacer: en paralelo, en serie y mixta.

En las asociaciones se puede reemplazar la asociación por una única resistencia equivalente, que es aquella resistencia que produce los mismos efectos (permitir el paso de la misma corriente, estar sometido a la misma diferencia de potencial) en el circuito que la asociación a la que reemplaza.

3.11 ASOCIACIÓN DE RESISTENCIAS EN SERIE

Varias resistencias están asociadas en serie cuando el final de una está conectada al principio de la otra. En la *figura 3.15* se tienen tres resistencias asociadas en serie, estando conectada la asociación a una fuente de corriente continua que somete al conjunto a una diferencia de potencial V_{ab}.

Las cargas eléctricas se dirigen desde el polo positivo hacia el polo negativo a través de las resistencias. Si I es la intensidad del circuito, es evidente que esta intensidad es la misma para cada una de las resistencias (los culombios/segundo que pasan por R_1, pasarán por R_2 y pasarán por R_3), sin embargo, la ddp en cada una de ellas (V_{ac}, V_{cd}, V_{db}) es diferente y depende del valor de cada resistencia ($V_{ac} = I \cdot R_1$, $V_{cd} = I \cdot R_2$, $V_{db} = I \cdot R_3$). También se ha de cumplir que la ddp total ha de ser igual a la suma de las ddp parciales ($V_{ac} = V_{ac} + V_{cd} + V_{db}$).

Por otra parte, la resistencia equivalente R que substituya a la asociación, para que produzca los mismos efectos en el circuito que los que produce aquélla, tendrá que permitir el paso de la la misma intensidad I a la ddp V_{ab}. Se obtiene, *figura 3.15*:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 = \sum R_i \qquad [3.30]$$

Este análisis se puede hacer con cualquier número de resistencia, obteniéndose que, la resistencia equivalente R de una asociación en serie de resistencias es igual a la suma de las resistencias de la asociación. Interesa pues una asociación en serie cuando se desee una resistencia equivalente mayor que cualquiera de las resistencias asociadas.

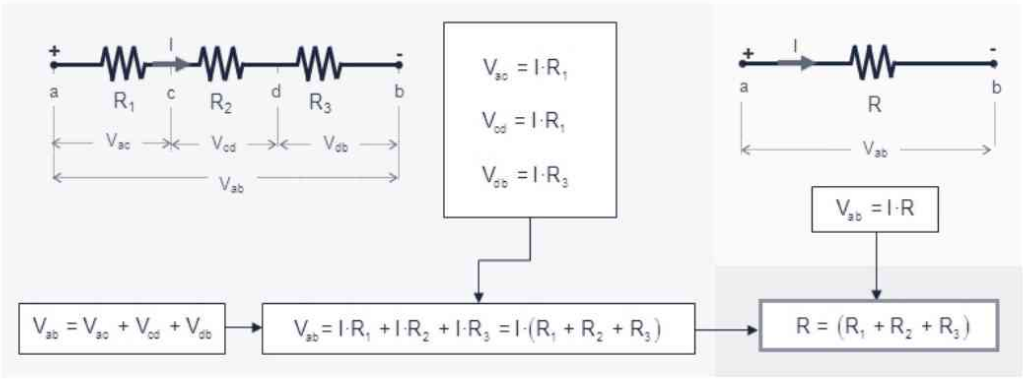


Figura 3.15. Asociación de resistencias en serie

3.12 ASOCIACIÓN DE RESISTENCIAS EN PARALELO

Varias resistencias están asociadas en paralelo cuando tienen conectados todos los principios entre sí y todos los finales entre sí. En la *figura 3.16* se tiene tres resistencias asociadas en paralelo. Los bornes izquierdos de las tres resistencias (con signo positivo por

estar conectadas al borne positivo de la fuente) están al mismo potencial. Los bornes derechos (con signo negativo) también están al mismo potencial. En consecuencia, la diferencia de potencial V_{ab} de las tres resistencias es la misma e igual a la de la fuente.

Por cada resistencia pasa una intensidad diferente ($I_1 = V_{ab}/R_1$, $I_2 = V_{ab}/R_2$, $I_3 = V_{ab}/R_3$). También se ha de cumplir que la intensidad I que parte del polo positivo ha de ser igual a la que llega al polo negativo, lo que implica (principio de la conservación de la carga) que ha de ser igual a la suma de las intensidades de cada resistencia ($I = I_1 + I_2 + I_3$).

Por otra parte, la resistencia equivalente R que reemplaza a la asociación en paralelo de las tres resistencias, para producir los mismos efectos que la asociación, tendrá que permitir el paso de la misma intensidad I al estar sometido a la misma diferencia de potencial de la asociación V_{ab}. Se obtiene, *figura 3.16*:

$$\frac{1}{R} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = \sum \frac{1}{R_i} \qquad [3.31]$$

Este análisis se puede hacer con cualquier número de resistencias, obteniéndose que, la inversa de la resistencia equivalente 1/R de una asociación en paralelo de resistencias es igual a la suma de las inversas de las resistencias de la asociación. Obsérvese que la resistencia equivalente de la asociación en paralelo disminuye a medida que se añaden resistencias a dicha asociación, siendo la resistencia equivalente inferior a la de la resistencia de la asociación de menor valor. Se deduce que interesa montar una asociación en paralelo cuando se desee obtener una resistencia equivalente menor que cualquiera de las resistencias asociadas.

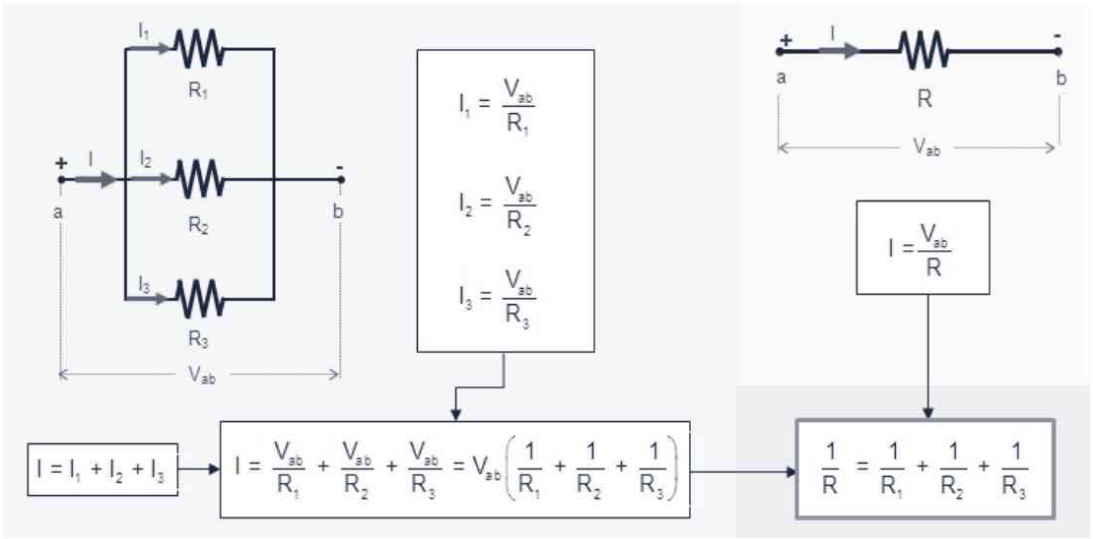


Figura 3.16. Asociación de resistencias en paralelo

3.13 ASOCIACIÓN MIXTA DE RESISTENCIAS

En un circuito con asociación mixta de resistencias, unas están asociadas en paralelo y otras en serie. El circuito se resuelve identificando las asociaciones en serie o paralelo e ir reduciendo el circuito, hasta conseguir una única resistencia final que será la equivalente que se busca, *figura 3.17*. Ver el *ejercicio 3.31.8*.

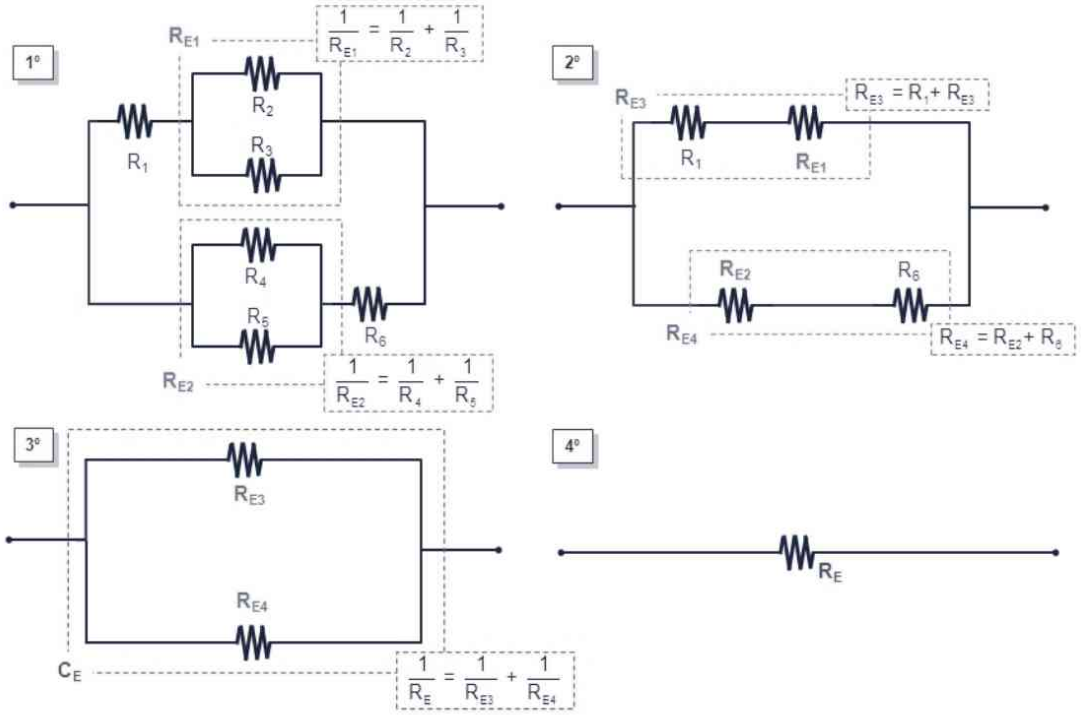


Figura 3.17. Ejemplo de asociación mixta de resistencias

3.14 LEY DE OHM GENERALIZADA. FUERZA CONTRAELECTROMOTRIZ

Como se ha visto, para mantener una corriente estacionaria en un conductor se precisa una *fuente de energía* que mantenga una diferencia de potencial entre sus extremos y que suministre, de forma continua, la energía que pierden las cargas libres en sus choques con los átomos de la red conductora. Esto se consigue, además de otras formas, mediante un *generador de corriente continua* o *una batería*, que convierten, respectivamente, energía mecánica o química en energía eléctrica. Las fuentes transforman en energía eléctrica otras formas de energía y se caracterizan por su **fuerza electromotriz (fem)** ***E*** (*apartado 3.4*).

Además de las resistencias eléctricas existen otros receptores, por ejemplo los motores o una batería en carga, que realizan un proceso inverso a las fuentes, es decir, transforman, respectivamente, la energía eléctrica en mecánica o química. Los receptores

de este tipo transforman la energía eléctrica en otra forma de energía y se caracterizan por su **fuerza contraelectromotriz (fcem) *E'***.

Si por el receptor pasa una carga *Q* y pierde una energía eléctrica *W* (que se transforma en otra forma de energía) se define la **fcem *E'*** del receptor como "*la energía eléctrica perdida por la unidad de carga en el receptor*", es decir:

$$E' = \frac{W}{q} \qquad [3.32]$$

Por tanto, siendo sus fórmulas iguales, la unidad de la fcem *E'*, es la misma que la de la fem *E* y la misma que la de la ddp *V*, es decir, el voltio.

En el símil hidráulico, *figura 3.18*, un generador de fem *E* equivaldría a una motobomba B que transforma la energía mecánica de rotación en energía hidráulica (cinética, potencial y de presión) del agua (en el sentido de la circulación del agua, ésta tiene más energía después de B que antes de B). Un receptor de fcem *E'* equivaldría a una turbina T que transforma la energía hidráulica del agua en energía mecánica de rotación (en el sentido de la circulación del agua, ésta tiene menos energía después de T que antes de T). Previamente, la batería ha transformado energía química en energía eléctrica y la motobomba ha transformado energía química (motor de explosión) o energía eléctrica (motor eléctrico) en energía mecánica.

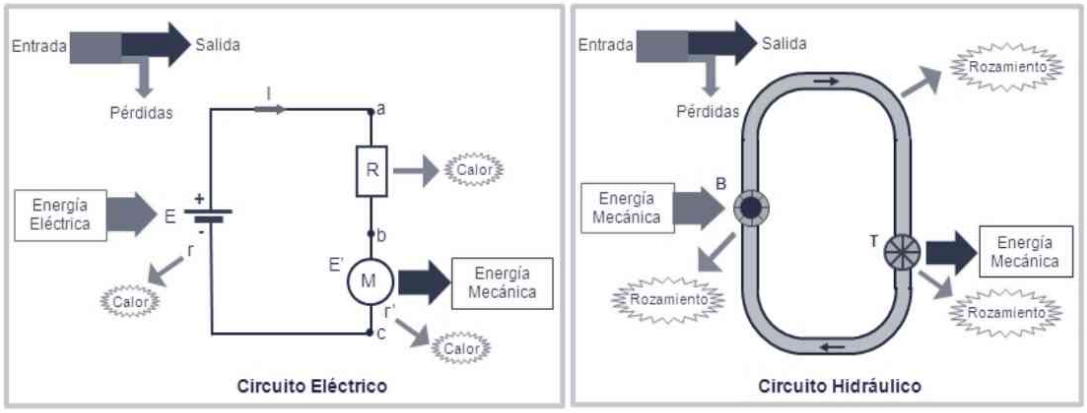


Figura 3.18. Símil: circuito eléctrico y circuito hidráulico

Tanto en los elementos caracterizados por su fem *E* como los caracterizados por su fcem *E'*, las cargas eléctricas al circular por el interior de los mismos lo hacen a través de un medio material con su propias resistencias, llamadas **resistencias internas *r* y *r'***. En el circuito hidráulico la resistencia al paso del agua (rozamiento) proviene de las tuberías (equivalente a la resistencia *R* de los conductores del circuito) y de la resistencia interior de la bomba y la turbina (equivalentes a las resistencia *r* y *r'* del circuito), todas ellas producen pérdidas de energía.

Haciendo el estudio energético del circuito eléctrico de la *figura 3.19*, para un tiempo *t*, con una intensidad de corriente *I* se tiene:

- **Energía suministrada al circuito por la batería *E***, a partir de la *fórmula [3.10]*:

$$W = E \cdot q = E \cdot I \cdot t$$

- **Energía transformada de eléctrica a mecánica en el motor *M***, a partir de la *fórmula [3.31]*:

$$W' = E' \cdot q = E' \cdot I \cdot t$$

- **Energía transformada de eléctrica a calorífica en las resistencias**, *R*, *r* y *r'*, a partir de la *fórmula [3.28]*:

$$W_{calor} = I^2 \cdot R \cdot t + I^2 \cdot r \cdot t + I^2 \cdot r' \cdot t = I^2 \cdot (R + r + r') \cdot t$$

Estableciendo el principio de conservación de la energía en el circuito, sustituyendo y simplificando:

$$W = W' + W_{calor} \qquad [3.33]$$

$$E \cdot I \cdot t = E' \cdot I \cdot t + I^2 \cdot (R + r + r') \cdot t$$

$$E = E' + I \cdot (R + r + r')$$

Se obtiene la **Ley de Ohm generalizada** para un circuito que tenga además de resistencias, fem y fcem:

$$I = \frac{E - E'}{R + r + r'} = \frac{\Sigma E}{\Sigma R} \qquad [3.34]$$

La *fórmula 3.34,* se puede poner en la forma:

$$E - I \cdot r = I \cdot R + E' + I \cdot r'$$

En la *figura 3.19*, para las diferencias de potencial se tiene:

$$V_{ac} = V_{ab} + V_{bc} \qquad [3.35]$$

Como:

$$V_{ab} = I \cdot R$$

Se tiene:

$$E - I \cdot r = V_{ab} + E' + I \cdot r' \qquad [3.36]$$

Comparando las *fórmulas [3.35] y [3.36],* se deduce que:

$$V_{ac} = E - I \cdot r \qquad [3.37]$$

$$V_{bc} = E' + I \cdot r' \qquad [3.38]$$

Ecuaciones que permiten hallar la ddp en bornes de un generador y un receptor respectivamente.

Obsérvese que conforme a lo establecido en el *apartado 3.4, la potencia* P_{ac} entregada por la fuente tiene signo negativo (la corriente sale del polo positivo: generador) y la potencia P_{ab} de la resistencia R y la potencia P_{bc} del motor M, tienen signo positivo (la corriente entra por el polo positivo: receptor).

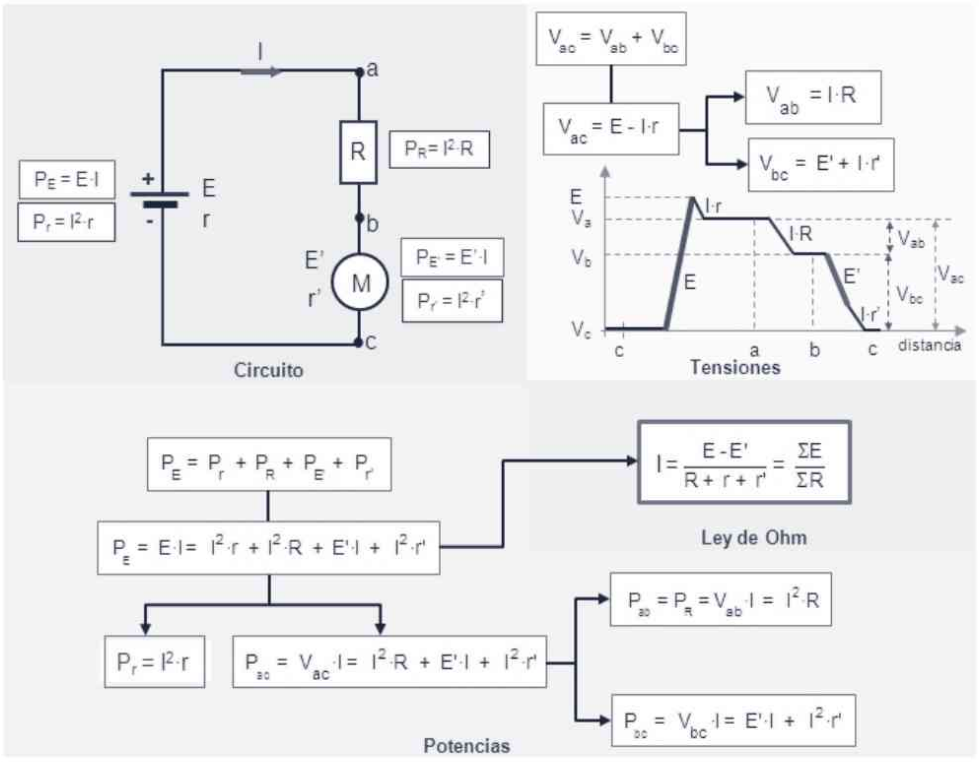


Figura 3.19. Circuito con fem y fcem: Ley de Ohm generalizada. Batería y motor

Multiplicando los dos miembros de la igualdad de la *fórmula 3.36* por la intensidad *I,* se tiene:

$$E \cdot I - I^2 \cdot r = V_{ab} \cdot I + E' \cdot I + I^2 \cdot r' = V_{ac} \cdot I = V_{ab} \cdot I + V_{bc} \cdot I \qquad [3.39]$$

Que permite construir el diagrama de flujo de potencias de la *figura 3.20.*

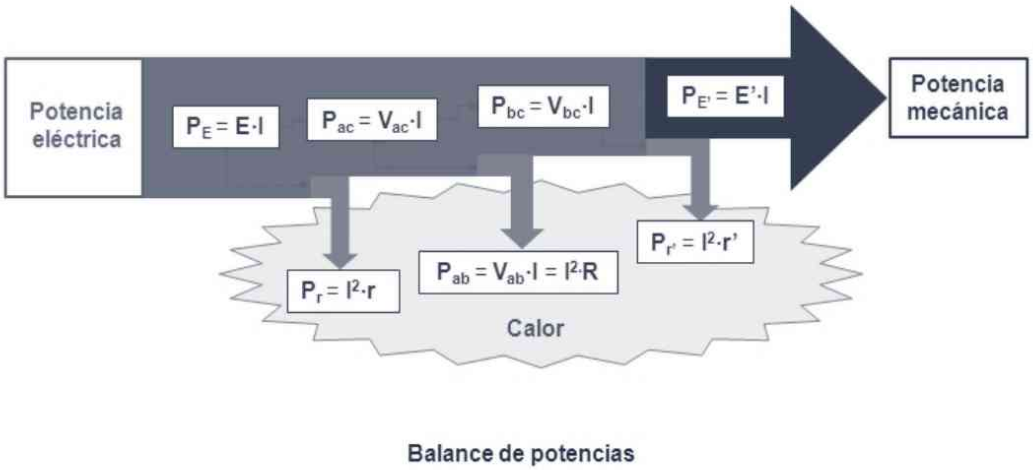


Figura 3.20. Diagrama de flujo de potencias del circuito de la figura 3.19

Si un generador de tensión está situado en un circuito con la polaridad opuesta al sentido de la corriente, entonces su fem *E* actúa como una fcem *E'*, pues se opone al paso de aquélla, obteniéndose, entonces, la tensión en bornes de la batería por la *fórmula [3.38]*. En la *figura 3.21* se resume cómo obtener la ddp en bornes de un generador según su polaridad, respecto a la intensidad, sea positiva o negativa. También la ddp en bornes de un motor. En efecto, *figura 3.21:*

- En el circuito del generador con polaridad positiva, una carga eléctrica que se desplaza desde el punto *b*, con un potencial V_b, al pasar por el generador recibe energía eléctrica debido a la fem *E* ($E = W/q$), pero pierde energía debido a la resistencia interna *r*. Luego se ha de cumplir que en el punto *a* ha de tener un potencial igual al del punto *b*, más el correspondiente a la energía recibida debida a la fem *E,* menos el correspondiente a la energía perdida en la resistencia interna *r* ($I \cdot r$), es decir: $V_a = V_b + E - I \cdot r$, que es lo mismo que: $V_{ab} = E - I \cdot r$.

- En el circuito del generador con polaridad negativa, una carga eléctrica que se desplaza desde el punto *b*, con un potencial V_b, al pasar por el generador pierde

energía eléctrica debido a la fcem E ($E = W/q$), la polaridad del generador es contraria al sentido de la corriente actuando el generador como fcem, y también pierde energía debido a la resistencia interna r. En este caso el punto a mayor potencial es el punto b, y se ha de cumplir que en el punto a ha de tener un potencial igual al del punto b, menos el correspondiente a la energía perdida debida a la fcem E, menos el correspondiente a la energía perdida en la resistencia interna r ($I \cdot r$), es decir: $V_a = V_b - E - I \cdot r$, que es lo mismo que: $V_{ba} = E + I \cdot r$.

- En el circuito con motor, el razonamiento es el mismo que en el caso del circuito con generador con polaridad negativa.

- Obsérvese que en el caso del generador de tensión actuando como fem (generador con polaridad positiva) el punto a está a mayor potencial que el punto b, se tiene, V_{ab}. Si el generador de tensión actúa como fcem, o en el caso de un motor, el punto que está a más potencial es el b y no el punto a, se tiene V_{ba} [$V_{ba} = V_b - V_a = -(V_a - V_b) = -V_{ab}$].

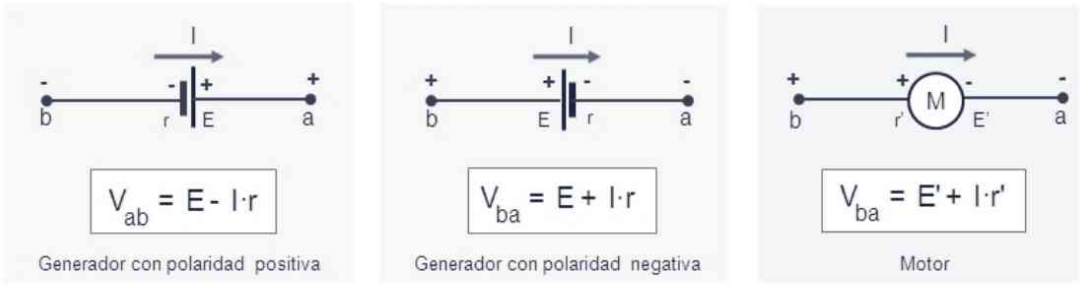


Figura 3.21. Tensión en bornes de un generador y un motor

Como ejemplo se explica el circuito de la *figura 3.22*. Lo primero es elegir un sentido arbitrario para la corriente I. A continuación se aplica la ley de Ohm, *fórmula [3.34],* teniendo en cuenta el sentido de la corriente y la polaridad de las fuentes, tal como se ha explicado en este apartado (la ecuación correspondiente a la Ley de Ohm, también se puede obtener a partir del estudio de las ddp tal como se indica en la figura). Si el resultado de I es positivo quiere decir que se ha elegido correctamente el sentido, en caso de que sea negativo significa que el sentido de la corriente es contrario al elegido. Una vez hallada la intensidad se procede al cálculo de otras magnitudes del circuito tal como se ha explicado en éste y en anteriores apartados de este capítulo.

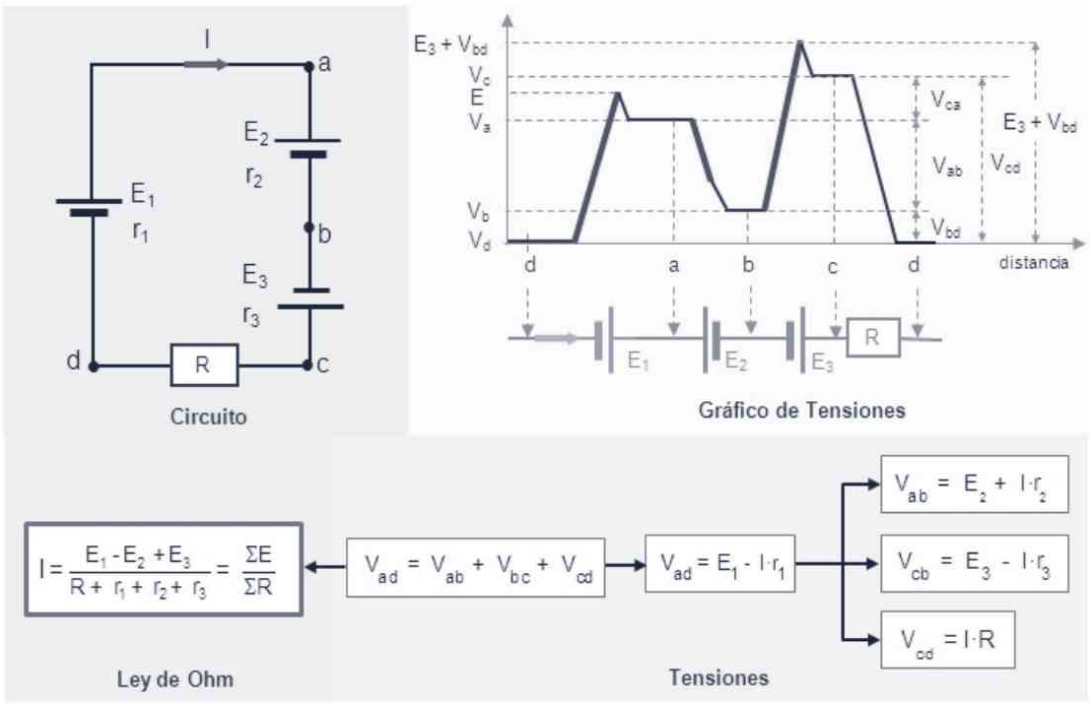


Figura 3.22. Ejemplo de circuito con varias fem en serie

3.15 APARATOS DE MEDIDAS DE LAS MAGNITUDES ELÉCTRICAS EN CC

Los aparatos de medida se pueden clasificar atendiendo a diferentes criterios. A continuación se hace atendiendo al principio en el que se base su funcionamiento y por la magnitud que miden.

Según el principio en el que se base su funcionamiento. Pueden ser analógicos y digitales.

- **Instrumentos de medida analógicos.** Presentan la medida mediante una aguja móvil que se desplaza en una escala graduada. Pueden ser de diferentes tipos, entre otros:

  - **Instrumentos magnetoeléctricos o de bobina móvil.** Funcionan a partir de la interacción entre un campo magnético fijo (imán permanente) y el campo magnético producido por una corriente eléctrica que alimenta a una bobina móvil. Son los mecanismos de medida más sensibles.

  - **Instrumentos electromagnéticos o de hierro móvil.** Funcionan a partir de la interacción entre dos núcleos de hierro magnetizados con la misma

polaridad por la corriente eléctrica (uno fijo y el otro móvil). La repulsión entre ellos hará girar el núcleo móvil.

- **Instrumentos electrodinámicos.** Funcionan a partir de la interacción entre el campo magnético generado por dos bobinas**,** una móvil solidaria al eje de la aguja y la otra fija, que envuelve a la primera.

- **Instrumentos de inducción.** Funcionan a partir del campo magnético producido por dos electroimanes sobre un elemento móvil metálico (corrientes de Foucault). Se utilizan habitualmente para la medida de energía eléctrica.

- **Instrumentos de medida digitales.** Presentan la medida mediante una cifra numérica (dígitos) que se lee en una pantalla. Estos aparatos toman algunos valores de la magnitud que se mide, los cuales son codificados por medio de un dispositivo llamado convertidor analógico/digital.

  Según la magnitud que miden se tienen, entre otros, los siguientes:

  - **Para la medida de la intensidad** que circula por un conductor se utiliza un aparato de medida llamado **amperímetro**, *figura 3.23* Debe conectarse de tal forma que se obligue a la corriente a pasar por él, esto es, *en serie* con el receptor cuya intensidad se quiera medir (de forma similar a como, en un circuito hidráulico, se ha de instalar el aparato de medida del caudal del líquido, litros/segundo, a través de una tubería).

    Un amperímetro debe tener una resistencia propia (resistencia interna) tan *pequeña* como sea posible, con objeto de que no tenga influencia en la corriente que se quiere medir.

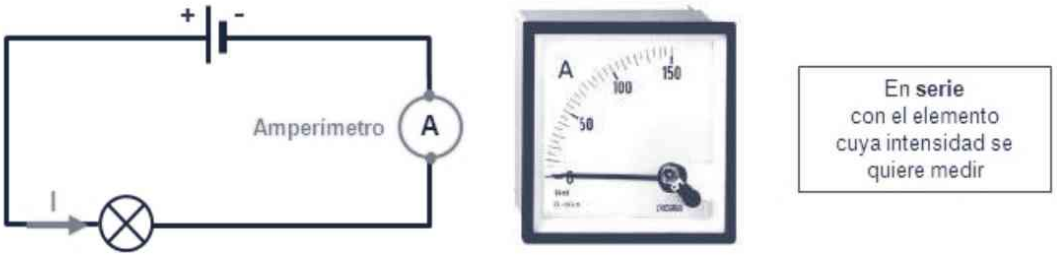


Figura 3.23. Conexión de un amperímetro

  - **Para la medida de la ddp** entre dos puntos de un circuito se utiliza un aparato de medida llamado **voltímetro**, *figura 3.24*. Debe conectarse de tal forma que "compare" los potenciales entre los dos puntos cuya tensión se quiere medir, para esto se conecta *en paralelo* entre los puntos, o dispositivos, en cuestión.

Un voltímetro deben estar recorrido por una corriente para poder efectuar la medida, pero con el fin de que su conexión no varié la corriente del circuito (y por tanto la ddp) es necesario que esta corriente sea lo más pequeña posible, por lo que el voltímetro debe tener una resistencia propia (resistencia interna) tan *elevada* como sea posible.

Figura 3.24. Conexión de un voltímetro

- **Para la medida de la potencia se utiliza el vatímetro.** Conforme a la definición de potencia ($P = V \cdot I$), un vatímetro debe ser un instrumento que realice el producto de dos señales eléctricas, luego ha de tener terminales amperimétricos y terminales voltimétricos que se han de conectar en serie y en paralelo, respectivamente, con la carga cuya potencia se quiere medir, *figura 3.25*.

  El esquema de conexión de un contador de energía es el mismo que el de un vatímetro.

Figura 3.25. Conexión de un vatímetro

- **Para la medida de las resistencias eléctrica** se utiliza el **ohmímetro**. Se conecta en los bornes de la resistencia cuyo valor se quiere medir, pero hay que prestar especial atención de que el circuito esté abierto (no circula corriente y en los extremos de la resistencia no existe tensión) de lo contrario se estropeará el aparato, *figura 3.26.*

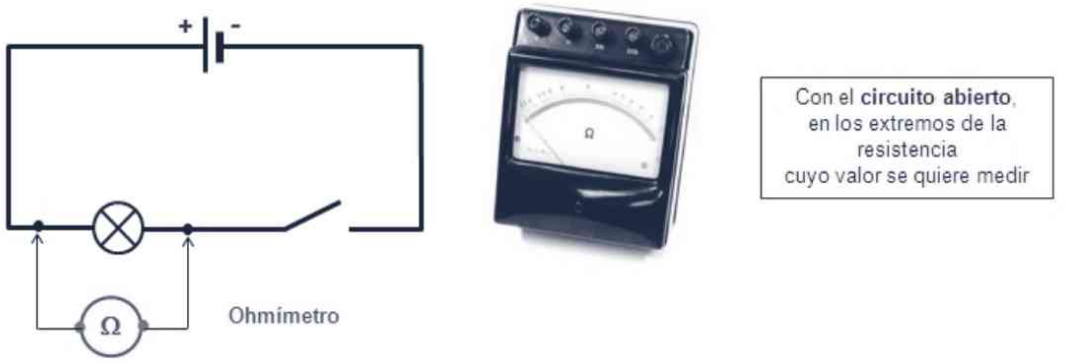


Figura 3.26. Conexión de un ohmímetro

- **Para la medida del aislamiento eléctrico** (de cables, máquinas eléctricas, etc.) se utiliza el **megaóhmetro**, que son unos aparatos similares a los **ohmímetros,** pero en los que la medida de resistencia se efectúa con tensiones muy elevadas, y no con pequeñas tensiones como en estos últimos, *figura 3.27.*

Figura 3.27. Megaóhmetros

- Un **multímetro**, también llamado **polímetro** o **tester**, es un instrumento de medida que ofrece la posibilidad de medir distintas magnitudes eléctricas en el mismo dispositivo. Las funciones más comunes son las de voltímetro, amperímetro y ohmímetro, *figura 3.28*.

Figura 3.28. Polímetros

En la *figura 3.29* se tienen diferentes aparatos de medidas eléctricas.

Figura 3.29. Diferentes aparatos de medidas eléctricas

3.16 ELEMENTOS PASIVOS IDEALES Y REALES

En Electrotecnia se considera cada uno de los elementos pasivos, resistencia *R*, condensador *C* y bobina *L*, como dispositivos que sólo tienen esa propiedad (modelo ideal). Pero en realidad, debido a muy diferentes causas, cada uno de ellos tiene asociado, en serie o en paralelo, alguno de los efectos de los otros, que, muchas veces, especialmente en los circuitos electrónicos, se han de tener en cuenta sobre todo si por ellas pasan corrientes variables, *figura 3.30*.

Suele ser suficiente considerar la **resistencia eléctrica *R*** como un dispositivo que sólo tiene esa propiedad (modelo ideal). Pero en realidad, las resistencias tienen asociado en serie un efecto inductivo *L* y en paralelo un efecto capacitivo *C*. En Electrotecnia, ambos efectos se suelen despreciar.

Se ha visto que una resistencia *R* conectada a una ddp V_{ab}, deja pasar una corriente *I*, *fórmula [3.22]*, tal que:

$$I = \frac{V_{ab}}{R} \qquad [3.40]$$

La energía consumida por una resistencia ($W = I^2 \cdot R \cdot t$), es disipada en forma de calor.

Un **condensador real *C***, respecto a un condensador ideal, tiene asociado en paralelo una resistencia *R* (que modela las fugas de la carga eléctrica almacenada a través del dieléctrico) y un efecto inductivo *L*. En Electrotecnia, a veces se considera el efecto resistivo, pero no el efecto inductivo.

Si se conecta un condensador, descargado, de capacidad *C* a una fuente de tensión de CC, en el condensador se producirá una variación de carga ΔQ, pasando del *valor 0* a un valor *Q,* en un tiempo Δt, lo que da lugar a una corriente, *fórmula [3.1]*:

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Por otra parte, la ddp *v* en los bornes de un condensador está relacionada con la carga adquirida ($\Delta v = \Delta Q/C$), *fórmula [2.4],* lo que permite poner:

$$i = C\frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad [3.41]$$

Se observa en la fórmula anterior que existe intensidad *i* (corriente transitoria) mientras exista variación de tensión Δv, por lo que después de haber adquirido el condensador la carga final *Q,* no permite el paso de corriente, comportándose el condensador como un circuito abierto.

Un condensador cargado almacena energía eléctrica ($W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2$), *fórmula [2.23],* en el campo eléctrico existente entre sus armaduras.

Una **bobina *L*,** debido a que ineludiblemente interviene un conductor eléctrico en su construcción, *siempre* tiene asociada en serie una resistencia *R* (aunque a veces ésta es muy pequeña y se desprecia), debiéndose en algunos casos (circuitos electrónicos) considerar un efecto capacitivo en paralelo.

Al pasar una corriente *i* por una bobina ideal, en los bornes de la bobina se produce una ddp *v* siempre que la corriente sea variable, y su valor depende de la variación de la corriente con el tiempo ($\Delta i/\Delta t$), y de una característica propia de la bobina denominada *inductancia L* [dependiente del número de espiras y del núcleo, (longitud, sección y material)]:

$$v = L\frac{\Delta i}{\Delta t} \qquad [3.42]$$

Se observa en la fórmula anterior que, en un circuito de CC, existe tensión v (tensión transitoria) mientras exista variación de intensidad Δi (apertura y cierres de circuitos, variación de la resistencia de un circuito, etc.). Una vez exista una corriente estacionaria ($\Delta i/\Delta t = 0$) una bobina actúa como un cortocircuito.

Una bobina almacena energía eléctrica ($W = ½ \cdot L \cdot i^2$) en su campo magnético, como se demuestra en el capítulo de electromagnetismo.

En la *figura 3.30* se muestra, junto con una imagen de cada elemento, el símbolo ideal, el real y la configuración considerada, de forma más frecuente, en Electrotecnia.

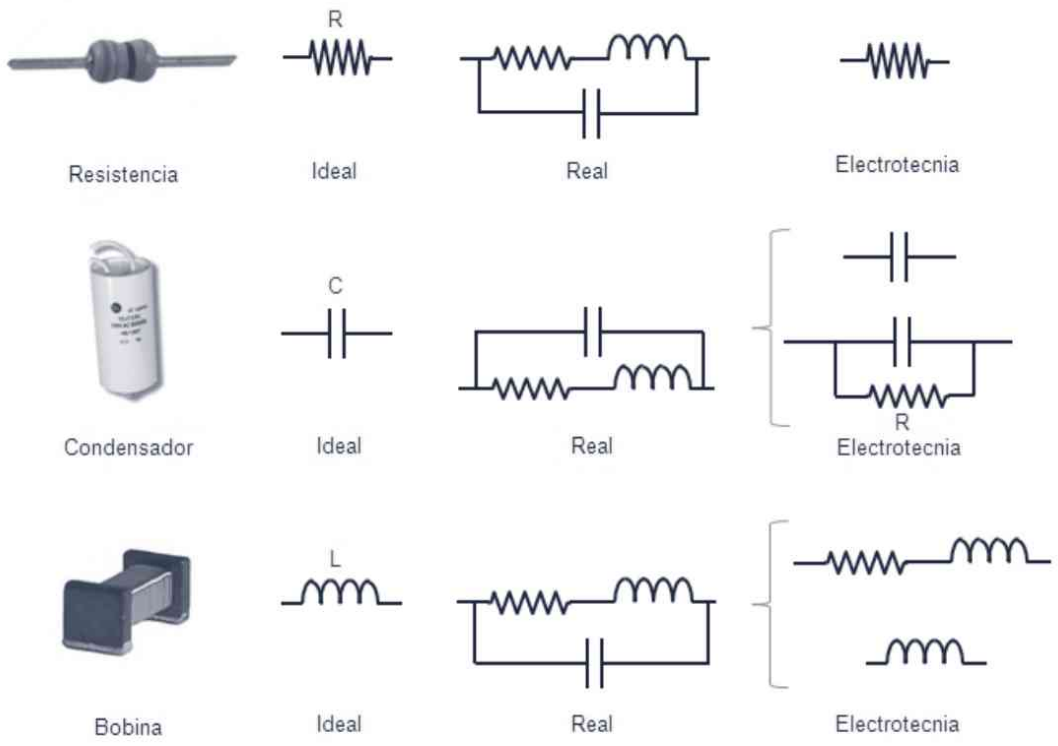


Figura 3.30. Elementos pasivos: ideal, real, electrotécnico

Cuando un condensador está cargándose existe una transferencia de cargas positivas, desde su armadura negativa hacia el polo negativo de la fuente y desde el polo positivo de la fuente a la armadura positiva (*apartado 2.11*). Por tanto, existe una corriente de conducción i (transitoria, hasta que el condensador se cargue totalmente) que penetra por la armadura de la izquierda, pero no existe una corriente de conducción que salga de dicha armadura. Simultáneamente, existe una corriente de conducción i que sale de la lámina de la derecha, pero no la hay que penetre en ella, *figura 3.31*.

Si se aplica la ley de Gauss a la superficie cerrada que envuelve una armadura del condensador de superficie S y se divide por el tiempo, sucede como si una corriente i_D debida a la variación del campo eléctrico E atravesase el dieléctrico (no corresponde a una corriente eléctrica de conducción, pues entre las armaduras del condensador no existe transferencia de cargas). A esta corriente Maxwell (1831-1879) la denominó **corriente de desplazamiento**.

Es decir, el circuito de una *corriente de conducción* variable en el conductor se cierra mediante una *corriente de desplazamiento* en el dieléctrico del condensador. Nótese que, mientras una corriente de conducción es proporcional a un campo eléctrico**,** *fórmula [3.19],* una corriente de desplazamiento es proporcional a la variación de un campo eléctrico.

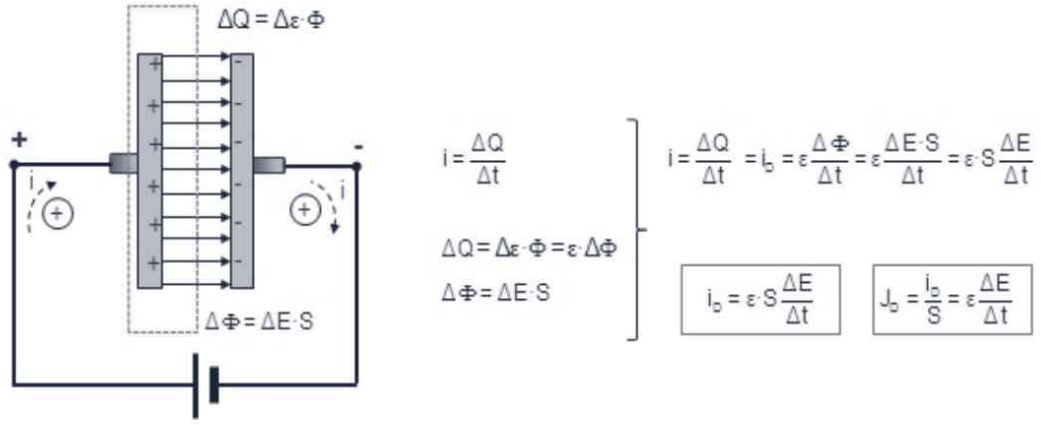


Figura 3.31. Corriente de desplazamiento

3.17 ELEMENTOS ACTIVOS IDEALES Y REALES

Los elementos activos son los encargados de suministrar energía eléctrica en un circuito, pudiendo ser, **fuentes de tensión** o **fuentes de intensidad**, que a su vez pueden ser:

- **Fuentes ideales,** que son elementos utilizados en la teoría de circuitos para el análisis y la creación de modelos que permitan analizar el comportamiento de los circuitos reales. Sus magnitudes (tensión o corriente) son siempre independientes de la carga que alimentan.

- **Fuentes reales,** en las que, la ddp que producen o la corriente que proporcionan, depende de la carga a la que estén conectadas.

Así, pues:

- **Fuente de tensión:** aquella que genera una ddp entre sus terminales constante e independiente de la carga que alimente (fuente ideal), o dependiente de la carga a la que esté conectada (fuente real).

- **Fuente de intensidad:** aquella que proporciona una intensidad constante e independiente de la carga que alimente (fuente ideal) o dependiente de la carga a la que esté conectada (fuente real).

Estos tipos de fuentes se denominan **fuentes de energía independientes** en contraposición a otros tipos denominadas **fuentes de energía dependientes** (transistores, amplificadores, etc.), pues la tensión o la intensidad que suministran dependen de la tensión o la intensidad en otro dipolo, *figura 3.32*. En este libro se estudian los circuitos con fuentes independientes.

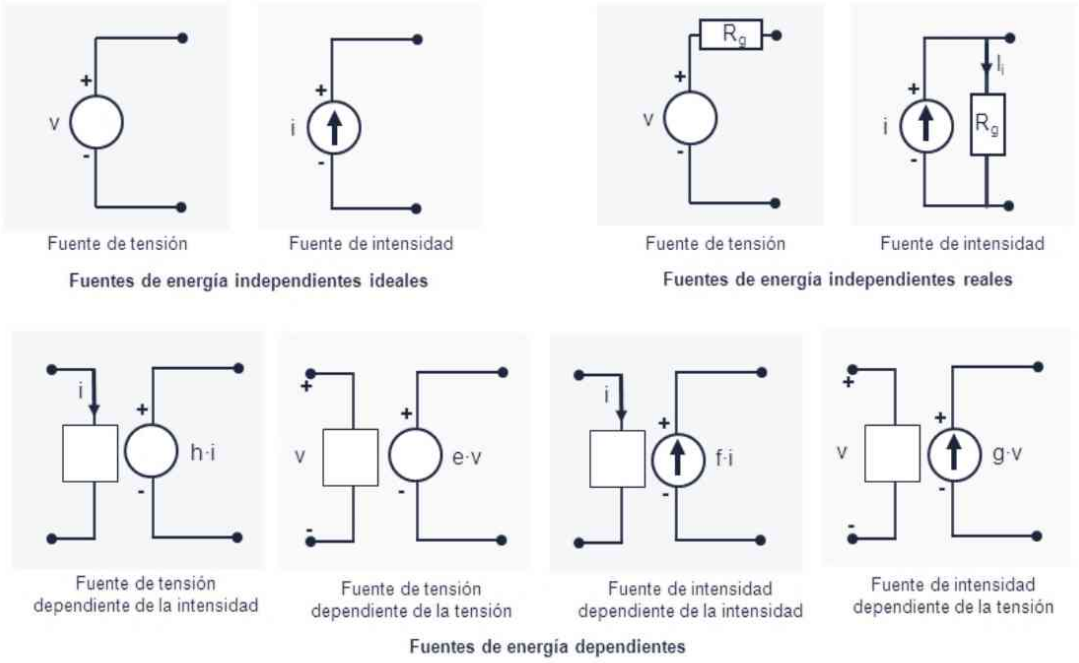


Figura 3.32. Fuentes de energía independientes y dependientes

3.18 FUENTE DE TENSIÓN IDEAL Y REAL

- **Fuente de tensión ideal.** Proporciona una tensión independiente de la corriente que pasa por él.

- **Fuente de tensión real.** Proporciona una tensión dependiente de la corriente que pasa por él.

En ambos casos:

Si la tensión suministrada depende del tiempo se representa por $v_g(t)$. Si no depende del tiempo se representa por V_g. En la *figura 3.33* se representa el símbolo y las curvas características de la tensión, intensidad y potencia, en función de la resistencia de carga. Aplicando la ley de Ohm al circuito correspondiente de la *figura 3.33,* se obtienen las ecuaciones y las curvas correspondientes.

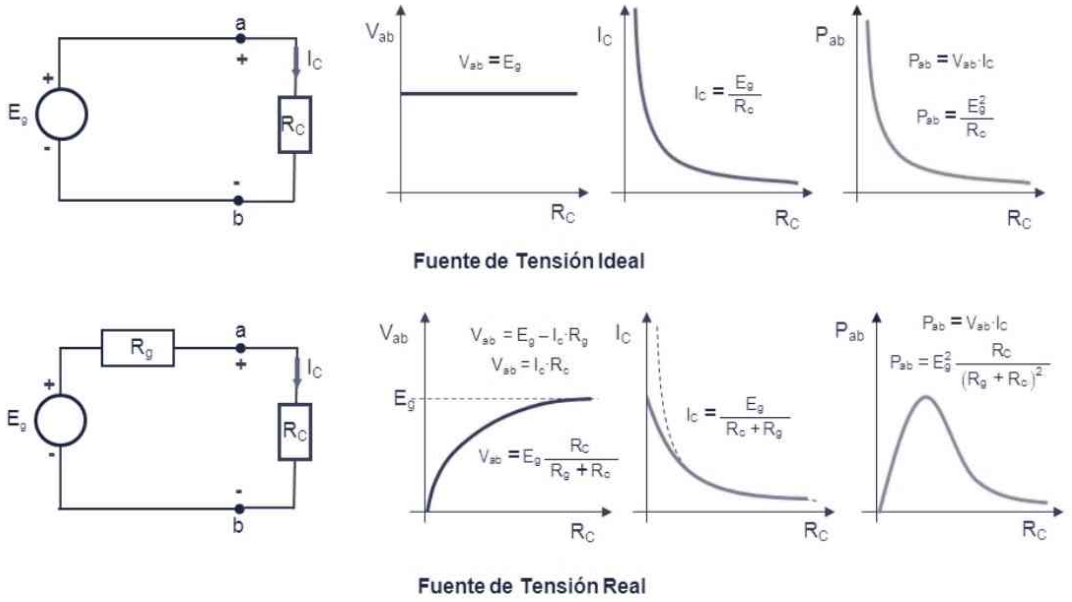


Figura 3.33. Fuente de tensión ideal y real

3.19 FUENTE DE TENSIÓN REAL. CARACTERÍSTICA *V-I*. PUNTO DE FUNCIONAMIENTO

En una fuente de tensión real, la tensión no permanece constante, *figura 3.34*, sino que varía, linealmente, con la carga R_C. La tensión V_{ab} disminuye con la intensidad de carga I_C:

$$V_{ab} = E_g - I_C \cdot R_g \qquad [3.43]$$

En vacío ($R_C = \infty$), por lo que se tiene que $I_C = 0$, lo que implica que $V_{ab} = E_g$. En cortocircuito $R_C = 0$, lo que implica que $I_{cc} = E_g/r$. Por otra parte, con una carga R_c en el circuito, también se ha de cumplir la Ley de Ohm en el lado de la carga ($V_{ab} = I_C \cdot R_C$). Para una resistencia R_C el punto de funcionamiento del circuito corresponde al punto de intersección de las dos rectas.

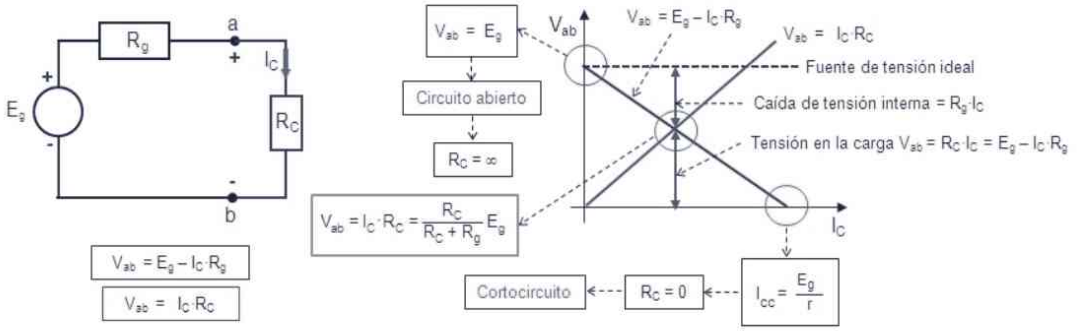


Figura 3.34. Punto de funcionamiento de una fuente de tensión real

Una fuente real no puede entregar toda la potencia a la carga que alimente debido a su resistencia interna. El rendimiento de la fuente es:

$$\eta = \frac{P_{Salida}}{P_{Generada}} = \frac{I_C^2 \cdot R_C}{I_C^2 \cdot R_C + I_C^2 \cdot r} = \frac{R_C}{R_C + r} \qquad [3.44]$$

De donde se deduce que el rendimiento será mayor cuanto menor sea la resistencia interna *r* respecto de la resistencia de carga R_C.

3.20 FUENTE DE CORRIENTE IDEAL Y REAL

Las fuentes de corrientes, también llamadas de intensidad, pueden ser:

- **Fuente de corriente ideal.** Proporciona una intensidad independiente de la tensión en bornes.

  SI la intensidad suministrada depende del tiempo se representa por $i_g(t)$. Si no depende del tiempo se representa por *Ig*. La tensión en bornes del generador depende de la carga a la que esté conectado. En la *figura 3.34* se representa el símbolo y la curva de la intensidad en función de la tensión. Aplicando la ley de Ohm al circuito de la *figura 3.34,* se obtienen las ecuaciones y las curvas correspondientes.

- **Fuente de corriente real.** Proporciona una intensidad dependiente de la tensión en bornes.

En ambos casos:

Si la intensidad suministrada depende del tiempo se representa por $i_g(t)$. Si no depende del tiempo se representa por *Ig*. La tensión en bornes del generador depende de la

carga a la que esté conectado. En la *figura 3.35* se representa el símbolo y las curvas características de la intensidad, tensión y potencia, en función de la resistencia de carga. Aplicando la ley de Ohm al circuito correspondiente de la *figura 3.35,* se obtienen las ecuaciones y las curvas correspondientes.

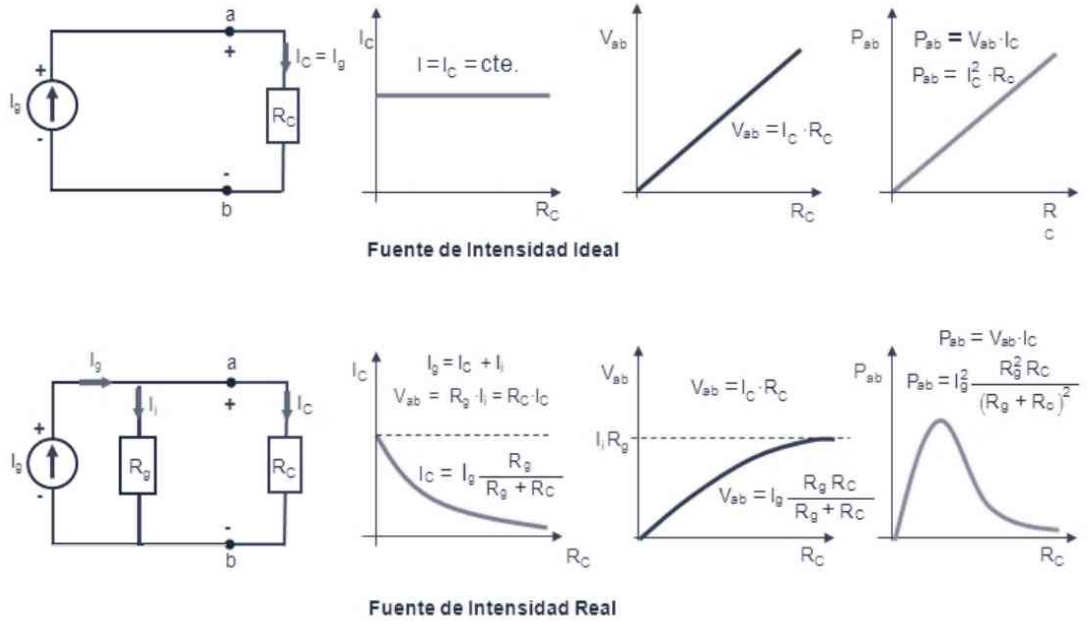


Figura 3.35. Generador ideal de tensión y generador ideal de corriente

3.21 FUENTE DE INTENSIDAD REAL. CARACTERÍSTICA I-V. PUNTO DE FUNCIONAMIENTO

En una fuente de intensidad real, la intensidad de carga no permanece constante, *figura 3.36*, sino que varía, linealmente, con la carga R_C. La intensidad de carga I_C disminuye con la tensión V_{ab}:

$$I_C = I_g - I_i = I_g - V_{ab}/R_g \qquad [3.45]$$

En vacío ($R_C = \infty$), por lo que se tiene que $I_C = 0$, lo que implica $V_{ab\ max} = I_g \cdot R_g$. En cortocircuito $R_C = 0$, lo que implica que $I_{C\ max} = I_g$. Por otra parte, con una carga R_C en el circuito, también se ha de cumplir la Ley de Ohm en el lado de la carga ($V_{ab} = I_C \cdot R_C$). Para una resistencia R_C el punto de funcionamiento del circuito corresponde al punto de intersección de las dos rectas.

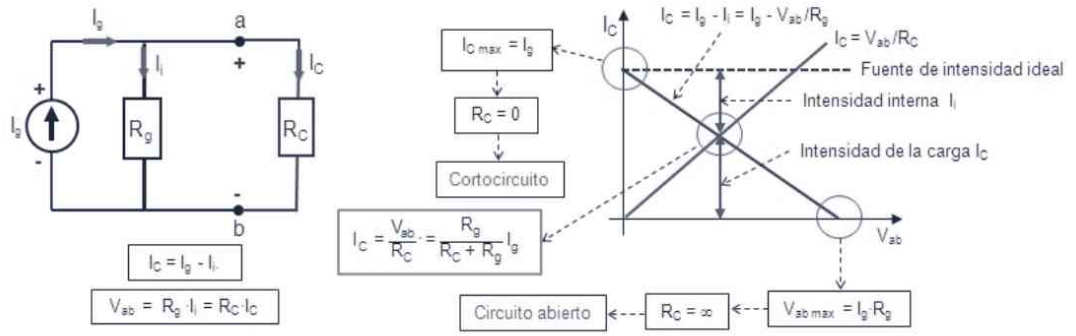


Figura 3.36. Punto de funcionamiento de una fuente de intensidad real

Una fuente real no puede entregar toda la potencia a la carga que alimente debido a su resistencia interna. El rendimiento de la fuente es:

$$\eta = \frac{P_{Salida}}{P_{Generada}} = \frac{I_C^2 \cdot R_C}{I_C^2 \cdot R_C + I_C^2 \cdot r} = \frac{R_C}{R_C + r} \qquad [3.46]$$

De donde se deduce que el rendimiento será mayor cuanto menor sea la resistencia interna *r* respecto de la resistencia de carga R_C.

3.22 TRANSFORMACIÓN DE FUENTES

Las fuentes reales de tensión o de intensidad pueden sustituirse entre ellas por sus fuentes equivalentes, lo que en muchos casos permite simplificar los circuitos para su resolución.

Una fuente de tensión real se puede sustituir a efectos externos por una fuente de intensidad real. Esta transformación, *figura 3.37*, debe garantizar que ambos circuitos son equivalentes, es decir que, al conectarlos al circuito externo entre *a* y *b* deben dar la misma tensión V_{ab} y la misma intensidad de carga I_C.

Partiendo de una fuente de tensión, *figura 3.37*, se tiene:

$$V_{ab} = E_g - I_C \cdot R_g$$

Dividiendo ambos miembros de la igualdad por R_g:

$$V_{ab}/R_g = E_g/R_g - I_C$$

Es lo mismo que:

$$E_g/R_g = V_{ab}/R_g + I_C \qquad [3.47]$$

Que permite obtener la fuente de intensidad equivalente, *figura 3.37*. Es decir:

"*Una fuente de tensión E_g y resistencia interna R_g, tiene como equivalente una fuente de intensidad de valor E_g/R_g con una resistencia en paralelo de valor R_g*".

En la *figura 3.37* se demuestra que la tensión V_{ab} y la intensidad I_C son las mismas en ambos casos.

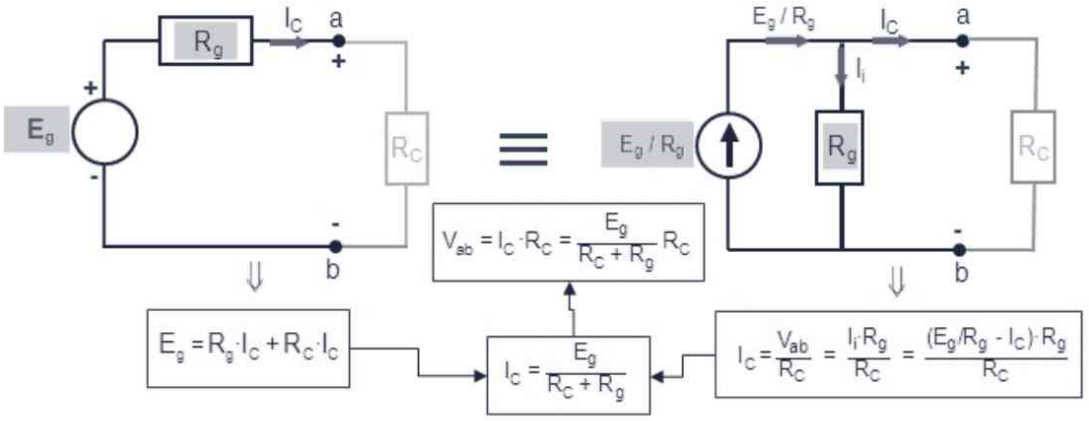


Figura 3.37. Equivalencia entre fuentes reales de tensión y de intensidad

Si se parte de una fuente de intensidad se obtiene un resultado equivalente como se ve a continuación.

Una fuente de intensidad real se puede sustituir a efectos externos por una fuente de tensión real. Esta transformación, *figura 3.38*, debe garantizar que ambos circuitos son equivalentes, es decir que al conectarlos al circuito externo entre *a* y *b* deben dar la misma tensión V_{ab} y la misma intensidad de carga I_C.

Partiendo de una fuente de intensidad, *figura 3.38*, se tiene:

$$I_g = I_i + I_C$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por R_g:

$$I_g \cdot R_g = I_i \cdot R_g + I_C \cdot R_g$$

Es lo mismo que:

$$I_g \cdot R_g = V_{ab} + I_C \cdot R_g \qquad [3.48]$$

Que permite obtener la fuente de tensión equivalente, *figura 3.38*. Es decir:

"*Una fuente de intensidad I_g y resistencia interna R_g, tiene como equivalente una fuente de tensión de valor $I_g \cdot R_g$ con una resistencia en serie de valor R_g*".

En la *figura 3.38* se demuestra que la tensión V_{ab} y la intensidad I_C son las mismas en ambos casos.

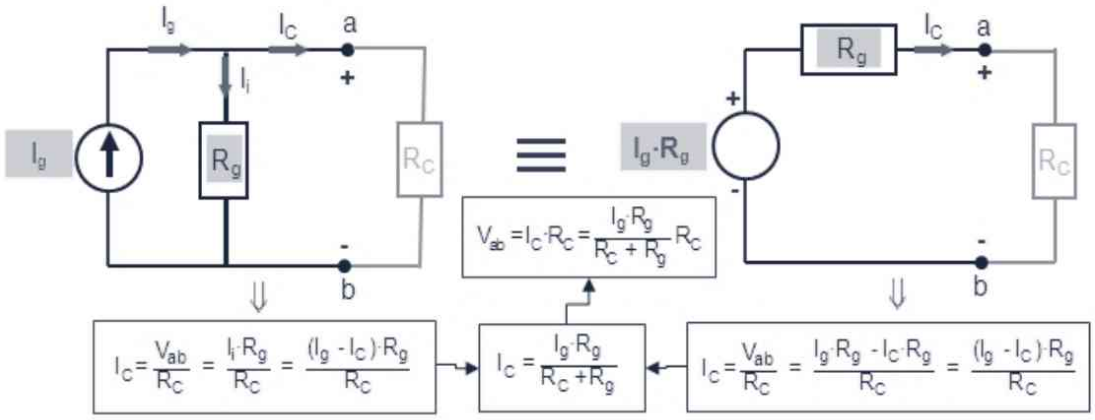


Figura 3.38. Equivalencia entre fuentes reales de intensidad y de tensión

3.23 EQUIVALENCIA ENTRE ASOCIACIONES DE FUENTES

Las fuentes de tensión y de intensidad, además de con otros elementos pasivos se pueden conectar entre sí en serie y en paralelo. Se ha visto en los apartados anteriores que las fuentes reales de tensión y de intensidad, corresponden a una fuente ideal de tensión y de intensidad con una resistencia en serie o en paralelo, respectivamente. En la *figura 3.39* se presentan las equivalencias de diferentes asociaciones, para las que se da una breve explicación a continuación:

1. **Fuentes de tensión ideales en serie.** La fem equivalente corresponde a la suma de las fem que componen la asociación (las tensiones parciales en serie se suman para hallar la tensión total).

2. **Fuentes de intensidad ideales en paralelo.** La intensidad equivalente entre los terminales *a* y *b* corresponde a la suma de las intensidades que componen la asociación (las intensidades en paralelo se suman para hallar la intensidad total).

3. **Fuentes de tensión ideal en paralelo con una resistencia.** La tensión entre los terminales *a* y *b* es la correspondiente a la fuente de tensión (la intensidad que circula entre *a* y *b* depende de la resistencia equivalente entre dichos puntos y no de la que está en paralelo).

4. **Fuentes de intensidad ideal en serie con una resistencia.** La intensidad equivalente entre los terminales *a* y *b* es la correspondiente a la fuente de intensidad (la tensión entre *a* y *b* depende de la resistencia equivalente entre dichos puntos y no de la que está en serie).

5. **Fuentes de tensión ideal en paralelo con una fuente de intensidad ideal**. Este caso es similar al número 3.

6. **Fuentes de intensidad ideal en serie con una fuente de tensión ideal**. Este caso es similar al número 4.

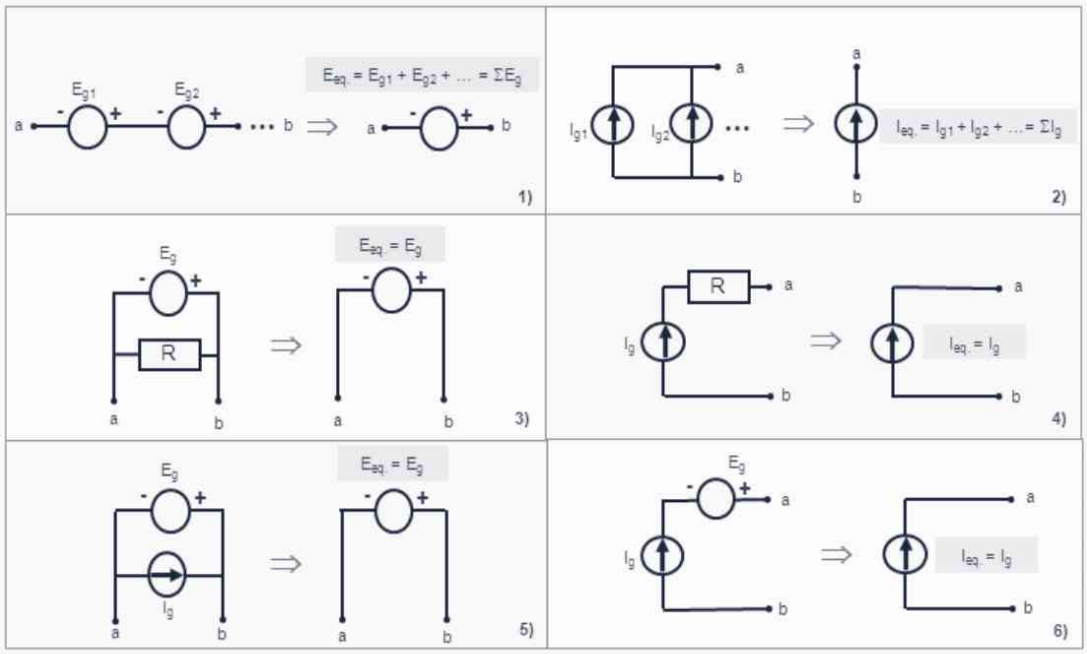


Figura 3.39. Equivalencia entre asociaciones

Estas equivalencias permiten con frecuencia simplificar circuitos que a primera vista perecen complicados.

Para la asociación de fuentes de tensión en paralelo y fuentes de corrientes en serie, todos los elementos han de tener las mismas características, de lo contrario se pueden producir fuertes corrientes entre elementos en los casos de las fuentes de tensión o indeterminación del circuito en el caso de las fuentes de corrientes.

3.24 GENERADORES DE TENSIÓN IGUALES ASOCIADOS EN SERIE Y EN PARALELO

Es frecuente la asociación de generadores de tensión iguales, en serie o en paralelo según lo que se pretenda conseguir. En la *figura 3.40* se muestra la asociación de cuatro baterías en serie y paralelo.

- **Generadores en serie.** Cuando se necesite tensiones superiores a las que puede suministrar un solo elemento.

  Si un elemento tiene una fem E y una resistencia interna r, *figura 3.40,* la fem del conjunto de n elementos conectados en serie es $n \cdot E$ y la intensidad que circula por una resistencia R al conectarla al conjunto es:

$$I_s = \frac{n \cdot E}{R + n \cdot r} \qquad [3.49]$$

  La intensidad equivale a la de una sola fuente de fem $n \cdot E$ *y* resistencia interna $n \cdot r$.

  Obsérvese que, respecto a un solo elemento, aumenta la tensión en bornes de la resistencia R y como consecuencia también la intensidad que circula por ella.

- **Generadores en paralelo.** Cuando se necesite potencias superiores a las que puede suministrar un solo elemento.

Si un elemento tiene una fem E y una resistencia interna r, *figura 3.40,* la fem del conjunto de p elementos conectados en paralelo es E y la intensidad que circula por una resistencia R al conectarla al conjunto es:

$$I_p = \frac{E}{R + \frac{r}{p}} \qquad [3.50]$$

La intensidad equivale a la de una sola fuente de fem E *y* resistencia interna r/p.

Obsérvese que, la intensidad que circula por la resistencia R (considerando despreciable r/p frente a R, que es frecuente) es la misma que conectada a un solo elemento, pero ahora la asociación puede suministrar, aproximadamente, p veces la potencia de aquél.

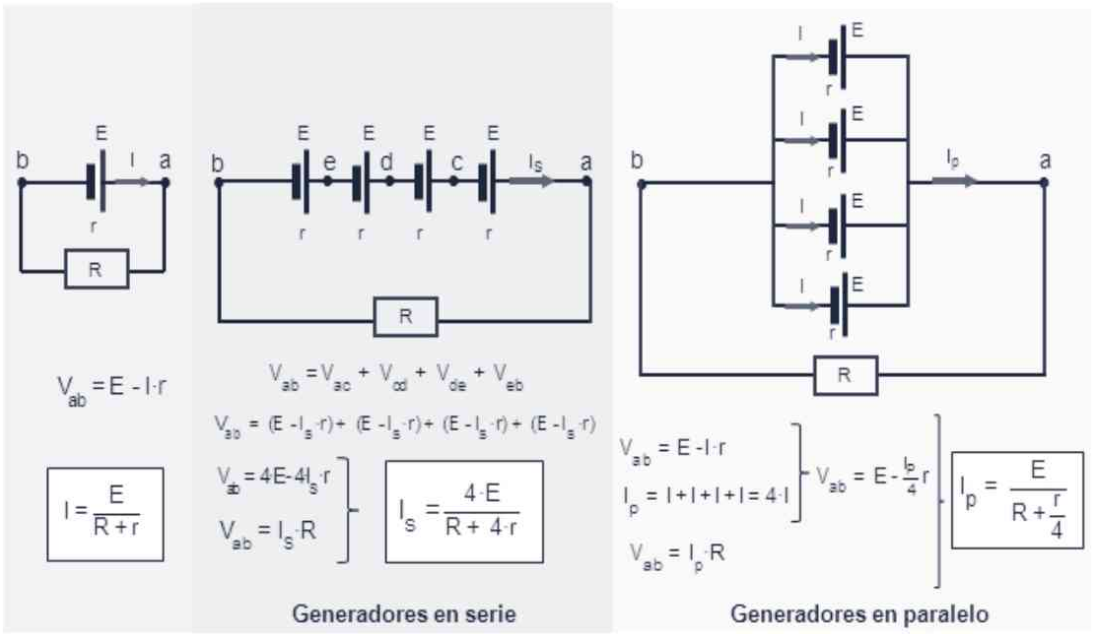


Figura 3.40. Baterías en serie y en paralelo

- **Acoplamiento mixto de generadores.** Consiste en unir *n* baterías en serie con otras en paralelo (*p* ramas en paralelo) para conseguir así la suma de las ventajas de cada uno de los acoplamientos. Para resolver el circuito se halla la fem ($n \cdot E$) y resistencia interna equivalente ($n \cdot r$) de los elementos en serie, con lo que resulta un acoplamiento en paralelo que se resuelve como tal. La intensidad de salida que se obtiene del conjunto es:

$$I = \frac{n \cdot E}{R + \frac{n \cdot r}{p}} \qquad [3.51]$$

En todos los casos se halla el rendimiento de la asociación dividiendo la potencia entregada a la carga por la potencia generada por todos los elementos:

$$\eta = \frac{P_{Salida}}{P_{Generada}} \qquad [3.52]$$

3.25 TEMPERATURA DE TRABAJO DE UN CONDUCTOR RECORRIDO POR UNA CORRIENTE ELÉCTRICA

Al circular una corriente *I* por un conductor de resistencia *R* se produce una cantidad de calor, que según la Ley de Joule, *fórmula [3.28],* tiene por valor (en julios):

$$Q = I^2 \cdot R \cdot t = I^2 \cdot \frac{\rho L}{S} \cdot t \qquad [3.53]$$

Una parte de este calor calienta el conductor (Q_c) mientras que el resto (Q_d) se disipa por conducción, convección y radiación. Si se considera que el conductor es cilíndrico de diámetro d, longitud L, y la resistividad ρ constante, el balance energético en dicho conductor, conforme al principio de conservación de la energía es:

$$\text{Calor aportado por efecto Joule } Q = \text{Calor calentamiento del conductor } Q_c + \text{Calor disipado } Q_d \qquad [3.54]$$

El calentamiento del conductor depende de: su masa m, de su calor específico c y de la diferencia de temperatura entre la suya propia y el medio que le rodea, ΔT, tal que:

$$Q_c = m \cdot c \cdot \Delta T = \gamma_p \cdot V \cdot c \cdot \Delta T = \gamma_p \cdot S \cdot L \cdot c \cdot \Delta T \qquad [3.55]$$

m = Masa del conductor ($m = \gamma_p \cdot V$).

c = calor específico del conductor.

ΔT = Elevación de la temperatura del conductor respecto del medio que le rodea.

V = Volumen del conductor.

S = Sección del conductor.

γ_p = Peso específico del conductor.

Dentro de los límites de calentamiento tolerados en los conductores, el calor disipado Q_d es proporcional a su superficie lateral S_L, al exceso de temperatura T del conductor sobre el medio que le rodea y al tiempo t:

$$Q_d = K \cdot S_L \cdot T = K \cdot \pi \cdot d \cdot L \cdot T \cdot t \qquad [3.56]$$

K = Coeficiente de proporcionalidad.

S_L = Superficie lateral del conductor considerándolo cilíndrico ($S_L = \pi dL$).

T = Exceso de temperatura del conductor respecto del medio ambiente.

Sustituyendo en la *ecuación [3.54]:*

$$I^2 \cdot \rho \cdot t = \gamma_p \cdot S^2 \cdot c \cdot \Delta T + \pi \cdot S \cdot K \cdot d \cdot T \cdot t \qquad [3.57]$$

Obsérvese que, existe calentamiento del conductor mientras exista *variación* de la temperatura respecto al medio que le rodea, cuando ambos tengan la misma temperatura $\Delta T = 0$ y entonces $Q_c = 0$, pero sigue habiendo disipación de calor $T \neq 0$ y por tanto $Q_d \neq 0$.

El estudio matemático de esta ecuación tiene la representación gráfica de la curva de la *figura [3.41]*. En efecto, al paso de la corriente, mientras exista elevación de la temperatura del conductor respecto de la temperatura inicial, debido al efecto Joule (Q), parte de este calor (Q_c) se invierte en calentar el conductor y otra parte se disipa al exterior (Q_d). Pero una vez el conductor alcance cierta temperatura (temperatura de régimen), ésta deja de aumentar y todo el calor producido por efecto Joule se disipa al exterior. En este caso $Q_c = 0$ y a partir de la *fórmula 3.57* se tiene:

$$I^2 \cdot \rho \cdot t = \pi \cdot S \cdot K \cdot d \cdot T \cdot t \qquad [3.58]$$

$$T = \frac{\rho I^2}{K \cdot \pi \cdot d \cdot S} \qquad [3.59]$$

Como $\pi \cdot d = (\pi \cdot d_2/4) \cdot 4/d$, esta fórmula se puede poner en la forma:

$$T = \frac{\rho \cdot d \cdot J^2}{4 \cdot K} \qquad [3.60]$$

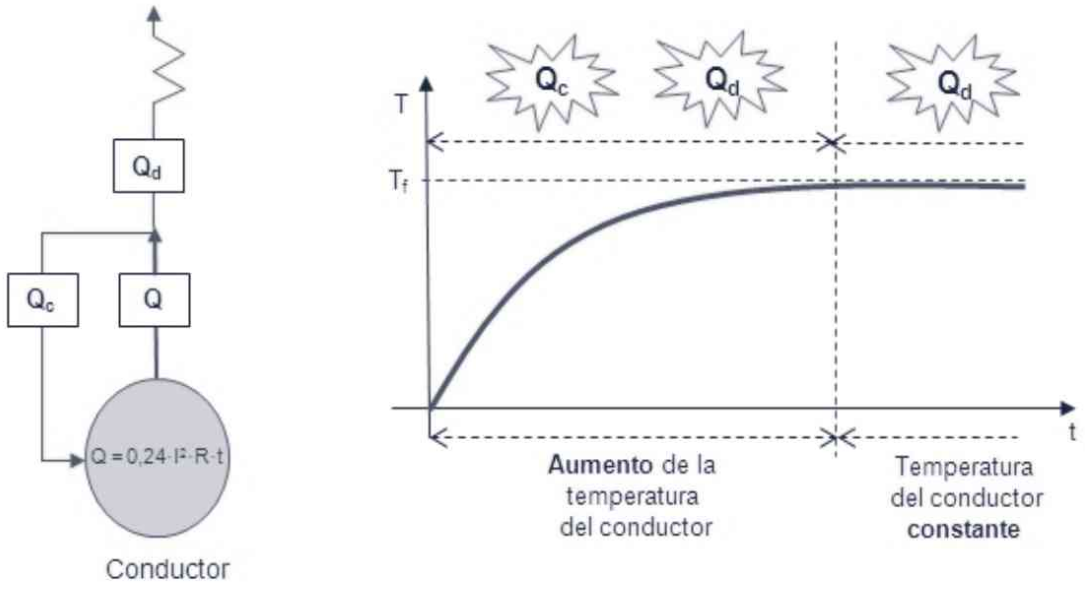


Figura 3.41. Conductor eléctrico: elevación de la temperatura y temperatura de régimen

De esta última expresión, *[3.60],* se deducen las siguientes consecuencias:

- Para un conductor dado la temperatura límite es sensiblemente proporcional al cuadrado de la densidad de corriente J (la proporcionalidad rigurosa supone la constancia de la resistividad ρ y el calor específico c).
- Para una temperatura límite impuesta en el conductor (suele ser de 70º si el aislamiento es termoplástico y 90º si el aislamiento es termoestable), y condiciones de enfriamiento determinadas (K = cte.), la densidad de corriente J que se puede admitir es tanto menor cuanto mayor es el diámetro d del conductor. Esto quiere decir que, desde el punto de vista de su calentamiento, los conductores de mucha sección son poco aconsejables, es preferible sustituirlos por un conjunto de conductores de menor sección cada uno de ellos (de esta manera, para una misma sección total, varios conductores permiten más intensidad que uno solo).
- En igualdad de condiciones, la densidad de corriente J ha de ser tanto menor cuanto más pequeño sea K, es decir, cuanto peor sean las condiciones de enfriamiento del conductor (aislante, tubo, etc.).

La *fórmula [3.60],* para una temperatura de trabajo del conductor determinada (T = cte.), agrupando constantes y despejando I, se puede poner en la forma:

$$T = \frac{\rho \cdot d \cdot J^2}{4 \cdot K} = \frac{\rho \cdot d}{4 \cdot K} \frac{I^2}{\left(\frac{\pi \cdot d^2}{4}\right)^2} = \frac{4 \cdot \rho \cdot I^2}{K \cdot \pi^2 \cdot d^3} = K' \frac{I^2}{d^3}$$

$$I = K' \, d^{3/2} \qquad [3.61]$$

Que determina la intensidad I, para una temperatura límite determinada, en función del diámetro del conductor.

Todo esto se traduce en unas tablas (facilitadas por el fabricante, reglamento o norma de la instalación eléctrica correspondiente) que, en función de la naturaleza del conductor (ρ: Cu, Al, etc.), condiciones de enfriamiento (K: aislamiento, canalización, exposición) y diámetro d (o sección S), dan la intensidad máxima admisible I_{max} en el conductor (o la densidad de corriente J_{max}).

3.26 PROTECCIÓN DE LAS LÍNEAS ELÉCTRICAS: FUSIBLE

Una línea eléctrica cuya intensidad de utilización es I_b, necesita estar protegida contra intensidades superiores a las que puede soportar el conductor (I_z) en su régimen normal de funcionamiento. Estas *sobreintensidades*, *figura 3.42*, pueden ser:

- **Sobrecargas,** intensidades superiores a la máxima que soporta un conductor en su régimen normal (I_z), debidas a: aumento de potencia del receptor, averías, etc.

- **Cortocircuitos,** intensidades muy superiores a la máxima que soporta un conductor en su régimen normal (I_z), debidas normalmente a un contacto directo, o de baja resistencia, entre el conductor de polaridad positiva y el de polaridad negativa.

Se denomina **fusible** a un dispositivo (filamento o lámina de un metal o aleación de bajo punto de fusión) que se intercala en un punto determinado de una instalación eléctrica para que se funda, por efecto Joule, cuando la intensidad de la corriente supere, por sobrecarga o cortocircuito, un determinado valor que pudiera hacer peligrar la integridad de los conductores de la instalación con el consiguiente riesgo para los materiales y las personas, *figura 3.43*.

El tiempo necesario para que el fusible funda depende de la sobreintensidad y se obtiene en la curva característica tiempo-intensidad (*t-I*) de cada fusible, *figura 3.43*. En cada curva se cumple que a más corriente menos tiempo tarde el fusible en fundir. Para averiguar el tiempo de fusión se traza una línea perpendicular al eje X, desde la intensidad para cuyo tiempo de fusión del fusible queremos conocer hasta la intersección con la curva correspondiente al calibre del fusible. Así, por ejemplo, para el fusible de intensidad nominal I_N = 15 A del gráfico de la *figura 3.43*, corrientes inferiores a 18 A no producen la fusión del fusible, corrientes superiores a 18 A siempre producen la fusión del fusible, así, para las intensidades de 30 A, 38 A y 80 A, los tiempos de fusión son respectivamente, 40 s, 5 s y 0,03 s.

La elección correcta de un fusible implica que éste cumpla ciertas condiciones:

- Su intensidad nominal I_N ha de ser: $I_b \leq I_N \leq I_Z$

- El *poder de corte del fusible, PdC,* (*I* máxima que es capaz de cortar sin estropearse) > *I* máxima prevista en el punto donde esté situado.

- La intensidad de cortocircuito en cualquier punto de la línea (al principio $I_{CC\ máxima,}$ y al final $I_{CC\ mínima}$) debe interrumpirse en un tiempo inferior al que llevaría al conductor a alcanzar su temperatura límite (250 ºC para aislamiento XLPE y EPR, 160 ºC para aislamiento PVC).

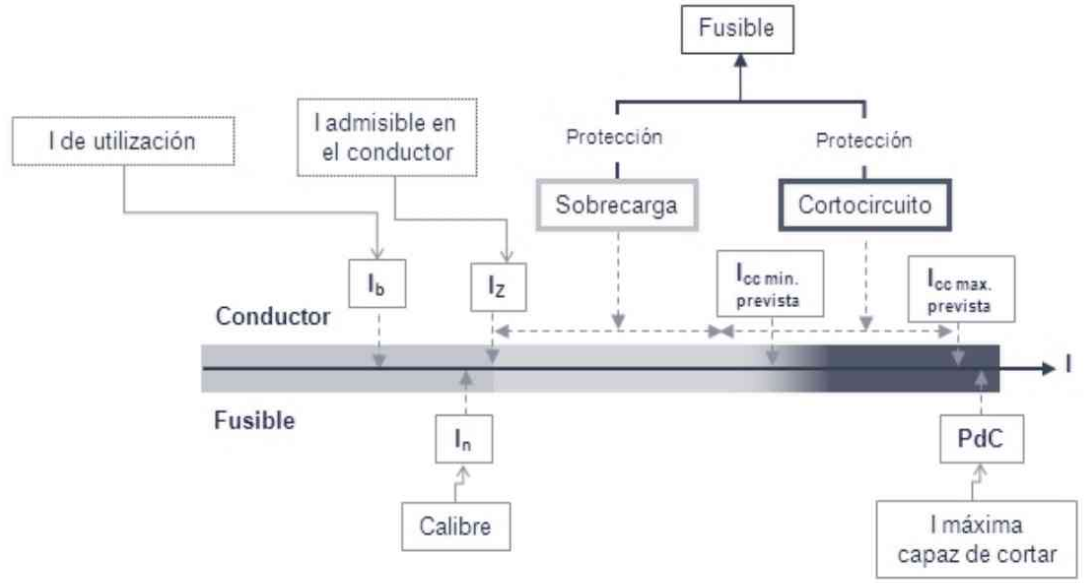


Figura 3.42. Sobrecarga y cortocircuito en un conductor

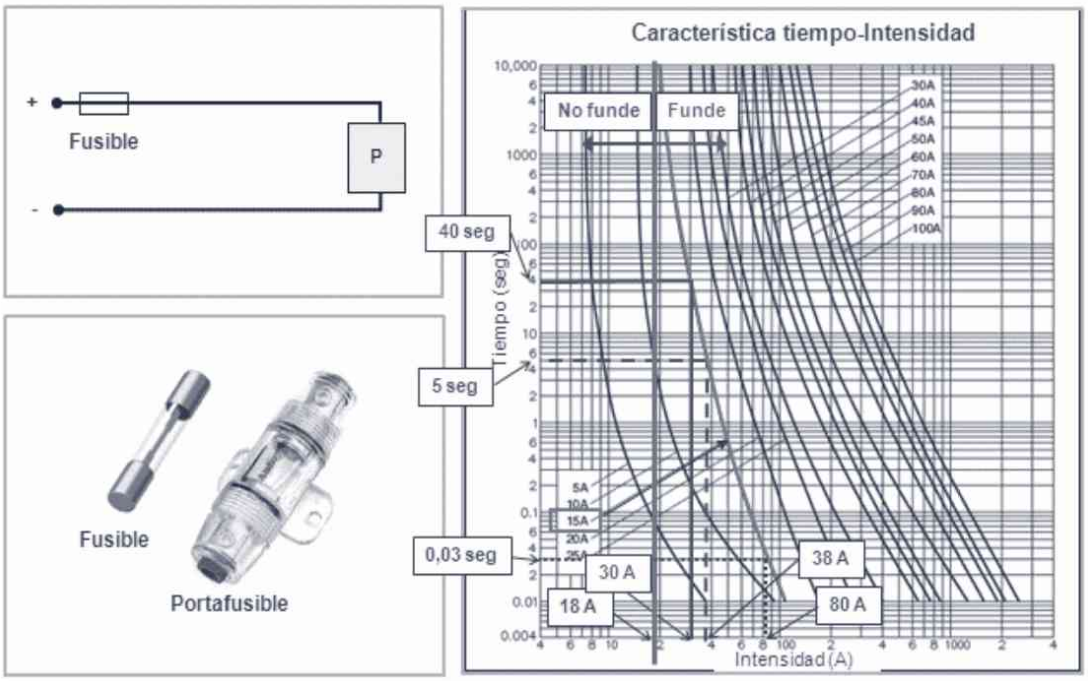


Figura 3.43. Fusible. Curvas t-I para fusibles con diferente intensidad nominal

Además de los fusibles existen otros dispositivos que se utilizan para la protección de las líneas eléctricas frente a sobrecorrientes, son los interruptores automáticos que se describirán en el capítulo de electromagnetismo.

3.27 CAÍDA DE TENSIÓN EN UNA LÍNEA DE CORRIENTE CONTINUA

Un receptor eléctrico recibe la energía para su funcionamiento a través de unos conductores, normalmente de cobre o aluminio que, como se ha visto, tienen una resistencia eléctrica y que al circular los electrones través de ellos producen una caída de tensión (los electrones pierden energía) respecto a la tensión desde la que se alimenta el receptor. Esta caída de tensión (cdt) no debe superar cierto valor (depende del tipo de instalación, pero normalmente menor del 5%) para el correcto funcionamiento de los receptores, además que, debido a la cdt, se pierde energía eléctrica como se verá a continuación.

Si de una fuente de corriente continua (CC) de tensión V_0 se alimenta un receptor de potencia P mediante una línea de longitud L y sección de los conductores S, en los bornes de dicha carga la tensión V será menor que V_0, debido al paso de la corriente I, demandada por el receptor**,** por los conductores de la línea que tienen una resistencia R, *figura [3.44]*. Esta diferencia de tensión entre V y V_0 se conoce con el nombre de **caída de tensión** δ(cdt).

$$\delta = V_0 - V \qquad [3.62]$$

En forma porcentual, la **caída de tensión porcentual** $\delta\%$ es:

$$\delta\% = \frac{V_0 - V}{V_0} 100 = \frac{\delta}{V_0} 100 \qquad [3.63]$$

Observando la *figura [3.44]* se deduce:

$$V_0 = I \cdot R + V + I \cdot R = V + 2 \cdot I \cdot R = V + 2 \cdot I \frac{\rho \cdot L}{S}$$

$$\delta = V_0 - V = \frac{2 \cdot \rho \cdot L \cdot I}{S} \qquad [3.64]$$

Esta ecuación se puede poner en función de la potencia ($I = P/V$):

$$\delta = V_0 - V = \frac{2 \cdot \rho \cdot L \cdot P}{S \cdot V} \qquad [3.65]$$

Fórmula que permite hallar la cdt en la línea si se conoce la sección, o despejando S, la que permite hallar la sección S conociendo la cdt máxima permitida δ_{max}.

$$S = \frac{2 \cdot \rho \cdot L \cdot I}{\delta_{max}} \qquad [3.66]$$

En función de la potencia ($I = P/V$):

$$S = \frac{2 \cdot \rho \cdot L \cdot P}{V \cdot \delta_{max}} \qquad [3.67]$$

La pérdida de potencia P_P en la línea es:

$$P_P = 2 \cdot R \cdot I^2 = 2 \frac{\rho \cdot L}{S} I^2 \qquad [3.68]$$

Expresando la pérdida potencia P_P en forma porcentual respecto a la potencia en el origen P_0 ($P_0 = V_0 \cdot I$), se demuestra que, *el % de caída de tensión es igual al % de pérdida de potencia*:

$$P_P\% = \frac{P_P}{P_0} 100 = \frac{2 \cdot R \cdot I^2}{P_0} 100 = \frac{2 \cdot R \cdot I \cdot I}{V_0 \cdot I} 100 = \frac{\delta \cdot I}{V_0 \cdot I} 100 = \frac{\delta}{V_0} 100 = \delta\% \qquad [3.69]$$

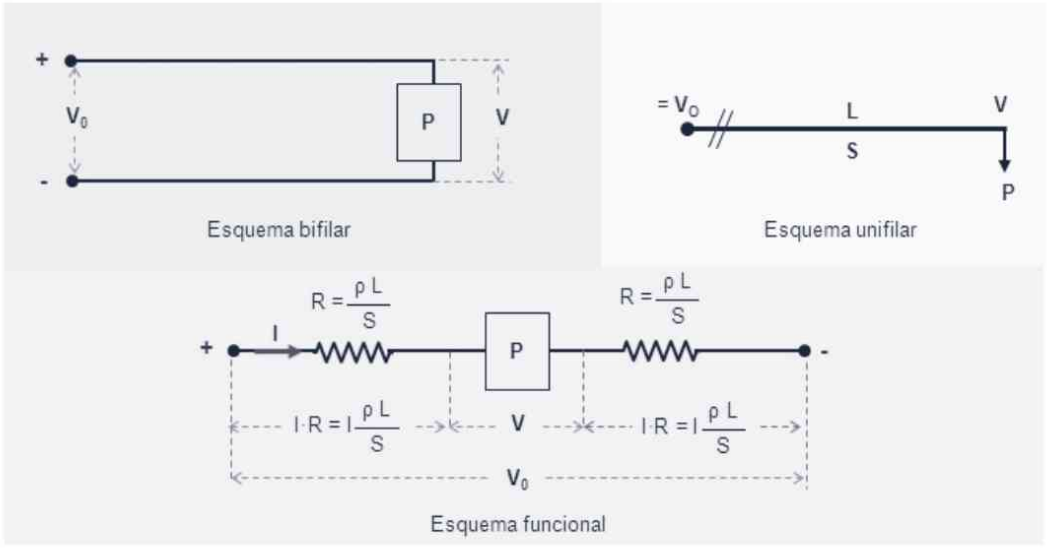


Figura 3.44. Caída de tensión en una línea de CC

3.28 CÁLCULO DE UNA LÍNEA DE CC

El cálculo de una línea eléctrica implica:

- **Criterio de caída de tensión:** la sección elegida debe producir una caída de tensión δ que no supere la caída de tensión máxima admisible δ_{Max} (conforme a REBT, normas, funcionamiento correcto de los receptores, etc.).

$$\delta \leq \delta_{Max} \qquad [3.70]$$

- **Criterio térmico:** elegir una sección tal que la intensidad de los receptores I_C que alimenta dicha línea no supere la intensidad máxima admisible I_{Max} en dicho conductor (conforme a REBT, normas, etc.).

$$I_C \leq I_{Max} \qquad [3.71]$$

- **Protección de la línea:** elegir el fusible (o interruptor automático) adecuado para la protección de la línea contra sobrecargas y cortocircuitos.

3.29 PRODUCCIÓN DE CALOR POR ENERGÍA ELÉCTRICA

Frecuentemente se utiliza el efecto Joule para producir calor (plancha, termo, radiador, etc.). En estos casos, y dependiendo del tipo de aparato, todo el calor producido W_R no se invierte en calentar el cuerpo que se trata de calentar, pues como consecuencia de las pérdidas solamente una parte del mismo $W_{útil}$ es dedicada a ello. Si η es el rendimiento del aparato, se tiene:

$$\eta = \frac{W_{útil}}{W_R} \qquad [3.72]$$

De la ecuación anterior se deduce el calor a producir W_R y el calor útil $W_{útil}$ de la resistencia R:

$$W_R = \frac{W_{útil}}{\eta} \qquad [3.73]$$

$$W_{útil} = \eta \cdot W_R \qquad [3.74]$$

El rendimiento suele oscilar entre el 0,6 (p. ej., plancha eléctrica) y el 0,95 (p. ej., calentador de inmersión).

El calor producido en una resistencia, *fórmula [3.28],* es:

$$W_R = I^2 \cdot R \cdot t = P \cdot t$$

Si una sustancia de masa m (kg) y calor específico c (J/kg · ºC), se quiere elevar su temperatura un valor ΔT (ºC), es preciso comunicarle una cantidad de calor $W_{\Delta T}$ (J) cuyo valor es:

$$W_{\Delta T} = m \cdot c \cdot \Delta T \qquad [3.75]$$

Por otra parte, a veces es necesario fundir la sustancia de masa m (kg) y calor latente de fusión L_F (J/kg), que se ha de calentar, para lo cual se precisa aportarle el calor de fusión W_F (J) necesario para ello:

$$W_F = m \cdot L_F \qquad [3.76]$$

Entonces, el calor útil $W_{útil}$ ha de ser:

$$W_{útil} = W_{\Delta T} + W_F \qquad [3.77]$$

La *tabla 3.6* muestra las constantes calorimétricas de algunas sustancias.

Sustancia	c (J/kg · ºC)	T_F (ºC)	$L_F \cdot 10^3$ (J/kg)
Agua	4.180	0	334
Estaño	230	232	59
Plomo	130	327	22,5
Cobre	390	1083	205
Aluminio	900	659	350

Tabla 3.6. Constantes calorimétricas

3.30 RESUMEN DE CONCEPTOS Y FÓRMULAS DE ESTE CAPÍTULO

En la *figura 3.45* se hace un resumen de conceptos y en la *tabla 3.7* de fórmulas.

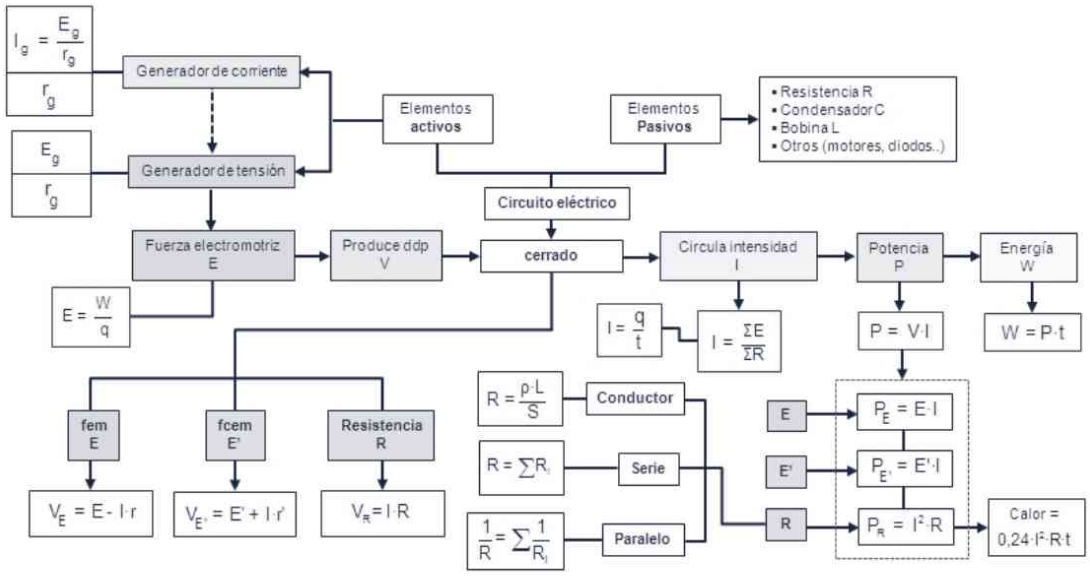
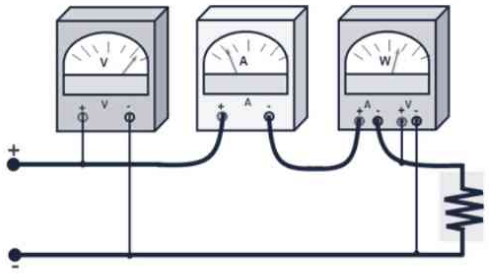


Figura 3.45. Resumen de conceptos de este capítulo

Intensidad	$I = \frac{Q}{t}$
Densidad de corriente	$J = \frac{I}{S}$
Fuerza electromotriz	$E = \frac{W}{q}$
Potencia eléctrica	$P = V_{ab} \cdot I$
Ley de Ohm general	$\mathbf{J} = \gamma \cdot \mathbf{E}$
Resistencia de un conductor	$R = \frac{\rho \cdot L}{S}$
Ley de Ohm	$V_{ab} = I \cdot R$
Aumento de *R* con temperatura	$R_{T^o} = R_{20^o}\left[1 + \alpha\,(T - 20^o)\right]$
Ley de Joule	$W_{cal} = 0{,}24 \cdot I^2 \cdot R \cdot t$ (calorias)
Asociación en serie de resistencias	$R = R_1 + R_2 + R_3 = \sum R_i$

Asociación en paralelo de resistencias	$\frac{1}{R} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = \sum \frac{1}{R_i}$
Ley de Ohm con fem y fcem	$I = \frac{E - E'}{R + r + r'} = \frac{\Sigma E}{\Sigma R}$
Tensión en bornes de una fem *E*	$V_E = E - I \cdot r$
Tensión en bornes de una fcem *E'*	$V_{E'} = E' + I \cdot r'$
Rendimiento de un dispositivo	$\eta = \frac{P_{Salida}}{P_{Entrada}}$
Baterías en serie	$I_S = \frac{n \cdot E}{R + n \cdot r}$
Baterías en paralelo	$I_p = \frac{E}{R + \frac{r}{p}}$
Baterías mixta (serie-paralelo)	$I_S = \frac{n \cdot E}{R + \frac{n \cdot r}{p}}$
Caída de tensión en una línea	$\delta\% = \frac{V_0 - V}{V_0} 100 = \frac{\delta}{V_0} 100$
Cálculo sección de un conductor	$S = \frac{2 \cdot \rho \cdot L \cdot I}{\delta_{max}}$



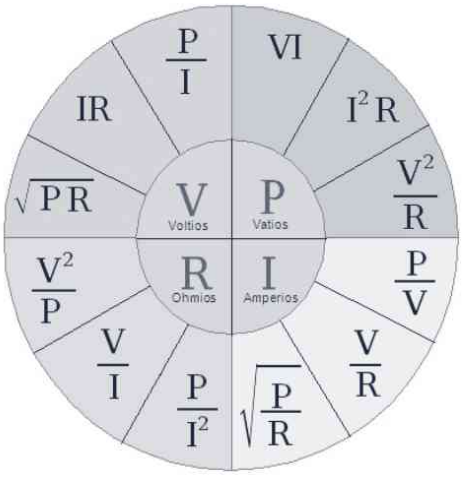


Tabla 3.7. Relación entre diferentes magnitudes eléctricas en una resistencia. Resumen de fórmulas

3.31 EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Ejercicio 3.31.1

Por un conductor de resistividad 0,017 Ω mm^2/m y sección 16 mm^2 circula una corriente de 2 A. Calcular el campo eléctrico que produce dicha corriente.

Solución:

Por las *fórmulas [3.3]* y *[3.19]*:

$$J = \frac{I}{S} = \frac{2}{16} = 0,125 \ A/mm^2$$

$$J = \gamma \cdot E \quad \Rightarrow \quad E = \frac{J}{\gamma} = \rho \cdot J = 0,017 \cdot 0,125 = 2,1 \cdot 10^{-3} \ N/C$$

Ejercicio 3.31.2

Se ha bobinado una bobina con 100 m de hilo de cobre de 2 mm^2 de sección y resistividad 0,015 Ω mm^2/m a la temperatura de 20 ºC. Determinar su resistencia a la temperatura de 20 ºC y a la temperatura de 90 ºC.

Solución:

Por las fórmulas [3.21] y [3.27] se tiene:

$$R_{20^o} = \frac{\rho \cdot L}{S} = \frac{0,015 \cdot 100}{2} = 0,75 \ \Omega$$

$$R_{T^o} = R_{20^o} \left[1 + \alpha \left(T - 20^o \right) \right] = 0,75 \left[1 + 3,9 \cdot 10^{-3} \left(90 - 20 \right) \right] = 0,95 \ \Omega$$

Ejercicio 3.31.3

La potencia de un dispositivo eléctrico varía con el tiempo tal como muestra el gráfico de la *figura 3.46*. Se pide:

a) Potencia máxima y mínima del circuito.

b) La energía transferida al dispositivo.

c) Potencia media del dispositivo.

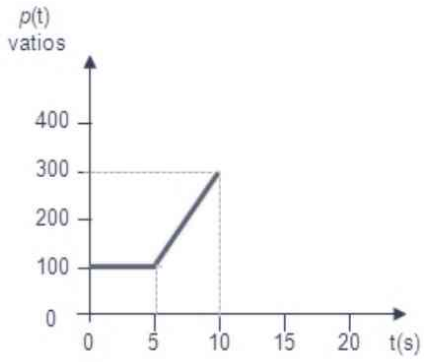


Figura 3.46. Problema 3.31.3

Solución:

a) Potencia máxima y mínima del circuito.

En el gráfico se tiene: potencia mínima 100 W y potencia máxima 300 W.

b) La energía transferida al dispositivo.

La energía corresponde al área delimitada por la curva de la potencia y el eje OX (área del rectángulo más área del triángulo).

$$w = p \cdot t = 100 \cdot 10 + \frac{(10-5)\cdot(300-100)}{2} = 1.500 \text{ julios}$$

c) Potencia media del dispositivo.

$$P = \frac{W_{Total}}{t_{Total}} = \frac{1.500}{10} = 150 \text{ W}$$

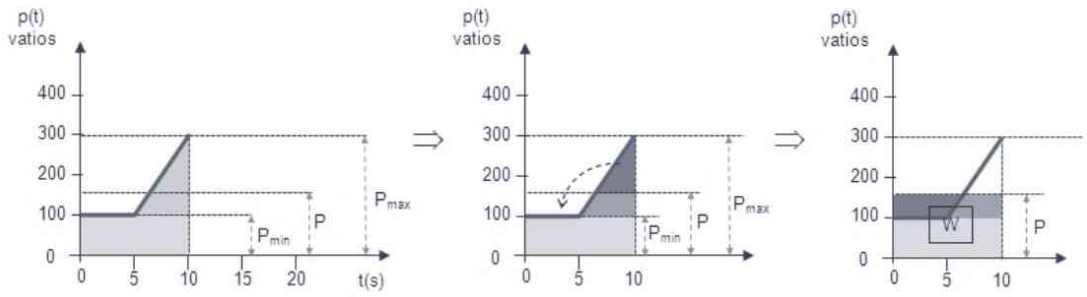


Figura 3.47. Solución del problema 3.31.3

Ejercicio 3.31.4

En una resistencia eléctrica figuran sus características: 2 Ω, 10 W. Calcular la tensión máxima y la intensidad máxima que puede soportar dicha resistencia.

Solución:

A partir de la Ley de Joule, *fórmula [3.28]:*

$$W = I^2 \cdot R \cdot t = \frac{V^2}{R} t \quad \Rightarrow \quad P = \frac{W}{t} = \frac{V^2}{R} = I^2 \cdot R$$

$$V = \sqrt{P \cdot R} = \sqrt{2 \cdot 10} = 4,47 \text{ V} \quad \text{(Tensión máxima)}$$

$$I = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{2}{10}} = 0,44 \text{ A} \quad \text{(Intensidad máxima)}$$

Ejercicio 3.31.5

En el circuito de la *figura 3.48*, calcular:

a) Intensidad máxima que debe circular por el circuito.

b) Tensión máxima que puede soportar el circuito y en este caso tensión en bornes de cada resistencia.

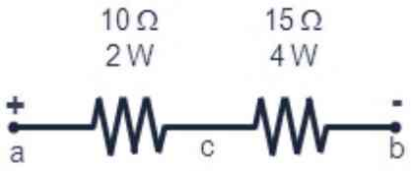


Figura 3.48. Problema 3.31.5

Solución:

a) Intensidad máxima que debe circular por el circuito es la correspondiente a la intensidad máxima que puede soportar la resistencia que menos intensidad soporte.

$$I_{10} = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{2}{10}} = 0,44\ A$$

$$I_{22} = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{4}{15}} = 0,51\ A$$

La máxima intensidad que debe circular es 0,44 A.

b) La tensión máxima soportada es la correspondiente a la intensidad máxima anterior. Como las resistencias están en serie, *fórmula [3.30]* y por la ley de Ohm, *fórmula [3.22],* se tiene:

$$V_{ab} = (R_{10} + R_{15}) \cdot I = (10 + 15) \cdot 0,44 = 11\ V \quad (V_{ab}\ \text{máxima})$$

$$V_{ac} = I \cdot R_{10} = 0,44 \cdot 10 = 4,4\ V\ ;\ V_{cb} = I \cdot R_{15} = 0,44 \cdot 15 = 6,6\ V$$

Ejercicio 3.31.6

Una lámpara cuyas características son 6 *V* y 3 *W* se quiere conectar a una batería de 9 *V*, para lo cual se conecta en serie con la lámpara una resistencia *R* cuyo valor se ha de hallar. Calcular

a) Resistencia *R* para que la lámpara funcione correctamente.

b) Potencia suministrada por la batería.

c) Rendimiento eléctrico del circuito.

Solución:

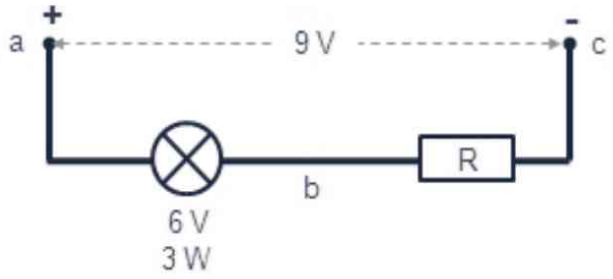


Figura 3.49. Solución del problema 3.31.6

a) Resistencia R para que la lámpara funcione correctamente, *figura 3.49*.

Cálculo de la corriente nominal de la lámpara, *fórmula [3.13]*:

$$P_{ab} = V_{ab} \cdot I \quad \Rightarrow I = \frac{P}{V_{ab}} = \frac{3}{6} = 0{,}5\ A$$

Por la ley de Ohm, *fórmula [3.22],* y las sumas de las tensiones parciales, se tiene:

$$V_{ac} = V_{ab} + V_{bc} \quad \Rightarrow \quad 9 = 6 + R \cdot 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad R = 6\ \Omega$$

b) Potencia suministrada por la batería:

$$P_{ac} = V_{ac} \cdot I = 9 \cdot 0{,}5 = 4{,}5\ W$$

c) Rendimiento eléctrico del circuito:

$$\eta = \frac{\text{Potencia de salida}}{\text{Potencia de entrada}} = \frac{P_{ab}}{P_{ac}} = \frac{3}{4{,}5} = 0{,}66 = 66\ \%$$

Nótese que hay un 34 % de potencia perdida (100 – 66 = 34) debido a la interposición de la resistencia R. En efecto:

$$P_{perdida} = P_R$$

$$P_{perdida} = 0{,}34 \cdot 4{,}5 = 1{,}5\ W$$

$$P_R = I^2 \cdot R = 0{,}5^2 \cdot 6 = 1{,}5\ W$$

Ejercicio 3.31.7

En cada uno de los circuitos de la *figura 3.50*, la resistencia R tiene un valor de 60 Ω. Si el circuito se conecta a una tensión de 120 V, hallar la intensidad que circula por la resistencia R en cada caso.

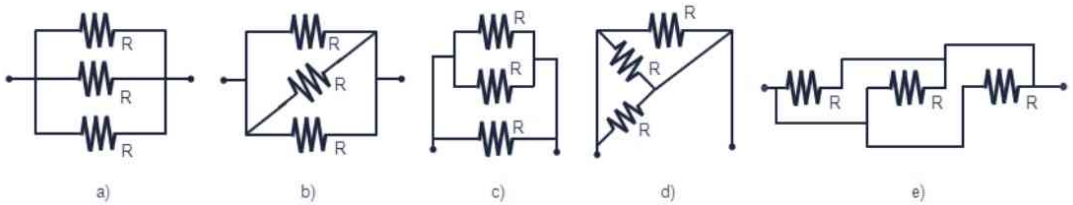


Figura 3.50. Ejercicio 3.31.7

Solución:

La intensidad es la misma en todos los circuitos pues en todos, aunque dispuestas de forma diferente, las tres resistencias R están en paralelo, *fórmula [3.31]*.

$$\frac{1}{R_E} = \sum \frac{1}{R_i} = \frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} = \frac{3}{60} \quad \Rightarrow \quad R_E = 20\ \Omega$$

La intensidad total I_T y por cada resistencia I_R son:

$$I_T = \frac{V}{R_E} = \frac{120}{20} = 6\ A$$

$$I_R = \frac{I_T}{3} = \frac{6}{3} = 2\ A$$

Como las resistencias R están en paralelo, también se puede hallar I_R directamente:

$$I_R = \frac{V}{R} = \frac{120}{60} = 2\ A$$

Ejercicio 3.31.8

La asocian de resistencias de la *figura 3.51*, cuyas capacidades están expresadas en Ω, se conectan a una diferencia de potencial $V_{AB} = 12\ V$. Calcular:

a) Resistencia equivalente de la asociación.

b) Intensidad que circula por la resistencia $R_3 = 6\ \Omega$.

c) Diferencia de potencial en la resistencia $R_1 = 2\ \Omega$.

d) Potencia del circuito.

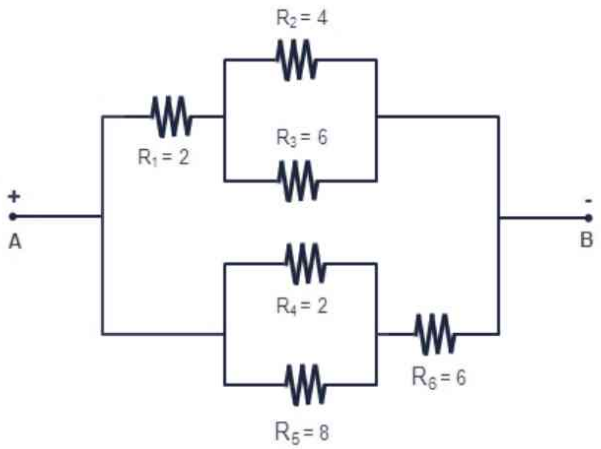


Figura 3.51. Ejercicio 3.31.8

Solución:

a) Resistencia equivalente de la asociación.

Se van reduciendo los elementos del circuito tal como se muestra en la *figura 3.52*, obteniéndose para el conjunto de la asociación la resistencia equivalente de 2,8 Ω .

b) Intensidad que circula por la resistencia $R_3 = 6\ \Omega$.

Se halla la intensidad que circula por la R_{E3}:

$$I_{E3} = \frac{V_{ab}}{R_{E3}} = \frac{12}{4,4} = 2,7\ A$$

Se halla la ddp en la resistencia R_{E1}:

$$V_{RE1} = I_{E3} \cdot R_{E1} = 2,7 \cdot 2,4 = 6,5\ V$$

Se halla la intensidad que circula por R_3:

$$I_{E3} = \frac{V_{RE1}}{R_3} = \frac{6,5}{6} = 1,1\ A$$

c) Diferencia de potencial en la resistencia $R_1 = 2\ \Omega$.

$$V_{R1} = I_{E3} \cdot R_1 = 2,7 \cdot 2 = 5,4\ V$$

Nótese que la tensión total ha de ser igual a la suma de las tensiones parciales:

$$V_{ab} = V_{R1} + V_{RE1} = 5,4 + 6,5 = 11,9\ V \approx 12\ V$$

d) Potencia del circuito.

$$I_{ab} = \frac{V_{ab}}{R_E} = \frac{12}{2,8} = 4,3\ A$$

$$P_{ab} = V_{ab} \cdot I_{ab} = 12 \cdot 4,3 = 51,6\ W$$

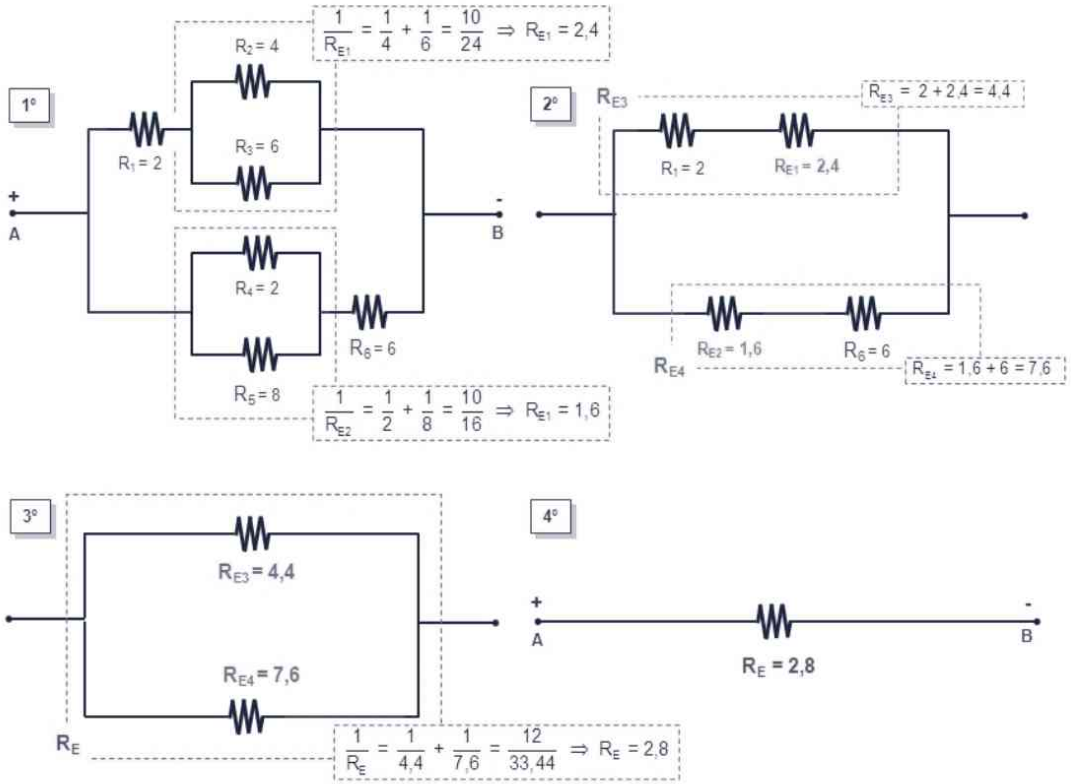


Figura 3.52. Solución del ejercicio 3.31.8

Ejercicio 3.31.9

En el circuito de la *figura 3.53* el voltímetro *V* marca 12 V cuando el circuito está abierto. La resistencia interna *r* de la batería es de 0,2 Ω, las resistencias externas tienen por valor $R_1 = 6\ \Omega$ y $R_2 = 4\ \Omega$. Una vez cerrado el circuito, se pide:

a) Valor marcado por el amperímetro A.

b) Valor marcado por el voltímetro V.

c) Valor marcado por el vatímetro W.

d) Valor marcado por los voltímetros V_1 y V_2.

e) Potencia generada por la batería y potencia entregada por la batería al circuito externo.

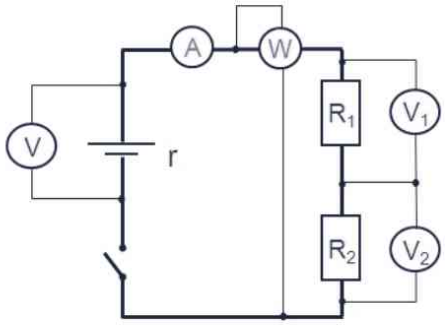


Figura 3.53. Ejercicio 3.31.9

Solución:

a) Valor marcado por el amperímetro A.

Con el circuito abierto ($I = 0$) el voltímetro V marca el valor de la fem E de la batería.

Mediante la *fórmula 3.34*, se tiene:

$$I = \frac{\Sigma E}{\Sigma R} = \frac{E}{r + R_1 + R_2} = \frac{12}{0{,}2 + 6 + 4} = 1{,}17\ \text{A}$$

b) Valor marcado por el voltímetro V.

Mediante la *fórmula [3.37]* se obtiene la tensión en bornes de la batería:

$$V = E - I \cdot r = 12 - 1{,}17 \cdot 0{,}2 = 11{,}76\ \text{V}$$

c) Valor marcado por el vatímetro W.

$$P = V \cdot I = 11{,}76 \cdot 1{,}17 = 13{,}76\ \text{W}$$

También sumando las potencias de las resistencias externas:

$$P = I^2 \cdot R_1 + I^2 \cdot R_2 = 1{,}17^2 \cdot 6 + 1{,}17^2 \cdot 4 = 13{,}7\ \text{W}$$

d) Valor marcado por los voltímetros V_1 y V_2.

$$V_1 = I \cdot R_1 = 1{,}17 \cdot 6 = 7\ \text{V}$$

$$V_2 = I \cdot R_2 = 1{,}17 \cdot 4 = 4{,}7\ \text{V}$$

Nótese que:

$$V_1 + V_2 = 11,7\,V = V$$

e) Potencia generada por la batería y potencia entregada por la batería al circuito externo.

Potencia generada:

$$P_E = E \cdot I = 12 \cdot 1,17 = 14\,W$$

Potencia entregada al circuito:

$$P = V \cdot I = 11,7 \cdot 1,17 = 13,76\,W$$

También:

$$P = P_E - I^2 \cdot r = 14 - 1,17^2 \cdot 0,2 = 13,7\,W$$

Ejercicio 3.31.10

En la *figura 3.54* se dan las características *V-I* de tres dispositivos eléctricos. Se pide:

a) Identificar cada uno de los dispositivos.

b) Representar gráficamente el punto de funcionamiento de los tres dispositivos montados en serie y en paralelo.

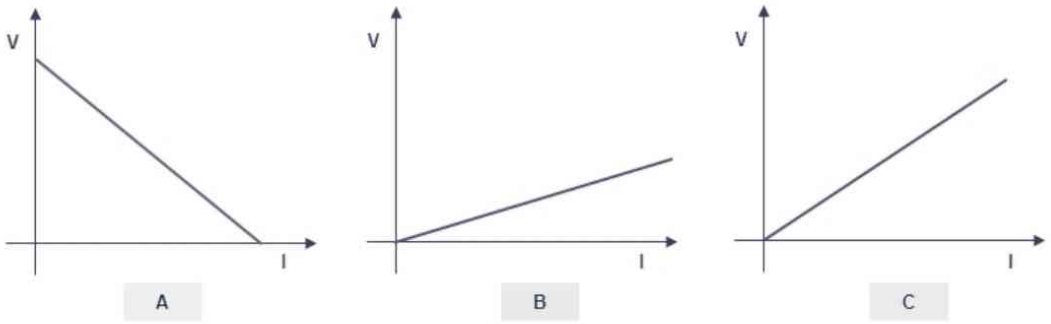


Figura 3.54. Ejercicio 3.31.10

Solución:

a) A, un generador de tensión. B y C, resistencias.

b) Representación gráfica del punto de funcionamiento.

- A, B y C en serie:

  En serie las tensiones se suman, por tanto, la característica equivalente de la asociación se obtiene sumando las ordenadas para cada valor de la intensidad ($y = y_1 + y_2$). La intersección de la recta resultante con la característica *V-I* de la fuente A da el punto de trabajo.

- A, B y C en paralelo:

  En paralelo las intensidades se suman, por tanto, la característica equivalente de la asociación se obtiene sumando las abscisas para cada valor de la tensión ($x = x_1 + x_2$). La intersección de la recta resultante con la característica *V-I* de la fuente A da el punto de trabajo.

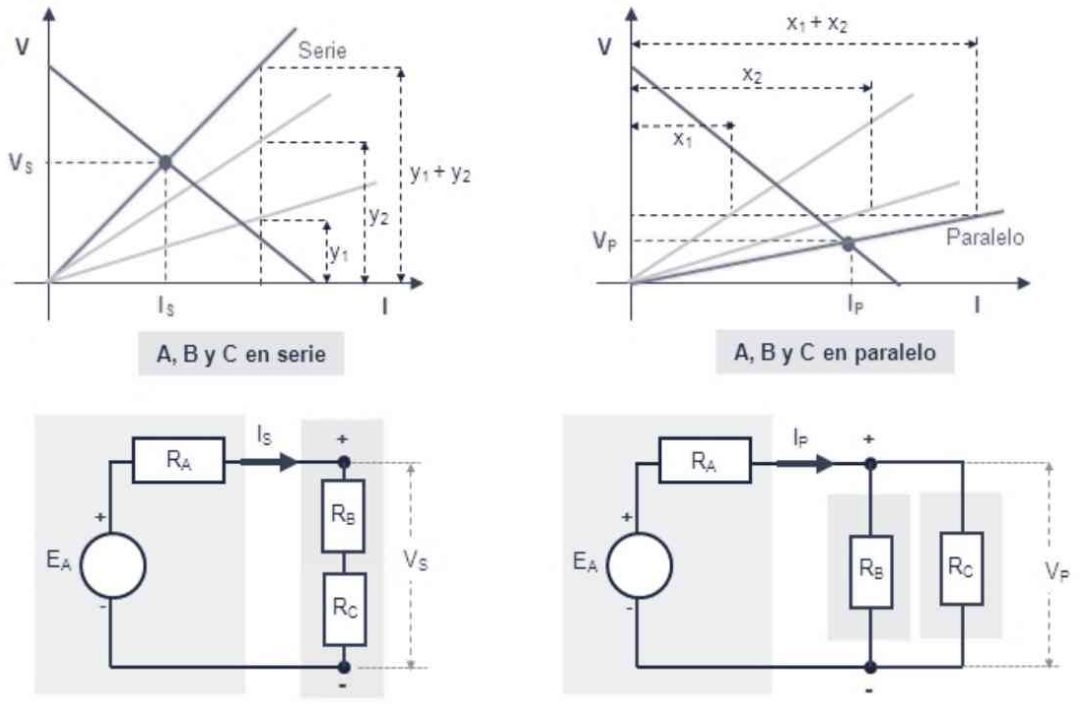


Figura 3.55. Solución del ejercicio 3.31.10

Ejercicio 3.31.11

En el circuito representado en la *figura 3.56*, hallar la ddp V_{ab} entre los puntos *a* y *b* en los casos siguientes:

a) La corriente circula de *a* hacia *b*.

b) La corriente circula de *b* hacia *a*.

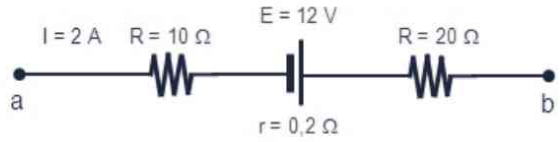


Figura 3.56. Ejercicio 3.31.11

Solución:

Ver la *figura 3.57*.

a) La corriente circula de *a* hacia *b*.

$$V_{ab} = V_{ac} + V_{cd} + V_{db}$$

$$V_{ac} = I \cdot R_{10} = 2 \cdot 10 = 20\ V$$

La batería favorece la circulación de la corriente, actúa como fem, el punto *d* está a más potencial que el *c*, por la *fórmula [3.37]* la tensión en bornes de la batería es:

$$V_{dc} = E - I \cdot r = 12 - 2 \cdot 0,2 = 11,6\ V \Rightarrow V_{cd} = -11,6\ V$$

$$V_{db} = I \cdot R_{20} = 2 \cdot 20 = 40\ V$$

$$V_{ab} = V_{ac} + V_{cd} + V_{db} = 20 + (-11,6) + 40 = 48,4\ V \Rightarrow \mathbf{V_{ab} = 48,4\ V}$$

b) La corriente circula de *b* hacia *a*.

Con objeto de evitar equivocaciones es preferible hallar la ddp entre el punto que está a más potencial (de donde parte la corriente), en este caso el punto *b*, y el que está a menos potencial, en este caso el punto *a*.

$$V_{ba} = V_{bd} + V_{dc} + V_{ca}$$

$$V_{bd} = I \cdot R_{20} = 2 \cdot 20 = 40\ V$$

La batería se opone a la circulación de la corriente, actúa como fcem, el punto *d* está a más potencial que el *c*, por la *fórmula [3.38]* la tensión en bornes de la batería es:

$$V_{dc} = E + I \cdot r = 12 + 2 \cdot 0,2 = 12,4\ V$$

$$V_{ca} = I \cdot R_{10} = 2 \cdot 10 = 20\ V$$

$$V_{ba} = V_{bd} + V_{dc} + V_{ca} = 40 + 12,4 + 20 = 72,4 \Rightarrow \mathbf{V_{ab} = -72,4\ V}$$

Figura 3.57. Solución del ejercicio 3.31.11

Ejercicio 3.31.12

Un automóvil posee una batería de fem 12,6 V y de resistencia interna 10 mΩ. La batería alimenta el motor de arranque a través de un cable de Cu de 1,5 m de longitud y resistencia 1,5 mΩ. Calcular:

a) La sección del cable en mm^2 ($\rho_{Cu} = 0,017\ \Omega \cdot mm^2/m$, a 20 ºC).

b) La corriente en el instante inicial del arranque, sabiendo que el motor tiene una resistencia interna de 20 mΩ y su fcem es proporcional a su velocidad de giro.

c) Tensión en bornes de la batería en el caso anterior.

d) La potencia del motor, sabiendo que una vez adquiera su velocidad nominal, la intensidad del circuito es de 200 A.

e) Caída de tensión, absoluta y porcentual, en la línea que alimenta al motor.

f) Pérdida de potencia, absoluta y porcentual, en la línea.

g) ¿Toda la potencia anterior se transforma en potencia mecánica?

h) ¿Cuál es valor de la potencia mecánica del motor? ¿Esta potencia es la útil en el eje del motor?

Solución:

Ver la figura 3.58.

a) La sección del cable en mm^2, a partir de la *fórmula [3.21]*:

$$R_L = \frac{\rho \cdot L}{S} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{\rho \cdot L}{R_L} = \frac{0{,}017 \cdot 1{,}5}{1{,}5 \cdot 10^{-3}} = 17\ mm^2$$

b) La corriente en el instante inicial del arranque (el motor no gira, por tanto no existe *fcem E'*) está limitada solamente por la resistencia interna *r'* (20 mΩ). Por la *fórmula* [3.34]:

$$I = \frac{\Sigma E}{\Sigma R} = \frac{E - E'}{R_L + r + r'} = \frac{12{,}6 - 0}{(1{,}5 + 10 + 20) \cdot 10^{-3}} = 400\ A$$

c) Tensión en bornes de la batería en el caso anterior. Por la *fórmula [3.37]:*

$$V_{ad} = E - I \cdot r = 12{,}6 - 400 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 8{,}6\ V$$

d) La potencia del motor. Primero se calcula la tensión en bornes del motor, lo cual permite calcular su potencia:

$$V_{ad} = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} \quad \Rightarrow \quad V_{bc} = V_{ad} - V_{ab} - V_{cd} = (E - I \cdot r) - I \cdot \frac{R_L}{2} - I \cdot \frac{R_L}{2}$$

$$V_{bc} = E - I \cdot (r + R) = 12{,}6 - 200 \cdot (10 + 1{,}5) \cdot 10^{3} = 10{,}3\ V$$

$$P_M = V_{bc} \cdot I = 10{,}3 \cdot 200 = 2.060\ W$$

e) Caída de tensión, absoluta y porcentual, en la línea que alimenta al motor.

Caída de tensión absoluta, *fórmula [3.62]:*

$$\delta = V_0 - V = V_{ad} - V_{bc}$$

$$V_0 = V_{ad} = E - I \cdot r = 12{,}6 - 200 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 10{,}6\ V$$

$$\delta = V_0 - V = V_{ad} - V_{bc} = 10{,}6 - 10{,}3 = 0{,}3\ V$$

También, por la *fórmula [3.64]:*

$$\delta = I \cdot R_L = 200 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3} = 0{,}3\ V$$

Caída de tensión porcentual δ%, *fórmula [3.63]:*

$$\delta\% = \frac{V_0 - V}{V_0} 100 = \frac{\delta}{V_0} 100 = \frac{0{,}3}{10{,}6} 100 = 2{,}8\ \%$$

f) Pérdida de potencia, absoluta y porcentual, en la línea, *fórmula [3.68]:*

$$P_P = 2\frac{\rho \cdot L}{S} I^2 = R_L \cdot I^2 = 1{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 200^2 = 60\ W$$

$$P_0 = V_0 \cdot I = 10{,}6 \cdot 200 = 2.120\ W$$

$$P_P\% = \frac{P_P}{P_0} 100 = \frac{60}{2.120} 100 = 2{,}8\ \%$$

Nótese que coinciden la $\delta\%$ y la $P_P\%$.

g) ¿Toda la potencia anterior se transforma en potencia mecánica ($P_{E'}$)?

No. Hay que restarle la potencia transformada en calor en la resistencia interna *r'*. A partir de la *fórmula [3.29]:*

$$P_{r'} = I^2 \cdot r' = 200^2 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 800\ W$$

$$P_{E'} = P_M - P_{r'} = 2.060 - 800 = 1.260\ W$$

h) ¿Cuál es valor de la potencia mecánica del motor?

Se ha calculado en un párrafo anterior y su valor es 1.260 W. También se puede calcular a partir de la *fórmula [3.38]:*

$$V_{bc} = E' + I \cdot r' \Rightarrow E' = V_{bc} - I \cdot r'$$

$$E' = V_{bc} - I \cdot r' = 10,3 - 200 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 6,3\ V$$

$$P_{E'} = E' I = 6,3 \cdot 200 = 1.260\ W$$

¿Esta potencia es la útil en el eje del motor?

No. Parte de esta potencia se pierde por calentamiento (rozamiento, corrientes de Foucault, etc.).

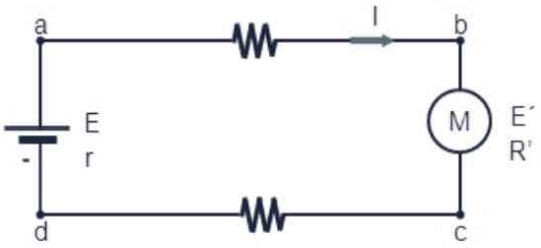


Figura 3.58. Solución del ejercicio 3.31.12

Ejercicio 3.31.13

Se tiene un acoplamiento mixto de baterías formado por tres grupos en paralelo de cuatro elementos cada grupo, *figura 3.59.* Cada elemento tiene una fem de 1,5 V y una resistencia interna de 0,3 Ω. El conjunto se conecta a una resistencia de 10 Ω. Se pide:

a) La corriente que circula por la resistencia exterior *R* al cerrar el interruptor *K.*

b) Tensión V_{ab}, V_{ac}, V_{cd}, con el interruptor *K* abierto y cerrado.

c) Potencia útil del circuito.

d) Rendimiento de la asociación.

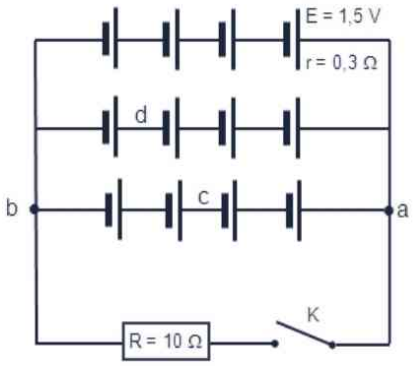


Figura 3.59. Ejercicio 3.31.13

Solución:

Ver la *figura 3.60.*

a) La corriente que circula por la resistencia exterior *R* al cerrar el interruptor *K*.

Los cuatro elementos en serie tienen una fem equivalente:

$$E_q = n \cdot E = 1{,}5 = 6\ V$$

Con una resistencia interna:

$$r_s = n \cdot r = 4 \cdot 0{,}3 = 1{,}2\ \Omega$$

Se tiene ahora tres baterías en paralelo de 6 V y resistencia interna 1,2 Ω cada una. Mediante la *fórmula [3.50]* se obtiene la intensidad.

$$I = \frac{E_s}{R + \frac{r_s}{p}} = \frac{6}{10 + \frac{1{,}2}{3}} = \frac{6}{10 + 0{,}4} = 0{,}57\ A$$

b) Tensión V_{ab}, V_{ac}, V_{cd}, con el interruptor *K* abierto y cerrado.

– Con el interruptor *K* abierto.

En todos los casos la tensión se corresponde con la fem, pues al no existir corriente no existe caída de tensión en las resistencias internas de los elementos.

$$V_{ab} = n \cdot E = 4 \cdot 1{,}5 = 6\ V$$

$$V_{ac} = n \cdot E = 2 \cdot 1{,}5 = 3\ V$$

$$V_{cd} = V_{ad} - V_{ac} = (V_a - V_d) - (V_a - V_c)$$

$$V_{ad} = n \cdot E = 3 \cdot 1{,}5 = 4{,}5\ V$$

$$V_{cd} = V_{ad} - V_{ac} = 4{,}5 - 3{,}5 = 1{,}5\ V$$

– Con el interruptor *K* cerrado.

La intensidad que circula por cada rama es:

$$I_s = \frac{I}{p} = \frac{0{,}57}{3} = 0{,}19\ A$$

$$V_{ab} = n \cdot E - n \cdot r \cdot I_s = 4 \cdot 1{,}5 - 4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}19 = 5{,}7\ V$$

También se puede obtener así:

$$V_{ab} = I \cdot R = 0.57 \cdot 10 = 5{,}7\ V$$

$$V_{ac} = n \cdot E - n \cdot r \cdot I_s = 2 \cdot 1{,}5 - 2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}19 = 2{,}88\ V$$

$$V_{cd} = V_{ad} - V_{ac}$$

$$V_{ad} = n \cdot E - n \cdot r \cdot I_s = 3 \cdot 1{,}5 - 3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}19 = 4{,}3\ V$$

$$V_{cd} = V_{ad} - V_{ac} = 4{,}3 - 2{,}88 = 1{,}42\ V$$

c) Potencia útil del circuito. Es la potencia entregada a la carga *R*.

$$P = V_{ab} \cdot I = 5{,}7 \cdot 0{,}57 = 3{,}2\ W$$

También se puede obtener así:

$$P = I^2 \cdot R = 0{,}57^2 \cdot 10 = 3{,}2\ W$$

d) Rendimiento de la asociación.

$$\eta = \frac{P_{Salida}}{P_{Generada}} = \frac{V_{ab} \cdot I}{n \cdot E \cdot I_s \cdot p} = \frac{V_{ab} \cdot I}{n \cdot E \cdot I} = \frac{V_{ab}}{n \cdot E} = \frac{5{,}7}{4 \cdot 1{,}5} = 0{,}95 \Rightarrow 95\,\%$$

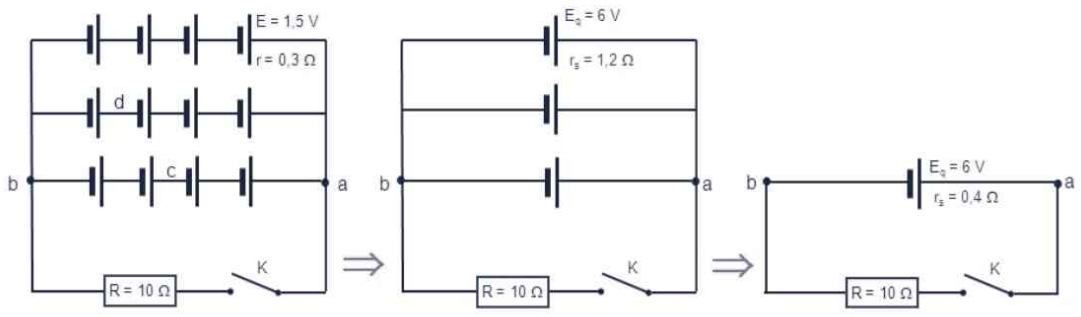


Figura 3.60. Ejercicio 3.31.13

Ejercicio 3.31.14

Mediante una jarra eléctrica de 700 W se calienta ½ litro de agua en 5 minutos, pasando la temperatura del agua de 15 a 90 ºC.

a) ¿Cuánta energía eléctrica se ha consumido?

b) Si 1 kW · h cuesta 0,12 €,¿cuántos euros ha costado calentar el agua?

c) ¿Cuál ha sido el rendimiento de la jarra eléctrica?

Solución:

a) Energía consumida, *fórmula [3.17]:*

$$W\,(kW\cdot h) = P(kW)\cdot t(h) = \frac{700}{1000}\cdot\frac{5}{60} = 0{,}058\ kW\cdot h$$

b) La energía ha costado:

$$\text{Coste}\ (€) = 0.058\cdot 0{,}12 = 7\cdot 10^{-3}\ € = 0{,}7\ \text{céntimos de}\ €$$

c) Rendimiento de la jarra eléctrica:

Energía necesaria para elevar la temperatura del agua, *fórmula [3.75]:*

$$W_{\Delta T} = m\cdot c\cdot \Delta T = 0{,}5\cdot 4.180\cdot (90-15) = 156.750\ J$$

Energía consumida por la jarra, *fórmula [3.12]*:

$$W_P = P\cdot t = 700\cdot 5\cdot 60 = 210.000\ J$$

Rendimiento, *fórmula [3.73]:*

$$\eta = \frac{\text{Energía útil}}{\text{Energía consumida}} = \frac{W_{\Delta T}}{W_P} = \frac{156.750}{210.000} = 0{,}74 \Rightarrow 74\,\%$$

Ejercicio 3.31.15

El agua de un calentador eléctrico de acumulación de 50 litros de capacidad se ha de calentar desde una temperatura de 15 a 70 ºC en un periodo de 2 horas. El rendimiento del aparato es del 95%. Calcular:

a) La potencia requerida para el calentador y la energía consumida, en kW · h, en el periodo de calentamiento.

b) Si el calentador está conectado a una tensión de 230 V, intensidad que circula por la resistencia del calentador y valor de dicha resistencia indicando si dicho valor es cuando el calentador está encendido o apagado.

Solución:

a) Calor (julios) necesario para elevar la temperatura del agua, *fórmula [3.75]:*

$$W_{\Delta T} = m \cdot c \cdot \Delta T = 50 \cdot 4.180 \cdot (70 - 15) = 3.134.930 \text{ J}$$

Calor (julios) que ha de producir el calentador, *fórmula [3.73]:*

$$W_R = \frac{W_{útil}}{\eta} = \frac{W_{\Delta T}}{\eta} = \frac{3.134.930}{0,95} = 3.299.926 \text{ J}$$

Potencia necesaria, *fórmula [3.12],* para el calentamiento en 2 horas (1 h = 3.600 s):

$$P = \frac{W}{t} = \frac{3.299.926}{2 \cdot 3.600} = 458 \text{ W}$$

Energía consumida, *fórmula [3.17]:*

$$W\,(kW \cdot h) = P(kW) \cdot t(h) = \frac{458}{1000} \cdot 2 = 0,92 \text{ kW} \cdot \text{h}$$

b) La intensidad a partir de la *fórmula [3.13]:*

$$I = \frac{P}{V} = \frac{458}{230} = 2 \text{ A}$$

La resistencia a partir de la *fórmula [3.29]:*

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{458}{2^2} = 114,5 \ \Omega$$

Este valor de la resistencia es cuando el calentador está encendido, que es cuando transforma la energía eléctrica en calorífica. Con el calentador apagado la resistencia eléctrica es menor (la resistencia aumenta con la temperatura).

Ejercicio 3.31.16

Un horno eléctrico debe fundir en 1 hora 100 kg de plomo desde la temperatura de 20 ºC. Calcular la potencia que ha de tener el horno si se prevé un rendimiento de 0,85. Para las constantes calorimétricas del plomo ver la *tabla 3.6*.

Solución:

Calor necesario para elevar la temperatura del plomo hasta la temperatura de fusión, *fórmula [3.75]:*

$$W_{\Delta T} = m \cdot c \cdot \Delta T = 100 \cdot 130 \cdot (327 - 20) = 3.991.000 \text{ J}$$

Calor necesario para fundir el plomo, *fórmula [3.76]:*

$$W_F = m \cdot L_F = 100 \cdot 22,5 \cdot 10^3 = 2.250.000 \text{ J}$$

Calor que ha de producir el horno, *fórmula [3.73]:*

$$W_R = \frac{W_{útil}}{\eta} = \frac{W_{\Delta T} + W_F}{\eta} = \frac{3.991.000 + 2.250.000}{0,85} = 7.342.353 \text{ J}$$

Potencia necesaria, *fórmula [3.12],* para la fusión en 1 hora (1 h = 3.600 s.):

$$P = \frac{W}{t} = \frac{7.342.353}{1 \cdot 3.600} = 2.040 \text{ W}$$

Ejercicio 3.31.17

Simplificar el circuito de la *figura 3.61* hasta obtener una fuente de tensión y una resistencia.

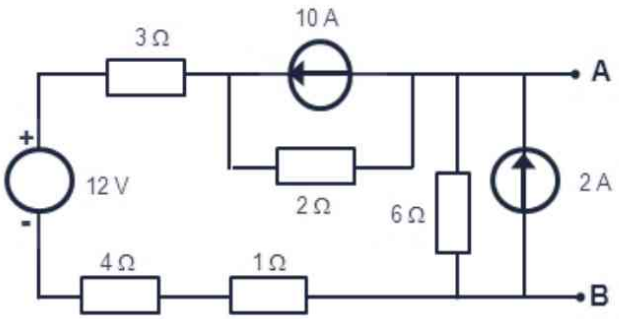


Figura 3.61. Ejercicio 3.31.17

Solución:

Ver la figura 3.62.

1. Transformación de la fuente de intensidad de 10 A en fuente de tensión (*apartado 3.22*).

2. Resistencias y fuente de tensión en serie sustituidas por las equivalentes (*apartado 3.23*).

3. Transformación de la fuente de tensión de 8 V en fuente de intensidad (*apartado 3.22*).

4. Resistencias y fuente de intensidad en paralelo sustituidas por las equivalentes (*apartado 3.23*).

5. Transformación de la fuente de intensidad de 1,8 A en fuente de tensión (*apartado 3.22*).

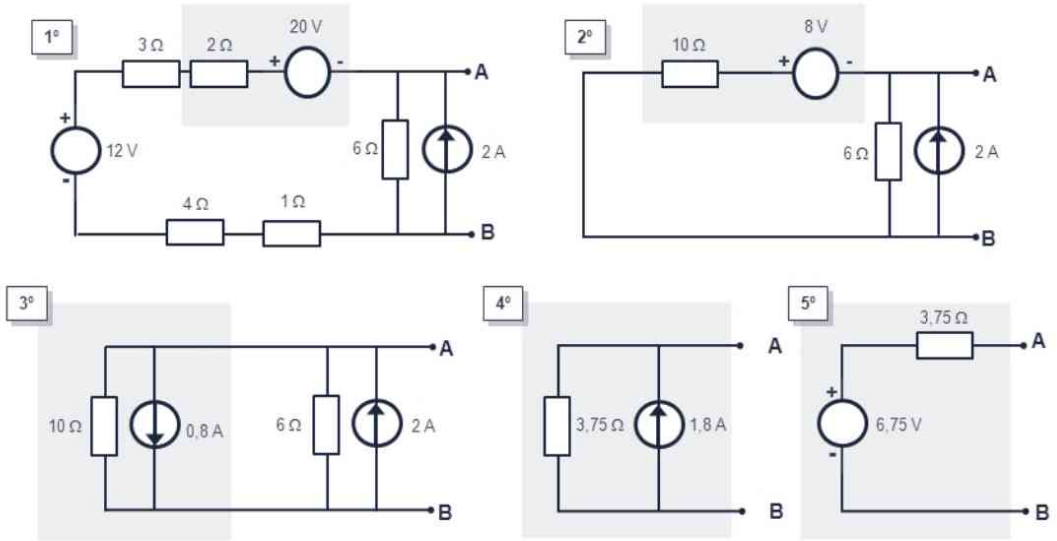


Figura 3.62. Solución del ejercicio 3.31.17

Ejercicio 3.31.18

En el circuito de la *figura 3.63,* hallar la ddp entre los puntos *A* y *B*.

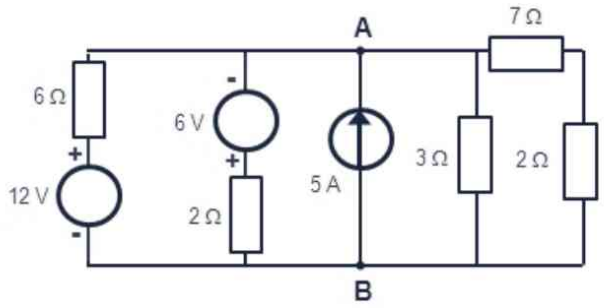


Figura 3.63. Ejercicio 3.31.18

Solución:

1-2. Transformación de las fuentes de tensión en fuentes de intensidad (*apartado 3.22*).

3. Resistencias y fuente de intensidad en paralelo sustituidas por las equivalentes (*apartado 3.23*).

4. Resistencias en serie sustituidas por la equivalente (*apartado 3.11*).

5. Resistencias y fuente de intensidad en paralelo sustituida por las equivalentes (*apartado 3.23*).

$$V_{ab} = I \cdot R = 4 \cdot 0{,}9 = 3{,}6 \text{ V}$$

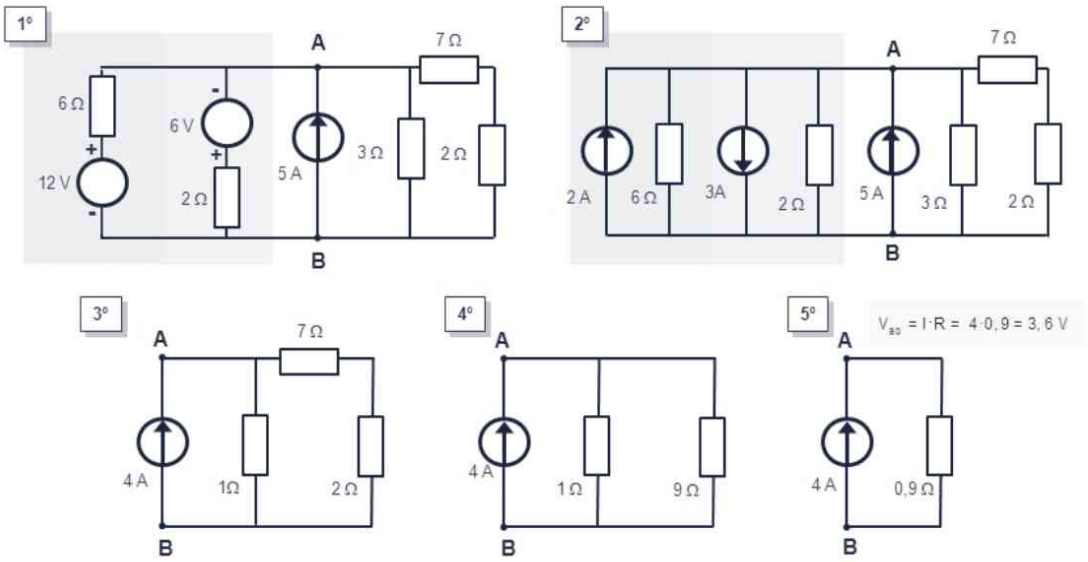


Figura 3.64. Solución del ejercicio 3.31.18

Capítulo 4

ANÁLISIS DE CIRCUITOS EN CORRIENTE CONTINUA

Objetivos:

- Definir las redes eléctricas.
- Conocer las principales leyes, teoremas y principios que permiten resolver redes eléctricas sencillas.
- Demostrar las leyes principales que se aplican en la resolución de redes eléctricas.
- Identificar el método más adecuado para la resolución de redes.
- Distinguir entre régimen transitorio y régimen permanente.
- Conocer el régimen transitorio en el circuito RC.
- Conocer el régimen transitorio en el circuito RL.
- Exponer situaciones observables que ayuden a entender los contenidos del capítulo.
- Resolver ejercicios y problemas con contenidos propios de este capítulo.

4.1 DEFINICIONES EN REDES ELÉCTRICAS

En el capítulo anterior se han visto circuitos eléctricos sencillos. Ahora se estudiarán circuitos más complejos, en los cuales existen interconectados diferentes elementos pasivos (resistencias, bobinas y condensadores) y elementos activos (generadores de tensión y generadores de corriente), formando una *red*. En los casos en que estos circuitos no se pueden reducir a circuitos en serie o en paralelo, son necesarias otras técnicas que se estudiarán en este capítulo.

En una red, *figura 4.1*, se definen los siguientes conceptos:

- **Nudo**: es un punto de la red donde se conectan más de dos conductores. En la red de la *figura 4.1*, se tienen cuatro nudos (A, F, H y C).

- **Rama**: porción de la red entre dos nudos. En la red de la *figura 4.1*, se tienen seis ramas (AEDC, AC, CH, AF, FH y FKLH).

- **Malla**: conjunto de ramas que hay que recorrer, cuando partiendo de un nudo se vuelve al mismo sin pasar dos veces por el mismo punto. En la red de la *figura 4.1*, se tienen seis mallas (ACDEA, AFHCA, FKLHF, EFHDE, AKLCA, EKLDE).

- **Corrientes de rama**: corrientes por cada rama. En la red de la *figura 4.1*, se tienen cinco corrientes de rama: I_1, I_2, I_3, I_4, *e* I_5.

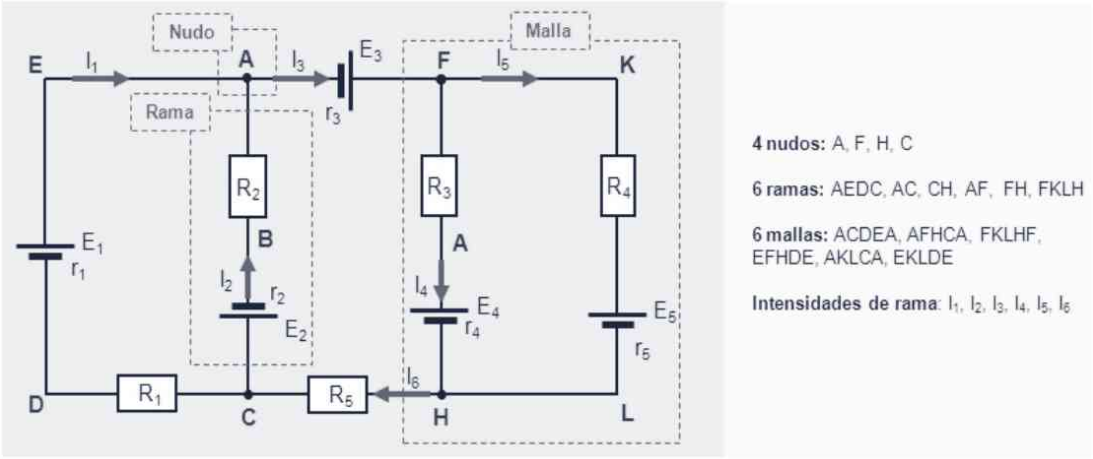


Figura 4.1. Red, nudo, rama, malla

En términos generales se entiende por resolver un circuito determinar la tensión y corriente de cada rama.

4.2 LEYES DE KIRCHHOFF

Estas leyes, también conocidas como ley de los nudos y ley de las mallas, se deben al físico alemán G. Kirchhoff (1824-1887), *figura 4.2*, y permiten calcular las intensidades que circulan por las diferentes ramas que forman una red.

1.ª Ley de Kirchhoff, también llamada **ley de los nudos o de las corrientes (**KCL: Kirchhoff's Current Law), dice:

"*En un nudo, la suma de las corrientes que entran es igual a la suma de las que salen, dicho de otra manera, la suma algebraica de corrientes en un nudo es nula*".

$$\Sigma I_i = 0 \qquad [4.1]$$

En la definición de la ley, *algebraica* significa que las intensidades tienen signo. A las intensidades que llegan se les asigna el signo + y a las que salen el signo – (se puede hacer a la inversa, pero se ha de mantener el mismo criterio en todo el circuito).

Puesto que la electricidad en un conductor no puede acumularse en ningún punto (principio de conservación de la carga), la suma de las intensidades que llegan a un nudo ha de ser necesariamente igual a la suma de las intensidades que salen de dicho punto. En la *figura 4.2*, para el nudo A, se tiene:

$$I_1 + I_2 = I_3$$

O bien:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

2.ª Ley de Kirchhoff, también llamada **ley de las mallas o de las tensiones** (KVL: Kirchhoff's Voltage Law):

"*En una malla de un circuito eléctrico la suma algebraica de todas las tensiones es cero*".

$$\Sigma V_{ij} = 0 \qquad [4.2]$$

En la definición de la ley, *algebraica* significa que las tensiones tienen signo. Una tensión en una rama se toma como positiva cuando al recorrer el circuito se va de más a menos potencial, y se toma como negativa en caso contrario.

Esta ley también se puede expresar de la siguiente forma:

"*En una malla la suma algebraica de todas las fuerzas electromotrices es igual a la suma algebraica de las caídas de tensión en todas las resistencias*".

$$\Sigma E_i = \Sigma R_i \cdot I_i \qquad [4.3]$$

En este caso, para aplicar esta ley, es preciso establecer los siguientes convenios:

1. Se elige un sentido positivo de circulación (por ejemplo, el de giro de las agujas de un reloj) en cada malla.

2. Las fem que favorecen la circulación de las cargas en el sentido elegido serán positivas y las que se oponen serán negativas.

3. La caída de tensión en una resistencia será positiva si está originada por una corriente cuyo sentido coincida con el sentido de circulación elegido, en caso contrario será negativa.

Para demostrar estas ecuaciones en la malla ABCDEA del circuito de la *figura 4.2,* se ha de tener en cuenta: la suma de tensiones parciales en los circuitos en serie, la ley de Ohm (*fórmula 3.22: $V = I \cdot R$)* y las fórmulas que permiten calcular la tensión en los extremos de una resistencia en serie con una fuente de tensión, cuando actúa como fem (*fórmula 3.37: $V_{yx} = E - I \cdot r$*) o como fcem (*fórmula 3.38: $V_{xy} = E + I \cdot r$*). Se ha de cumplir, *figura 4.2*:

- En la rama ABC, tanto la fuente de tensión E_2 (E_2 se comporta como fcem pues se opone a I_2) como las resistencias se oponen al paso de la corriente, por lo tanto:

$$V_{CB} = E_2 + r_2 \cdot I_2$$

$$V_{BA} = R_2 \cdot I_2$$

$$V_{CA} = V_{CB} + V_{BA} = E_2 + r_2 \cdot I_2 + R_2 \cdot I_2 \qquad [4.4]$$

- En la rama AEDC, la fuente E_1 favorece el sentido de la corriente I_1 y por tanto se comporta como fem, el punto A y el punto E están al mismo potencial pues no hay elementos activos o pasivos entre ellos:

$$V_{AE} = 0 \Rightarrow V_{CA} = V_{CE}$$

$$V_{CD} = R_1 \cdot I_1$$

$$V_{AD} = E_1 - r_1 \cdot I_1$$

$$V_{CA} = V_{CD} - V_{AD} = R_1 \cdot I_1 - (E_1 - r_1 \cdot I_1) = R_1 \cdot I_1 + r_1 \cdot I_1 - E_1 \qquad [4.5]$$

- A partir de las *ecuaciones [4.4] y [4.5]* como los primeros miembros (V_{CA}) son iguales, se tiene:

$$V_{CB} + V_{BA} = V_{CD} - V_{AD} \qquad [4.6]$$

Que se puede poner en la forma:

$$V_{CB} + V_{BA} + V_{AD} - V_{CD} = 0 \qquad [4.7]$$

Con lo que queda demostrada la *fórmula [4.2].*

Por otra parte, a partir de la *ecuación [4.6]*, sustituyendo las ddp se tiene:

$$E_2 + r_2 \cdot I_2 + R_2 \cdot I_2 = R_1 \cdot I_1 - (E_1 - r_1 \cdot I_1)$$

Que se puede poner en la forma:

$$E_1 + E_2 = R_1 \cdot I_1 + r_1 \cdot I_1 - R_2 \cdot I_2 - r_2 \cdot I_2 \qquad [4.8]$$

Con lo que queda demostrada la *fórmula [4.3].*

Por la aplicación directa de la fórmula [4.3] y conforme a los convenios, en la malla ABCDEA, si se elige como positivo el sentido coincidente con el desplazamiento de las agujas de un reloj, se tiene:

$$\Sigma E_i = \Sigma R_i \cdot I_i$$

Como, las fem E_1 y E_2 son positivas (favorecen el desplazamiento de las cargas en el sentido elegido), las caídas de tensión debidas a I_1 son positivas (I_1 coincide con el sentido elegido) y las caídas de tensión debidas a I_2 son negativas (el sentido de I_2 es contrario al sentido elegido como positivo), se tiene:

$$E_1 + E_2 = R_1 \cdot I_1 + r_1 \cdot I_1 - R_2 \cdot I_2 - r_2 \cdot I_2$$

Que coincide con el resultado demostrado, *fórmula [4.8].*

En la *figura 4.2* se ha marcado con flechas las ddp en los extremos de los elementos de la malla ABCDEA. La punta de la flecha indica el punto que está a más potencial.

La aplicación de la *fórmula [4.3]* a la red de la *figura 4.1*, considerando positivo el sentido de desplazamiento de las agujas de un reloj tiene como resultado:

$$\text{Malla AFHCA:} \quad E_3 - E_4 - E_2 = r_3 \cdot I_3 + r_4 \cdot I_4 + R_3 \cdot I_4 + R_5 \cdot I_6 + R_2 \cdot I_2 + r_2 \cdot I_2$$

$$\text{Malla EKLDE:} \quad E_1 + E_3 - E_5 = r_1 \cdot I_1 + R_1 \cdot I_1 + r_3 \cdot I_3 + r_5 \cdot I_5 + R_4 \cdot I_5 + R_5 \cdot I_6$$

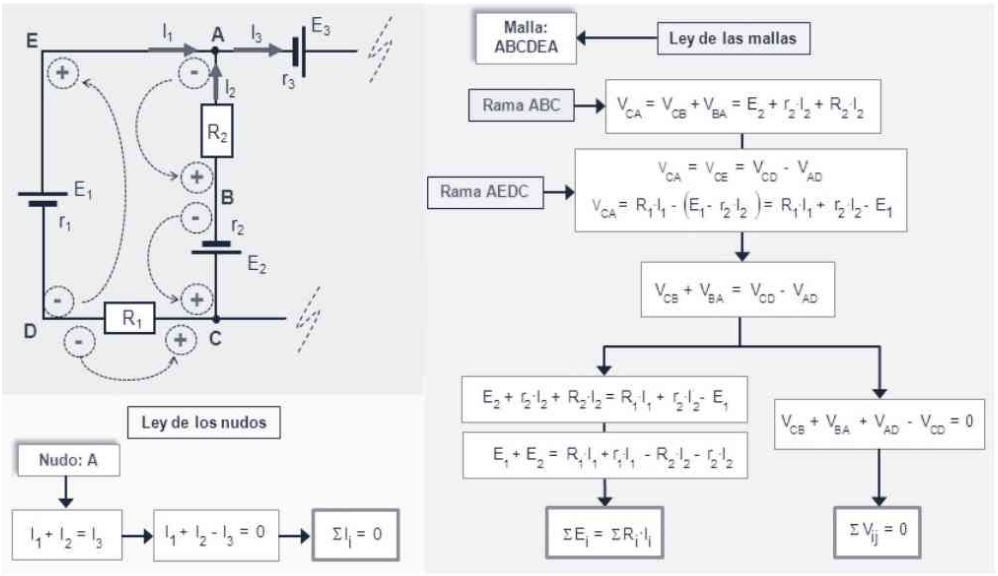


Figura 4.2. Leyes de Kirchhoff

En la *figura 4.3 se* representa un diagrama con las tensiones parciales a lo largo de la malla ABCDEA. Se comienza por el punto que está a menor potencial, el *D* en este caso ($V_C > V_B > V_A > V_D \Rightarrow V_D$ menor potencial).

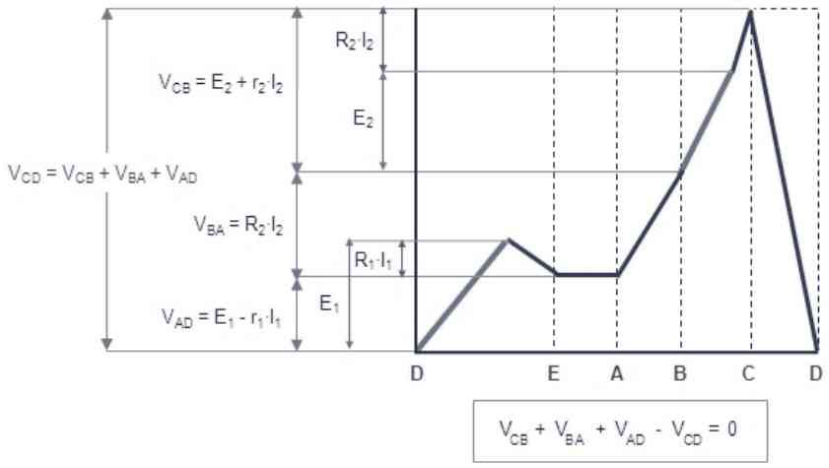


Figura 4.3. Diagrama de tensiones en la malla ABCDEA

La resolución de una red mediante las leyes de Kirchhoff puede aplicarse según dos métodos: el *método de las corrientes de ramas* y el *método de las corrientes de malla.*

4.3 APLICACIÓN DE LAS LEYES DE KIRCHHOFF EN RESOLUCIÓN DE REDES: MÉTODO DE CORRIENTES DE RAMAS

Se siguen los siguientes pasos:

1. En el circuito se asignan sentidos arbitrarios a las intensidades que circulan por cada rama. Posteriormente, si al resolver el circuito, alguna intensidad sale negativa, indicará que el sentido que se le había dado es contrario al que realmente tiene.

2. Se asigna una letra a cada nudo y se aplica la 1.ª Ley de Kirchhoff (KCL) a tantos nudos *n* como tenga el circuito menos uno, resultando un número de ecuaciones *m:*

$$m = n - 1 \qquad [4.9]$$

   Las restantes ecuaciones que se pueden obtener resultan una combinación lineal de las otras.

3. Se elige un sentido positivo de circulación (por ejemplo, el de giro de las agujas de un reloj) en cada malla.

4. Se aplica la 2.ª Ley de Kirchhoff (KVL) a tantas mallas como ramas *r* tenga el circuito menos ($n - 1$), resultando un número de ecuaciones *q*:

$$q = r - (n - 1) \qquad [4.10]$$

5. Se resuelve el sistema de ecuaciones resultante obteniéndose las intensidades por cada rama.

6. Una vez conocidas las intensidades de cada rama, aquellas que tengan el signo menos (–) significa que su sentido es contrario al que se había asignado.

7. Ahora se puede calcular la potencia de cada elemento y hacer un balance de potencias, de tal manera que, la potencia generada ha de ser igual a la consumida.

Si se aplica este método a la red de la *figura 4.1,* para calcular las intensidades por cada rama, se tiene el esquema y ecuaciones de la *figura 4.4,* que se han obtenido siguiendo los pasos descritos, que en este caso son:

- Asignación, definidas en la *figura 4.4*, de sentido a las corrientes: I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, *e* I_6.
- Asignación de letras a los nudos y aplicación de la 1.ª Ley de Kirchhoff (KCL) a 3 nudos ($m = 4 - 1 = 3$), obteniéndose tres ecuaciones.
- Elección del sentido positivo de circulación (giro de las agujas de un reloj).
- Aplicación de la 2.ª Ley de Kirchhoff (KVL) a las 3 mallas ([$q = 6 - (4 - 1) = 3$] definidas en la *figura 4.4*, obteniéndose tres ecuaciones.
- Se obtiene en total, seis ecuaciones con seis incógnitas (las intensidades) que permiten la resolución.
- Se puede proceder al cálculo de potencias y otras magnitudes.

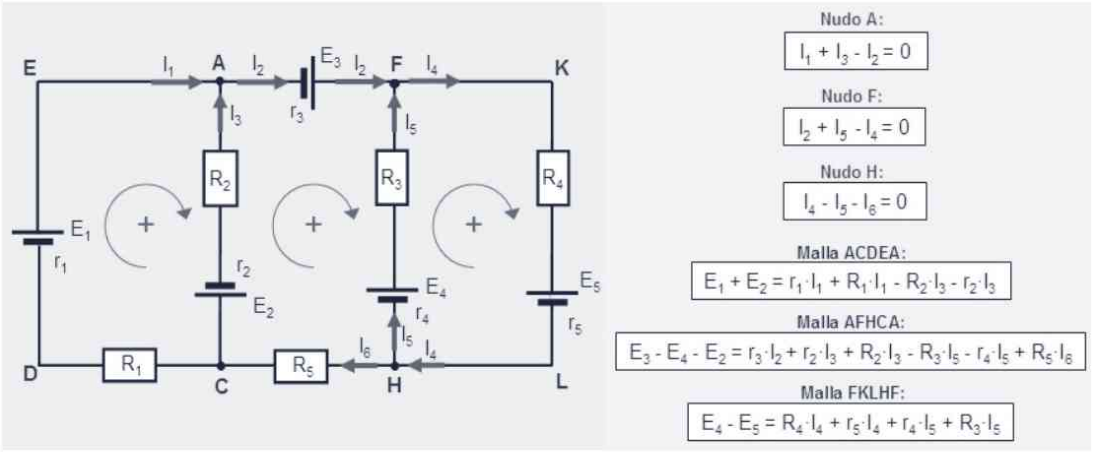


Figura 4.4. Leyes de Kirchhoff: método de "corrientes de ramas"

Ver *ejercicios 4.20.2, 4.20.3 y 4.20.12.*

4.4 APLICACIÓN DE LAS LEYES DE KIRCHHOFF EN RESOLUCIÓN DE REDES: MÉTODO DE CORRIENTES DE MALLAS

Este método consiste en aplicar la 2.ª Ley de Kirchhoff (KVL) a las mallas de la red de tal manera que la 1.ª Ley de Kirchhoff (KCL) queda aplicada implícitamente.

Los pasos son los mismos que en el método de corrientes de rama, excepto la aplicación de la 1.ª Ley de Kirchhoff (no se necesitan las ecuaciones pertenecientes a los nudos, es decir, se ahorran n – 1 ecuaciones). Si existiesen fuentes de intensidad en la red, antes de aplicar el método, se han de sustituir por los generadores de tensión equivalentes.

En este método, *figura 4.5*, se trabaja con corriente de malla (J_1, J_2, J_3) que son corrientes ficticias que se supone que recorre una malla y a la que se le atribuye un sentido arbitrario (el mismo para **todas** las mallas). Los criterios de convenios de signos son los mismos que los aplicados en las leyes de Kirchhoff, ahora aplicados a cada ecuación de una malla. En una rama recorrida por dos corrientes de malla se ha de tener en cuenta ambas corrientes para el cálculo de la tensión en los extremos de la rama.

Si se aplica este método a la red de la *figura 4.1,* para calcular las intensidades por cada rama, se tiene el esquema y ecuaciones de la *figura 4.5,* siguiendo los siguientes pasos:

1. Asignación, definidas en la *figura 4.5*, de sentido a las corrientes (J_1, J_2, *y* J_3) en las mallas.

2. Elección del sentido positivo de circulación (giro de las agujas de un reloj).

3. Aplicación de la 2.ª Ley de Kirchhoff (KVL) a las tres mallas ([$q = 6 – (4 – –1) = 3$] definidas en la *figura 4.5,* obteniéndose tres ecuaciones con tres incógnitas (J_1, J_2, *y* J_3).

4. Cálculo de las corrientes de ramas: las intensidades de las ramas externas coinciden con las corrientes de mallas ($I_1 = J_1$, $I_2 = J_2$, $I_4 = J_3$, $I_6 = J_2$) y las intensidades de las ramas internas (pertenecientes a dos mallas) son las diferencias de las corrientes de mallas ($I_3 = J_2 – J_1$, $I_5 = J_3 – J_2$).

5. Se puede proceder al cálculo de potencias y otras magnitudes.

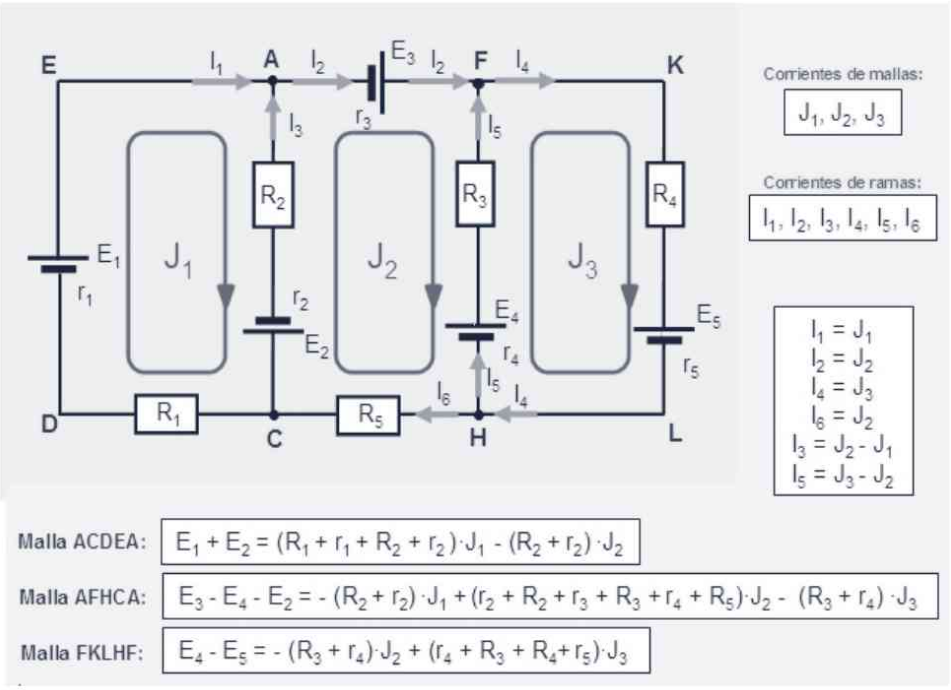


Figura 4.5. Leyes de Kirchhoff: método de "corrientes de mallas

Como se demuestra en la *figura 4.6,* se pasa de las ecuaciones del *método de las corrientes de mallas a* las ecuaciones del *método de las corrientes de ramas,* estableciendo la relación entre las corrientes de ramas y de mallas y, después, sustituyendo las ecuaciones de estas últimas en las ecuaciones de tensiones de las mallas.

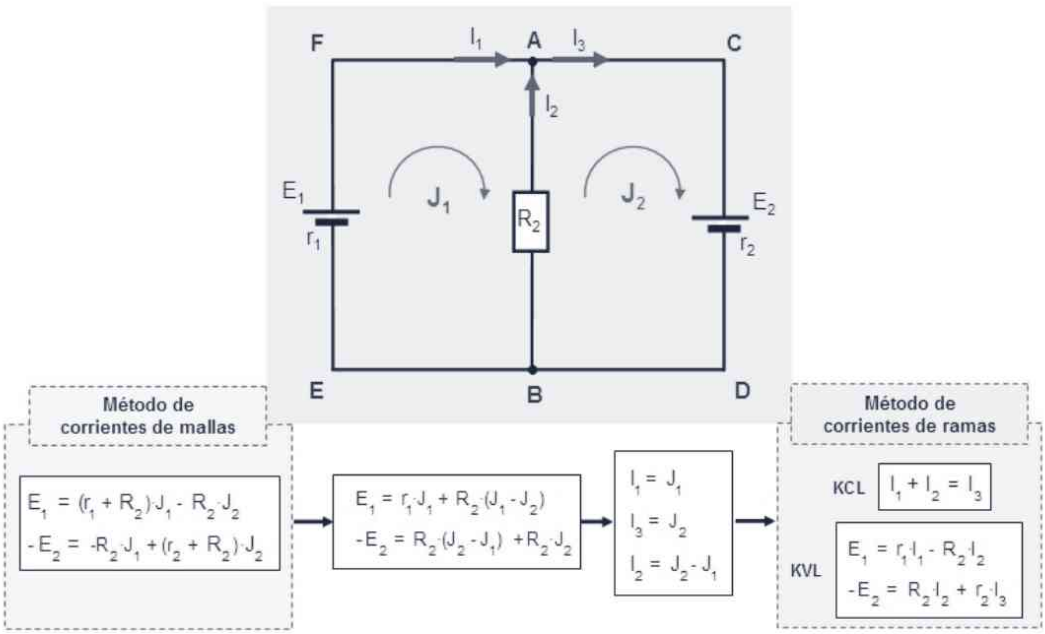


Figura 4.6. Método de "corrientes de mallas" y método de "corrientes de ramas"

Ver ejercicios 4.20.4, y 4.20.12.

4.5 APLICACIÓN DE LAS LEYES DE KIRCHHOFF EN RESOLUCIÓN DE REDES: MÉTODO DE LAS TENSIONES DE LOS NUDOS

Este método consiste en aplicar la 1.ª Ley de Kirchhoff (KCL) a las mallas de la red de tal manera que la 2.ª Ley de Kirchhoff (KVL) queda aplicada implícitamente. El método se basa en determinar la tensión de todos los nudos del circuito respecto a un nudo de referencia. Conocidas estas tensiones se pueden determinar todas las corrientes que circulan por los distintos elementos del circuito. Si el circuito tiene n nudos se han de determinar n –1 tensiones de nudo, resultando un número de ecuaciones m:

$$m = n - 1 \qquad [4.11]$$

El nudo de referencia se elige de forma arbitraria, pero lo más práctico es elegir el nudo al cual hay conectadas un mayor número de ramas. Como es frecuente en muchos circuitos eléctricos estar montados sobre una base metálica (chasis) al que se conectan algunos de los elementos del circuito, se suele tomar el chasis como nudo de referencia denominándose en este caso masa, que se suele conectar a tierra (potencial cero), *figura 4.7*. Si existiesen fuentes de tensión en la red, antes de aplicar el método, conviene sustituirlas por los generadores de intensidad equivalentes. Para la aplicación del método, los pasos a seguir son los siguientes:

1. Se eligen los nudos.
2. Se elige el nudo de referencia (tensión relativa 0 V).
3. Se aplica la 1.ª Ley de Kirchhoff (KCL) a todos los nudos menos uno (el de referencia).
4. Se aplica la ley de Ohm para expresar la corriente en función de las tensiones de los nudos a los cuales está conectada.
5. Se resuelve el sistema de ecuaciones resultante del paso anterior para obtener las tensiones de nudos.
6. Se calculan las tensiones y corrientes del circuito.

Tierra Masa

Figura 4.7. Símbolos de tierra y masa

Como ejemplo, si se aplica este método a la red de la *figura 4.8,* del que se conocen las magnitudes que aparecen en el circuito, se tiene el esquema y ecuaciones de la *figura 4.9.*

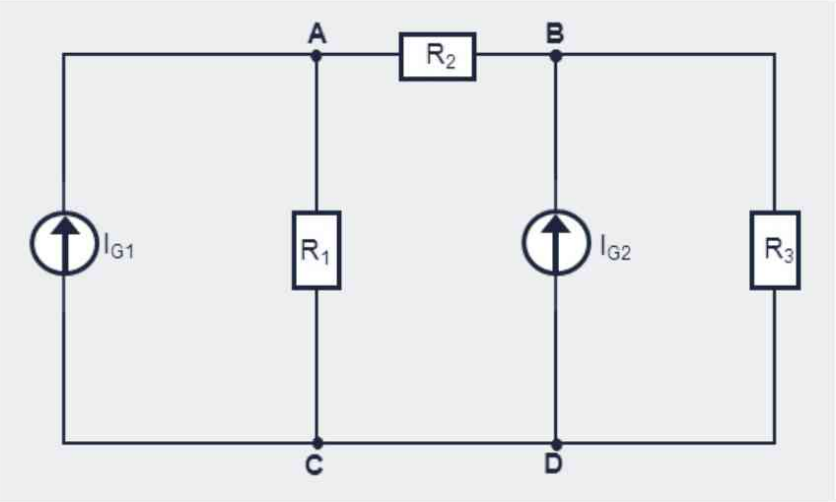


Figura 4.8. Resolver el circuito por método de las "tensiones de los nudos"

Para la aplicación del método de las *tensiones de nudos, figura 4.8,* se han seguido los pasos descritos:

1. Se eligen los nudos: A, B, y C (el nudo C y el nudo D están al mismo potencial pues no existe elemento activo o pasivo entre ellos).

2. Se elige el nudo de referencia: nudo C ($V_C = V_D = 0$).

3. Se aplica la 1.ª Ley de Kirchhoff (KCL) a todos los nudos menos uno (el de referencia): nudo A (potencial V_A) y nudo B (potencial V_B).

$$I_{G1} - I_1 - I_2 = 0$$

$$I_{G2} + I_2 - I_3 = 0$$

4. En las ramas donde hay resistencias se aplica la ley de Ohm para expresar la corriente en función de las tensiones de los nudos a los cuales está conectada.

$$I_1 = \frac{V_A}{R_1}; \quad I_3 = \frac{V_B}{R_3}; \quad I_2 = \frac{V_A - V_B}{R_2}$$

5. Se resuelve el sistema de ecuaciones resultante del paso anterior para obtener las tensiones de nudos.

   Número de ecuaciones necesarias $m = n - 1 = 3 - 1 = 2$

$$I_{G1} - \frac{V_A}{R_1} - \frac{V_A - V_B}{R_2} = 0$$

$$I_{G2} + \frac{V_A - V_B}{R_2} - \frac{V_B}{R_3} = 0$$

   Se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas (V_A, V_B).

6. Se calculan el resto de tensiones y corrientes que se pidan del circuito.

$$V_{AB},\ I_1,\ \text{e}\ I_2.$$

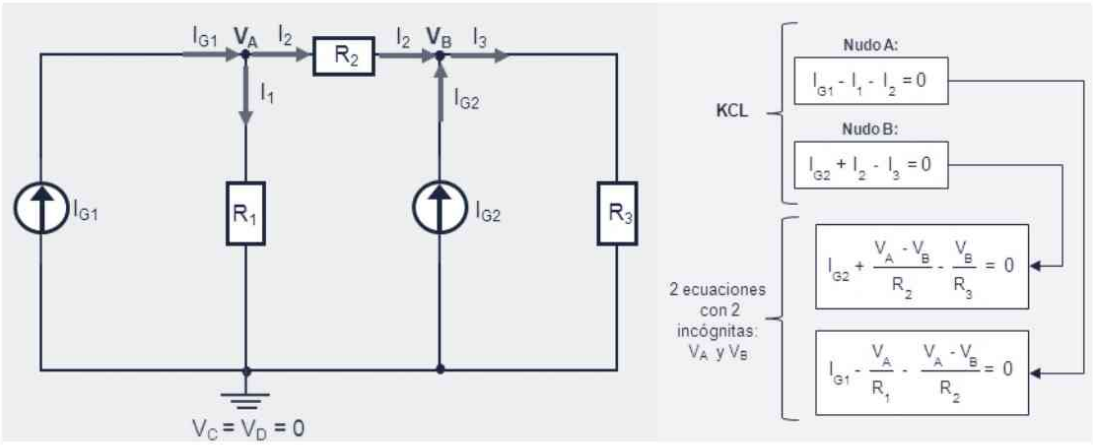


Figura 4.9. Aplicación del método de las "tensiones de los nudos" a la red de la figura 4.7

Ver ejercicios 4.20.5, 4.20.8 y 4.20.12.

4.6 PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Este teorema establece que "la respuesta de un **sistema lineal** excitado con más de una fuente de energía independiente, es igual a la suma de las respuestas individuales de cada una de las fuentes".

Para aplicar el teorema de superposición se siguen tres pasos:

1. Anular todas las fuentes independientes excepto una. Para anular una fuente de tensión se sustituye por un cortocircuito y una de intensidad por un circuito abierto.

2. Se calcula la variable que se pretende determinar, ya sea una tensión o una intensidad, utilizando las leyes de Kirchhoff. Se vuelve al paso 1 para cada una de las fuentes independientes.

3. Se calcula la tensión o intensidad final sumando algebraicamente (respetando sus polaridades) todas las respuestas obtenidas al realizar el paso 2 para cada una de las fuentes independientes.

Se debe notar que eliminar una fuente no significa ignorarla sino reemplazarla por una fuente que genera un valor cero de energía. Así, si se trata de una fuente de tensión deberá ser reemplazado por un cortocircuito ya que es el único elemento que admite cualquier corriente cuando la ddp es cero. Por el contrario, una fuente de corriente será reemplazada por un circuito abierto, ya que de esta manera se asegura una corriente nula para cualquier valor de tensión.

Por ejemplo, si en el *circuito A* de la *figura 4.10* se quiere obtener la tensión en bornes de la resistencia R_2, se tiene, de acuerdo con este principio, que dicha tensión es igual a la suma de las tensiones $V_{R2\text{-}B}$ y $V_{R2\text{-}C}$ en bornes de dicha resistencia obtenidas en el *circuito B* y en el *circuito C* respectivamente, es decir:

Circuito B, dos resistencias en serie con una fuente de tensión:

$$V_{R2_B} = \frac{E}{R_1 + R_2} R_2$$

Circuito C, dos resistencias en paralelo con una fuente de intensidad:

$$V_{R2_C} = I \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Circuito A:

La tensión total es la suma de las dos parciales porque ambas tienen la misma polaridad:

$$V_{R2_A} = V_{R2_B} + V_{R2_C} = \frac{E}{R_1 + R_2} R_2 + I \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(E + I \cdot R_1 \right)$$

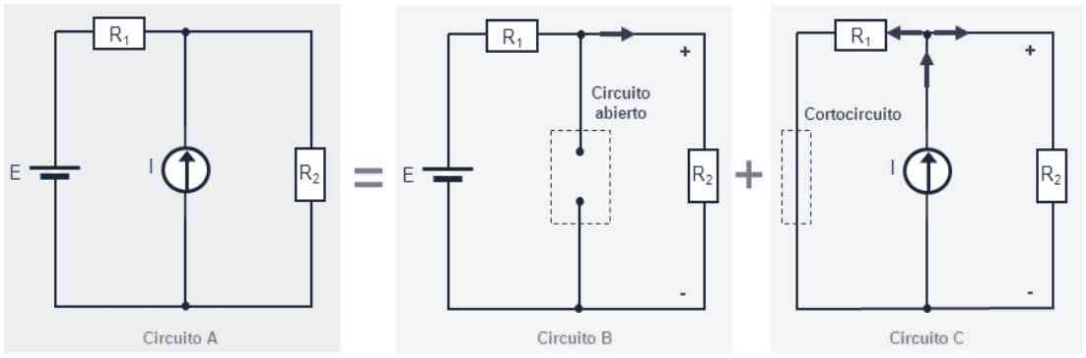


Figura 4.10. Principio de superposición

Si en el *circuito A* de la *figura 4.10* se resuelve mediante uno de los métodos vistos en apartados anteriores, por ejemplo mediante las corrientes de ramas, *figura 4.11,* se tiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (I_1, I_2 y V_{R2}):

$$\text{KCL} \Rightarrow I_1 + I = I_2$$

Tensión en bornes de R_2 desde rama izquierda: $V_{R2} = E - I_1 \cdot R_1$

Tensión en bornes de R_2 desde rama derecha: $V_{R2} = I_2 \cdot R_2$

Resolviendo el sistema resultante, tres ecuaciones con tres incógnitas, se obtiene:

$$V_{R2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\left(E + I \cdot R_1\right)$$

Que es el mismo resultado que se obtuvo aplicando el *principio de superposición.*

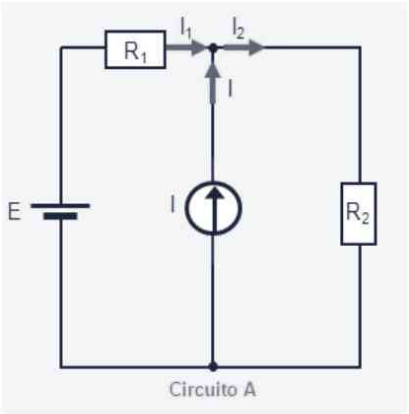


Figura 4.11. Resolución del circuito mediante las corrientes de ramas

Ver ejercicios 4.20.11 y 4.20.12.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

4.7 TEOREMA DE THÉVENIN

El teorema de Thévenin, del ingeniero francés L. Thévenin (1857-1926), *figura 4.12*, establece que cualquier **red lineal**, compuesta por elementos pasivos y **activos independientes**, puede sustituirse, respecto a dos terminales A y B, por una fuente de tensión E_{Th} en serie con una resistencia R_{Th}, siendo:

- La tensión E_{Th} (tensión de Thévenin) igual a la ddp entre los terminales A y B cuando se aísla la red lineal del resto del circuito (ddp entre A y B en circuito abierto).

- La resistencia R_{Th} (resistencia de Thévenin) la resistencia vista desde los terminales A y B, se determina anulando las fuentes (cortocircuitando todas las fuentes de tensión, y sustituyendo por circuitos abiertos las fuentes de corriente).

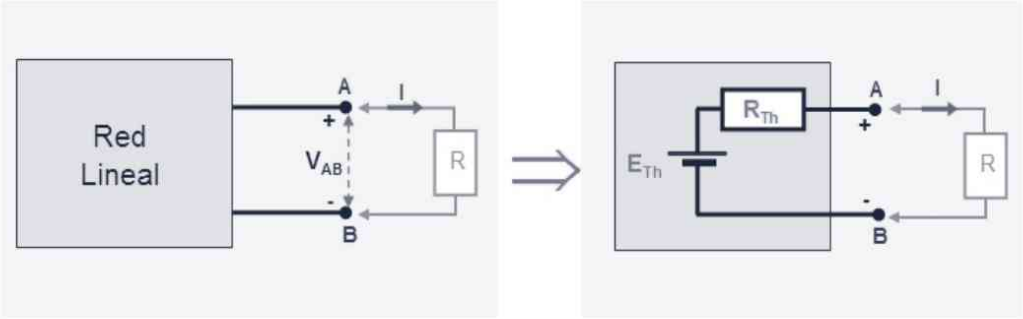


Figura 4.12. Teorema de Thévenin

Si se conecta una resistencia R entre los terminales A y B, circulará por ella una intensidad I de valor:

$$I = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R} \qquad [4.12]$$

Como ejemplo se aplica el *teorema de Thévenin* al circuito de la *figura 4.13.a.* Los pasos a seguir son:

1. Se calcula la tensión V_{AB} entre los puntos A y B estando el circuito abierto (sin la resistencia de carga externa al circuito), *figura 4.13.b*. Esta tensión V_{AB} corresponde a la tensión E_{TH} de la fuente de tensión equivalente.

2. Se calcula la resistencia R_{AB} "vista" desde los terminales A y B estando la fuente de tensión anulada (cortocircuitada), *figura 4.13.c.* Esta resistencia R_{AB} corresponde a la resistencia R_{TH} en serie con la fuente de tensión equivalente.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

3. Se obtiene el circuito equivalente de Thévenin, *figura 4.13.d,* que es equivalente al circuito de la *figura 4.13.a* desde el punto de vista de sus terminales externos A y B.

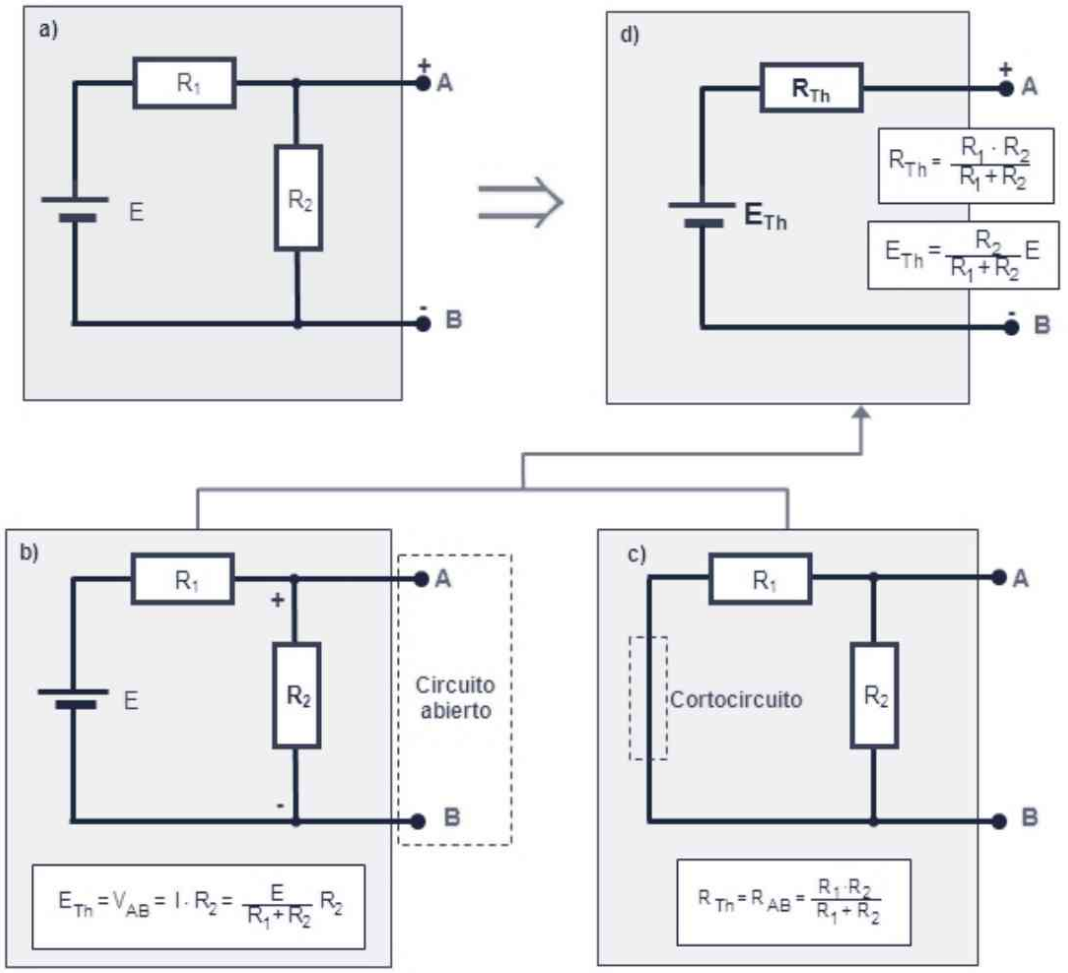


Figura 4.13. Ejemplo de aplicación del teorema de Thevenin

Si en la red existen elementos **activos dependientes** (en este texto sólo se estudian las fuentes independientes tal como se dice en el *apartado 3.17)* la resistencia R_{Th} se obtiene como cociente entre la ddp entre los terminales A y B cuando se aísla la red lineal del resto del circuito (ddp entre A y B en circuito abierto) y la corriente de cortocircuito medida entre los terminales A y B:

yolibros pdf.com

$$R_{Th} = \frac{E_{Th}}{I_{AB\ cortocir.}} \qquad [4.13]$$

Siendo ésta la fórmula general para obtener R_{Th}.

Se demuestra este teorema considerando dos valores de la resistencia exterior R y calculando los valores de V_{AB} e I_{AB} en el circuito original y en el circuito equivalente de la *figura 4.12.* Se comprueba que dichas magnitudes tienen el mismo valor y, puesto que la red es lineal, esas magnitudes deben permanecer constantes.

Si se hace $R = \infty$ (*circuito abierto*), en el circuito de la red lineal de la *figura 4.12,* la tensión $V_{AB} = V_0$ que es, precisamente, la tensión E_{Th} ($E_{Th} = V_0$) que se ha tomado para la fuente de tensión Thévenin del circuito equivalente de la *figura 4.12,* por lo que también $V_{AB} = E_{Th} = V_0$.

Si se hace $R = 0$ (*cortocircuito*), en el circuito de la red lineal de la *figura 4.12,* la intensidad que circula de A a B tiene el mismo valor que la que circula de A a B en el circuito equivalente de la *figura 4.12*, pues R_{Th} ha sido calculada, *fórmula 4.13,* para que así ocurra.

En el caso de que los generadores de la red, *figura 4.12,* sean todos independientes, si se anulan las fuentes de tensión y de intensidad en el circuito original y la fuente E_{TH} en el circuito equivalente, la resistencia R_{AB} "vista" desde A y B en el circuito original, coincida con Z_{Th}, en el circuito equivalente.

Ver ejercicios 4.20.9, 4.20.10 y 4.20.12.

4.8 TEOREMA DE NORTON

El teorema de Norton, del ingeniero estadounidense E. L. Norton (1898-1983), *figura 4.14*, establece que "cualquier **red lineal**, compuesta por elementos pasivos y **activos independientes**, puede sustituirse, respecto a dos terminales A y B, por una fuente de corriente I_N en paralelo con una resistencia R_N siendo:

- **La intensidad I_N** (intensidad de Norton) la intensidad entre los terminales A y B cuando se establece un cortocircuito entre dichos terminales.

- **La resistencia R_N** (resistencia de Norton) la resistencia vista desde los terminales A y B, se determina cortocircuitando todas las fuentes de tensión, y sustituyendo por circuitos abiertos las fuentes de corriente (el mismo procedimiento que en el teorema de Thevenin, $R_N = R_{Th}$).

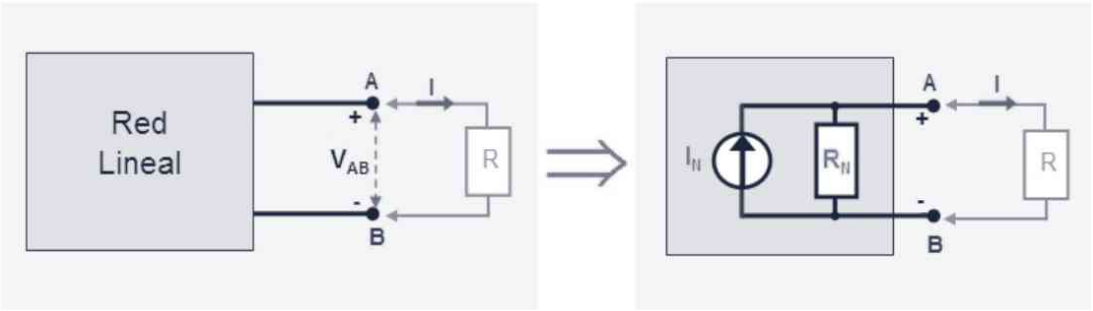


Figura 4.14. Teorema de Norton

Si se conecta una resistencia R entre los terminales A y B (R_N y R forman dos resistencias en paralelo y su resistencia equivalente R_E), la ddp V_{AB} ha de ser:

$$\frac{1}{R_E} = \frac{1}{R_N} + \frac{1}{R} \quad \Rightarrow \quad R_E = \frac{R \cdot R_N}{R + R_N}$$

$$V_{AB} = I_N \cdot \left(\frac{R \cdot R_N}{R + R_N} \right) \qquad [4.14]$$

Como ejemplo se aplica el *teorema de Norton* al circuito de la *figura 4.15.a.* Los pasos a seguir son:

1. Se calcula la intensidad de cortocircuito I_{AB} entre los puntos A y B estando ambos puntos en cortocircuito, *figura 4.15.b*. Esta intensidad I_{AB} corresponde a la intensidad I_N de la fuente de intensidad equivalente.

2. Se calcula la resistencia R_{AB} "vista" desde los terminales A y B estando la fuente de tensión anulada (cortocircuitada), *figura 4.15.c.* Esta resistencia R_{AB} corresponde a la resistencia R_N en paralelo con la fuente de intensidad equivalente.

3. Se obtiene el circuito equivalente de Norton, *figura 4.15.d,* que es equivalente al circuito de la *figura 4.15.a* desde el punto de vista de sus terminales externos A y B.

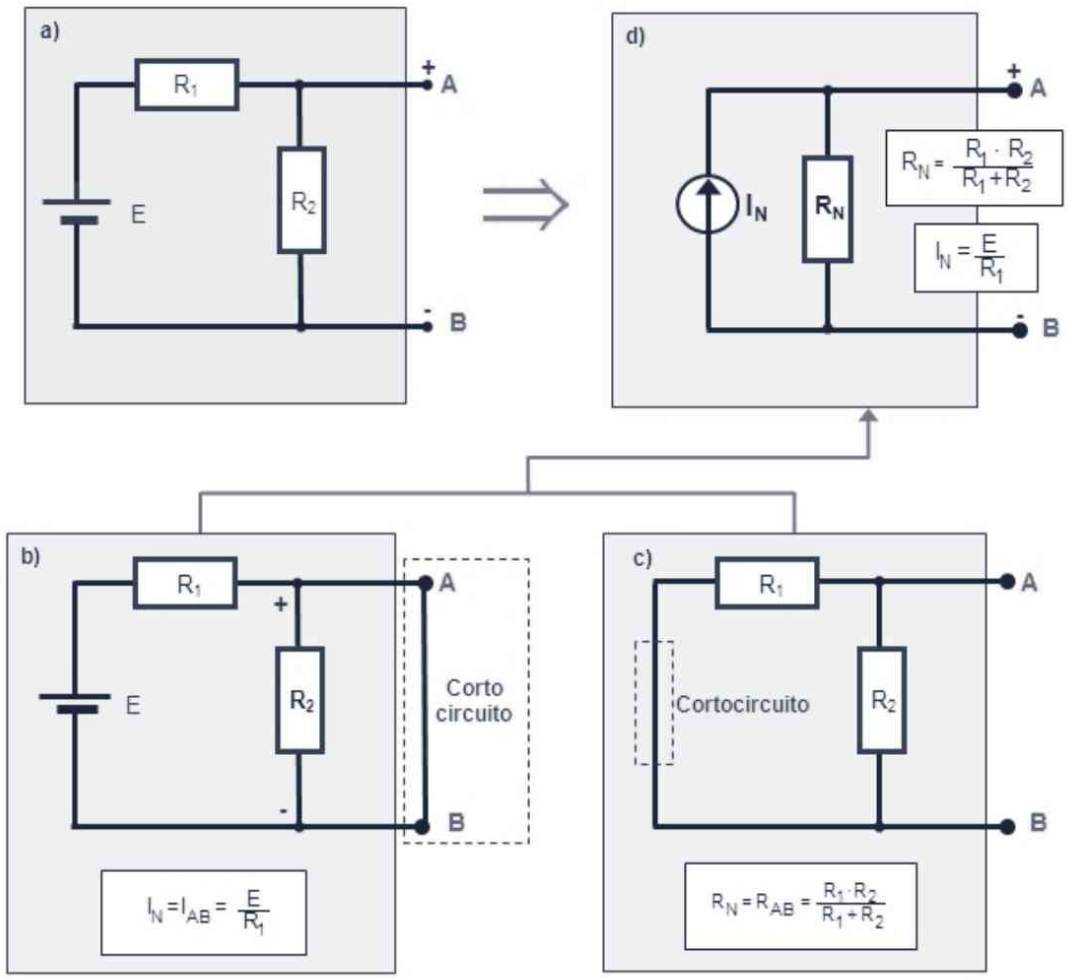


Figura 4.15. Ejemplo de aplicación del teorema de Norton

Ver ejercicios 4.20.9, 4.20.10 y 4.20.12.

Si en la red existen elementos **activos dependientes** vale lo dicho para el caso del Teorema de Thévenin (*fórmula 4.13*).

4.9 TRANSFORMACIÓN DE FUENTES THÉVENIN Y NORTON

Los circuitos de Thévenin y Norton son equivalentes e intercambiables (*apartado 3.22*), *figura 4.16*:

- La resistencia de Norton = resistencia de Thévenin.

$$R_N = R_{Th} \qquad [4.15]$$

- La intensidad de Norton = tensión de Thévenin / resistencia de Thévenin.

$$I_N = \frac{E_{Th}}{R_{Th}} \qquad [4.16]$$

En la *figura 4.16* se muestran la red lineal y los circuitos equivalentes de Thévenin y Norton.

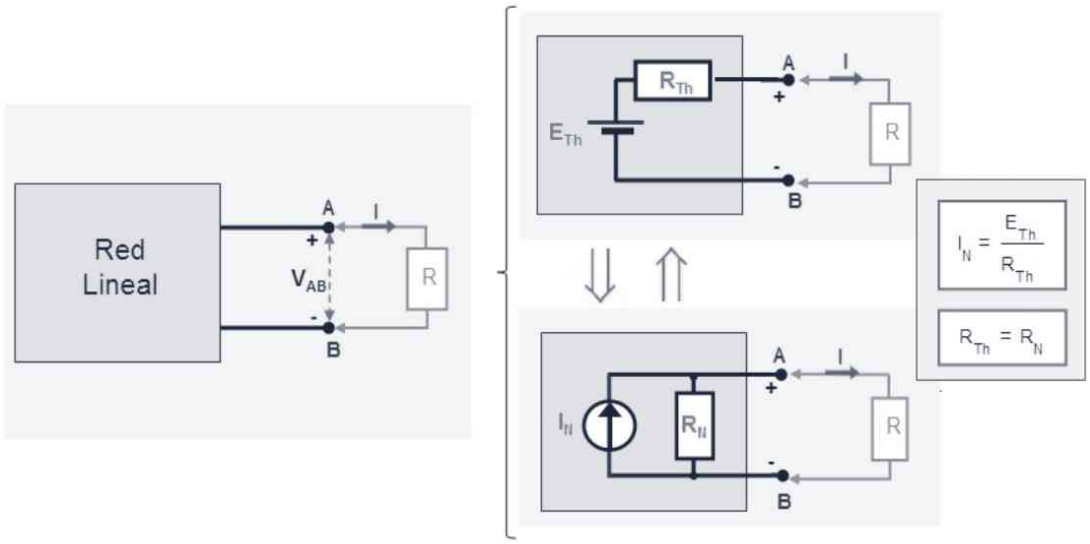


Figura 4.16. Transformación de fuentes Thévenin-Norton

Al ser equivalentes, la corriente que circule por una resistencia R conectada a los terminales A y B, y la ddp V_{AB} en sus extremos, deben ser las mismas en ambos circuitos en todos los casos.

Si se calculan ambos valores para, $R = \infty$ (circuito abierto):

Circuito equivalente Thévenin: $I = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{ab} = E_{Th}$

Circuito equivalente Norton: $I = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{ab} = I_N \cdot R_N \cdot$ ·

De donde se deduce la relación entre la intensidad Norton y la tensión Thévenin:

$$E_{Th} = I_N \cdot R_N \quad \Rightarrow \quad I_N = \frac{E_{Th}}{R_{Th}}$$

La misma relación se obtiene para otros valores. Por ejemplo, para $R = 0$ (cortocircuito):

Circuito equivalente Thévenin: $V_{ab} = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \dfrac{E_{Th}}{R_{Th}}$

Circuito equivalente Norton: $I = I_N \quad \Rightarrow \quad I_N = I = \dfrac{E_{Th}}{R_{Th}}$

Ver ejercicios 4.20.9, 4.20.10 y 4.20.12.

4.10 TEOREMA DE SUSTITUCIÓN

Este teorema, figura 4.17, establece que en una red "cualquier conjunto de componentes pasivos con una ddp en sus terminales V_{ab} y una corriente I_{ab}, puede sustituirse por una fuente de tensión o una fuente de corriente de valores V_{ab} e I_{ab}, respectivamente, sin que por ello se modifiquen las magnitudes en el resto del circuito".

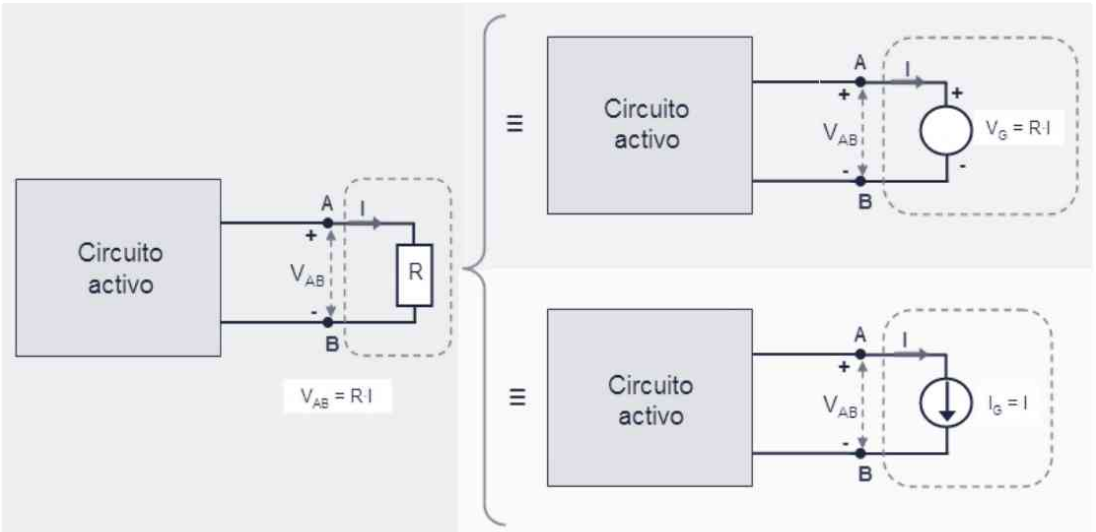


Figura 4.17. Teorema de sustitución

En efecto, conforme a lo explicado en el *apartado 3.23,* si se conecta una fuente de tensión V_G ($V_G = I \cdot R$) en paralelo con la resistencia R, la ddp V_{AB} sigue siendo la misma, de esta forma la resistencia R queda en paralelo con un generador ideal de tensión y puede ser removida. De la misma manera si en serie con la resistencia R se conecta una fuente de intensidad I_G ($I_G = I$) la resistencia R se puede retirar y la intensidad I sigue siendo la misma.

Conforme a este teorema, por ejemplo, las cuatros ramas de la *figura 4.18* son equivalentes. En todas ellas, entre los bornes, existe una ddp de igual polaridad de 20 V y circula una intensidad de 4 A en el mismo sentido.

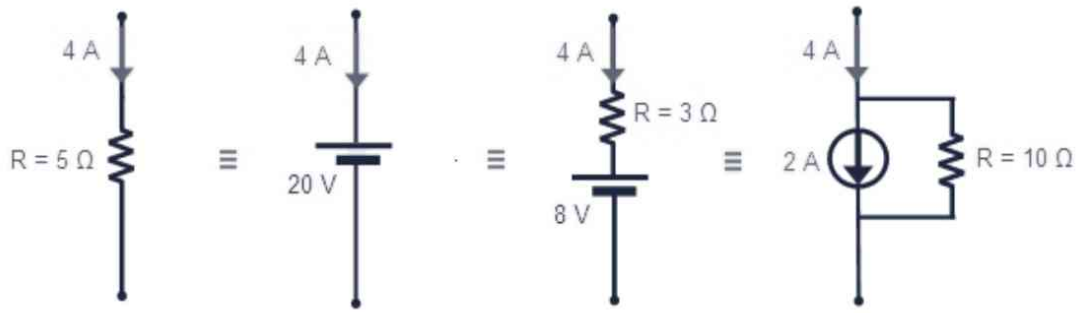


Figura 4.18. Teorema de sustitución: ramas equivalentes

Ver ejercicio 4.20.13.

4.11 TEOREMA DE RECIPROCIDAD

Este teorema, *figura 4.19*, establece que "*la corriente I en cualquier rama de una red pasiva al aplicar en una rama de la misma* ***una*** *ddp E debida a una fuente de tensión, será igual a la corriente que pasa por la rama en la cual se colocó la fuente de tensión si ésta se coloca en la rama en la cual circulaba la corriente I*". La polaridad de la fuente de tensión debe estar en correspondencia con la dirección de la corriente en la rama que se coloque.

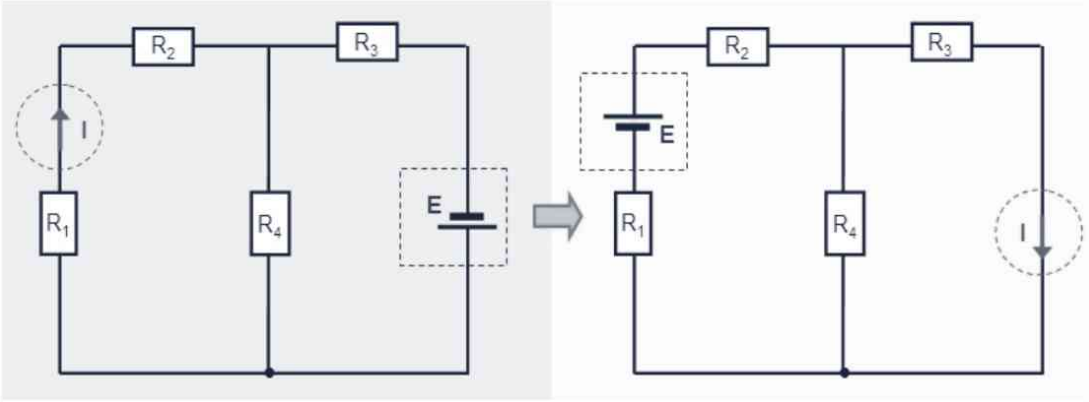


Figura 4.19. Teorema de reciprocidad

Ver ejercicio 4.20.14.

4.12 TEOREMA DE MILLMAN

El teorema de Millman, J. Millman ingeniero de origen ruso (1911-1991), permite calcular la tensión existente entre dos nudos (A y B) cualesquiera de un circuito, estableciendo que, *si entre dos nudos en los que hay* ***n*** *ramas con resistencias y fuentes de tensión,* ***m*** *ramas sólo con resistencias y* ***p*** *ramas fuentes de corriente, (figura 4.20) la tensión entre los puntos A y B viene dada por la siguiente expresión:*

$$V_{AB} = \frac{\sum^{n} \frac{E_K}{R_K} + \sum^{p} J_K}{\sum^{n+m} \frac{1}{R_K}}$$

En la *figura 4.20* se tiene un circuito al que se le ha aplicado este teorema para obtener la ddp V_{AB}.

Es fácil demostrar este teorema aplicando KCL al nudo "A", y poniendo cada intensidad en función de V_{AB}.

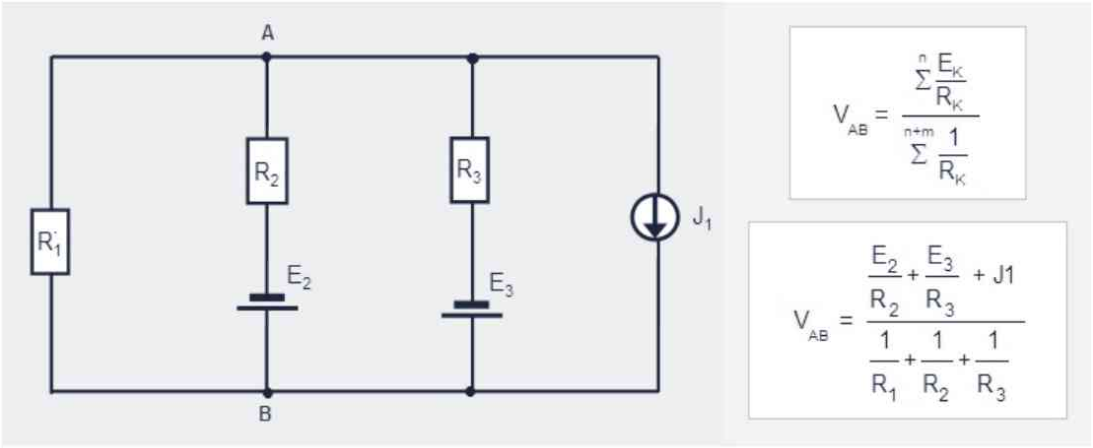


Figura 4.20. Ejemplo de aplicación del Teorema de Millman

Ver ejercicios 4.20.6, 4.20.7 y 4.20.12.

4.13 TEOREMA DE TELLEGEN

El ingeniero holandés B. Tellegen (1900-1990) estableció el teorema que lleva su nombre y que dice, en una red en la que se cumplen las leyes de Kirchhof, que posee r ramas cada una sometida a una tensión V_k y recorrida por una corriente I_k, si se respectan para todas las ramas la misma convención de signos, se cumple:

$$\sum_{k=1}^{r} V_k \cdot I_k = 0$$

Este teorema representa el principio de conservación de la energía en un circuito eléctrico, es decir, la suma de las potencias suministradas por las fuentes equivale a las potencias absorbidas por las resistencias.

Ver ejercicios 4.20.4 y 4.20.12.

4.14 TEOREMA DE KENNELLY

Existen conexiones de resistencias que no pueden considerarse ni en serie ni en paralelo, por cuanto no se dan ninguna de las condiciones que definen dichos acoplamientos. Estas configuraciones son las denominadas, por su estructura, estrella (Y) y triángulo (Δ), *figura 4.21*. A veces interesa la transformación de una a la otra, de manera que permita poder asociar las partes equivalentes al resto del circuito de forma tal que quedan en paralelo y/o serie. Para esto es preciso buscar las leyes de transformación de una conexión en la otra, de tal manera que ambas sean equivalentes desde un punto de vista externo, es decir, desde los nudos 1, 2 y 3. El teorema de Kennelly, se debe a A. Kennelly, ingeniero de origen inglés (1861-1939), permite determinar la carga equivalente de un acoplamiento de resistencias en *estrella* a una dada en *triángulo* y viceversa.

Para que puedan considerarse equivalentes deberán ser iguales los comportamientos en iguales circunstancias, es decir, la aplicación de iguales tensiones externas en los terminales, deben permitir el paso de las mismas corrientes. Esto equivale a decir que las resistencias que se observan entre los diferentes terminales (1-2, 2-3 y 3-1) tienen que ser iguales en ambas conexiones de montajes.

Para el montaje en triángulo, R_{12} es la resistencia equivalente de R_c en paralelo con la serie R_a y R_b. En el montaje en estrella R_{12} es la resistencia equivalente de R_u en serie con R_v, *es decir*:

Resistencia entre los nudos 1 y 2:

$$R_{12} = \frac{(R_a + R_b)\cdot R_c}{R_a + R_b + R_c} \quad y \quad R_{12} = R_u + R_v \quad \Rightarrow \quad \frac{(R_a + R_b)\cdot R_c}{R_a + R_b + R_c} = R_u + R_v \qquad [4.17]$$

De la misma manera para los otros terminales.

Resistencia entre los nudos 2 y 3:

$$R_{23} = \frac{(R_b + R_c)\cdot R_a}{R_a + R_b + R_c} \quad \text{y} \quad R_{23} = R_v + R_w \Rightarrow \frac{(R_b + R_c)\cdot R_a}{R_a + R_b + R_c} = R_v + R_w \qquad [4.18]$$

Resistencia entre los nudos 3 y 1:

$$R_{31} = \frac{(R_c + R_a)\cdot R_b}{R_a + R_b + R_c} \quad \text{y} \quad R_{31} = R_w + R_u \Rightarrow \frac{(R_c + R_a)\cdot R_b}{R_a + R_b + R_c} = R_w + R_u \qquad [4.19]$$

Transformación triángulo-estrella

En este caso se conocen las resistencias R_a, R_b y R_c de la conexión en triángulo y se quiere calcular las resistencias equivalentes, R_u, R_v y R_w, de la conexión en estrella. A partir de las tres *ecuaciones [4.17], [4.18] y [4.19]*, se obtiene:

$$R_u = \frac{R_b \cdot R_c}{R_a + R_b + R_c}; \quad R_V = \frac{R_c \cdot R_a}{R_a + R_b + R_c}; \quad R_w = \frac{R_a \cdot R_b}{R_a + R_b + R_c} \qquad [4.20]$$

Por ejemplo, sumando *[4.17] y [4.18],* y a la suma obtenida se le resta *[4.19],* se obtiene:

$$R_u = \frac{R_b \cdot R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

De forma análoga se obtiene R_v y R_w.

Transformación estrella–triángulo

En este caso se conocen las resistencias R_u, R_v y R_w, de la conexión en estrella y se quiere calcular las resistencias equivalentes, R_a, R_b y R_c de la conexión en triángulo. A partir de las tres ecuaciones *[4.20],* dividiendo dos a dos de ellas y sustituyendo en la tercera, se obtiene:

$$R_a = \frac{(R_v R_w + R_u R_w + R_u R_v)}{R_u}; \quad R_b = \frac{(R_v R_w + R_u R_w + R_u R_v)}{R_v}; \quad R_c = \frac{(R_v R_w + R_u R_w + R_u R_v)}{R_w} \qquad [4.21]$$

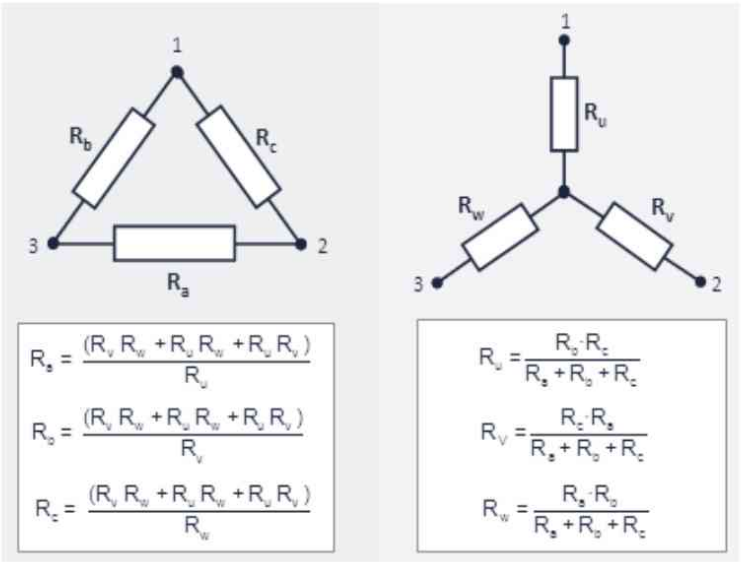


Figura 4.21. Teorema de Kennelly

Ver ejercicio 4.20.14.

4.15 TEOREMA DE LA MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA

Establece que "*la transferencia de potencia de una fuente dada, a una carga R_C es máxima cuando la resistencia de la carga R_C es igual a la de la fuente R_G*".

Sea un circuito, *figura 4.22*, formado por una fuente real de tensión V_G y resistencia interna R_G, conectada a una resistencia R_C. La potencia de la resistencia R_C es:

$$P_{RC} = \left(\frac{E}{R_G + R_C} \right)^2 R_C \qquad [4.22]$$

La representación gráfica de esta ecuación es la curva, $P_{RC} = f(R_C)$, de la *figura 4.22*, cuyo estudio matemático establece un valor máximo para la potencia de la carga cuando se cumple que:

$$R_C = R_G \qquad [4.23]$$

Esto supone una potencia en la carga:

$$P_{RC_max} = \frac{E^2}{4 \cdot R_G} \qquad [4.24]$$

En la gráfica de $P_{RC}= f(R_C)$, se puede observar que la curva de la potencia P_{RC} crece de forma más rápida hacia su valor máximo P_{RC_max}, que lo que decrece después de ese valor, lo que implica que pequeños cambios en la resistencia de carga R_C, para valores inferiores a R_G, tienen un efecto mucho mayor sobre la potencia entregada que cambios similares de R_C para valores superiores a R_G.

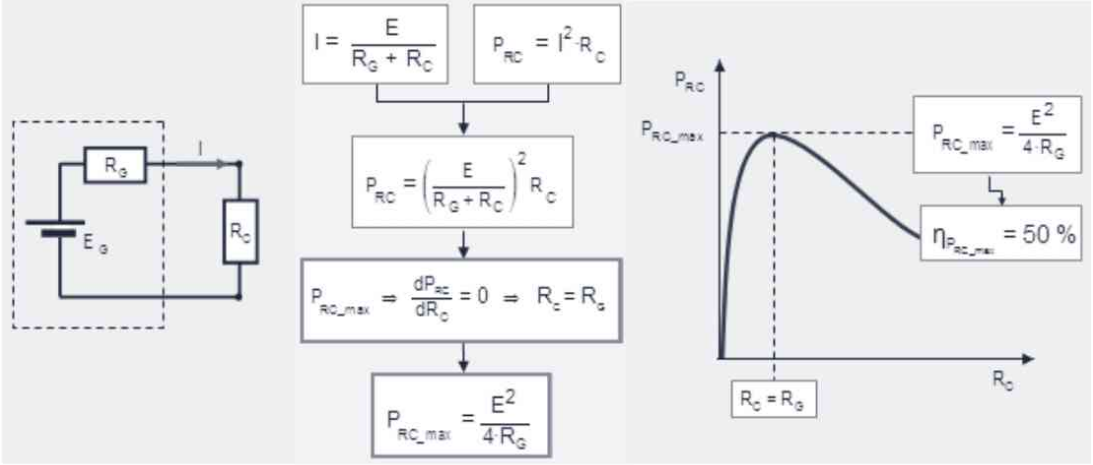


Figura 4.22. Teorema de máxima transferencia de potencia

Por otra parte, se tiene para el rendimiento de la fuente, *fórmula [3.44]:*

$$\eta = \frac{P_{Salida}}{P_{Generada}} = \frac{I_C^2 \cdot R_C}{I_C^2 \cdot R_C + I_C^2 \cdot R_G} = \frac{R_C}{R_C + R_G}$$

Para el caso de máxima transferencia de potencia ($R_C = R_G$) se tiene:

$$\eta = \frac{R_C}{R_C + R_G} = \frac{R_C}{R_C + R_C} = 0,5 \quad \Rightarrow \quad 50\,\%$$

Es decir, que en el caso de máxima transferencia de potencia se da un rendimiento del 50%, lo que supone que la potencia generada por la fuente es el doble de la potencia entregada a la carga, dicho de otra manera, sólo la mitad de la potencia generada por la fuente está llegando a la carga.

Puesto que conforme al Teorema de Thévenin, cualquier red lineal compuesta por elementos pasivos y activos independientes puede sustituirse, respecto a dos terminales, por una fuente de tensión E_{Th} en serie con una resistencia R_{Th}, el *Teorema de máxima transferencia de potencia* se puede generalizar estableciendo que, "*una carga conectada a los terminales de una red lineal, recibirá la máxima potencia cuando su resistencia R_C sea igual a la resistencia Thévenin R_{Th} de la red*":

$$R_C = R_{Th} \qquad [4.25]$$

El valor máximo de la *ecuación [4.22]* se obtiene mediante el cálculo diferencial, derivando respecto a R_C e igualando a cero dicha derivada para obtener el valor de R_C que hace máxima la potencia en la carga P_{RC}:

$$\frac{dP_{RC}}{dR_C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dR_C}\left[\left(\frac{E}{R_G + R_C}\right)^2 R_C\right] = 0$$

Efectuando las operaciones:

$$\frac{(R_G + R_C)^2 \cdot E^2 - 2 \cdot E^2 \cdot R_C \cdot (R_G + R_C)}{(R_G + R_C)^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad (R_G + R_C)^2 \cdot E^2 = 2 \cdot E^2 \cdot R_C \cdot (R_G + R_C)$$

Se obtiene:

$$R_G + R_C = 2 \cdot R_C \quad \Rightarrow \quad R_C = R_G$$

Ver ejercicio 4.20.9.

4.16 RÉGIMEN TRANSITORIO Y RÉGIMEN PERMANENTE

Como se ha visto en el *apartado 3.1* los elementos eléctricos pasivos fundamentales en un circuito eléctrico son la resistencia *R*, el condensador *C* y la bobina *L*. La resistencia de un circuito eléctrico es la responsable de un proceso energético *irreversible*, que es la transformación de energía eléctrica en energía calorífica que se disipa en el medio circundante en forma de calor. La bobina y el condensador son responsables de procesos energéticos *reversibles*, almacenamiento de energía eléctrica en forma de campo magnético en la bobina, o de campo eléctrico en el condensador.

Como se verá en los próximos apartados, la introducción de condensadores y/o bobinas en un circuito eléctrico posibilitan la existencia de fenómenos transitorios (p. ej., en la apertura y cierre de un circuito) esto es, antes que el circuito llegue a una situación **estacionaria** o de **régimen permanente** de funcionamiento, diferente a un estado anterior, el circuito pasa por un periodo de transición, **régimen transitorio**, en el que las tensiones y corrientes varían en función del tiempo, de acuerdo a una ley matemática que es posible averiguar, hasta llegar finalmente a la condición de equilibrio o de régimen permanente del circuito.

Se distinguen dos términos en la respuesta de un circuito:

- **Respuesta natural:** cuando la tensión y la intensidad son debidas a la energía almacenada en los condensadores y/o bobinas del circuito.

- **Respuesta forzada:** cuando la tensión y la intensidad dependen de las fuentes de energía conectadas al circuito.

4.17 REGÍMENES TRANSITORIOS: CIRCUITO RC

A continuación se hace el estudio del circuito RC, analizando la carga y descarga de un condensador a través de una resistencia, propia de los conductores del circuito y/o de otro elemento.

Carga del condensador

Considérese el circuito de la *figura 4.23* en el que el condensador se encuentra descargado y el conmutador pasa de la posición "c" a la posición "a". La corriente I del circuito, en el instante inicial, pasa a tener un valor $I = E/R$ (en el instante inicial el condensador, descargado, se comporta como un cortocircuito), pero a medida que el condensador se va cargando esta corriente I va disminuyendo hasta tener un valor cero una vez el condensador esté totalmente cargado, comportándose como un circuito abierto.

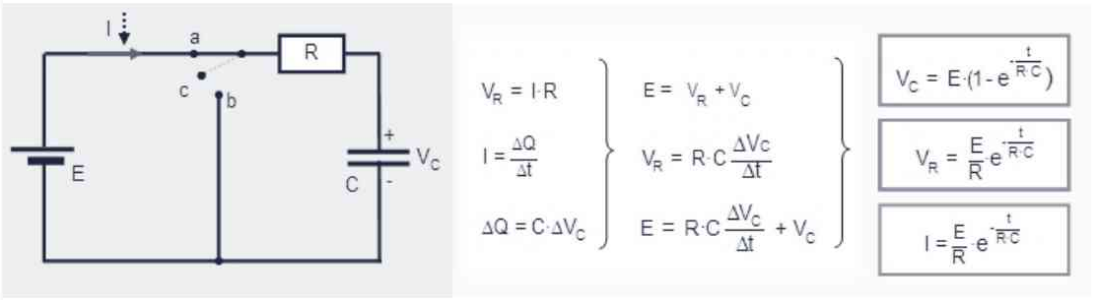


Figura 4.23. Circuito RC: carga del condensador (respuesta forzada)

En efecto, al cerrar el circuito, en un primer momento, no hay cargas en las armaduras del condensador, de esta manera, las primeras cargas en llegar a ellas se ubican con facilidad por lo que la corriente es máxima (el condensador se comporta como un cortocircuito), por la misma razón, al no haber cargas en las placas, no hay ddp en los bornes del condensador ($V_C = Q/C = 0/C = 0$). A medida que van acumulándose más cargas, éstas encuentran mayor dificultad en circular hacia las placas debido a que son repelidas por las del mismo signo que ya han llegado, por tanto, la corriente cada vez es menor y aumenta la ddp entre los bornes del condensador, hasta que llega el momento que el condensador está cargado ($V_C = E \Rightarrow$ no existe intensidad) y en el circuito no hay

desplazamiento de cargas y por tanto no hay corriente, comportándose el condensador como un circuito abierto, por lo que la tensión entre sus bornes es máxima.

De acuerdo con lo anterior, tanto la intensidad del circuito como la tensión en bornes del condensador son magnitudes variables con el tiempo. Si se aplica la 2.ª ley de Kirchhoff a la malla del circuito de la *figura 4.23* se tiene:

$$E = V_C + V_R \qquad [4.26]$$

Teniendo en cuenta las fórmulas [3.22], [3.2] y [2.1]:

$$V_R = I \cdot R\,; \quad I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}\,; \quad \Delta Q = C \cdot \Delta V_C\,; \quad \Rightarrow \quad V_R = R \cdot C \frac{\Delta V_C}{\Delta t}$$

Se tiene:

$$E = V_C + R \cdot C \frac{\Delta V_C}{\Delta t}$$

$$\frac{E}{R \cdot C} = \frac{V_C}{R \cdot C} + \frac{\Delta V_C}{\Delta t} \qquad [4.27]$$

La resolución matemática de esta ecuación tiene como solución:

$$V_C = E \cdot (1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}) \qquad [4.28]$$

Expresión de la tensión en bornes de condensador.

Como $Q = C \cdot V$, se tiene para la carga:

$$Q = C \cdot E \cdot (1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}) \qquad [4.29]$$

A partir de las *ecuaciones [4.26]* y *[4.28]* se obtiene la tensión en la resistencia:

$$V_R = E \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \qquad [4.30]$$

Como $V_R = I \cdot R$, se tiene para la intensidad en el circuito:

$$I = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \qquad [4.31]$$

Al producto $R \cdot C$ se le llama *constante de tiempo* τ del circuito:

$$\tau = R \cdot C \qquad [4.32]$$

La **constante de tiempo** τ equivale al tiempo que el condensador tardaría en cargarse de continuar en todo momento la *pendiente inicial* de la intensidad (lo que supondría una carga lineal). Dicho de otra forma, tiempo necesario para que la intensidad decrezca hasta el 37% de I_0 ($I_0 \cdot 1/e$). Si se toma como referencia la tensión del condensador V_C, la constante τ equivale al tiempo necesario para que dicha tensión sea el 63% de la tensión final [$E \cdot (1 - 1/e)$]. Para diferentes valores de τ ver la *tabla 4.1.*

La evolución temporal de la tensión en el condensador V_C así como la intensidad I que circula por el circuito se representan en la *figura 4.24.* Se observa que la tensión aumenta (la intensidad disminuye), de forma exponencial con el tiempo, tendiendo cuando $t \rightarrow \infty$ al valor límite E, valor para el cual el condensador está totalmente cargado. A efectos prácticos se puede considerar que esto ocurre para un tiempo $t \approx 5\tau$.

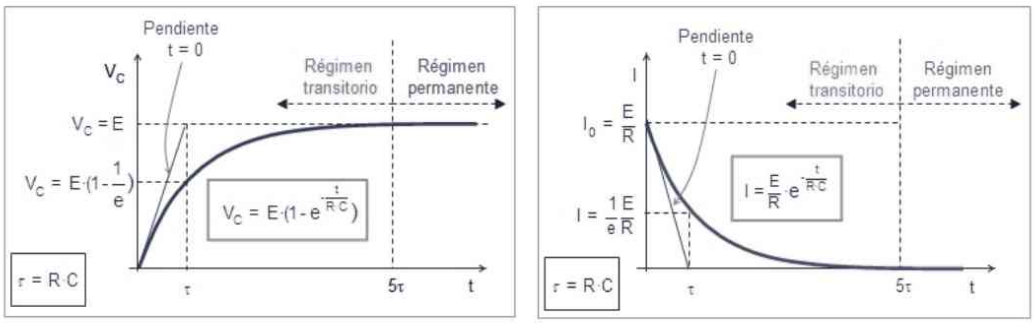


Figura 4.24. Circuito RC: tensión en bornes del condensador y corriente en el circuito en la carga del condensador (respuesta forzada)

Descarga del condensador

Cuando se conecta un condensador cargado a una resistencia, *figura 4.25,* éste se descarga a través de la misma de una manera similar a la carga, es decir que tampoco se realiza de manera lineal. Al principio se descargará más rápido y luego más lentamente.

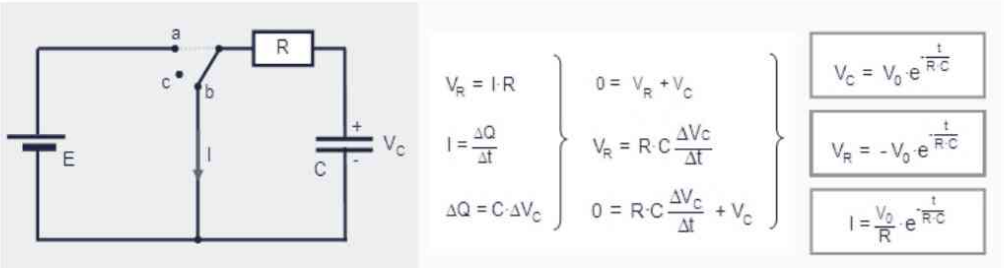


Figura 4.25. Circuito RC: descarga del condensador (respuesta natural)

De forma análoga se puede estudiar el fenómeno de la descarga del condensador, *figura 4.25.* Si una vez cargado el condensador a, por ejemplo, una tensión V_0, conmutador en la posición "a", el conmutador se pasa a la posición "b", aplicando la 2.ª ley de Kirchhoff a la malla se tiene:

$$0 = V_C + V_R \qquad [4.33]$$

Efectuando las mismas operaciones que se han hecho en el caso de la carga, se tiene:

$$0 = \frac{V_C}{R \cdot C} + \frac{\Delta V_C}{\Delta t} \qquad [4.34]$$

La resolución matemática de esta ecuación tiene como solución:

$$V_C = V_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \qquad [4.35]$$

Expresión de la tensión en bornes de condensador, y que conforme a la *ecuación [4.33]* tiene el mismo valor, pero signo contrario ($V_R = -V_C$), que la tensión V_R en bornes de la resistencia. La ecuación anterior representa un fenómeno transitorio con la misma constante de tiempo $\tau = R \cdot C$ que la del proceso de carga.

Análogamente la intensidad en el circuito decrece exponencialmente, pues, como $V_R = I \cdot R$, se tiene para la intensidad en el circuito:

$$I = -\frac{V_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \qquad [4.36]$$

La evolución temporal de la tensión en el condensador V_C así como la intensidad I que circula por el circuito (de sentido contrario al de la carga) se representan en la *figura 4.26.* Se observa que la tensión en bornes del condensador (y también la carga) disminuye, al igual que la intensidad, de forma exponencial con el tiempo, tendiendo cuando $t \to \infty$ al valor límite de 0 V, valor para el cual el condensador está totalmente descargado. A efectos prácticos se puede considerar que esto ocurre para un tiempo $t \approx 5\tau$.

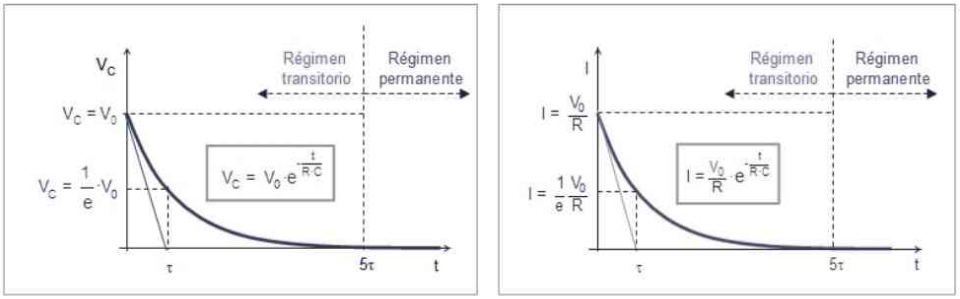


Figura 4.26. Circuito RC: tensión en bornes del condensador y corriente en el circuito en la descarga del condensador (respuesta natural)

En la *tabla 4.1* se tienen, en función de τ, diferentes valores en tanto por ciento de la magnitud inicial, en el crecimiento $[(1 - (1/e^{\tau})]$ o en el crecimiento $(1/e^{\tau})$.

Cte. de tiempo τ	% de carga o crecimiento	% de descarga o decrecimiento
1	63,2	36,8
2	86,5	13,5
3	95,0	5,0
4	98.2	1,8
5	99,3	0,7

Tabla 4.1. Constante de tiempo y % de crecimiento o decrecimiento

En la *figura 4.32* se observa gráficamente la influencia de la resistencia R en el tiempo que tarda un condensador C en alcanzar la carga máxima a una determinada tensión.

En la carga del condensador, la *ecuación [4.27]* en forma diferencial tiene la forma:

$$E = V_C + R \cdot C \frac{dV_C}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dV_C}{E - V_C} = \frac{dt}{R \cdot C}$$

Integrando, entre los valores inicial y final (0 y E) de la variable V_C, y entre el tiempo inicial y final de la variación (0 y t) de la variable t, se tiene:

$$\int_0^E \frac{dV_C}{E - V_C} = \int_0^t \frac{dt}{R \cdot C} \quad \Rightarrow \quad V_C = E \cdot (1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}})$$

En la descarga del condensador, la *ecuación [4.34]* en forma diferencial tiene la forma:

$$0 = \frac{V_C}{R \cdot C} + \frac{dV_C}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dV_C}{V_C} = -\frac{dt}{R \cdot C}$$

Integrando, entre los valores inicial y final (V_0 y 0) de la variable V_C, y entre el tiempo inicial y final de la variación (0 y t) de la variable t, se tiene:

$$\int_{V_0}^{0} \frac{dVc}{Vc} = -\int_{0}^{t} \frac{dt}{R \cdot C} \quad \Rightarrow \quad V_C = V_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

Ver ejercicio 4.20.16.

4.18 REGÍMENES TRANSITORIOS: CIRCUITO RL

Tal como se ha dicho en el *apartado 3.16*, y se explicará en el próximo capítulo de electromagnetismo, al pasar una corriente I por una bobina ideal, en los bornes de la bobina se produce una ddp V_L, *fórmula [3.42],* siempre que la corriente sea variable, y su valor depende de la variación de la corriente con el tiempo ($\Delta I/\Delta t$), y de una característica propia de la bobina denominada *inductancia L* [dependiente del número de espiras y del núcleo, (longitud, sección y material)], tal que:

$$V_L = L\frac{\Delta I}{\Delta t} \qquad [4.37]$$

Se observa en la fórmula anterior que, en un circuito de CC, existe tensión V_L mientras exista variación de intensidad ΔI (apertura y cierres de circuitos, variación de la resistencia de un circuito, etc.). Una vez exista una corriente estacionaria ($\Delta I/\Delta t = 0$) una bobina actúa como un cortocircuito.

La unidad de inductancia L es el *henrio* en honor del físico estadounidense **Joseph Henry** (1816-1887).

Por otra parte, el sentido de la ddp que se produce en la bobina es tal que tiende a oponerse a la variación de la intensidad, es decir, si la intensidad aumenta su sentido es opuesto al sentido de la corriente y si la intensidad disminuye su sentido es el mismo que la corriente.

Nótese que en la conexión a una ddp, la variación de la intensidad con el tiempo en el circuitos RL es al revés que en los circuitos RC. En un primer instante la corriente encuentra cierta dificultad para circular, mientras se crea el campo magnético en la bobina (en el instante inicial el condensador se comporta como un cortocircuito), después ésta actúa como un cortocircuito (en el régimen permanente el condensador se comporta como un circuito abierto).

A continuación se hace el estudio del circuito RL, analizando el cierre y apertura de un circuito que contiene una bobina y una resistencia.

Establecimiento de la corriente en el circuito RL

Considérese el circuito de la *figura 4.27* en el que el conmutador pasa de la posición "c" a la posición "a". La corriente *I* del circuito no alcanza instantáneamente el valor $I = E/R$, sino que tarda un cierto tiempo, debido, precisamente, a la ddp que se origina en la bobina por la variación de la corriente y que, en este caso, es de oposición al sentido de la misma (la corriente aumenta la ddp en la bobina que se opone, tiene polaridad *contraria* a la de la fuente).

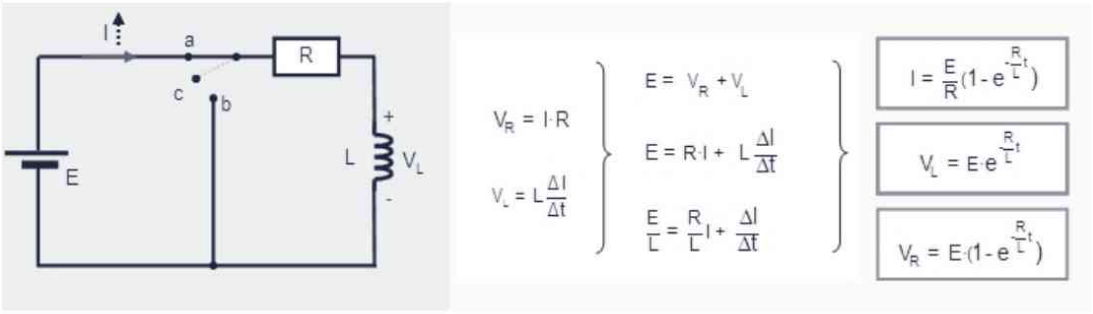


Figura 4.27. Circuito RL: establecimiento de la corriente (respuesta forzada)

De acuerdo con lo anterior tanto la intensidad del circuito como la tensión en bornes de la bobina son magnitudes variables con el tiempo. Si se aplica la 2.ª ley de Kirchhoff a la malla del circuito de la *figura 4.27* se tiene:

$$E = V_R + V_L \qquad [4.38]$$

Teniendo en cuenta que:

$$V_R = I \cdot R\,; \quad V_L = L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

Se tiene:

$$E = R \cdot I + L \frac{\Delta I}{\Delta t} \qquad [4.39]$$

$$\frac{E}{L} = \frac{R}{L} I + \frac{\Delta I}{\Delta t} \qquad [4.40]$$

La resolución matemática de esta ecuación tiene como solución:

$$I = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \qquad [4.41]$$

De forma análoga que en el circuito RC, **la constante de tiempo** τ equivale al tiempo necesario para que la intensidad crezca hasta el 63% de I_0 [$I_0 \cdot (1\text{-}1/e)$], que es equivalente al tiempo que se tardaría en alcanzar la intensidad de régimen permanente I_0 de continuar en todo momento la *pendiente inicial* de la intensidad. Si se toma como referencia la tensión de la bobina V_L, la constante τ equivale al tiempo necesario para que dicha tensión sea el 37% de la tensión inicial ($E \cdot 1/e$). Para diferentes valores de τ ver la *tabla 4.1.*

$$\tau = \frac{L}{R} \qquad [4.42]$$

Para la tensión en bornes de la resistencia y la bobina, como $V_L = E - V_R$, se tiene:

$$V_R = E \cdot (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \qquad [4.43]$$

$$V_L = E \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \qquad [4.44]$$

La evolución temporal de la intensidad I y de la tensión en bornes de la bobina V_L se representan en la *figura 4.28.* Se observa que la corriente aumenta (la tensión en bornes de la bobina V_L disminuye) de forma exponencial con el tiempo, tendiendo cuando $t \to \infty$ al valor límite *de E/R,* que es su valor en régimen permanente. A efectos prácticos se puede considerar que esto ocurre para un tiempo $t \approx 5\tau$.

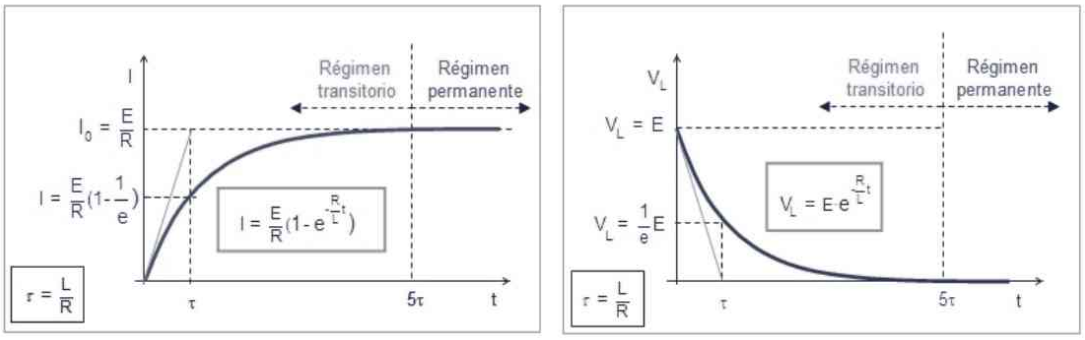


Figura 4.28. Circuito RL: establecimiento de la corriente y tensión en bornes de la bobina (respuesta forzada)

Extinción de la corriente en el circuito RL

Considérese el circuito de la *figura 4.29*, por el que circula una corriente en régimen permanente I_0 *($I_0 = E/R$).* Si, en un tiempo "$t = 0$" *el* conmutador pasa de la posición "a" a la posición "b", la corriente I del circuito no alcanza instantáneamente el valor $I = 0$, sino que tarda un cierto tiempo, debido, como ocurría en la carga, a la ddp que se origina en la bobina por la variación de la corriente y que, en este caso, es de oposición a la extinción de la corriente (la corriente disminuye, la ddp en la bobina se opone a esta disminución, lo que implica *igual* polaridad que la fuente).

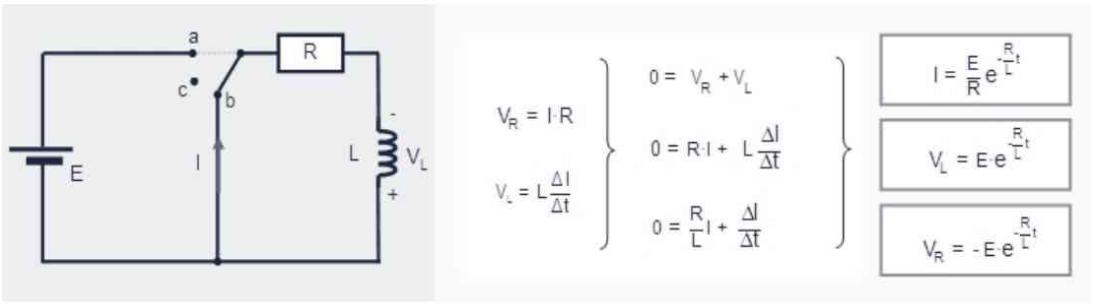


Figura 4.29. Circuito RL: extinción de la corriente bobina (respuesta natural)

De acuerdo con lo anterior tanto la intensidad del circuito como la tensión en bornes de la bobina son magnitudes variables con el tiempo. Si se aplica la 2.ª ley de Kirchhoff a la malla del circuito de la *figura 4.29* se tiene:

$$0 = V_R + V_L \qquad [4.45]$$

Teniendo en cuenta que:

$$V_R = I \cdot R\,; \quad V_L = L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

Se tiene:

$$0 = R \cdot I + L\frac{\Delta I}{\Delta t} \qquad [4.46]$$

$$0 = \frac{R}{L} I + \frac{\Delta I}{\Delta t} \qquad [4.47]$$

La resolución matemática de esta ecuación tiene como solución:

$$I = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \qquad [4.48]$$

La evolución temporal de la intensidad I y de la tensión en bornes de la bobina V_L se representan en la *figura 4.30.* Se observa que la corriente disminuye (al igual que la tensión en bornes de la bobina V_L) de forma exponencial con el tiempo, tendiendo cuando $t \to \infty$ al valor límite de $I = 0$. A efectos prácticos se puede considerar que esto ocurre para un tiempo $t \approx 5\tau$.

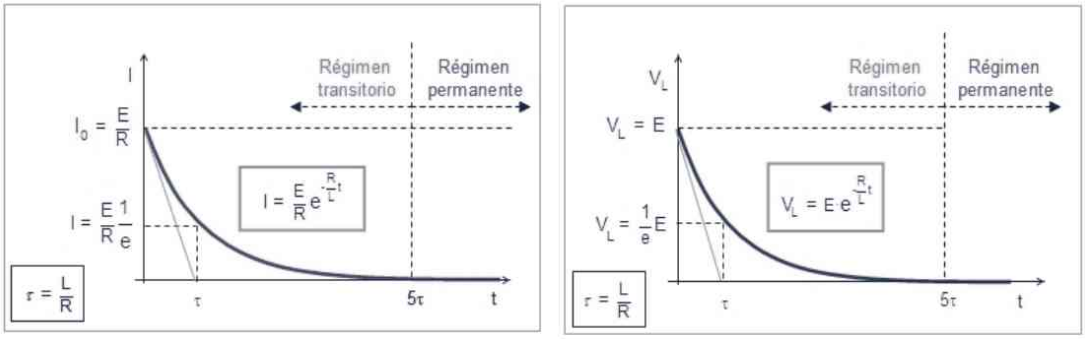


Figura 4.30. Circuito RL: extinción de la corriente y tensión en bornes de la bobina (respuesta natural)

En la *figura 4.32* se observa gráficamente la influencia de la resistencia R en el tiempo que tarda la corriente I en alcanzar el régimen permanente para una determinada tensión.

Para el **establecimiento de la corriente** en el circuito RL, la *ecuación [4.39]* en forma diferencial tiene la forma:

$$E = R \cdot I + L\frac{dI}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{L \cdot dI}{E - R \cdot I} = dt$$

Integrando, entre los valores iniciales y finales (0 e $I_0 = E/R$) de la variable I, y entre el tiempo inicial y final de la variación (0 y t) de la variable t, se tiene:

$$\int_0^{I_0} \frac{L \cdot dI}{E - R \cdot I} = \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Para la **extinción de la corriente** en el circuito RL, la *ecuación [4.46]* en forma diferencial es:

$$0 = R \cdot I + L\frac{dI}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt$$

Integrando, entre los valores iniciales y finales ($I_0 = E/R$, 0) de la variable I, y entre el tiempo inicial y final de la variación (0 y t) de la variable t, se tiene:

$$\int_{I_0}^{0}\frac{dI}{I} = \int_0^t -\frac{R}{L}dt \quad \Rightarrow \quad I = \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

4.19 RESUMEN COMPARATIVO DE LOS ELEMENTOS PASIVOS *R*, *L* Y *C* EN CORRIENTE CONTINUA

En la *figura 4.31* se hace un resumen del comportamiento de una resistencia R, una bobina L y un condensador C, en los circuitos anteriores.

Elemento	Circuito equivalente **inicial** (t = 0)		Circuito equivalente **Final** (t = ∞)
	Cargado	Descargado	
R			
L			
C			

Figura 4.31. Circuito RL

En la *figura 4.32* se observa la influencia de la resistencia R en el tiempo que tarda un condensador C en alcanzar la carga máxima (circuito RC) o en una bobina el tiempo que tarda la corriente I en alcanzar el régimen permanente (circuito RL).

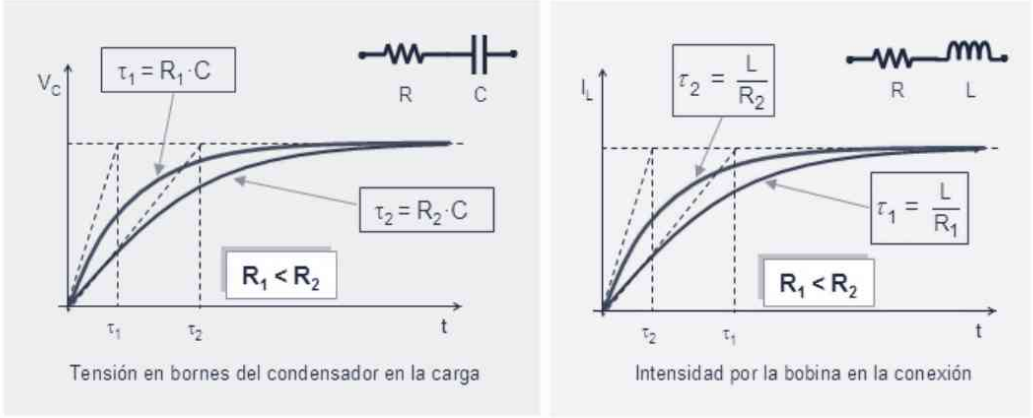


Figura 4.32. Circuito RC y circuito RL: influencia de la resistencia R

4.20 RESUMEN DE CONCEPTOS Y FÓRMULAS DE ESTE CAPÍTULO

En la *tabla 4.2* se hace un resumen de las fórmulas de este capítulo.

Leyes de Kirchhoff	1.ª Ley: KCL $\Rightarrow$ $\Sigma I_i = 0$ 2.ª Ley: KVL $\Rightarrow$ $\Sigma E_i = \Sigma R_i \cdot I_i$
Transformación de fuentes Thévenin (E_{Th}, R_{Th})-Norton (I_{Th}, R_N)	$I_N = \dfrac{E_{Th}}{R_{Th}}$; $R_N = R_{Th}$
Teorema de Millman	$V_{AB} = \dfrac{\sum_{}^{n} \dfrac{E_K}{R_K} + \sum_{}^{p} J_K}{\sum_{}^{n+m} \dfrac{1}{R_K}}$
Teorema de Tellegen	$\sum_{k=1}^{r} V_k \cdot I_k = 0$
Circuito RC: carga del condensador	$V_C = E \cdot (1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}})$; $I = \dfrac{E}{R} e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$
Circuito RC: descarga del condensador	$V_C = V_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$; $I = -\dfrac{V_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$
Circuito RL: establecimiento de la corriente	$V_L = E \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$; $I = \dfrac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$
Circuito RL: extinción de la corriente	$V_L = E \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$; $I = \dfrac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$

Tabla 4.2. Resumen de fórmulas

4.21 EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Ejercicio 4.20.1

En el circuito de la figura calcular la tensión V_{ab} para las diferentes posiciones de los pulsadores A y B:

a) Pulsador **A** abierto, pulsador **B** abierto.

b) Pulsador **A** abierto, pulsador **B** cerrado.

c) Pulsador **A** cerrado, pulsador **B** abierto.

d) Pulsador **A** cerrado, pulsador **B** cerrado.

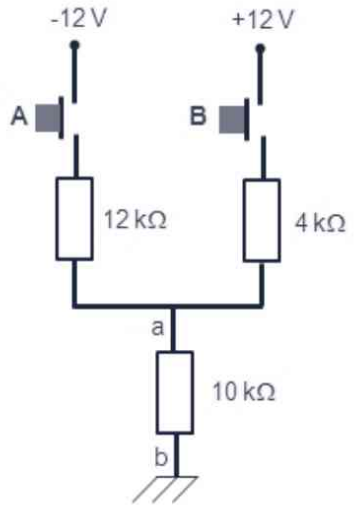


Figura 4.33. Ejercicio 4.20.1

Solución:

a) Pulsador A abierto, pulsador B abierto.

$V_{ab} = 0$, (no circula corriente)

b) Pulsador A abierto, pulsador B cerrado.

Como las resistencias están en serie, *fórmula [3.30]* y por la ley de Ohm, *fórmula [3.22],* se tiene:

$$I = \frac{V}{R_{10} + R_4} = \frac{12}{(10+4)\cdot 10^3} = 0,85 \cdot 10^{-3}\,A$$

$$V_{ab} = R_{10} \cdot I = 10 \cdot 10^3 \cdot 0,85 \cdot 10^{-3} = 8,5\,V$$

c) Pulsador A cerrado, pulsador B abierto.

$$I = \frac{V}{R_{10} + R_{12}} = \frac{-12}{(10+12)\cdot 10^3} = -0,54 \cdot 10^{-3}\,A$$

$V_{ab} = R_{10} \cdot I = -10 \cdot 10^3 \cdot 0,54 \cdot 10^{-3} = -5,4\,V$ (el punto *b* está a mayor potencial que el punto *a*)

d) Pulsador A cerrado, pulsador B cerrado.

El circuito equivalente es el de la *figura 4.34*. Mediante el método de las corrientes de mallas, expresando las resistencias en kΩ la intensidad se obtendrá en mA:

Malla izquierda: $\Sigma E_i = \Sigma R_i \cdot I_i \Rightarrow -12 = (10 + \cdot I_1 - 12 \cdot I_2$

Malla derecha: $\Sigma E_i = \Sigma R_i \cdot I_i \Rightarrow 12 + 12 = -12 \cdot I_1 + (4 + 12) \cdot I_2$

Resolviendo el sistema se obtiene: $I_1 = 0{,}43$ mA e $I_2 = 1{,}8$ m A.

La intensidad que circula por la resistencia de 10 kΩ es $I_1 = 0{,}43$ A, entonces:

$$V_{ab} = I \cdot R = 0{,}43 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = 0{,}43 \text{ V}$$

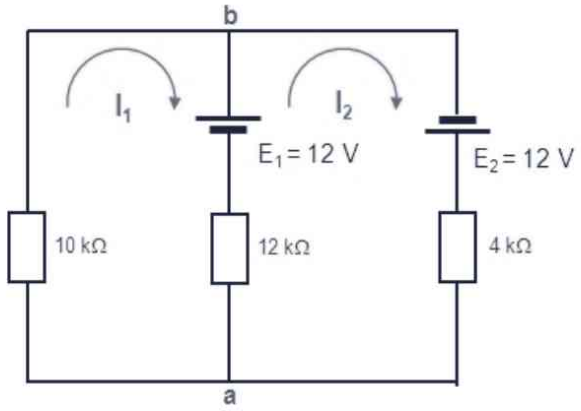


Figura 4.34. Solución del ejercicio 4.20.1

Ejercicio 4.20.2

En la red de la *figura 4.35,* calcular:

a) Corrientes por cada rama de la red por el *método de las corrientes de ramas*.

b) Balance de potencias en la red.

c) La ddp entre los polos positivos de las fuentes de tensión de 4 V y 6 V.

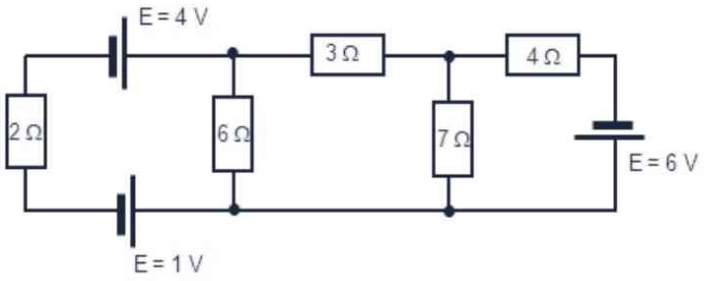


Figura 4.35. Ejercicio 4.20.2

Solución:

a) Corrientes por cada rama de la red. *Figura 4.36*.

- En el circuito se asignan sentidos arbitrarios a las intensidades que circulan por cada rama (I_1, I_2, I_3, I_4, I_5).

- Se asigna una letra a cada nudo y se aplica la 1.ª Ley de Kirchhoff (KCL) a 2 nudos (n - 1 = 3 - 1 = 2 nudos). Nótese que el nudo C y D es eléctricamente el mismo, pues no hay elemento en medio de ambos, resultando dos ecuaciones ($m = n$ - 1 = 3 - 1 = 2):

$$\text{Nudo A:} \quad I_1 - I_4 - I_2 = 0$$

$$\text{Nudo B:} \quad I_2 - I_3 - I_5 = 0$$

- Se elige un sentido positivo de circulación (el de giro de las agujas de un reloj) en cada malla.

- Se aplica la 2.ª Ley de Kirchhoff (KVL) a tres mallas [$q = r - (n - 1) = 5 - (3 - 1) = 3$]

$$\text{Malla ADR}_2\text{A:} \quad 4 - 1 = 2 \cdot I_1 + 6 \cdot I_4$$

$$\text{Malla ABCDA:} \quad 0 = 3 \cdot I_2 + 7 \cdot I_5 - 6 \cdot I_4$$

$$\text{Malla BR}_4\text{CB:} \quad 6 = 4 \cdot I_3 - 7 \cdot I_5$$

- Se resuelve el sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas (I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) anterior, resultando:

$$I_1 = 1 \text{ A}, \quad I_2 = 0{,}86 \text{ A}, \quad I_3 = 1{,}1 \text{ A}; \quad I_4 = 0{,}16 \text{ A}; \quad I_5 = -0{,}23 \text{ A}$$

El signo menos en la intensidad I_5 significa que el sentido real es contrario al que se había elegido.

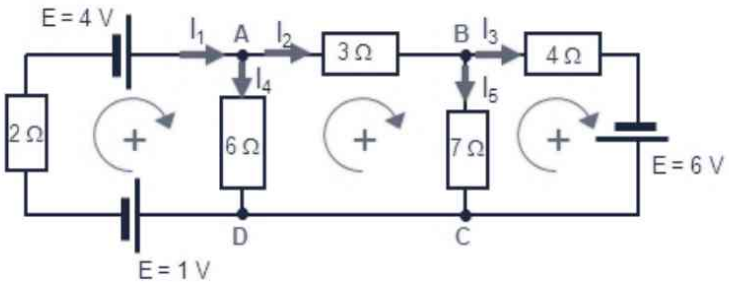


Figura 4.36. Solución del ejercicio 4.20.2

b) Balance de potencias en la red.

En primer lugar se ha de tener en cuenta qué fuentes de tensión actúan como fem y cuáles como fcem.

Como fem (favorecen la corriente): $E = 4$ V y $E = 6$ V

Como fcem (se opone a la corriente): $E = 1$ V

Potencia generada P_G = Potencia consumida P_C

$$P_G = \Sigma E_i \cdot I_i = 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1{,}1 = 10{,}4 \text{ W}$$

$$P_C = \Sigma E'_1 \cdot I_i + i_i^2 \cdot R_i = 1 \cdot 1 + 1^2 \cdot 2 + 0{,}16^2 \cdot 6 + 0{,}86^2 \cdot 3 + 0{,}23^2 \cdot 7 + 1{,}1^2 \cdot 4 = 10{,}4 \text{ W}$$

Con lo que se demuestra que ambas potencias coinciden.

c) La ddp entre los polos positivos de las fuentes de tensión de 4 V y 6 V.

En el esquema de la *figura 4.36* se trata de V_{AC}. Se puede calcular de diferentes maneras:

Recorrido $ABR_4C \Rightarrow V_{AC} = V_{AB} + V_{BC} = I_2 \cdot R_3 + I_3 \cdot R_4 - E_6 = 0{,}86 \cdot 3 + 1{,}1 \cdot 4 - 6 = 0{,}98$ V

Recorrido $ABR_7C \Rightarrow V_{AC} = V_{AB} + V_{BC} = I_2 \cdot R_3 - I_5 \cdot R_7$; ($I_5$ tiene sentido real contrario al elegido)

$$V_{AC} = I_2 \cdot R_3 - I_5 \cdot R_7 = 0{,}86 \cdot 3 - 0{,}23 \cdot 7 = 0{,}97 \text{ V}$$

Recorrido $AR_6D \Rightarrow V_{AC} = V_{AD} = I_4 \cdot R_6 = 0{,}16 \cdot 6 = 0{,}96$ V

Recorrido $AR_2D \Rightarrow V_{AC} = V_{AD} = E_4 - E_1 - I_1 \cdot R_2 = 4 - -1 - 1 \cdot 2 = 1$ V

La diferencia entre los resultados es debida a las diferentes aproximaciones decimales en las operaciones.

Ejercicio 4.20.3

En el circuito de la *figura 4.37,* calcular:

a) Corrientes por cada rama por el *método de las corrientes de ramas*.

b) Balance de potencias en el circuito.

c) La ddp en bornes de la resistencia de 10 Ω.

d) La ddp entre los polos positivos de las fuentes de tensión de 15 V y 10 V.

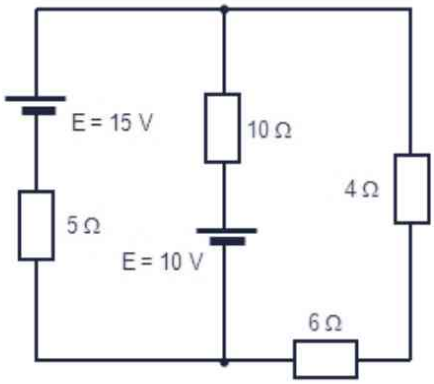


Figura 4.37. Ejercicio 4.20.3

Solución:

a) Corrientes por cada rama. *Figura 4.38.*

- Se asigna sentidos arbitrarios a las intensidades que circulan por cada rama (I_1, I_2, I_3).

- Se asigna una letra a cada nudo y se aplica la 1.ª Ley de Kirchhoff KCL en 1 nudo ($m = n - 1 = 2 - 1 = 1$)

$$\text{Nudo A:} \quad I_1 - I_3 - I_2 = 0$$

- Se elige un sentido positivo de circulación (el de giro de las agujas de un reloj) en cada malla.

– Se aplica la 2.ª Ley de Kirchhoff (KVL) a 2 mallas [$q = r - (n - 1) = 3 - (2 - 1) = 2$]

$$\text{Malla ABR}_5\text{A:} \quad 15 - 10 = 5 \cdot I_1 + 10 \cdot I_3$$

$$\text{Malla ABR}_4\text{A:} \quad 10 = -10 \cdot I_3 + 4 \cdot I_2 + 6 \cdot I_2$$

– Se resuelve el sistema resultante de tres ecuaciones con tres incógnitas (I_1, I_2, I_3):

$$I_1 - I_3 - I_2 = 0$$

$$5 \cdot I_1 + 10 \cdot I_3 = 5$$

$$-10 \cdot I_3 + 10 \cdot I_2 = 10$$

Resultando:

$$I_1 = 1 \text{ A}, \quad I_2 = 1 \text{ A}, \quad I_3 = 0 \text{ A}$$

b) Balance de potencias.

La fuentes de tensión de $E = 15$ V actúan como fem y la fuente de tensión de $E = 10$ V no genera potencia ($P = E \cdot I = 10 \cdot 0 =$ W).

Potencia generada P_G = Potencia consumida P_C

$$\text{P}_\text{G} = \Sigma \text{E}_\text{i} \cdot \text{I}_\text{i} = 15 \cdot 1 = 15 \text{ W}$$

$$P_C = \Sigma E'_I \cdot I_i + i_i^2 \cdot R_i = 10 \cdot 0 + 1^2 \cdot 5 + 1^2 \cdot 4 + 1^2 \cdot 6 = 15 \text{ W}$$

Con lo que *se* demuestra que ambas potencias coinciden.

c) La ddp en bornes de la resistencia de 10 Ω.

$$V_{R10} = I_3 \cdot R_{10} = 0 \cdot 10 = 0 \text{ V}$$

d) La ddp entre los polos positivos de las fuentes de tensión de 15 V y 10 V.

$$V_{AB} = E_{15} - I_1 \cdot R_5 = 15 - 1 \cdot 5 = 10 \text{ V}$$

$$V_{CB} = E_{10} = 10 \text{ V}$$

$$V_{AC} = V_{AB} - V_{CB} = 10 - 10 = 0 \text{ V}$$

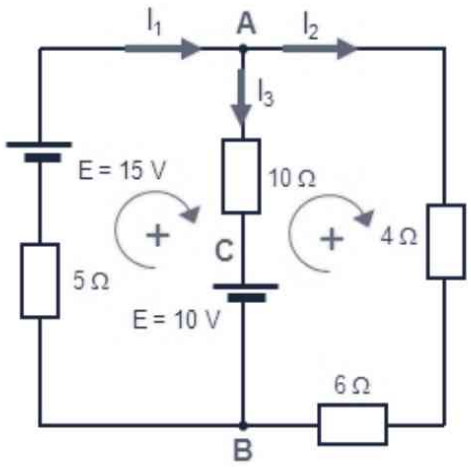


Figura 4.38. Solución del ejercicio 4.20.3

Ejercicio 4.20.4

En el circuito de la *figura 4.39:*

a) Calcular las corrientes por cada rama por el *método de las corrientes de mallas.*

b) Verificar el teorema de Telleguen.

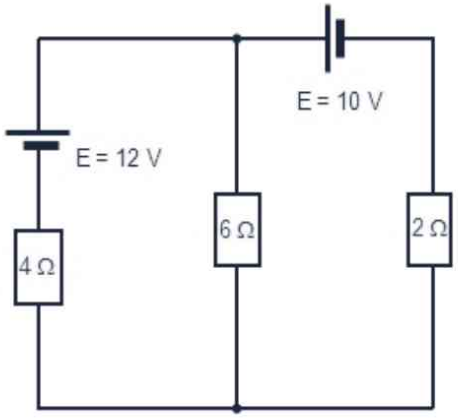


Figura 4.39. Ejercicio 4.20.4

Solución:

a) Calcular las corrientes por cada rama por el método de las corrientes de mallas. *Figura 4.40*.

- Asignación, definidas en la *figura 4.40*, de sentido a las corrientes (J_1, J_2) en las mallas.

- Elección del sentido positivo de circulación (giro de las agujas de un reloj).

- Aplicación de la 2.ª Ley de Kirchhoff (KVL) a las 2 mallas ([$q = 3 - (2 - 1) = 2$] definidas en la *figura 4.40,* obteniéndose dos ecuaciones con dos incógnitas (J_1, J_2):

  Malla ABR_4A: $12 = (4 + 6) \cdot J_1 - 6 \cdot J_2 = 10 \cdot J_1 - 6 \cdot J_2$

  Malla ABR_2A: $-10 = -6 \cdot J_1 + (6 + 2) \cdot J_2 = -6 \cdot J_1 + 8 \cdot J_2$

Resolviendo este sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas (J1, J2) resulta:

$$J_1 = 0{,}81 \text{ A y } J_2 = -0{,}63 \text{ A}$$

- Cálculo de las corrientes de ramas: las intensidades de las ramas externas coinciden con las corrientes de mallas ($I_1 = J_1$, $I_2 = J_2$) y la intensidad de la rama interna (pertenecientes a dos mallas) es la diferencia de las corrientes de mallas ($I_3 = J_1 - J_2$).

$$I_1 = J_1 = \mathbf{0{,}81\ A}$$

$$I_2 = J_2 = \mathbf{-0{,}63\ A}$$

$$I_3 = J_1 - J_2 = 0{,}81 - (-0{,}63) = \mathbf{1{,}44\ A}$$

b) Verificar el teorema de Telleguen.

$$\sum_{k=1}^{r} V_k \cdot I_k = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{BA} \cdot I_1 + V_{AB} \cdot I_3 + V_{BA} \cdot I_2 = 0$$

Teniendo en cuenta la *fórmula [3.37]* para la obtención de la ddp en bornes de una *fem*:

$$V_{AB} = E_{12} - I_1 \cdot R_4 = E_{12} - V_{R4} \quad ; \quad V_{AB} = I_3 \cdot R_6 \quad ; \quad V_{AB} = E_{10} - I_3 \cdot R_2 = E_{10} - V_{R2}$$

Teniendo en cuenta el signo de la tensión y sustituyendo se tiene:

$$\sum_{k=1}^{r} V_k \cdot I_k = 0 \quad \Rightarrow \quad (V_{R4} - E_{12}) \cdot I_1 + V_{R6} \cdot I_3 + (V_{R2} - E_{10}) \cdot I_2 = 0$$

$$\sum_{k=1}^{r} V_k \cdot I_k = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{R4} \cdot 0{,}81 - E_{12} \cdot 0{,}81 + V_{R6} \cdot 1{,}44 + V_{R2} \cdot 0{,}63 - E_{10} \cdot 0{,}63 = 0$$

$$\sum_{k=1}^{r} V_k \cdot I_k = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot 0{,}81 \cdot 0{,}81 - 12 \cdot 0{,}81 + 6 \cdot 1{,}44 1{,}44 + 2 \cdot 0{,}63 \cdot 0{,}63 - 10 \cdot 0{,}63 \approx 0$$

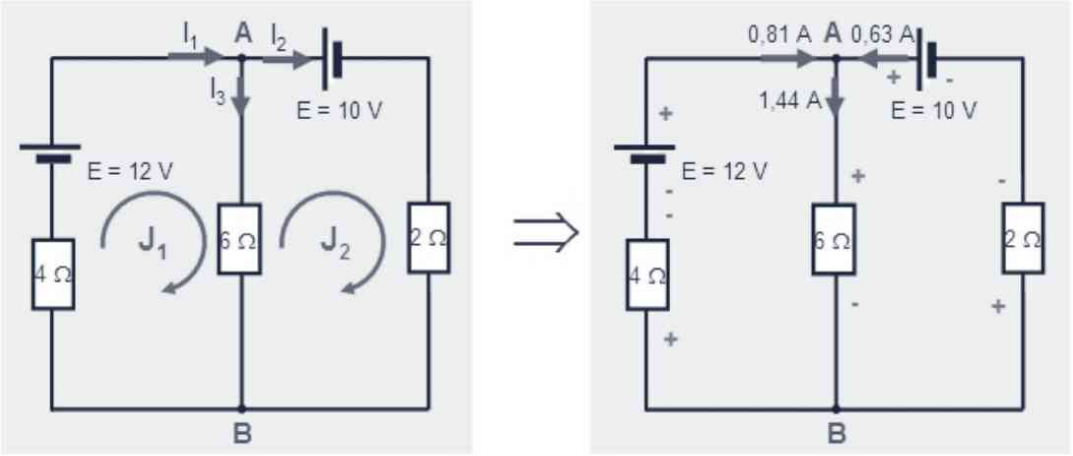


Figura 4.40. Solución del ejercicio 4.20.4

El sistema de ecuaciones anterior se puede resolver por la regla de Cramer:

$$10 \cdot J_1 - 6 \cdot J_2 = 12$$

$$-6 \cdot J_1 + 8 \cdot J_2 = -10$$

$$J_1 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -6 \\ -10 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 8 \end{vmatrix}} = 0{,}81\,\text{A}; \quad J_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 12 \\ -6 & -10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 8 \end{vmatrix}} = -0{,}63\,\text{A}$$

Ejercicio 4.20.5

En el circuito del ejercicio anterior, *figura 4.39*, calcular las corrientes por cada rama por el *método de las tensiones de los nudos.*

Solución:

1. Se sustituyen las fuentes de tensión por fuentes de intensidad equivalentes, *figura 4.41.*

2. Se elige el nudo de referencia B (tensión relativa 0 V).

3. Se asignan corrientes a cada rama y se aplica la 1.ª Ley de Kirchhoff (KCL) al nudo A:

$$(3 - I_1) + (5 - I_2) - I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 + I_2 + I_3 = 8$$

4. Se aplica la ley de Ohm para expresar la corriente en función de la tensión del nudo:

$$I_1 = \frac{V_A}{R_4} = \frac{V_A}{4}; \quad I_3 = \frac{V_A}{R_6} = \frac{V_A}{6}; \quad I_2 = \frac{V_A}{R_2} = \frac{V_A}{2}$$

5. Se resuelve el sistema de ecuaciones resultante de los pasos 3 y 4:

$$\left.\begin{aligned} I_1 + I_2 + I_3 &= 8 \\ I_1 + I_2 + I_3 &= \frac{V_A}{4} + \frac{V_A}{6} + \frac{V_A}{2} \end{aligned}\right\} \frac{V_A}{4} + \frac{V_A}{6} + \frac{V_A}{2} = V_A\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) = 0{,}91 \cdot V_A = 8 \quad \Rightarrow \quad V_A = 8{,}7\ \text{V}$$

6. Se calculan las corrientes del circuito equivalente:

$$I_1 = \frac{V_A}{R_4} = \frac{8{,}7}{4} = 2{,}2\ \text{A}; \quad I_3 = \frac{V_A}{R_6} = \frac{8{,}7}{6} = 1{,}4\ \text{A}; \quad I_2 = \frac{V_A}{R_2} = \frac{8{,}7}{2} = 4{,}3\ \text{A}$$

7. Se calculan las corrientes del circuito original:

Corriente rama $ABR_4A = 3 - I_1 = 3 - 2{,}2 =$ **0,8 A**

Corriente rama $ABR_2A = 5 - I_2 = 5 - 4{,}3 =$ **0,7 A**

Corriente rama $AR_6B = I_3 =$ **1,4 A**

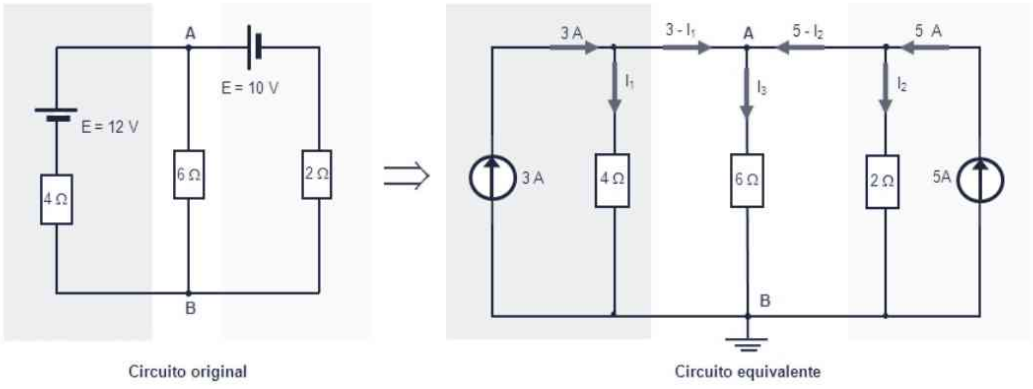


Figura 4.41. Ejercicio 4.20.5

Ejercicio 4.20.6

En el circuito del *ejercicio 4.20.4, figura 4.39*, calcular las corrientes por cada rama por el teorema de Millman.

Solución:

1. Se asignan, *figura 4.42,* corrientes a cada rama (I_1, I_2, I_3).

2. Se calcula la ddp V_{AB}:

$$V_{AB} = \frac{\sum_{}^{n} \frac{E_K}{R_K}}{\sum_{}^{n+m} \frac{1}{R_K}} = \frac{\frac{12}{4} + \frac{10}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}} = 8,7\ V$$

3. Se calculan las corrientes (I_1, I_2, I_3):

$$V_{AB} = E_{12} - I_1 \cdot R_4 \Rightarrow I_1 = \frac{E_{12} - V_{AB}}{R_4} = \frac{12 - 8,7}{4} = 0,82A$$

$$V_{AB} = E_{10} - I_2 \cdot R_2 \Rightarrow I_2 = \frac{E_{10} - V_{AB}}{R_2} = \frac{10 - 8,7}{2} = 0,65\ A$$

El sentido de la corriente I_3 en la *figura 4.42 izquierda,* implica que $V_B > V_A$, entonces:

$$V_{BA} = I_3 \cdot R_6 \Rightarrow I_3 = \frac{V_{BA}}{R_6} = \frac{-V_{AB}}{R_6} = \frac{-8,7}{6} = -1,45\ A$$

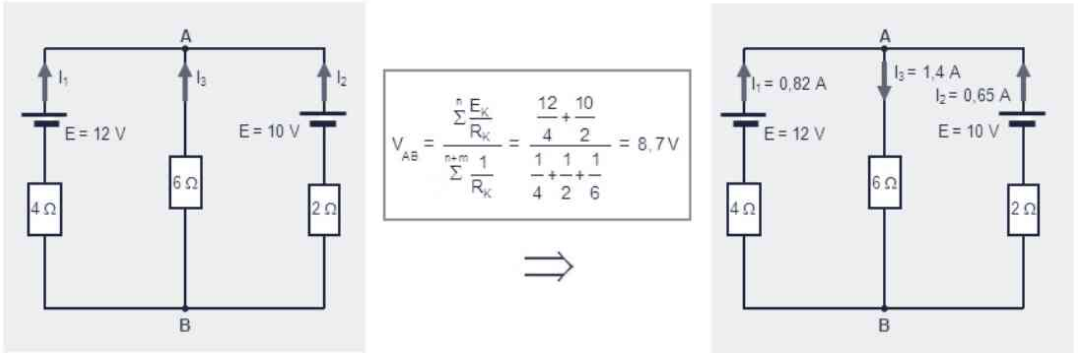


Figura 4.42. Solución del ejercicio 4.20.6

Ejercicio 4.20.7

En el circuito de la *figura 4.43*, calcular las corrientes en cada rama:

a) Por el método de las tensiones en los nudos.

b) Por el teorema de Millman.

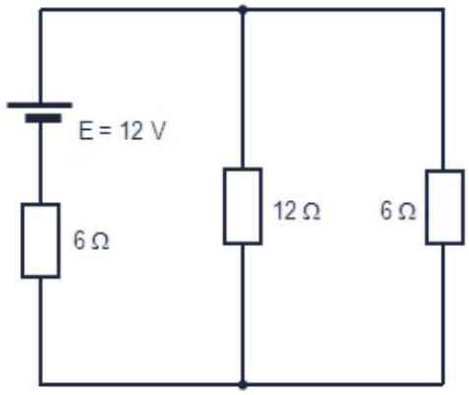


Figura 4.43. Ejercicio 4.20.7

Solución:

a) Por el método de las tensiones en los nudos. *Figura 4.44.*

- Se aplica el método, ahora, sin sustituir la fuente de tensión por fuentes de intensidad equivalentes.
- Se elige el nudo de referencia B (tensión relativa 0 V).
- Se asignan corrientes a cada rama y se aplica la 1.ª Ley de Kirchhoff (KCL) al nudo A:

$$-I_1 - I_2 - I_3 = 0 \Rightarrow I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

- Se aplica la ley de Ohm para expresar la corriente en función de la tensión del nudo:

$$V_A = E_{12} + I_1 \cdot R_6 \Rightarrow I_1 = \frac{V_A - E_{12}}{R_6} = \frac{V_A - 12}{6}; \qquad I_2 = \frac{V_A}{R_{12}} = \frac{V_A}{12}; \qquad I_3 = \frac{V_A}{R_6} = \frac{V_A}{6}$$

– Se resuelve el sistema de ecuaciones resultante de los pasos 3 y 4:

$$\left.\begin{array}{l} I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ I_1 + I_2 + I_3 = \dfrac{V_A - 12}{6} + \dfrac{V_A}{12} + \dfrac{V_A}{6} \end{array}\right\} \quad \frac{V_A - 12}{6} + \frac{V_A}{12} + \frac{V_A}{6} = 0 \Rightarrow \frac{V_A}{6} + \frac{V_A}{12} + \frac{V_A}{6} = \frac{12}{6} \Rightarrow V_A = 4{,}8\ \text{V}$$

– Se calculan las corrientes de cada rama:

$$I_1 = \frac{V_A - E_{12}}{R_6} = \frac{4{,}8 - 12}{6} = -1{,}2\ \text{A}; \qquad I_2 = \frac{V_A}{R_{12}} = \frac{4{,}8}{12} = 0{,}4\ \text{A}; \qquad I_3 = \frac{V_A}{R_6} = \frac{4{,}8}{6} = 0{,}8\ \text{A}$$

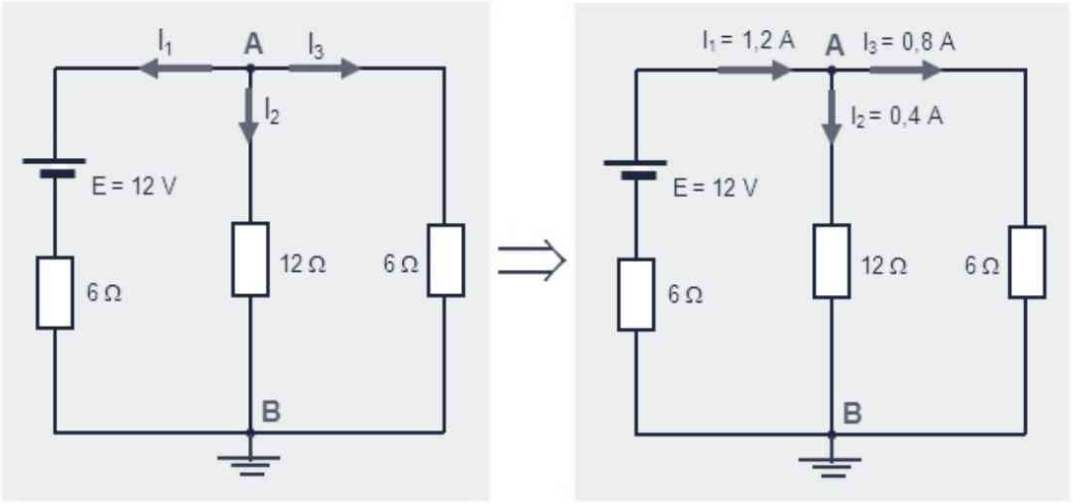


Figura 4.44. Solución del ejercicio 4.20.7. Método de tensiones en los nudos

b) Por el Teorema de Millman. *Figura 4.45.*

Se calcula la ddp V_{ab}. Como no hay fuentes de corrientes:

$$V_{ab} = \frac{\sum_{n}^{} \frac{E_K}{R_K}}{\sum_{n+m}^{} \frac{1}{R_K}} = \frac{\frac{12}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6}} = 4{,}8\ \text{V}$$

Se calcula la intensidad por cada rama:

$$V_{ab} = E_{12} + I_1 \cdot R_6 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{V_{ab} - E_{12}}{R_6} = \frac{4{,}8 - 12}{6} = -1{,}2\ \text{A}$$

$$I_2 = \frac{V_{ab}}{R_{12}} = \frac{4,8}{12} = 0,4\ A$$

$$I_3 = \frac{V_{ab}}{R_6} = \frac{4,8}{6} = 0,8\ A$$

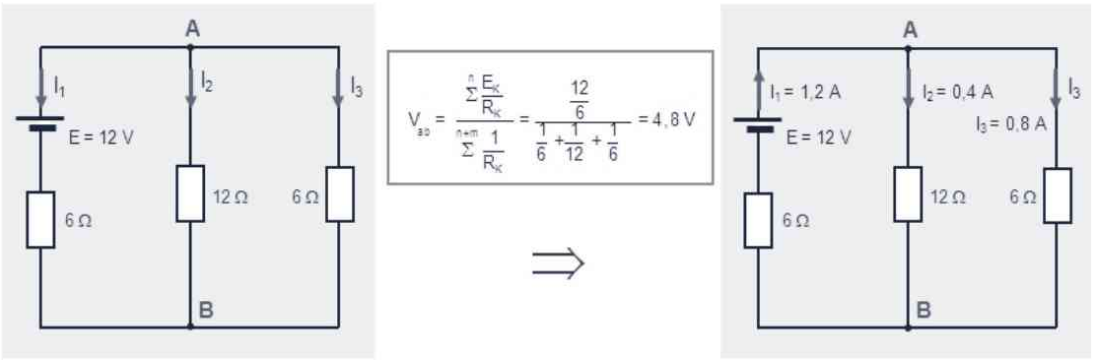


Figura 4.45. Solución del ejercicio 4.20.7. Teorema de Millman

Ejercicio 4.20.8

Por el método de los nudos, en el circuito de la *figura 4.20.8*, calcular V_{AC}, V_{BD} y las intensidades por cada rama.

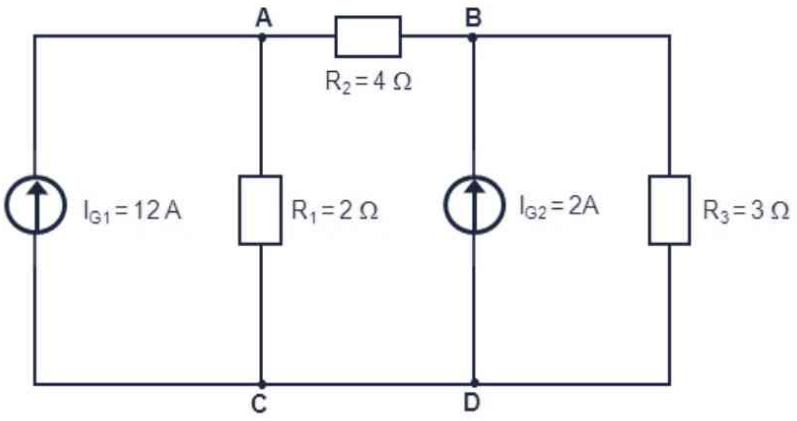


Figura 4.46. Ejercicio 4.20.8

Solución:

1. Se eligen los nudos: A, B, y C (el nudo C y el nudo D están al mismo potencial pues no existe elemento activo o pasivo entre ellos).

2. Se elige, *figura 4.47,* el nudo de referencia: nudo C ($V_C = V_D = 0$).

3. Se aplica la 1.ª Ley de Kirchhoff (KCL) a todos los nudos menos uno (el de referencia): nudo A (potencial V_A) y nudo B (potencial V_B).

$$I_{G1} - I_1 - I_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 12 - I_1 - I_2 = 0$$

$$I_{G2} + I_2 - I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 + I_2 - I_3 = 0$$

4. En las ramas donde hay resistencias se aplica la ley de Ohm para expresar la corriente en función de las tensiones de los nudos a los cuales está conectada.

$$I_1 = \frac{V_A}{R_1} = \frac{V_A}{2} \; ; \qquad I_3 = \frac{V_B}{R_3} = \frac{V_B}{3} ; \qquad I_2 = \frac{V_A - V_B}{R_2} = \frac{V_A - V_B}{4}$$

5. Se resuelve el sistema de ecuaciones resultante del paso anterior para obtener las tensiones de nudos.

$$m = n - 1 = 3 - 1 = 2 \quad \text{(ecuaciones)}$$

Sustituyendo:

$$12 - \frac{V_A}{2} - \frac{V_A - V_B}{4} = 0$$

$$2 + \frac{V_A - V_B}{4} - \frac{V_B}{3} = 0$$

Resolviendo el sistema, se tiene:

$$\mathbf{V_A = 20\ V}; \quad \mathbf{V_B = 12\ V}$$

6. Se calculan el resto de tensiones y corrientes que se pidan del circuito.

$$\mathbf{V_A - V_B} = 20 - 12 = \mathbf{8\ V}$$

$$\mathbf{I_1} = \frac{V_A}{R_1} = \frac{20}{2} = \mathbf{10\ A} \; ; \qquad \mathbf{I_3} = \frac{V_B}{R_3} = \frac{12}{3} = \mathbf{4\ A}; \qquad \mathbf{I_2} = \frac{V_A - V_B}{R_2} = \frac{8}{4} = \mathbf{2\ A}$$

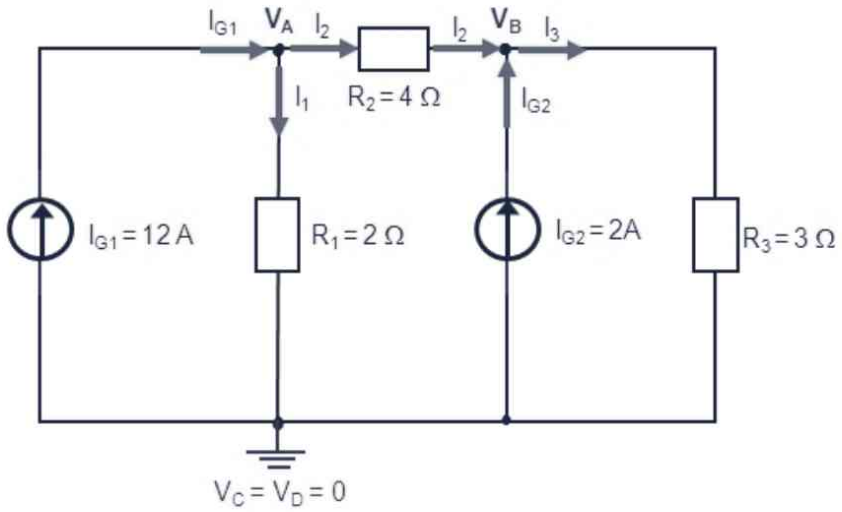


Figura 4.47. Solución del ejercicio 4.20.8

Ejercicio 4.20.9

Se tiene la red de la *figura 4.48.* Calcular*:*

a) El circuito equivalente Thévenin.

b) El circuito equivalente Norton.

c) Valor de la resistencia que se ha de colocar entre los terminales A y B para que le sea transferida la máxima potencia y valor de ésta.

d) Valor de la resistencia que se ha de colocar entre los terminales A y B para que el rendimiento de la fuente sea del 80% y valor de la potencia entregada en este caso.

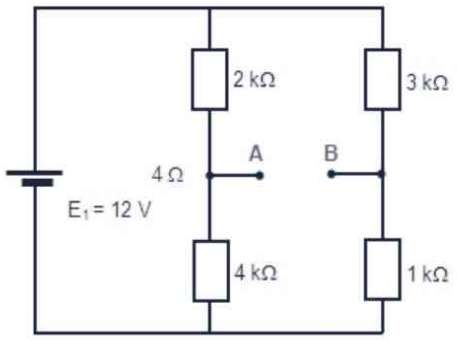


Figura 4.48. Ejercicio 4.20.9

Solución:

a) El circuito equivalente Thévenin.

Cálculo de la *resistencia Thévenin R_{Th}, figura 4.49*:

$$R_{24} = \frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_4} = \frac{4 \cdot 2}{4+2} = 1,33\ k\Omega; \qquad R_{13} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} = \frac{1 \cdot 3}{1+3} = 0,75\ k\Omega$$

$$R_{Th} = R_{12} + R_{34} = 1,33 + 0,75 = 2,1\ k\Omega$$

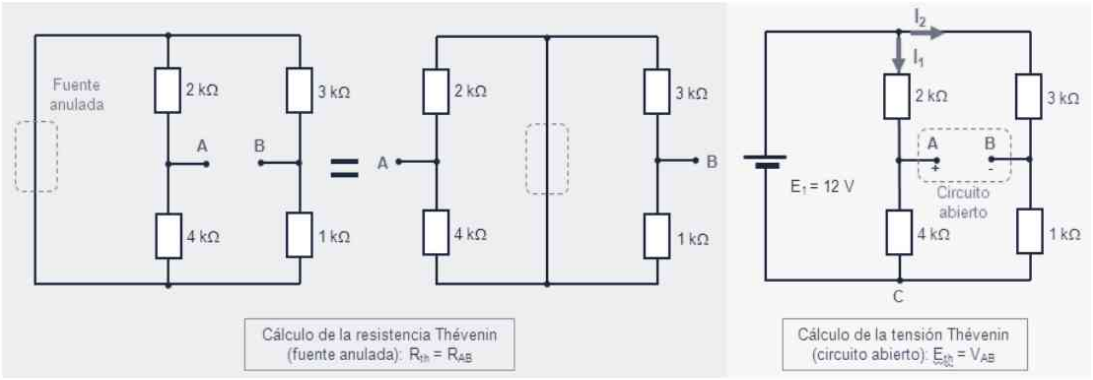


Figura 4.49. Solución del ejercicio 4.20.9. Cálculo de la resistencia Thévenin

Cálculo de la *tensión Thévenin E_{Th}*:

$$V_{BC} = I_2 \cdot R_1 = \frac{E}{R_3 + R_1} R_4 = \left(\frac{12}{3+1}\right) \cdot 1 = 3\ V; \quad V_{AC} = I_1 \cdot R_4 = \frac{E}{R_2 + R_4} R_4 = \left(\frac{12}{2+4}\right) \cdot 4 = 8\ V$$

$$E_{Th} = V_{AB} = V_{AC} - V_{BC} = 8 - 3 = 5\ V$$

b) El circuito equivalente Norton.

Como se ha visto en el *apartado 4.9* se puede hacer una transformación, *figura 4.50*, desde el circuito equivalente Thévenin al Norton, teniendo en cuenta las *fórmulas [4.15] y [4.16]:*

$$R_N = R_{Th} = 2,1\ \Omega; \quad I_N = \frac{E_{Th}}{R_{Th}} = \frac{5}{2,1} = 2,4\ \Omega$$

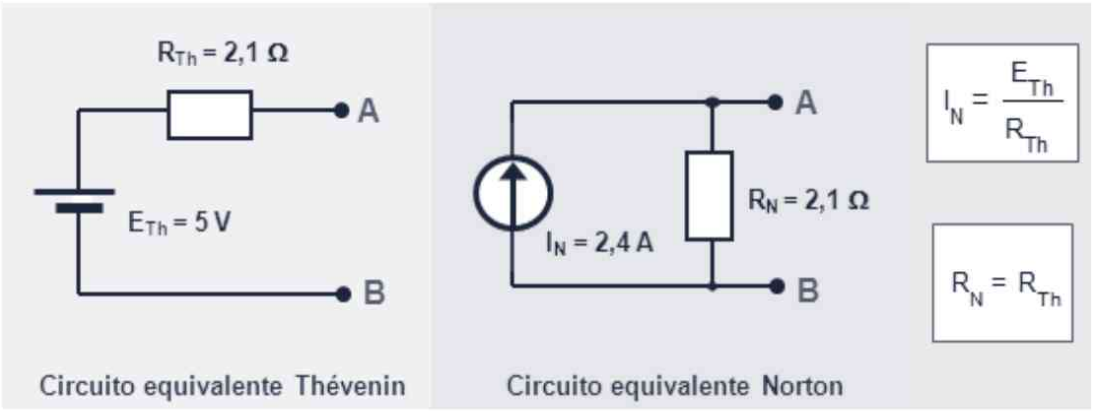


Figura 4.50. Solución del ejercicio 4.20.9. Circuito equivalente Thévenin y circuito equivalente Norton

c) R_{AB} para que le sea transferida la máxima potencia y valor de ésta.

Conforme al *teorema de Máxima Transferencia de Potencia, fórmulas [4.23] y [4.24]:*

$$R_C = R_{AB} = R_G = R_{Th} = 2{,}1\ \Omega$$

$$P_{RAB_max} = \frac{E_{Th}^2}{4 \cdot R_{AB}} = \frac{5^2}{4 \cdot 2{,}1} = 3\ W$$

d) R_{AB} para que el rendimiento de la fuente sea del 80% y valor de la potencia entregada en este caso.

Por la *fórmula [3.44]:*

$$\eta = \frac{P_{Salida}}{P_{Generada}} = \frac{R_C}{R_C + R_G} = 0{,}8 = \frac{R_C}{R_C + 2{,}1} \Rightarrow R_C = 8{,}4\ \Omega$$

$$I = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_C} = \frac{5}{2{,}1 + 8{,}4} = 0{,}47\ A \Rightarrow P_{RC} = I^2 \cdot R_C = 0{,}47^2 \cdot 8{,}4 = 1{,}8\ W$$

Ejercicio 4.20.10

Se tiene la red de la *figura 4.51.* Calcular*:*

a) El circuito equivalente Thévenin.

b) El circuito equivalente Norton.

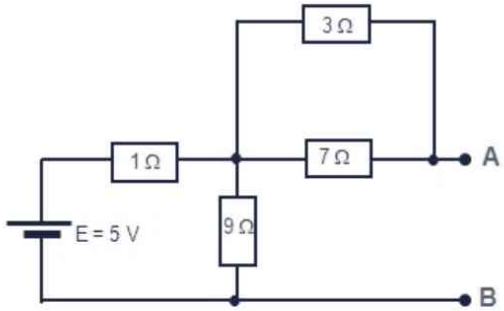


Figura 4.51. Ejercicio 4.20.10

Solución:

a) El circuito equivalente Thévenin. *Figura 4.52.*

- Se calcula la tensión V_{AB} entre los puntos A y B estando el circuito abierto (sin resistencia de carga externa al circuito) *figura 4.52.a*. Esta tensión V_{AB} corresponde a la tensión E_{TH} de la fuente de tensión equivalente.

  Como por las resistencias de 3 Ω y 7 Ω no circula corriente, se tiene:

$$I = \frac{E}{R_1 + R_9} = \frac{5}{1+9} = 0{,}5\ \text{A} \quad \Rightarrow \quad V_{AB} = I \cdot R_9 = 0{,}5 \cdot 9 = 4{,}5\ \text{V} = E_{Th}$$

- Se calcula la resistencia R_{AB} "vista" desde los terminales A y B estando la fuente de tensión anulada (cortocircuitada) *figura 4.52.b.* Esta resistencia R_{AB} corresponde a la resistencia R_{TH} en serie con la fuente de tensión equivalente.

  Se tienen dos resistencias en paralelo (3 Ω y 7 Ω) en serie con otras dos resistencias en paralelo (1 Ω y 9 Ω):

$$R_{P1} = \frac{R_3 \cdot R_7}{R_3 + R_7} = \frac{3 \cdot 7}{3+7} = 2{,}1\ \Omega \quad \text{y} \quad R_{P1} = \frac{R_3 \cdot R_7}{R_3 + R_7} = \frac{1 \cdot 9}{1+9} = 0{,}9\ \Omega$$

$$R_{AB} = R_{P1} + R_{P2} = 2{,}1 + 0{,}9 = 3\ \Omega = R_{Th}$$

- Se obtiene el circuito equivalente de Thévenin, *figura 4.52.c,* que es equivalente al circuito de la *figura 41.13.a,* desde el punto de vista de sus terminales externos A y B.

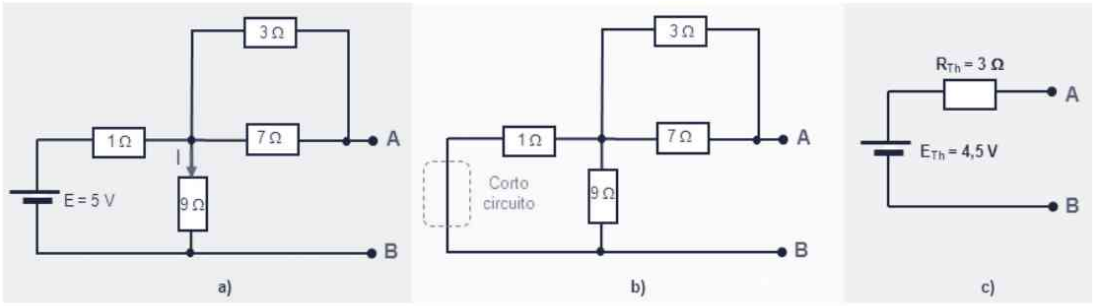


Figura 4.52. Solución del ejercicio 4.20.10. Circuito equivalente Thévenin

b) El circuito equivalente Norton. *Figura 4.53.*

Los circuitos de Thévenin y Norton son equivalentes e intercambiables:

- La resistencia de Norton = resistencia de Thévenin, *fórmula [4.15].*

$$R_N = R_{Th} = 3\ \Omega$$

- La intensidad de Norton = tensión de Thévenin / resistencia de Thévenin, *fórmula [4.16].*

$$I_N = \frac{E_{Th}}{R_{Th}} = \frac{4,5}{3} = 1,5\ A \qquad [4.16]$$

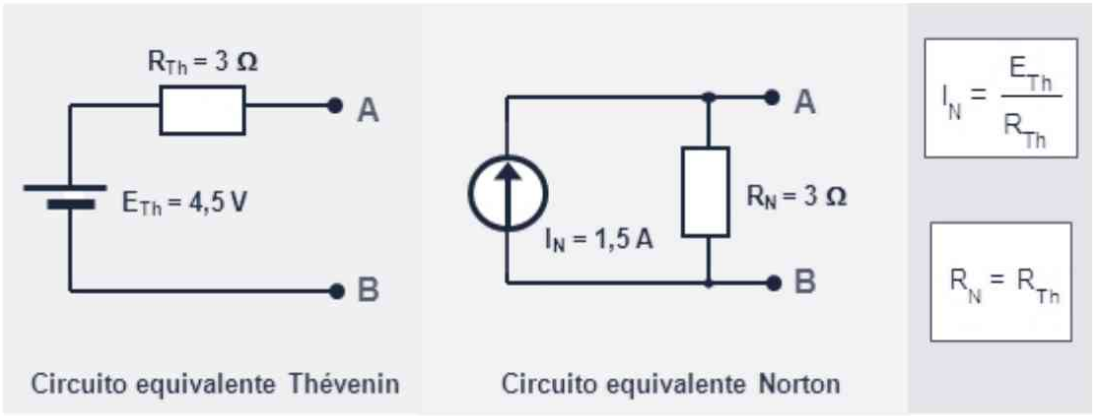


Figura 4.53. Solución del ejercicio 4.20.10. Circuito equivalente Norton

Ejercicio 4.20.11

Aplicando el teorema de superposición, calcular la tensión en bornes de la resistencia de 7 Ω y la intensidad que circula por dicha resistencia.

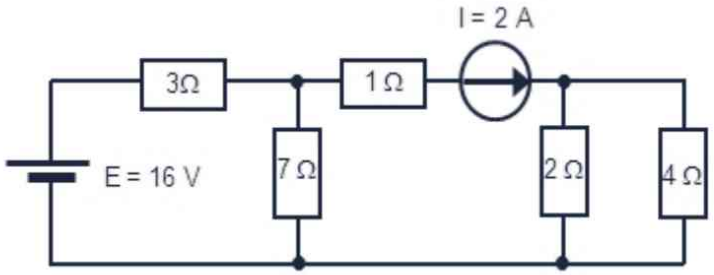


Figura 4.54. Ejercicio 4.20.11

Solución:

1. Anular todas las fuentes independientes excepto una. Para anular una fuente de tensión se sustituye por un cortocircuito y una de intensidad por un circuito abierto.

2. Se calcula la variable que se pretende determinar, ya sea una tensión o una intensidad, utilizando las leyes de Kirchhoff. Se vuelve al paso 1 para cada una de las fuentes independientes.

3. Anular la fuente de intensidad, *figura 4.55.a:* se tiene la respuesta del circuito (I_{7_a}, V_{ab_a}) debida a la fuente de tensión E = 16 V.

$$I_{7_a} = \frac{E}{R_3 + R_7} = \frac{16}{3 + 7} = 1{,}6 \text{ A} \quad \Rightarrow \quad V_{ab_a} = I_{7_a} \cdot R_7 = 1{,}6 \cdot 7 = 11{,}2 \text{ V}$$

4. Anular la fuente de tensión, *figura 4.55.b:* se tiene la respuesta del circuito (I_{7_b}, V_{ab_b}) debida a la fuente de intensidad I = 2 A.

$$V_{ba_b} = I \cdot \left(\frac{R_3 \cdot R_7}{R_3 + R_7} \right) = 2 \cdot \left(\frac{21}{3 + 7} \right) = 4{,}2 \text{ V} \quad \Rightarrow \quad V_{ab_b} = -4{,}2 \text{ V}$$

$$I_{7_b} = \frac{V_{ba_b}}{R_7} = \frac{-4{,}2}{7} = -0{,}6 \text{ A}$$

5. Se calcula la tensión o intensidad final sumando algebraicamente (respetando sus polaridades) todas las respuestas obtenidas al realizar el paso 2 para cada una de las fuentes independientes.

$$V_{R7} = V_{ab} = V_{ab_a} + V_{ab_b} = 11{,}2 - 4{,}2 = 7\ V$$

$$I_7 = I_{7_a} + I_{7_b} = 1{,}6 - 0{,}6 = 1\ A$$

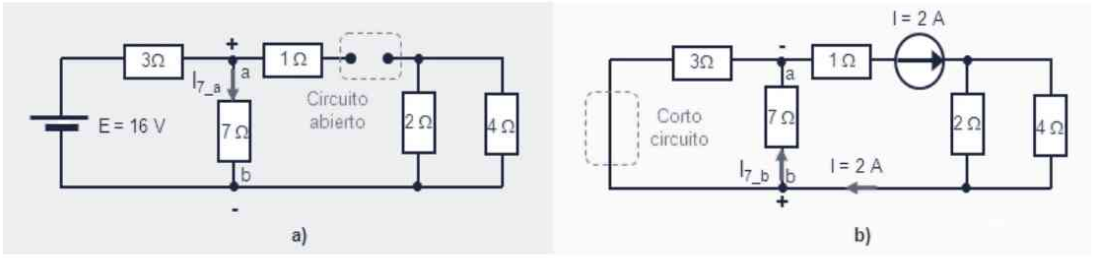


Figura 4.55. Solución del ejercicio 4.20.11

Observa:

Se debe tener cuidado de no aplicar este teorema para el cálculo de las potencias, pues éstas no son funciones lineales, sino cuadráticas, de la tensión e intensidad ($P = V^2/R = I^2 \cdot R$). Así, si en este ejercicio se quiere calcular la potencia de $R = 7\ \Omega$, no se pude calcular como la suma de la potencias de los circuitos *a y b,* sino que se he de calcular como:

$$P_{R7} = I_7^2 \cdot R_7 = 1^2 \cdot 7 = 7\ W$$

$$P_{R7} \neq P_{R7_a} + P_{R7_b}$$

Ejercicio 4.20.12

En el circuito de la *figura 4.5,* hallar la corriente por cada rama aplicando los siguientes métodos:

a) Método de las corrientes de ramas. Además verificar el Teorema de Tellegen.

b) Método de las corrientes de mallas.

c) Método de las tensiones de los nudos.

d) Teorema de Millman.

e) Teorema de superposición.

f) Teorema de Thévenin.

g) Teorema de Norton.

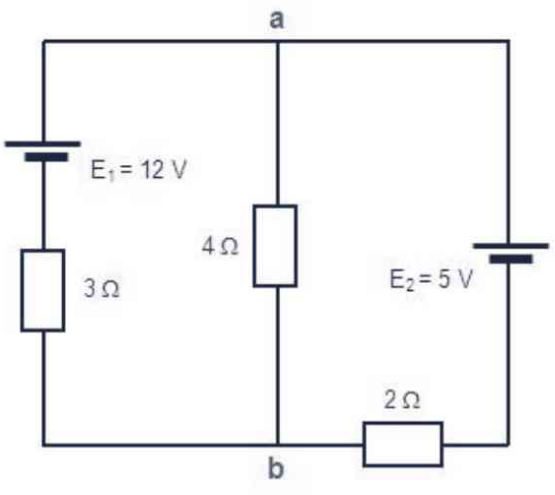


Figura 4.56. Ejercicio 4.20.12

Solución:

a) Método de las corrientes de ramas, *figura 4.57*.

Nudo a:

$$I_1 - I_3 - I_2 = 0$$

Malla aE_1ba:

$$12 = 3 \cdot I_1 + 4 \cdot I_3$$

Malla aE_2ba:

$$-5 = 2 \cdot I_2 - 4 \cdot I_3$$

Ordenando y resolviendo el sistema resultante de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 3 \cdot I_1 + 4 \cdot I_3 = 12 \\ 2 \cdot I_2 - 4 \cdot I_3 = -5 \end{cases}$$

Se obtiene:

$$\mathbf{I_1 = 2\ A};\quad \mathbf{I_2 = 0{,}5\ A};\quad \mathbf{I_3 = 1{,}5\ A}.$$

El sistema de ecuaciones anterior se puede resolver por la regla de Cramer:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 3\cdot I_1 + 0\cdot I_2 + 4\cdot I_3 = 12 \\ 0\cdot I_1 + 2\cdot I_2 - 4\cdot I_3 = -5 \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 12 & 0 & 4 \\ -5 & 2 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{20 - 24 - 48}{-6 - 12 - 8} = \frac{-52}{-26} = 2\ A\ ; \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 12 & 4 \\ 0 & -5 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}} = 0{,}5\ A\ ; \quad I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}} = 1{,}5\ A$$

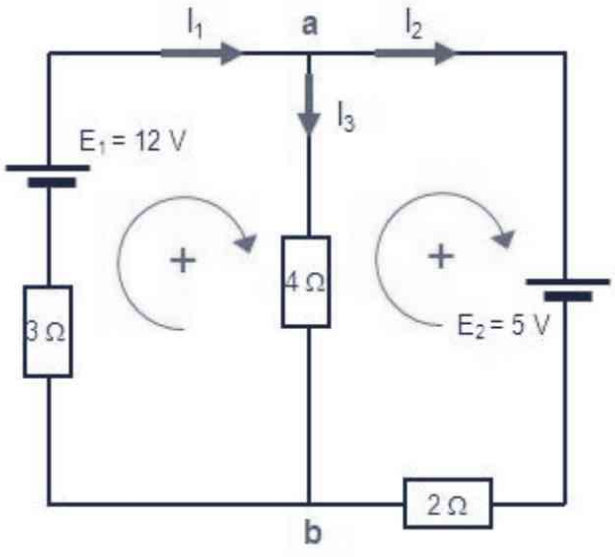


Figura 4.57. Solución del ejercicio 4.20.12. Método de las corrientes de ramas

Verificar el Teorema de Tellegen:

$$\sum_{k=1}^{r} V_k \cdot I_k = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{ba}\cdot I_1 + V_{ab}\cdot I_3 + V_{ab}\cdot I_2 = 0$$

Teniendo en cuenta la *fórmula [3.37] y [3.38]* para la obtención de la ddp en bornes de una *fem* y una *fcem*, respectivamente:

$$V_{ab} = E_{12} - I_1 \cdot R_3 = E_{12} - V_{R3} \quad ; \quad V_{ab} = I_3 \cdot R_4 \quad ; \quad V_{ab} = E_5 + I_3 \cdot R_2 = E_5 + V_{R2}$$

Teniendo en cuenta el signo de la tensión y sustituyendo se tiene:

$$\sum_{k=1}^{r} V_k \cdot I_k = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{R3} \cdot I_1 - E_{12} \cdot I_1 + V_{R4} \cdot I_3 + E_5 \cdot I_2 + V_{R2} \cdot I_2 = 0$$

$$\sum_{k=1}^{r} V_k \cdot I_k = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot 2 \cdot 2 - 12 \cdot 2 + 4 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 + 5 \cdot 0{;}5 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0$$

b) Método de las corrientes de mallas, *figura 4.58.*

Malla aE_1ba:

$$12 = (4 + 3) \cdot J_1 - 4 \cdot J_2$$

Malla aE_2ba:

$$-5 = (2 + 4) \cdot J_2 - 4 \cdot J_1$$

Ordenando el sistema resultante de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 7 \cdot J_1 - 4 \cdot J_2 = 12 \\ -4 \cdot J_1 + 6 \cdot J_2 = -5 \end{cases}$$

Se obtiene:

$$J_1 = 2 \text{ A} \text{ y } J_2 = 0{,}5 \text{ A}$$

Llamando a las corrientes de ramas*:* I_1, I_2 *e* I_3, tal como se indica en la *figura 4.58*, se tiene:

$$I_1 = J_1 = 2 \text{ A}$$

$$I_2 = J_2 = 0{,}5 \text{ A}$$

$$I_3 = J_1 - J_2 = 2 - 0{,}5 = 1{,}5 \text{ A}$$

Se han obtenido los mismos resultados que con el método anterior:

$$\mathbf{I_1 = 2\ A;\quad I_2 = 0{,}5\ A;\quad I_3 = 1{,}5\ A.}$$

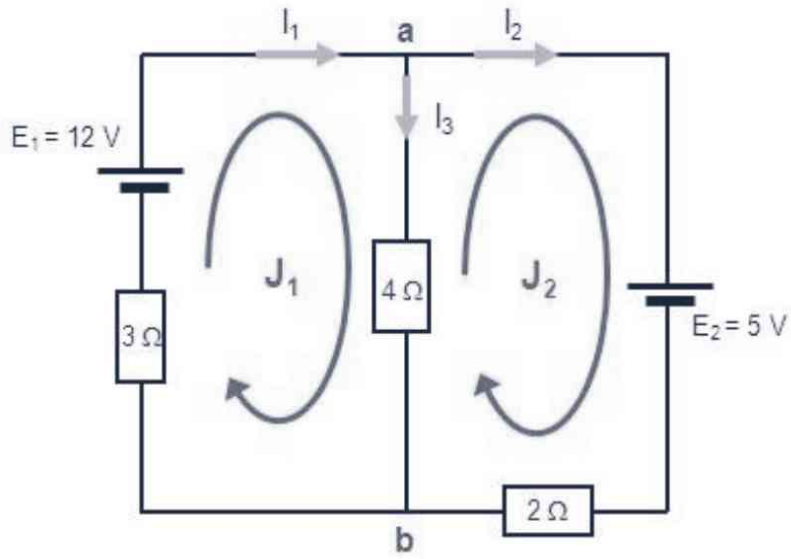


Figura 4.58. Solución del ejercicio 4.20.12. Método de las corrientes de las mallas

c) Método de las tensiones de los nudos, *figura 4.59.*

Se transforman las fuentes de tensión en fuentes de corriente:

Nudo de referencia el *b*.

Nudo *a* (KCL):

$$(4 - I_3) + (2{,}5 - I_2) - I_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_3 + I_4 + I_2 = 6{,}5$$

Ley de Ohm en cada rama:

$$I_3 = \frac{V_a}{R_3} = \frac{V_a}{3}\ ; \qquad I_4 = \frac{V_a}{R_4} = \frac{V_a}{4}; \qquad I_2 = \frac{V_a}{R_2} = \frac{V_a}{2}$$

Sumando e igualando:

$$I_3 + I_4 + I_2 = 6{,}5 = \frac{V_a}{3} + \frac{V_a}{4} + \frac{V_a}{2} = V_a \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = 1{,}08 \cdot V_a \quad \Rightarrow \quad V_a = 6\ \text{V}$$

Se calcula la intensidad por cada rama:

$$I_3 = \frac{V_a}{R_3} = \frac{6}{3} = 2\ \text{A}\ ; \qquad I_4 = \frac{V_a}{R_4} = \frac{6}{4} = 1{,}5\ \text{A}\ ; \qquad I_2 = \frac{V_a}{R_2} = \frac{6}{2} = 3\ \text{A}$$

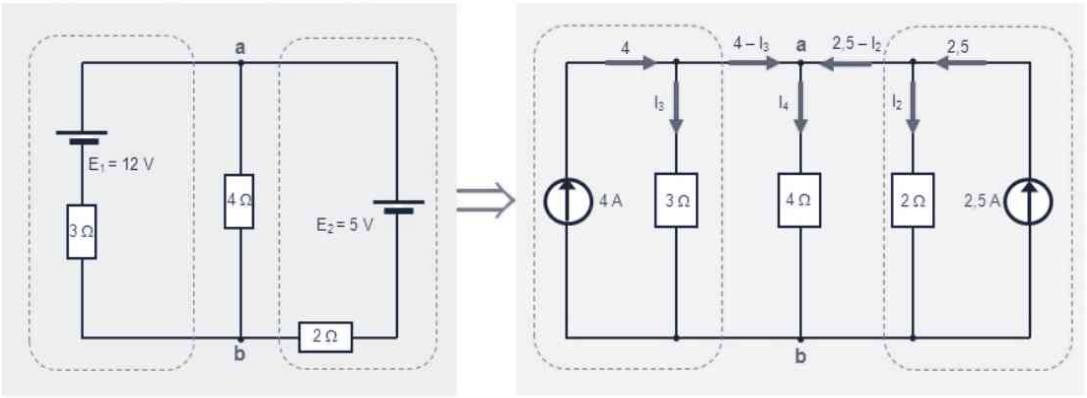


Figura 4.59. Solución del ejercicio 4.20.12. Método de las tensiones de los nudos

Del esquema equivalente de la *figura 4.59.b*, se tiene que las dos corrientes que llegan a la resistencia de 4 Ω son la procedente de la rama izquierda que tiene un valor de 2 A [$(4 - I_3) = 4 - 2 = 2$] y la procedente de la rama derecha de –0,5 A [$(2{,}5 - I_2) = 2{,}5 - 3 = -0{,}5$]. Se han obtenido los mismos resultados que con los métodos anteriores:

$I_{\text{rama izquierda}} = 2$ A (de *b* hacia *a*); **$I_{\text{rama central}} = 1{,}5$ A** (de *a* hacia *b*); **$I_{\text{rama derecha}} = 0{,}5$ A** (de *a* hacia *b*)

d) Teorema de Millman, *figura 4.60.*

Se calcula la ddp V_{ab}. Como no hay fuentes de corrientes:

$$V_{ab} = \frac{\sum_{}^{n} \frac{E_K}{R_K}}{\sum_{}^{n+m} \frac{1}{R_K}} = \frac{\frac{12}{3} + \frac{5}{2}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = 6\ \text{V}$$

Se calcula la intensidad por cada rama:

$$V_{ab} = E_1 - I_1 \cdot R_3 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{E_1 - V_{ab}}{R_3} = \frac{12 - 6}{3} = 2\ A$$

$$I_3 = \frac{V_{ab}}{R_4} = \frac{6}{4} = 1{,}5\ A$$

$$V_{ab} = E_2 + I_2 \cdot R_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{V_{ab} - E_2}{R_2} = \frac{6 - 5}{2} = 0{,}5\ A$$

Se han obtenido los mismos resultados que con los métodos anteriores:

$$\mathbf{I_1 = 2\ A;\quad I_2 = 0{,}5\ A;\quad I_3 = 1{,}5\ A.}$$

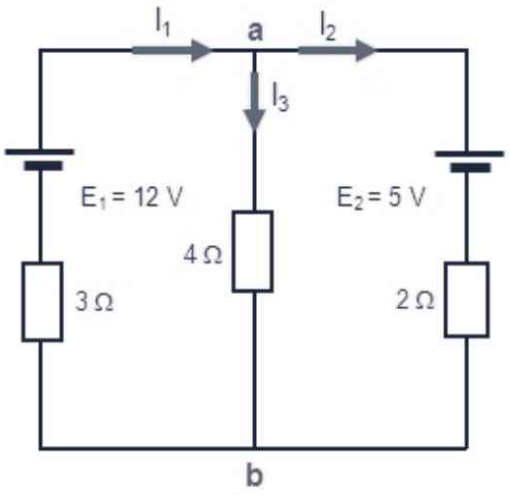


Figura 4.60. Solución del ejercicio 4.20.12. Teorema de Millman

e) Teorema de superposición, *figura 4.61.*

Dos fuentes de tensión implica dos circuitos, *figura 4.61.b y figura 4.61.c,* cada uno de ellos con una fuente anulada.

– Intensidades en cada circuito.

Circuito de la *figura 4.61b* (circuito *b*):

Por el método de las corrientes de ramas:

$$I_{1b} - I_{3b} - I_{2b} = 0$$

$$0 = 3 \cdot I_{1b} + 4 \cdot I_{3b}$$

$$-5 = 2 \cdot I_{2b} - 4 \cdot I_{b3}$$

Resolviendo el sistema, se obtiene:

$$I_{1b} = -0{,}7 \text{ A}; \quad I_{2b} = -1{,}3 \text{ A}; \quad I_{3b} = 0{,}6 \text{ A}$$

Circuito de la *figura 4.61* (circuito *c*):

Por el método de las corrientes de ramas:

$$I_{1c} - I_{3c} - I_{2c} = 0$$

$$12 = 3 \cdot I_{1c} + 4 \cdot I_{3c}$$

$$0 = 2 \cdot I_{2c} - 4 \cdot I_{3c}$$

Resolviendo el sistema, se obtiene:

$$I_{1c} = 2{,}7 \text{ A}; \quad I_{2c} = 1{,}8 \text{ A}; \quad I_{3c} = 0{,}9 \text{ A}$$

– Se obtienen las intensidades del circuito original sumando algebraicamente las intensidades de cada circuito anterior (circuitos *b* y *c*):

$$\mathbf{I_1} = I_{1b} + I_{1c} = -0{,}7 + 2{,}7 = \mathbf{2\ A}$$

$$\mathbf{I_2} = I_{2b} + I_{2c} = -1{,}3 + 1{,}8 = \mathbf{0{,}5\ A}$$

$$\mathbf{I_3} = I_{3b} + I_{3c} = 0{,}6 + 0{,}9 = \mathbf{1{,}5\ A}$$

Se han obtenido los mismos resultados que con los método anteriores.

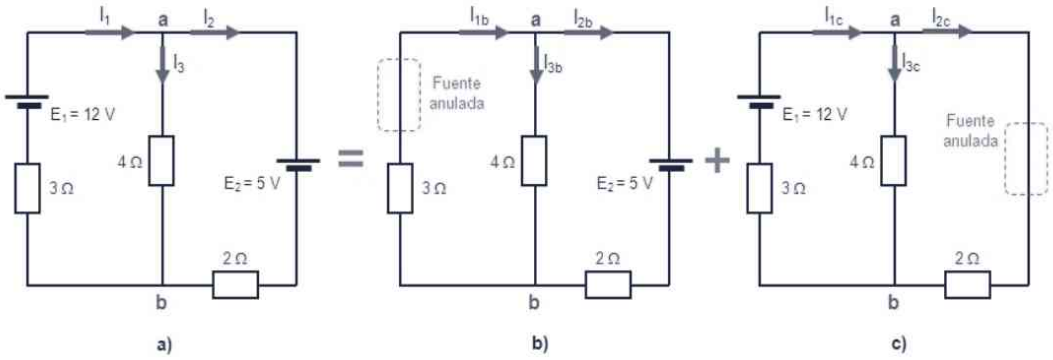


Figura 4.61. Solución del ejercicio 4.20.12. Teorema de superposición

f) Teorema de Thévenin, *figura 4.62.*

Se considera a la resistencia de 4 Ω la resistencia de carga, *figura 4.62.a*.

Una vez eliminada la resistencia de carga (4 Ω), se calcula la ddp entre los puntos *a* y *b, figura 4.62.b,* a través de la malla aE_1ba:

$$I = \frac{\Sigma E}{\Sigma R} = \frac{12 - 5}{2 + 3} = 1{,}4 \text{ A}$$

$$V_{ab} = E_1 - I \cdot R_3 = 12 - 1{,}4 \cdot 3 = 7{,}8 \text{ V} \quad \Rightarrow \quad E_{Th} = V_{ab} = 7{,}8 \text{ V}$$

Se calcula la resistencia vista desde *a* y *b, figura 4.62.c*:

$$R_{Th} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 + R_2} = \frac{2 \cdot 3}{2 + 3} = 1{,}2 \ \Omega$$

Se tiene el circuito equivalente, *figura 4.62.d:*

$$I_4 = \frac{\Sigma E}{\Sigma R} = \frac{7{,}8}{1{,}2 + 4} = 1{,}5 \text{ A}$$

La ddp V_{ab} en la resistencia de 4 Ω:

$$V_{ab} = I_4 \cdot R_4 = 1{,}5 \cdot 4 = 6 \text{ V}$$

Intensidad I_1 (sentido horario) por la rama izquierda del circuito original:

$$V_{ab} = E_1 - I_1 \cdot R_3 \Rightarrow 6 = 12 - I_1 \cdot 3 \Rightarrow I_1 = 2\ A$$

Intensidad I_2 (sentido horario) por la rama derecha del circuito original:

$$V_{ab} = E_2 + I_2 \cdot R_2 \Rightarrow 6 = 5 + I_2 \cdot 2 \Rightarrow I_2 = 0{,}5\ A$$

Que son los mismos resultados que los obtenidos con los métodos anteriores:

$I_{\text{rama izquierda}}$ **= 2 A** (de *b* hacia *a*); $I_{\text{rama central}}$ **=1,5 A** (de *a* hacia *b*); $I_{\text{rama derecha}}$ **= 0,5 A** (de *a* hacia *b*)

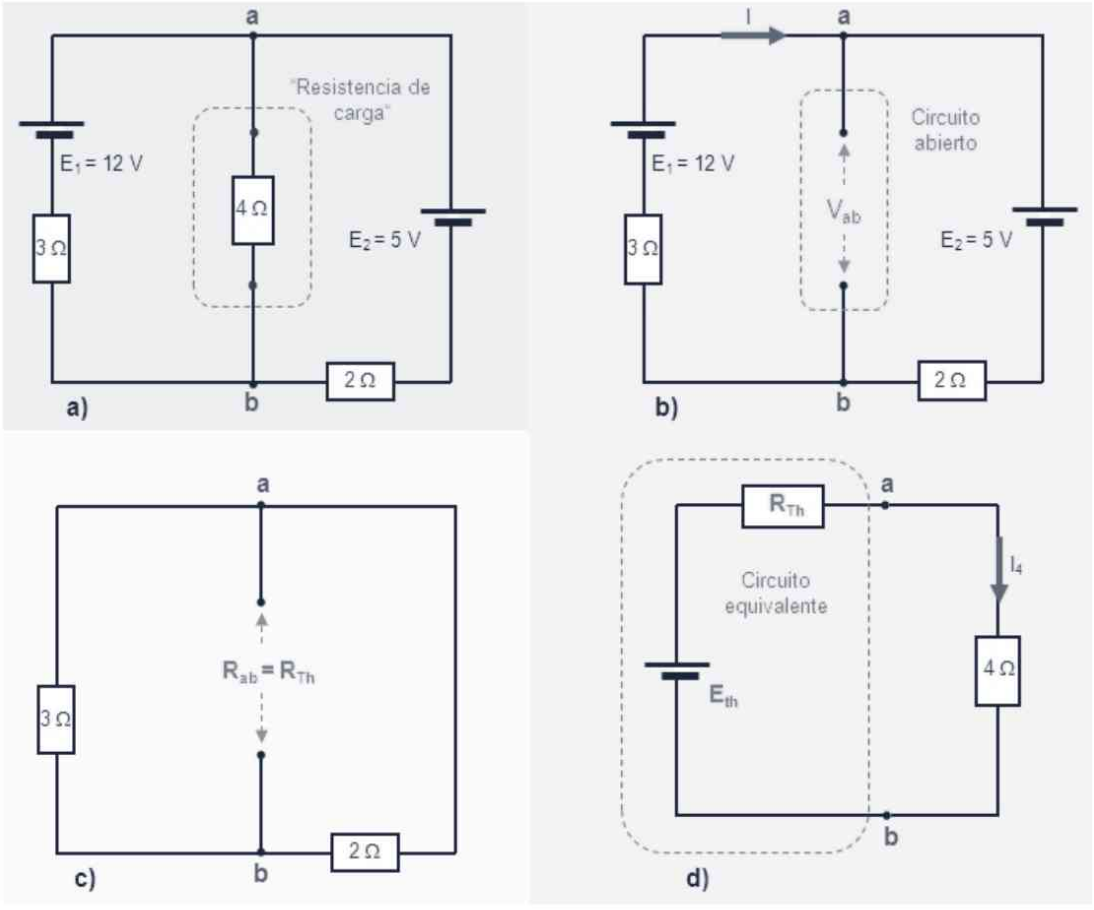


Figura 4.62. Solución del ejercicio 4.20.12. Teorema de Thévenin

g) Teorema de Norton, *figura 4.63*.

Se considera a la resistencia de 4 Ω la resistencia de carga, *figura 4.63.a*.

Se calcula la intensidad de cortocircuito entre los puntos *a* y *b, figura 4.63.b*:

Como no existe resistencia entre los puntos *a* y *b* se tiene que $V_{ab} = 0$, entonces:

$$I_1 = \frac{\Sigma E}{\Sigma R} = \frac{12}{3} = 4\ A; \quad I_2 = \frac{\Sigma E}{\Sigma R} = \frac{5}{2} = 2{,}5\ A; \quad I_{ab} = I_N = I_1 + I_2 = 4 + 2{,}5 = 6{,}5\ A$$

Se calcula la resistencia vista desde *a* y *b, figura 4.63.c*:

$$R_N = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2 \cdot 3}{2 + 3} = 1{,}2\ \Omega$$

Se tiene el circuito equivalente, *figura 4.63.d:*

$$R_E = \frac{R_N \cdot R_4}{R_N + R_4} = \frac{1{,}2 \cdot 4}{1{,}2 + 4} = 0{,}92\ \Omega$$

$$V_{ab} = I_N \cdot R_E = 6{,}5 \cdot 0{,}92 = 5{,}98\ V$$

$$I_4 = \frac{V_{ab}}{R_4} = \frac{5{,}98}{4} = 1{,}49\ A$$

Las intensidades por las ramas izquierda y derecha se obtienen tal como se hizo en el método de Thévenin obteniéndose los mismos resultados que allí y que en los métodos anteriores.

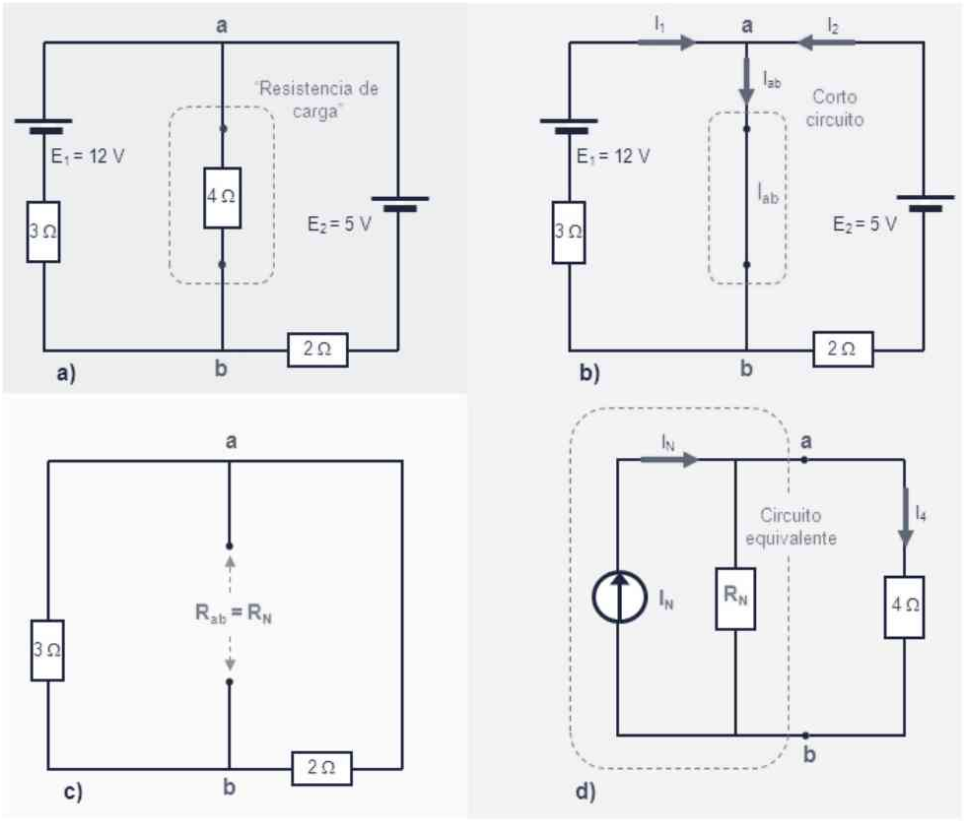


Figura 4.63. Solución del ejercicio 4.20.12. Teorema de Norton

Ejercicio 4.20.13

En el circuito de la *figura 4.64* calcular la intensidad que circula por la resistencia de 30 Ω usando el teorema de sustitución.

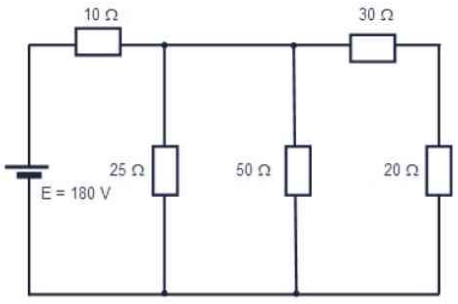


Figura 4.64. Ejercicio 4.20.13

Solución:

Se sustituirán, *figura 4.65*, las resistencias de 25 Ω y de 50 Ω por una rama conteniendo una fuente de tensión E_{ab}.

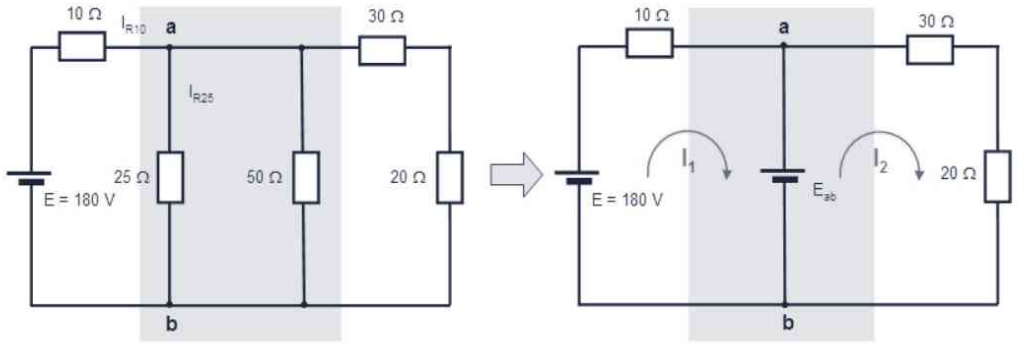


Figura 4.65. Solución del ejercicio 4.20.13. Aplicación del teorema de sustitución

Cálculo de la resistencia equivalente del conjunto R_{E4}, *figura 4.66*, de la intensidad por R_{10} y de la ddp V_{ab}, *figura 4.65:*

$$R_{E4} = 22{,}5\ \Omega; \qquad I_{R10} = \frac{E}{R_{E4}} = \frac{180}{22{,}5} = 8\ A\ ; \qquad V_{ab} = E - I \cdot R_{10} = 180 - 8 \cdot 10 = 100\ V = E_{ab}$$

Aplicando la 2.ª Ley de Kirchhoff a la malla $aR_{20}ba$, *figura 4.65 derecha:*

$$E_{ab} = (R_{30} + R_{20}) \cdot I_2 \quad \Rightarrow \quad 100 = (30 + 20) \cdot I_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = 5\ A$$

Por la resistencia de de 30 Ω circula una intensidad de 5 A.

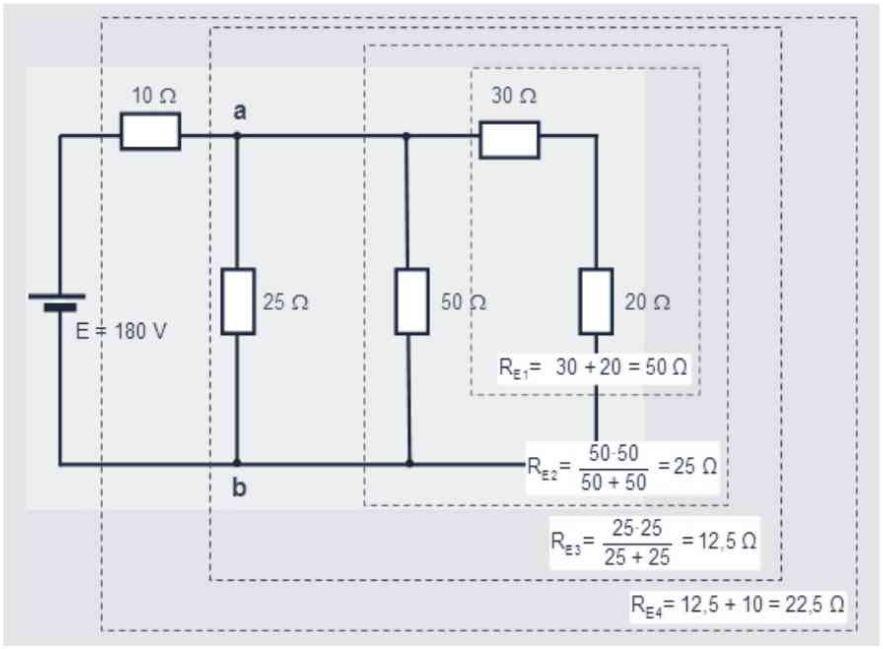


Figura 4.66. Solución del ejercicio 4.20.13. Resistencias equivalentes

Ejercicio 4.20.14

Calcular la resistencia total de la red de la *figura 4.67.*

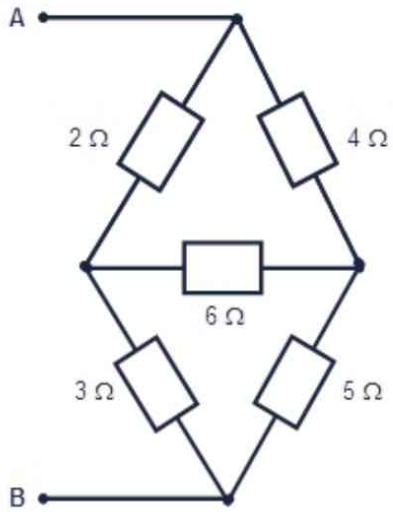


Figura 4.67. Ejercicio 4.20.14

Solución:

Transformación triángulo-estrella de las resistencias resaltadas en la *figura 4.68:*

$$R_u = \frac{R_b \cdot R_c}{R_a + R_b + R_c} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6 + 5} = 1{,}3\ \Omega$$

$$R_V = \frac{R_c \cdot R_a}{R_a + R_b + R_c} = \frac{5 \cdot 6}{3 + 6 + 5} = 1{,}1\ \Omega$$

$$R_W = \frac{R_a \cdot R_b}{R_a + R_b + R_c} = \frac{3 \cdot 5}{3 + 6 + 5} = 1\ \Omega$$

Acoplamiento en paralelo de dos resistencias en serie (2 Ω y 1,3 Ω) con dos resistencias en serie (4 Ω y 1,1 Ω) y el conjunto acoplado en serie con una resistencia (1 Ω).

$$R_{AB} = \frac{(2 + 1{,}3) \cdot (4 + 1{,}1)}{(2 + 1{,}3) + (4 + 1{,}1)} + 1 = 3\ \Omega$$

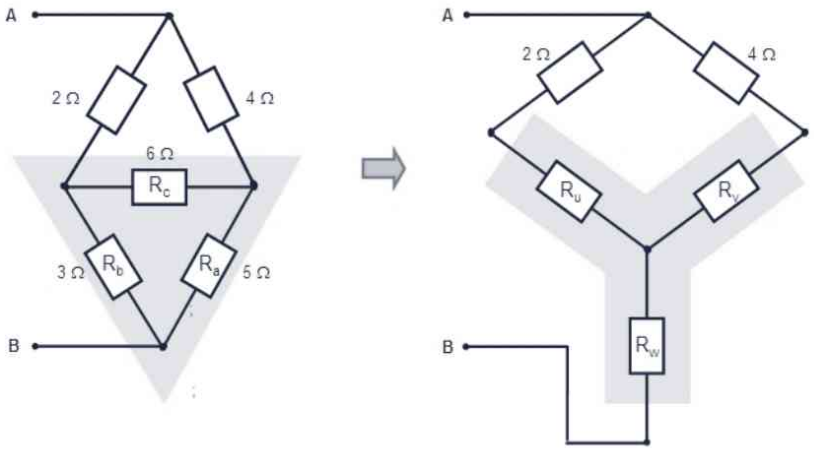


Figura 4.68. Solución del ejercicio 4.20.14. Teorema de Kennelly

Ejercicio 4.20.15

En la red de la *figura 4.69*, verificar el *teorema de reciprocidad,* comprobando que la corriente por la resistencia de 2 Ω es la misma que la que circula por la resistencia de 3 Ω, si la fuente de tensión *E* se quita de donde está y se coloca en la rama de la resistencia de 2 Ω.

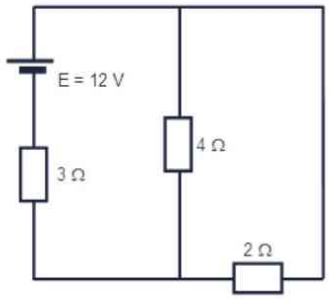


Figura 4.69. Ejercicio 4.20.15

Solución:

Se calcula la intensidad I_{R2} del circuito original empleando el método de las *corrientes de mallas, figura 4.70.a*:

$$\left.\begin{aligned} 12 &= (3+4)\cdot I_1 - 4\cdot I_2 \\ 0 &= -4\cdot I_1 + (4+2)\cdot I_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad I_1 = 2{,}7\ \text{A};\ I_2 = I_{R2} = 1{,}8\ \text{A}$$

Se calcula la intensidad I_{R3} del circuito modificado empleando el método de las *corrientes de mallas, figura 4.70.b*:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= (3+4)\cdot I_1 - 4\cdot I_2 \\ 12 &= -4\cdot I_1 + (4+2)\cdot I_2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad I_1 = I_{R3} = 1{,}8\ \text{A};\ I_2 = 2{,}7\ \text{A}$$

Se comprueba que:

$$I_{R2} = I_{R3} = 1{,}8\ \text{A}.$$

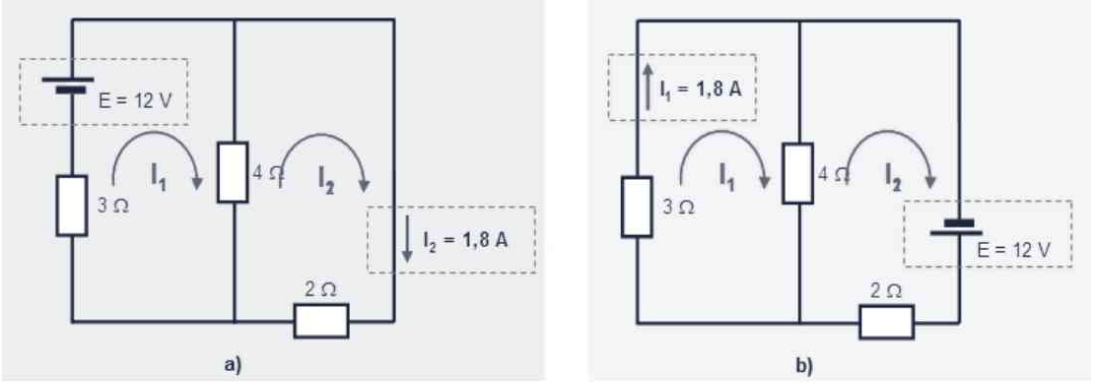


Figura 4.70. Solución del ejercicio 4.20.15

Ejercicio 4.20.16

Un circuito serie RC formado por un condensador de 10 μF y una resistencia de 2 MΩ se conecta a una tensión de 120 V. Calcular:

a) Carga del condensador al cabo de 0,2 s, 2 s y 100 s después de haber conectado el circuito. Carga máxima del condensador.

b) Intensidad de la corriente para esos mismos tiempos. Intensidad máxima.

c) ¿Qué tiempo será necesario para que el condensador adquiera su carga final si la intensidad de la corriente de carga fuese en todo momento igual a la inicial? Comparar este tiempo con la constante de tiempo τ del circuito.

Solución:

a) Carga del condensador al cabo de 0,5 s, 2 s y 100 s después de haber conectado el circuito.

Como se puede conocer la tensión en cada momento, *fórmula [4.29],* se tiene:

$$V_C = E\cdot(1 - e^{-\frac{t}{R\cdot C}}) \quad \Rightarrow \quad Q = C\cdot V_C = C\cdot E\cdot(1 - e^{-\frac{t}{R\cdot C}})$$

$$\tau = R\cdot C = 2\cdot 10^{6}\cdot 10\cdot 10^{-6} = 20 \text{ s}$$

Para $t = 0{,}2$ s $\Rightarrow$ $Q = C\cdot V_C = 10\cdot 10^{-6}\cdot 120\cdot(1 - e^{-\frac{0{,}5}{20}}) = 11{,}9\cdot 10^{-6} = 11{,}9\ \mu C$

Para $t = 2$ s $\Rightarrow$ $Q = C\cdot V_C = 10\cdot 10^{-6}\cdot 120\cdot(1 - e^{-\frac{2}{20}}) = 114{,}2\cdot 10^{-6} = 114{,}2\ \mu C$

Para $t = 100$ s $\Rightarrow$ $Q = C\cdot V_C = 10\cdot 10^{-6}\cdot 120\cdot(1 - e^{-\frac{100}{20}}) \cong 1.200\cdot 10^{-6} = 1.200\ \mu C$

Carga máxima, se produce después del periodo transitorio:

$$Q = C\cdot E = 10\cdot 10^{-6}\cdot 120 = 1.200\cdot 10^{-6} = 1.200\ \mu C$$

Nótese que para un tiempo de $5 \cdot \tau$ ($5 \cdot \tau = 5 \cdot 20 = 100$ s) el condensador está cargado, tal como se ha explicado en el *apartado 4.17.*

b) Intensidad de la corriente para esos mismos tiempos. Intensidad máxima.

Aplicando la *fórmula [4.31],* se tiene:

Para $t = 0{,}2$ s $\Rightarrow$ $I = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{R\cdot C}} = \frac{120}{2\cdot 10^{6}} e^{-\frac{0{,}2}{20}} = 59{,}4\cdot 10^{-6}$ A

Para $t = 2$ s $\Rightarrow$ $I = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{R\cdot C}} = \frac{120}{2\cdot 10^{6}} e^{-\frac{2}{20}} = 54{,}3\cdot 10^{-6}$ A

Para $t = 200$ s $\Rightarrow$ $I = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{R\cdot C}} = \frac{120}{2\cdot 10^{6}} e^{-\frac{200}{20}} \cong 0$ A

Intensidad máxima, se produce en el instante de la conexión:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{120}{2\cdot 10^{-6}} = 60\cdot 10^{-6} \text{ A}$$

c) ¿Qué tiempo será necesario para que el condensador adquiera su carga final si la intensidad de la corriente de carga fuese en todo momento igual a la inicial? Comparar este tiempo con la constante de tiempo τ del circuito.

La carga final del condensador es $Q = 1.200\ \mu C$. La intensidad inicial es $I = 60 \cdot 10^{-6}$ A. Por tanto, si esta intensidad permaneciera constante se necesitaría para la carga total un tiempo de:

$$t = \frac{Q}{I} = \frac{1.200 \cdot 10^{-6}}{60 \cdot 10^{-6}} = 20\ s$$

Este tiempo coincide con la constante de tiempo del circuito, $\tau = 20$ s, pues τ, por definición, equivale al tiempo que el condensador tardaría en descargarse de continuar en todo momento la *pendiente inicial* de la intensidad (lo que supondría una descarga lineal), en este caso es una intensidad de $60 \cdot 10^{-6}$ A.

Ejercicio 4.20.17

Un circuito RL en serie, con $R = 100\ \Omega$ y $L = 20$ henrios se conecta a una ddp de 120 V. Calcular:

a) Para el instante inicial, intensidad, tensión en bornes de la bobina y tensión en bornes de la resistencia.

b) Pasados 2 s, intensidad, tensión en bornes de la bobina y tensión en bornes de la resistencia.

c) En el régimen permanente, intensidad, tensión en bornes de la bobina y tensión en bornes de la resistencia.

Solución:

Constante de tiempo por la *fórmula [4.42]:*

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{20}{100} = 0,2\ s$$

a) Para el instante inicial ($t = 0$), intensidad, tensión en bornes de la bobina y tensión en bornes de la resistencia.

La intensidad por la *fórmula [4.41]:*

$$I = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{120}{100}(1 - e^{-\frac{0}{0,2}}) = 0\ A$$

La tensión en bornes de la bobina por la *fórmula [4.44]:*

$$V_L = E \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 120 \cdot e^{-\frac{0}{0,2}} = 120\ V$$

La tensión en bornes de la resistencia por la *fórmula [4.43]:*

$$V_R = E \cdot (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = E \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 120 \cdot (1 - e^{-\frac{0}{0,2}}) = 0\ V$$

b) Pasados 2 s, intensidad, tensión en bornes de la bobina y tensión en bornes de la resistencia.

$$I = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{120}{100}(1 - e^{-\frac{2}{0,2}}) = 1,2\ A$$

$$V_L = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 120 \cdot e^{-\frac{2}{0,2}} = 0\ V$$

$$V_R = E \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 120 \cdot (1 - e^{-\frac{2}{0,2}}) = 120\ V$$

c) En el régimen permanente, intensidad, tensión en bornes de la bobina y tensión en bornes de la resistencia.

$$I = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{120}{100}(1 - e^{-\frac{\infty}{0,2}}) = 1,2\ A$$

Nótese que, en el régimen permanente, la corriente es constante ($\Delta I/\Delta I = 0$) y por tanto $L = 0$, de donde, $I = V/R = 120/100 = 1,2$ A.

$$V_L = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 120 \cdot e^{-\frac{\infty}{0,2}} = 0\ V$$

$$V_R = E \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 120 \cdot (1 - e^{-\frac{\infty}{0,2}}) = 120\ V$$

Estos valores coinciden con los que se obtienen si el tiempo en alcanzar el régimen permanente teórico ($t = \infty$) se sustituye por el tiempo práctico ($t = 5 \cdot \tau = 5 \cdot 0{,}2 = 1$ s):

$$I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{120}{100}\left(1 - e^{-\frac{1}{0{,}2}}\right) = 1{,}2\ \text{A}$$

Obsérvese que en todo momento se cumple, *fórmula [4.38]:*

$$E = 120 = V_R + V_L$$

Capítulo 5

ELECTROMAGNETISMO: FUENTES DE CAMPO MAGNÉTICO, FUERZAS ELECTROMAGNÉTICAS, MATERIALES MAGNÉTICOS

Objetivos:

- Entender los efectos de los campos magnéticos y electromagnéticos.
- Relacionar las magnitudes fundamentales, y sus unidades, de un campo magnético.
- Determinar la relación existente entre corrientes eléctricas y campos magnéticos.
- Determinar las fuerzas que se producen en las corrientes eléctricas que están situadas en un campo magnético.
- Interpretar las curvas de magnetización y el ciclo de histéresis de los materiales.
- Exponer situaciones observables que ayuden a entender los contenidos del capítulo.
- Resolver ejercicios y problemas con contenidos propios del capítulo.

5.1 ELECTROMAGNETISMO. INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

Los fenómenos magnéticos fueron conocidos por los antiguos griegos, observados por primera vez en la ciudad de Magnesia, de donde deriva el término de magnetismo. En dicha ciudad abundaba una piedra imán, magnetita (Fe_3O_4), capaz de atraer objetos de hierro y de comunicarles por contacto un poder similar, *figura 5.1*.

Figura 5.1. Diferentes muestras de magnetita

Más tarde, en el siglo I, se descubre en oriente, probablemente en China, la brújula, y se utiliza para la orientación en la navegación (aprovechando la propiedad que tiene una aguja imantada, como la de la brújula, de orientarse en el campo magnético terrestre). Su uso en la orientación marítima comenzó en occidente en el siglo X.

En el siglo XIII el francés P. Peregrinus de Maricourt realiza experimentos con materiales magnéticos y hace una descripción detallada de la brújula como instrumento de navegación.

En el siglo XVII el científico inglés W. Gilbert (1544-1603) atribuye a la tierra propiedades magnéticas, comportándose ésta como un enorme imán, explicando la atracción que ejercen los polos terrestres sobre los extremos de una aguja imantada, descubriendo que, cada imán tiene dos *polos* (zona de máxima concentración de las propiedades magnéticas), el norte (N) y el sur (S), que se dirigen hacia los respectivos polos terrestres (contrarios), ya que polos iguales se repelen, mientras que polos distintos se atraen, *figura 5.2*.

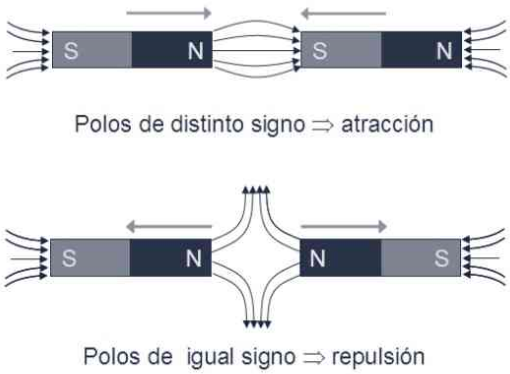


Figura 5.2. Fuerzas entre polos magnéticos

En el siglo XVIII el científico francés Coulomb (1736-1806) demostró experimentalmente que las fuerzas magnéticas de atracción y repulsión están en función del inverso del cuadrado de la distancia que las separan (similar a las cargas electrostáticas).

El origen de las propiedades magnéticas era desconocido hasta el siglo XIX. La fuerza magnética no está relacionada con la fuerza gravitatoria ya que no la presentan todos los cuerpos y tampoco está relacionada con las fuerzas electrostáticas, ya que no son atraídos por los materiales magnéticos trozos de papel u otros materiales que sí son atraídos por efecto electrostático. Fue en este siglo cuando los hechos experimentales demostraron la conexión entre la electricidad y el magnetismo (electromagnetismo), a través de las experiencias de Öersted y de Ampère.

Investigando sobre el campo magnético, el físico danés H. C. Öersted (1777-1851) realizó la experiencia de situar una brújula próxima a un conductor eléctrico. En principio la brújula señala el norte geográfico, pero cerrando el circuito, y por tanto circulando una corriente, cambia su orientación, de forma que se sitúa perpendicular a la corriente. Si se invierte la polaridad de la fuente de alimentación, la brújula gira 180º, ***figura 5.3***. Esta experiencia daba el mismo resultado en cualquier lugar que se pusiera la brújula. La única interpretación posible era que la corriente creaba un campo magnético que interactuaba con el campo magnético de la brújula. Sin embargo, Öersted no determinó ninguna ley cuantitativa del descubrimiento ni dio una explicación correcta del fenómeno.

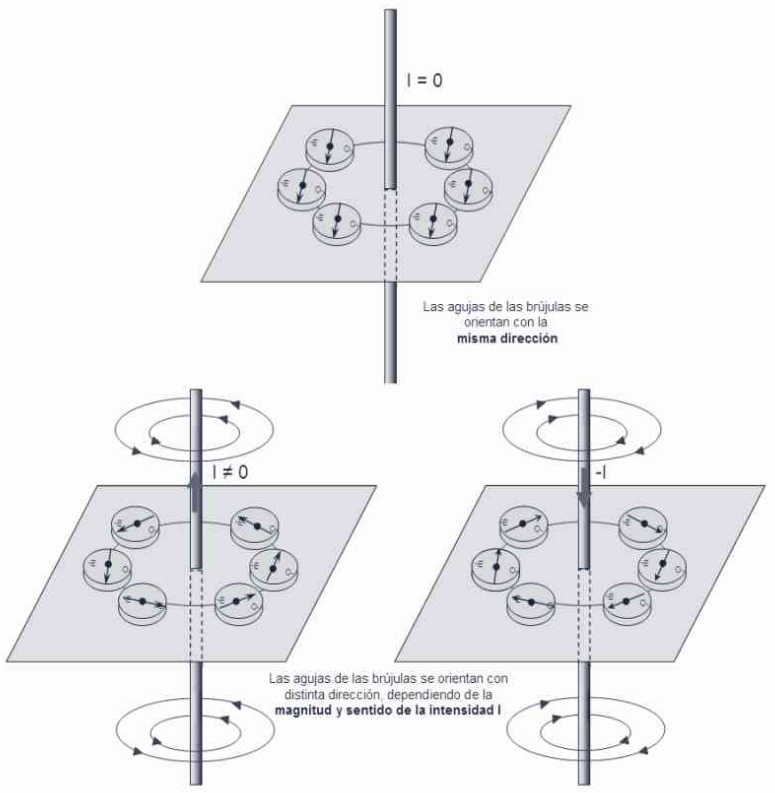


Figura 5.3. Experiencia de Öersted

Las noticias del descubrimiento de Öersted llegaron a Francia donde J. B. Biot (1774-1862) y F. Savart (1791-1841) interpretaron y cuantificaron este hecho. En el mismo año de 1820, y a las pocas semanas de que Öersted publicara su descubrimiento, A. M. Ampère (1775-1836) presentó los resultados de una serie de experimentos en los que se ponía de manifiesto la interacción magnética entre hilos conductores por los que pasan diferentes corrientes eléctricas.

Estas, y otras experiencias, demuestran que el magnetismo es una manifestación de las cargas eléctricas en movimiento. Por esta razón, las interacciones eléctricas y magnéticas se deben considerar siempre bajo el nombre más general de interacción electromagnética. Las interacciones eléctricas y magnéticas son dos aspectos diferentes de una misma propiedad de la materia, sus cargas eléctricas.

Posteriormente, en el mismo siglo XIX, el científico francés M. Faraday descubrió la inducción electromagnética, es decir, la generación de electricidad debida al movimiento relativo entre un conductor y un imán. El físico escocés J. C. Maxwell (1831-1879) expone la teoría unificada del electromagnetismo. El alemán H. R. Hertz (1847-1894) demostró la validez de las ecuaciones de Maxwell, el serbio-norteamericano N. Tesla (1857-1943) desarrolló, entre otras muchas, la teoría de los campos giratorios, base de los generadores y motores polifásicos de corriente alterna.

Estos científicos, entre otros, sentaron las bases de todos los descubrimientos posteriores relacionados con el electromagnetismo.

5.2 MAGNETISMO. IMANES NATURALES E IMANES ARTIFICIALES. POLOS MAGNÉTICOS. CAMPO MAGNÉTICO. INDUCCIÓN MAGNÉTICA *B*

La propiedad que poseen algunos cuerpos de atraer el hierro y sus derivados se denomina *magnetismo*, y los cuerpos que poseen tal propiedad se denominan imanes.

Los imanes que manifiestan sus propiedades de forma permanente pueden ser *naturales*, como la magnetita (Fe_3O_4) o *artificiales*, obtenidos a partir de aleaciones de diferentes metales. Por otra parte, los imanes pueden ser permanentes o temporales, un imán *permanente* es aquél que conserva el magnetismo después de haber adquirido dicha propiedad (imantado), un imán *temporal* no conserva su magnetismo tras haber sido imantado.

En un imán la capacidad de atracción es mayor en sus extremos o *polos*. Estos polos se denominan *polo norte* (N) y *polo sur* (S), debido a que tienden a orientarse según los polos geográficos de la Tierra, que es un gigantesco imán natural. Los *polos magnéticos* de la Tierra no coinciden exactamente con los *polos geográficos*, situados en los extremos del eje imaginario en torno del cual gira el planeta. Cabe por tanto hablar de un *norte magnético* y de un *norte geográfico*, muy próximos pero diferenciados. Esta diferencia

entre norte geográfico y magnético se concreta en un pequeño ángulo que se denomina *declinación magnética δ, figura 5.4*.

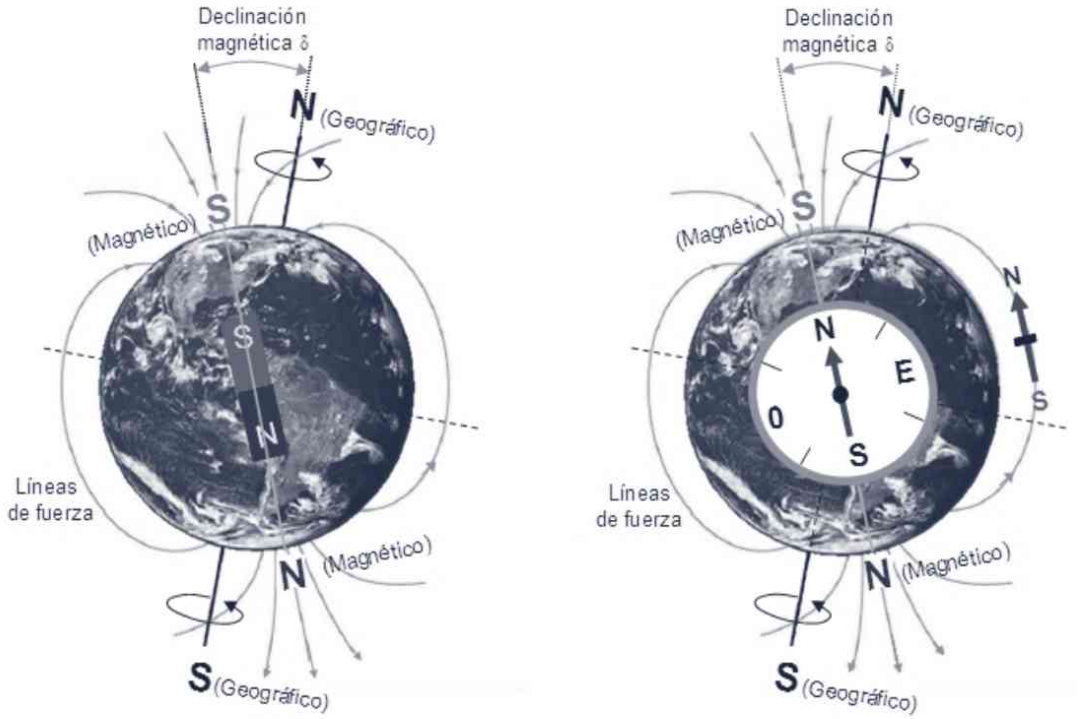


Figura 5.4. Campo magnético terrestre (izquierda) y orientación de la brújula (derecha)

La región del espacio donde se pone de manifiesto la acción de un imán se llama *campo magnético*. Este campo se representa mediante *líneas de campo magnético* (aunque se les suele llamar *líneas de fuerza*, es más correcto utilizar el nombre de *líneas de campo magnético*, ver el *apartado 5.13*), que son unas líneas imaginarias, cerradas, que van del polo norte (N) al polo sur (S), por fuera del imán y en sentido contrario en el interior de éste. En cada punto las líneas del campo magnético indican la dirección en la que se orientará una brújula situada en tal punto, y permiten conocer la intensidad y dirección del campo magnético, el cual puede tener diferentes intensidades en cada punto. Para medir esta intensidad se utiliza una magnitud vectorial denominada *inducción magnética* $\boldsymbol{B}$. La dirección del vector $\boldsymbol{B}$, en un punto, es tangente a la línea de fuerza que pasa por dicho punto, *figura 5.5 izquierda.*

La *inducción magnética* $\boldsymbol{B}$ en un punto representa la cantidad de líneas de campo magnético que pasan por la unidad de superficie perpendicular a la dirección de la línea de fuerza que pasa por dicho punto. Su unidad, que se definirá en el *apartado 5.3,* es el **tesla** (T).

En un campo magnético la zona del mismo que presenta líneas de campo próximas es más intensa que otra en el que las líneas estén más alejadas entre ellas. En la *figura 5.5*, el punto P_1 tiene una inducción magnética $\boldsymbol{B}_1$ mayor que el punto P_2, cuya

inducción magnética es $\boldsymbol{B_2}$, pues, P_1 está en una zona del campo magnético en el que las líneas de campo están más próximas que lo que están en la zona del punto P_2. Por otra parte, las líneas de inducción **no pueden cortarse** ya que esto supondría que en el punto de corte tendríamos dos vectores distintos de inducción magnética $\boldsymbol{B}$, lo cual por su propia naturaleza es contradictorio.

Si espolvoreamos partículas o limaduras de hierro en la zona próxima a un imán, aparece un dibujo característico, denominado *espectro magnético, figura 5.5 derecha.*

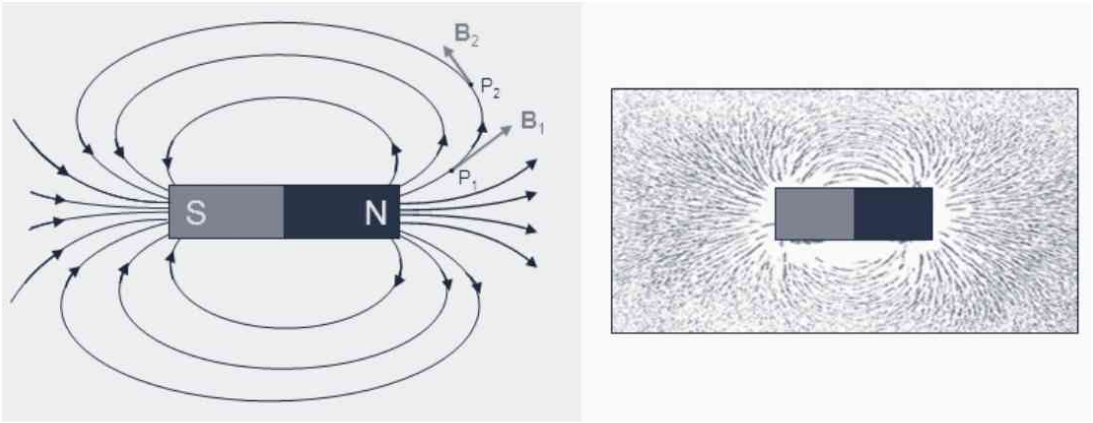


Figura 5.5. Líneas de campo magnético y espectro magnético de un imán recto

Los imanes tienen las siguientes propiedades:

- Sólo atraen al hierro y sus derivados.
- Si se les permite girar libremente sobre un plano horizontal, un imán se orienta siempre en la dirección N-S. El polo N del imán se orienta hacia el norte geográfico (S magnético) y el polo S del imán se orienta hacia el S geográfico (N magnético), *figura 5.4 izquierda*.
- Polos de igual signo se repelen y de distinto signo se atraen.
- La existencia física de un imán supone siempre la presencia de dos polos opuestos N-S (dipolo magnético).
- La imantación se puede conseguir por *contacto* o por *inducción* (aproximación sin contacto).
- A temperaturas superiores a 750 ºC (punto de Curie), el hierro pierde sus propiedades magnéticas.

El origen del magnetismo en los materiales son los dipolos magnéticos atómicos (o momentos magnéticos) **m**, que resultan de dos tipos diferentes de movimiento de los electrones en el átomo. El primero, es el movimiento orbital del electrón alrededor de su

núcleo atómico**,** el segundo, es debido a la propiedad cuántica llamada spin del electrón, y que tiene una influencia mayor en el momento magnético atómico. El momento magnético general de un átomo es la suma neta de todos los momentos magnéticos de los electrones individuales.

Entonces, cada átomo se comporta como un imán, con su correspondiente dipolo N-S y, por otra parte, existe influencia mutua entre los campos magnéticos de los átomos próximos, lo que produce una alineación de sus dipolos. Estas reordenaciones atómicas se producen en microscópicas regiones denominadas *dominios magnéticos.* En un material no magnetizado, estos dominios se orientan en direcciones al azahar, *figura 5.6 izquierda,* de tal forma que el momento magnético resultante ***M*** es nulo. En un material magnetizado, *figura 5.6 derecha,* un gran número de dominios se orientan en la misma dirección, mostrando propiedades magnéticas, existiendo un momento magnético resultante ***M***.

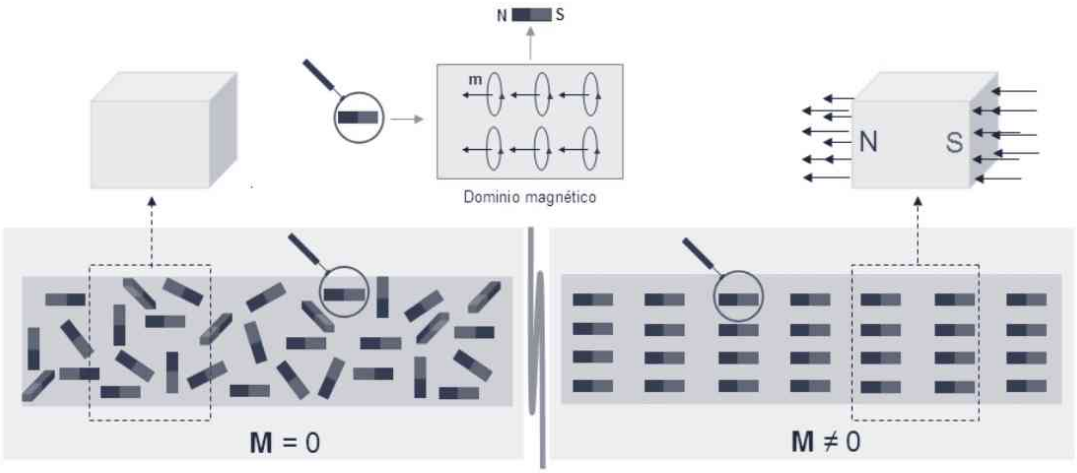


Figura 5.6. Material no magnetizado (izquierda) y material magnetizado (derecha)

5.3 FLUJO MAGNÉTICO Φ

Dada una superficie A **perpendicular** a las líneas de un campo magnético de *inducción magnética **B** uniforme*, se denomina *flujo magnético* Φ a la cantidad de líneas de campo que atraviesa dicha superficie, *figura 5.7.*

$$\Phi = B \cdot A \qquad [5.1]$$

En el SI la unidad de *flujo magnético* Φ es el **weber** (Wb), en honor del físico alemán W. Weber (1804-1891).

En la *fórmula [5.1]* para obtener el flujo en Wb se ha de expresar la inducción magnética en *teslas* (T) y la superficie en m^2.

Despejando *B* en la fórmula anterior y utilizando las unidades correspondientes, se tiene:

$$B\,(T) = \frac{\Phi(Wb)}{A\,(m^2)} \quad \Rightarrow \quad 1\,T = 1\,\frac{Wb}{m^2}$$

Otra forma de expresar la inducción magnética ***B*** es, pues, Wb/m^2 (1 T = 1 Wb/m^2). Por esto, a la inducción magnética ***B*** también se le llama *densidad de flujo magnético*.

A veces se utiliza como unidad de inducción magnética el *gauss* (G) y como unidad de flujo magnético el *maxwell* (Mx), ambas son unidades el sistema CGS, en honor, del científico alemán J. C. F. Gauss (1777-1855) y del físico escocés J.. Maxwell (1831-1879), respectivamente. Las equivalencias son:

$$1\,T = 10^4\,G$$

$$1\,Wb = 10^8\,G/cm^2 = 10^8\,Mx$$

Algunos valores de *B* son: el campo magnético terrestre es de 10^{-4} T (1 G), próximo a un imán de barra 10^{-2} T, próximo a un potente electroimán 1 T.

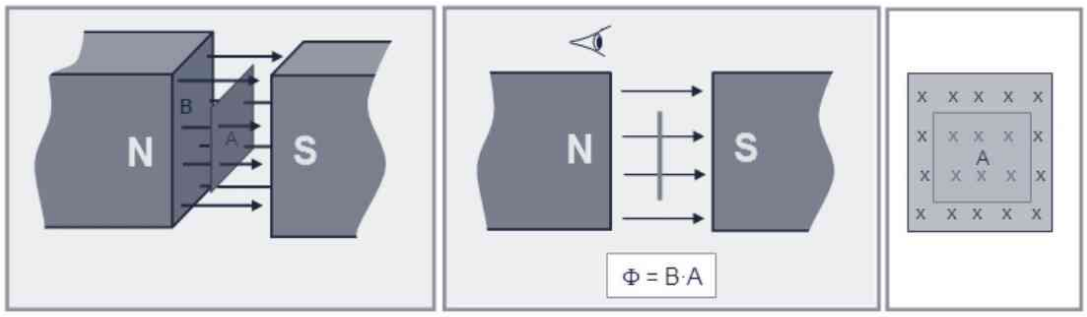


Figura 5.7. Flujo magnético Φ a través de una superficie A perpendicular

Si la superficie *A* **no es perpendicular** a las líneas del campo magnético, sino que forma un ángulo α respecto a la posición de perpendicularidad a dichas líneas, *figura 5.8,* la cantidad de líneas del campo magnético que atraviesan ahora la superficie *A*, es decir el *flujo magnético* Φ, es menor que cuando se encuentra perpendicular a las líneas, de tal manera que, ahora, la superficie atravesada por las líneas A_α es la correspondiente a la proyección de la superficie *A* en un plano perpendicular a las líneas de campo, *ecuación [5.3],* siendo α el ángulo formado por la superficie *A* en cada posición y el plano normal a las líneas del campo magnético.

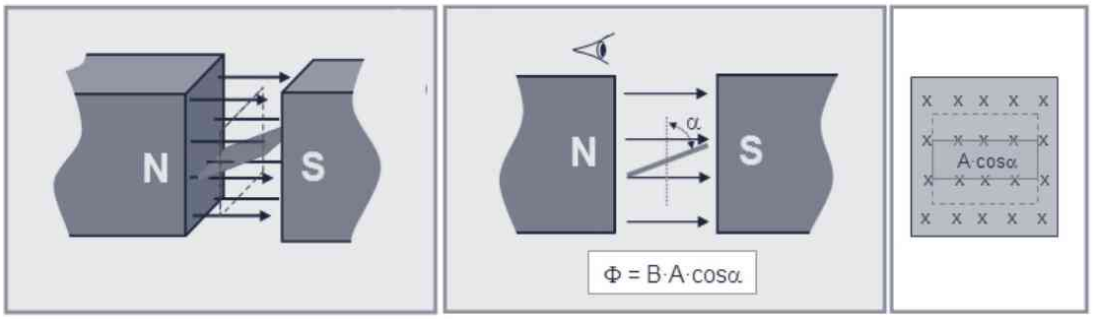


*Figura 5.8. Flujo magnético **Φ** a través de una superficie A no perpendicular*

En general, *figura 5.9,* se obtiene el *flujo magnético* **Φ** por la fórmula:

$$\Phi = B \cdot A_{\alpha} \qquad [5.2]$$

Como $A_{\alpha} = A \cdot \cos\alpha$:

$$\Phi = B \cdot A \cdot \cos\alpha \qquad [5.3]$$

Que se puede poner en forma de producto escalar:

$$\Phi = \overline{B} \cdot \overline{A} \qquad [5.4]$$

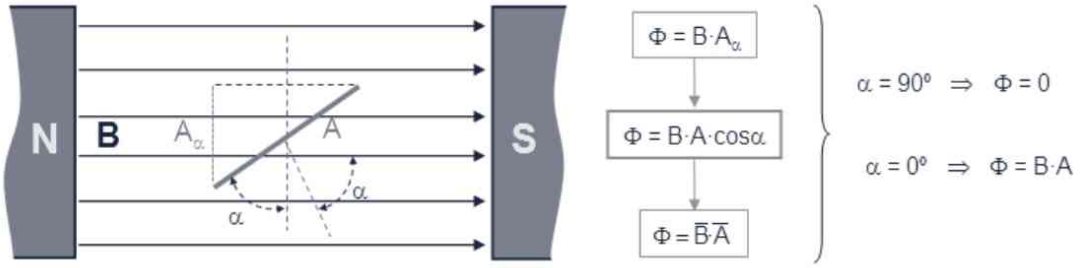


*Figura 5.9. Flujo magnético **Φ** y ángulo α.*

Cuando la inducción magnética ***B*** no es uniforme, sino que varía de un punto a otro en el área *A*, se tiene:

$$d\Phi = B \cdot dA \cdot \cos\alpha = \overline{B} \cdot d\overline{A} \qquad [5.5]$$

El ángulo α, también, es el formado por la dirección de ***B*** y el vector superficie *dA* (perpendicular a dicha superficie).

De la expresión anterior se obtiene:

$$\Phi = \int_A \bar{B} \cdot d\bar{A} \qquad [5.6]$$

5.4 LEY DE GAUSS PARA EL MAGNETISMO

En el apartado 1.15 se ha visto la ley de Gauss referida al campo eléctrico **E**, establece que "el flujo eléctrico neto Φ_E a través de cualquier superficie cerrada que rodea cargas eléctricas es proporcional a la carga eléctrica neta dentro de dicha superficie".

De forma análoga, si existieran monopolos magnéticos el flujo magnético Φ que atravesaría una superficie sería proporcional a la "carga magnética" total encerrada, diferencia entre polos N y polos S, por dicha superficie. Pero como no existen monopolos magnéticos, ya que la existencia física de un imán supone, indefectiblemente, la presencia de dos polos opuestos N-S (dipolo magnético), se concluye que "*el flujo magnético a través de una superficie cerrada es cero*".

$$\Sigma\Phi_i = 0 \qquad [5.7]$$

En la *figura 5.10* se tienen diferentes supuestos que corroboran la ley. Adviértase que para cualquier superficie cerrada, el número de líneas que entran en la superficie es igual al número que sale de la misma (por ejemplo, en la superficie rectangular entran 8 líneas por el lado izquierdo y salen cuatro por el mismo lado y cuatro por el lado derecho), por lo que el flujo magnético neto es cero.

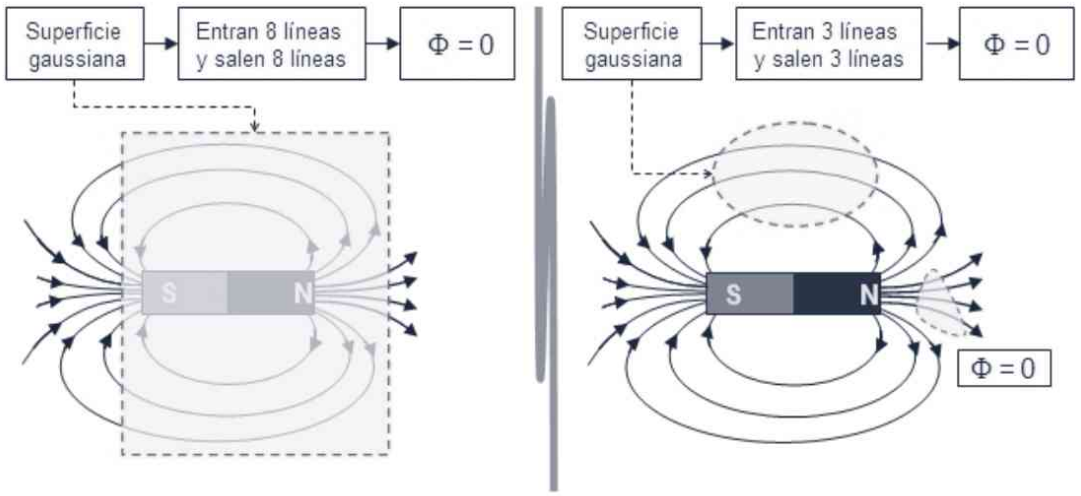


Figura 5.10. Ley De Gauss para el magnetismo

Se ha de advertir, también, que las líneas de campo que salen del polo N de un imán proceden, por el interior del mismo, del polo S, formando *líneas de campo magnético cerradas,* a diferencia de las líneas de fuerza de un campo eléctrico, *que comienzan y terminan en las cargas.*

Como el flujo magnético a través de una superficie cerrada es nulo ($\Phi = 0$) a partir *de la fórmula [5.6]* se obtiene la forma matemática de la *ley de Gauss del magnetismo*:

$$\int_A \bar{B} \cdot d\bar{A} = 0 \qquad [5.8]$$

5.5 CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR UNA CARGA EN MOVIMIENTO. CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR UNA CORRIENTE. LEY DE BIOT-SAVART

Como se ha visto en el *apartado 5.1*, el magnetismo es una manifestación de las cargas eléctricas en movimiento. La ley de Biot-Savart tiene el nombre de sus descubridores, los científicos franceses J. B. Biot (1774-1862) y F. Savart (1791-1841), y permite determinar la inducción magnética en el espacio en función de la carga que se desplaza.

Sea una carga positiva q que se mueve con velocidad v en el vacío, *figura 5.11 izquierda*. En un punto situado a una distancia r de la carga q se origina un campo magnético cuya inducción magnética B es directamente proporcional, a la carga q, a la velocidad v y al sen θ, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r^2 de la carga al punto considerado.

$$B = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \frac{q \cdot v \cdot \operatorname{sen}\theta}{r^2} \qquad [5.9]$$

Esta expresión se puede poner en forma de producto vectorial (x), si $\boldsymbol{u_r}$ es un vector unitario que va desde el punto donde se encuentra la carga hacia el punto donde se calcula el campo:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \frac{q \cdot \bar{v} \times \bar{u}_r}{r^2} \qquad [5.10]$$

Donde μ_0 es una constante llamada **permeabilidad magnética** del vacío siendo su valor en el SI:

$$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}\ (N/A^2) \qquad [5.11]$$

Si la carga se encontrase en un medio diferente al vacío habría que utilizar la permeabilidad magnética del medio μ, siendo:

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0 \qquad [5.12]$$

Donde μ_r es la permeabilidad relativa del medio en cuestión (ver *apartado 5.19*).

Además, el vector ***B*** es perpendicular tanto a la dirección del vector ***v*** como a la dirección de la distancia *r* desde la carga al punto *P* considerado, *figura 5.11 izquierda*.

De esta manera, las líneas del campo magnético creado por la carga en movimiento son circunferencias situadas en el plano perpendicular al vector velocidad ***v***, con centro en la dirección de ***v*** y cuyo sentido, *regla de la mano derecha*, es el de los dedos de la mano derecha, cuando el pulgar indica el sentido de la corriente (si la carga es positiva, sentido contrario si la carga es negativa).

La **permitividad eléctrica** ε^0 que aparece en la **Ley de Coulomb**, *fórmula [1.2]*, y **permeabilidad magnética** del vacío μ_0 están relacionadas por la fórmula:

$$\varepsilon_0 \cdot \mu_0 = \frac{1}{c^2} \qquad [5.13]$$

Donde c representa la **velocidad de la luz** en el espacio vacío (299.792.458 m/s ≈ 300.000 km/s).

Si en lugar de una carga puntual *q* se quiere hallar el campo magnético debido a una corriente *I* que circula por un conductor, se puede aplicar la *fórmula [5.9]* a un elemento de corriente de dicho conductor, *de* longitud *ΔL,* con la condición de que sea tan pequeño que se pueda considerar puntual, *figura 5.11 derecha*. Como, por otra parte, la velocidad de las cargas se obtiene dividiendo dicha longitud *ΔL* por el tiempo que tardan en cruzarlo *Δt,* y la carga *q* correspondiente al elemento *Δl* se puede poner en función de la intensidad *I, fórmula [3.2], q = I · Δt,* sustituyendo en la *fórmula [5.9]* se obtiene la inducción magnética *ΔB* debida a un elemento de corriente de longitud *ΔL*:

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\cdot\pi}\frac{q\cdot v\cdot \operatorname{sen}\theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\cdot\pi}\frac{I\cdot\Delta t\cdot\dfrac{\Delta L}{\Delta t}\cdot\operatorname{sen}\theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\cdot\pi}\frac{I\cdot\Delta L\cdot\operatorname{sen}\theta}{r^2}$$

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\cdot\pi}\frac{I\cdot\Delta L\cdot \operatorname{sen}\theta}{r^2} \qquad [5.15]$$

Es evidente que las líneas del campo magnético tienen la misma forma que en el caso de una carga puntual.

La *fórmula [5.15]* se puede poner en forma de producto vectorial:

$$\Delta\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\cdot\pi}\frac{I\cdot\overline{\Delta L}\times\bar{u}_r}{r^2} \qquad [5.16]$$

Donde $\boldsymbol{u_r}$ es un vector unitario con sentido de $I \cdot \Delta \boldsymbol{dL}$ al punto donde se quiere calcular $\boldsymbol{B}$.

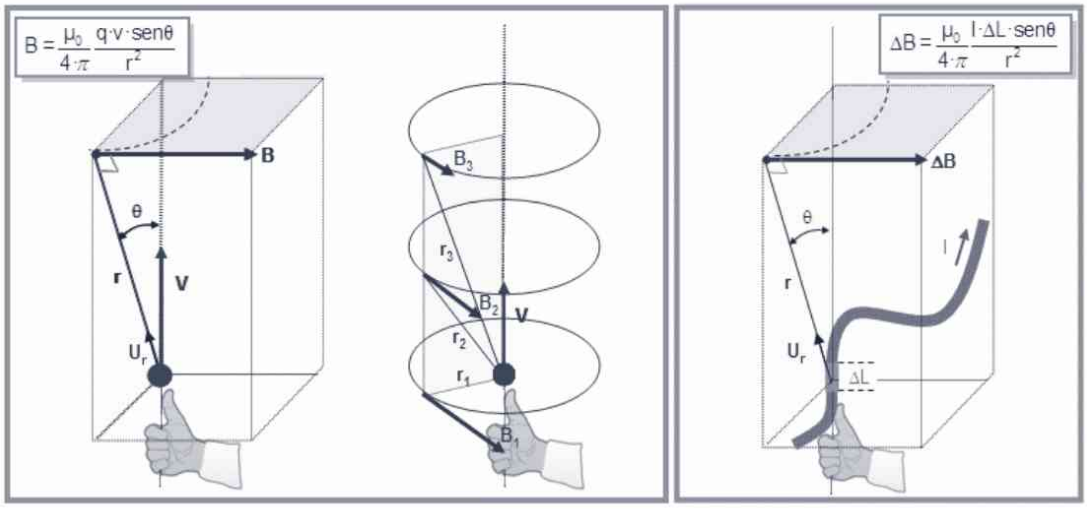


Figura 5.11. Ley de Biot-Savart: inducción magnética creada, por una carga q en movimiento, figura izquierda, y por un elemento de corriente I · ΔL, figura derecha

Es importante hacer notar que la ley de Biot-Savart, para una corriente eléctrica, proporciona el campo magnético en un punto dado para un *pequeño elemento del conductor* (infinitesimal). Para encontrar el campo magnético total $\boldsymbol{B}$ en un punto, debido a un conductor de tamaño no infinitesimal, se deben sumar las contribuciones de todos los elementos de corriente que constituyen el conductor, para lo cual se debe utilizar el cálculo diferencial.

La ley de Biot-Savart representa en **magnetostática** (estudio de los fenómenos físicos en los que intervienen **campos magnéticos** constantes en el tiempo) lo que la **ley de Coulomb** en **electrostática**, teniendo ciertas similitudes. El elemento de corriente $I \cdot \Delta L$ produce un campo magnético, mientras que una carga puntual q produce un campo eléctrico. Además, la magnitud de la inducción magnética $\boldsymbol{B}$ es inversamente proporcional

al cuadrado de la distancia desde el elemento de la corriente, como lo hace el campo eléctrico ***E*** debido a una carga puntual.

Sin embargo, las direcciones de los campos, ***B*** y ***E***, son muy diferentes. El campo eléctrico E debido a una carga puntual es radial. En el caso de una carga puntual positiva, *E* está dirigido desde la carga hacia el punto del campo. Por otro lado, el campo magnético debido a un elemento de corriente es perpendicular tanto al elemento de corriente $I \cdot \Delta L$, como al vector director que une el elemento de corriente y el punto *P*.

La *ecuación [5.15]* se puede poner en forma diferencial:

$$dB = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \frac{I \cdot dL \cdot \operatorname{sen}\theta}{r^2} \qquad [5.17]$$

De la expresión anterior, si se quiere obtener la inducción *B* debida a un elemento finito entre los puntos *a* y *b* del mismo:

$$B = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \int_a^b \frac{I \cdot dL \cdot \operatorname{sen}\theta}{r^2} \qquad [5.18]$$

La *fórmula [5.17]* se puede poner como producto vectorial:

$$d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \frac{I \cdot d\bar{L} \times \bar{u}_r}{r^2} \qquad [5.19]$$

Donde $\boldsymbol{u_r}$ es un vector unitario con sentido de $I \cdot \Delta d\boldsymbol{L}$ al punto donde se quiere calcular ***B***.

5.6 CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR UNA CORRIENTE RECTILÍNEA

La inducción magnética ***B*** producida por una corriente rectilínea *I* a lo largo de una longitud *ab*, en un punto distante una distancia *x* del eje de la corriente, es debida a la suma de todas las inducciones creadas por cada elemento de corriente $I \cdot \Delta L$, *fórmula [5.15],* entre los puntos *a* y *b* considerados, es decir:

$$B = \sum_a^b \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \frac{I \cdot \Delta L \cdot \operatorname{sen}\theta}{r^2} \qquad [5.20]$$

La ecuación anterior se resuelve mediante el cálculo integral. Se consideran dos casos:

- **Corriente rectilínea de longitud finita.** Para una longitud *ab* determinada se obtiene:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot x} (\cos \theta_a - \cos \theta_b) \qquad [5.21]$$

- **Corriente rectilínea de longitud infinita.** Para una longitud *ab* infinita ($\theta_a \rightarrow 0^\circ$ y $\theta_b \rightarrow 180^\circ$) se obtiene:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot x} \qquad [5.22]$$

Las líneas del campo magnético forman círculos concéntricos, *figura 5.12 izquierda*, alrededor del hilo conductor, en planos perpendiculares al mismo y con un sentido dado por la regla de la mano derecha, cuando el pulgar de esta mano señala el sentido de la corriente, los otros dedos rodean el hilo conductor indicando el sentido de la inducción magnética ***B***. En la *figura 5.12 derecha,* en un plano axial a la corriente, las líneas de campo que penetran en el plano se han dibujado con una X, de tamaño más pequeño (menos inducción ***B***) a medida que se alejan de la corriente. Las líneas de campo que salen del plano se representan con un punto, de diferente tamaño de acuerdo con el mismo criterio anterior.

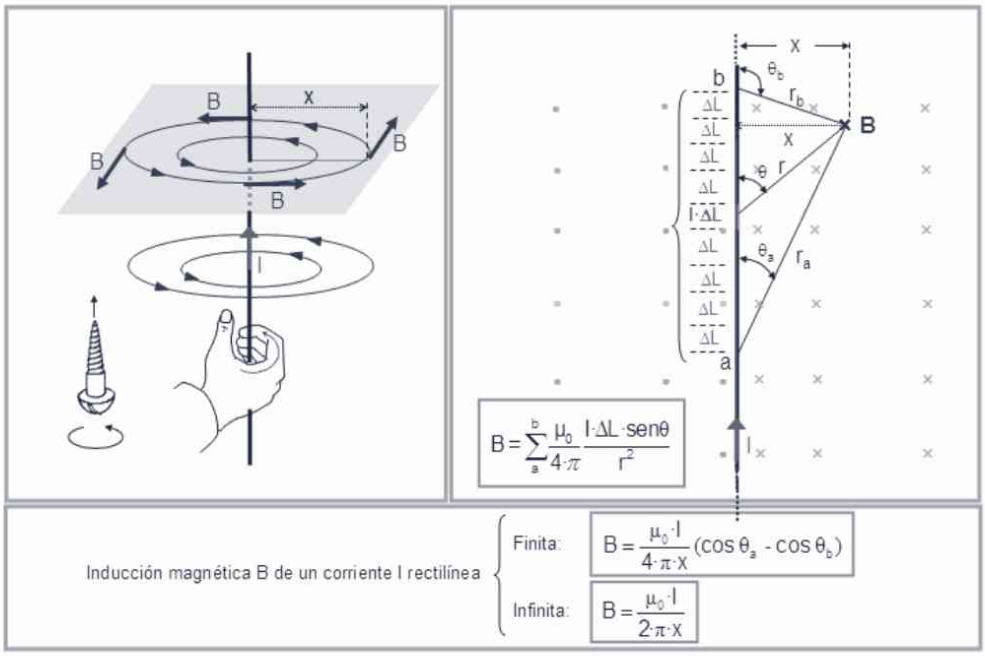


*Figura 5.12. Inducción magnética **B** creada por una corriente I rectilínea*

Utilizando el cálculo integral, la *ecuación [5.20]* toma la forma:

$$B = \int_a^b \frac{\mu_0}{4\cdot\pi} \frac{I\cdot dL\cdot \text{sen}\theta}{r^2} \qquad [5.23]$$

En la figura 5.12 derecha:

$$x = r\cdot \text{sen}\theta$$

$$L = x\cdot \text{tag}\theta$$

Sustituyendo y haciendo las operaciones oportunas en la *ecuación [5.23],* se obtiene *la fórmula 5.21:*

$$B = \frac{\mu_0\cdot I}{4\cdot\pi}\int_a^b \frac{dL\cdot \text{sen}\theta}{r^2} = \frac{\mu_0\cdot I}{4\cdot\pi\cdot x}\int_{\theta_a}^{\theta_b} -\text{sen}\theta\cdot d\theta = \frac{\mu_0\cdot I}{4\cdot\pi\cdot x}(\cos\theta_a - \cos\theta_b)$$

Si la corriente es de longitud infinita, $\theta_a = 0º$ y $\theta_b = 180º$, se obtiene la *fórmula [5.22].*

Observa:

El cable en forma de *par trenzado* utilizado en comunicaciones reduce las interferencias creadas por los conductores adyacentes en los cables compuestos por varios pares. Cuando se trenzan los conductores los campos magnéticos generados prácticamente se cancelan, lo que permite reducir la interferencia eléctrica tanto en pares cercanos como en el exterior del conjunto.

5.7 CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR UNA CORRIENTE CIRCULAR

La inducción magnética ***B*** creada en el **centro** de una corriente circular, *figura 5.12*, tiene una dirección perpendicular al plano del circuito, con sentido el de avance de un sacacorchos que avanza-gira con la corriente y su módulo es directamente proporcional a la intensidad *I* e inversamente proporcional al radio *R* del circuito:

$$B = \frac{\mu_0\cdot I}{2\cdot R} \qquad [5.24]$$

Para el cálculo de la inducción magnética ***B*** en el **centro** de la espira se utiliza la ley de Biot-Savart, *fórmula [5.15]*. Teniendo en cuenta que, cada elemento ΔL dista la misma distancia (R) del centro, cada elemento ΔL es perpendicular a la dirección del radio, por lo que $\theta = 90º$, y que la suma de todos los elementos del circuito, $\Sigma\Delta L$, es la longitud de la circunferencia, $2 \cdot \pi \cdot R$, se tiene:

$$B = \sum_a^b \frac{\mu_0}{4\cdot\pi} \frac{I\cdot\Delta L\cdot \text{sen}\theta}{r^2} = \frac{\mu_0\cdot I\cdot \text{sen}90°}{4\cdot\pi\cdot R^2} \sum_a^b \Delta L = \frac{\mu_0\cdot I\cdot 2\cdot\pi\cdot R}{4\cdot\pi\cdot R^2} = \frac{\mu_0\cdot I}{2\cdot R} \qquad [5.25]$$

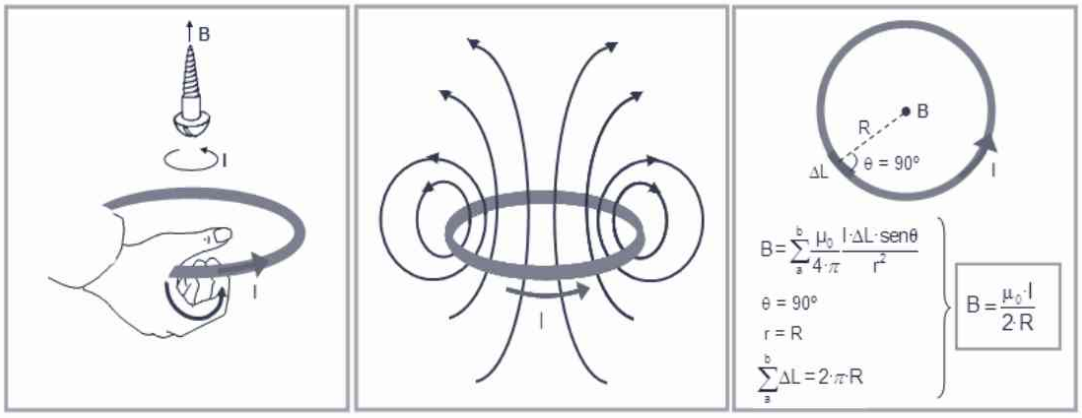


*Figura 5.13. Campo magnético creado por una corriente circular. Inducción magnética **B** en el centro*

Una regla nemotécnica para establecer la cara N y la cara S de una espira consiste en dibujar una **N** o una **S** de forma que los extremos de esas letras, terminadas en punta de flecha, tengan el mismo sentido que la corriente, *figura [5.14]*.

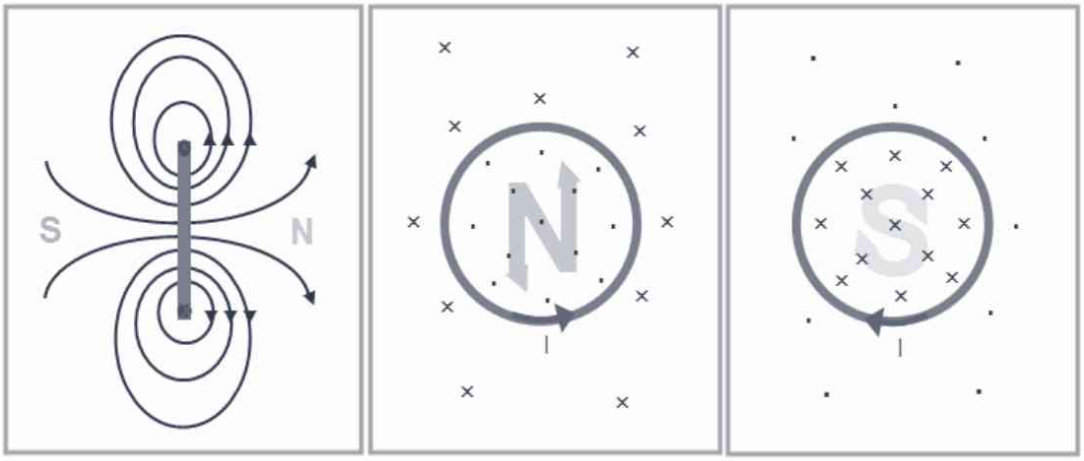


Figura 5.14. Polaridad de una espira

Utilizando el cálculo integral, a partir de la *ecuación [5.18]* se tiene para la inducción magnética en el centro de la espira, teniendo en cuenta que *dl* y *r* (*r = R),* son perpendiculares en cada punto:

$$B = \frac{\mu_0}{4\cdot\pi}\int_a^b \frac{I\cdot dL\cdot \operatorname{sen}\theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\cdot\pi}\int_0^{2\pi R} \frac{I\cdot dL}{R^2} = \frac{\mu_0\cdot I}{2\cdot R} \qquad [5.26]$$

5.8 CIRCULACIÓN DE LA INDUCCIÓN MAGNÉTICA *B*

Se llama **circulación** C_{ab} de la inducción magnética ***B*** a lo largo de una trayectoria *ab*, *figura 5.15,* a la suma de los productos escalares de los vectores $\boldsymbol{B_i}$ por $\boldsymbol{\Delta L}$:

$$C_{ab} = \sum_a^b \overline{B_i}\cdot\overline{\Delta L} = \sum_a^b B_i\cdot\Delta L\cdot\cos\varphi_i \qquad [5.27]$$

Se debe tener en cuenta que ***B*** puede variar de un punto a otro y se debe utilizar el valor de ***B*** que corresponde a cada elemento $\boldsymbol{\Delta L}$. Este elemento $\boldsymbol{\Delta L}$ se debe tomar lo suficientemente pequeño de modo que se pueda considerar ***B*** constante en todo su recorrido.

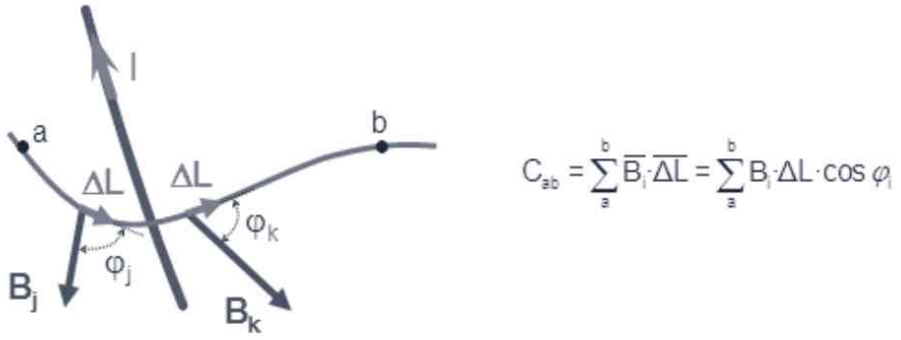


Figura 5.15. Circulación de la inducción magnética entre a y b

Utilizando el cálculo integral, la *fórmula [5.27]* tiene la forma:

$$C_{ab} = \int_c \mathbf{B}\cdot d\mathbf{L} \qquad [5.28]$$

Se dice que un campo vectorial es **conservativo** cuando su circulación a lo largo de una línea cerrada es cero. La circulación de ***B*** no es conservativa si el recorrido cerrado encierra corrientes eléctricas, como se verá en el apartado siguiente.

5.9 TEOREMA DE AMPÈRE

La Ley de Gauss, *apartado 1.15*, relaciona el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada y las cargas contenidas en ella, y permite determinar el campo eléctrico para distribuciones de carga **con muy alta simetría**. En electromagnetismo se tiene un teorema equivalente, que relaciona la inducción magnética ***B*** con sus fuentes, las corrientes eléctricas, es el Teorema de Ampère, útil para determinar la inducción magnética de algunas corrientes de simetría sencilla. Sin embargo, en general para determinar ***B***, es preferible la aplicación de la Ley de Biot-Savart, en su forma diferencial, *fórmula 5.17.*

El Teorema de Ampère, figura 5.15, establece que "*en un campo magnético, la circulación C_c del vector inducción **B** a lo largo de una curva cerrada C es igual al producto de la corriente neta (suma aritmética de las intensidades) que corta el área limitada por dicha curva y la permeabilidad magnética del vacío μ_0*":

$$C_c = \sum_0^c \bar{B}\cdot\overline{\Delta L} = \mu_0 \cdot \sum_1^n I_i \qquad [5.29]$$

El signo de la intensidad será positivo si cumple la regla de la mano derecha con el sentido de la circulación, y negativo en caso contrario.

Este teorema exige que la **corriente sea estacionaria** (corriente continua), no es aplicable en el caso de corriente variable (ver *capítulo 6*), ni tampoco si el medio es diferente al vacío o el aire (ver *apartado 5.20*).

En la *figura 5.14,* considerando el sentido de la circulación contrario a las agujas del reloj, las corrientes que ascienden (I_1, I_2, I_4), son positivas y las que descienden, (I_3), son negativas. Por otra parte, la corriente I_4 no corta el área delimitada por la curva *C,* por lo que no interviene en la circulación C_c. Aplicando el Teorema de Ampère a la curva *C*, se tiene:

$$C_c = \sum_0^c \bar{B}\cdot\overline{\Delta L} = \mu_0 (I_1 + I_2 - I_3) \qquad [5.30]$$

Nótese que en la *fórmula [5.30]*, no se tiene en cuenta la localización de las corrientes dentro de la curva, ni tampoco la forma de ésta. Por otra parte, también, es

importante hacer notar que, si $C_c = \Sigma \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{L} = 0$ *fórmula [5.30]*, esto no significa necesariamente que $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ a lo largo de todo el recorrido, sólo que la suma de corrientes a través del área limitada por el recorrido es cero.

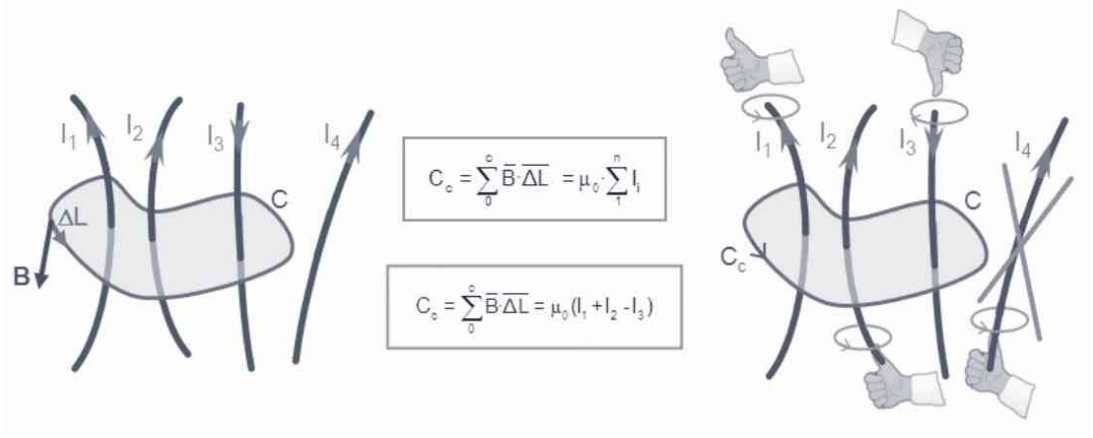


Figura 5.16. Teorema de Ampère

Para demostrar el Teorema de Ampère, considérese la circulación C_c, *fórmula [5.27],* de la inducción magnética $\boldsymbol{B}$ a lo largo de un recorrido cerrado C que encierra una corriente I rectilínea de muy larga longitud, *figura 5.16*. Se tiene, teniendo en cuenta que los elementos $\boldsymbol{\Delta L}$ son muy pequeños ($\boldsymbol{\Delta L} \rightarrow 0$), la proyección ($B_n \cdot \Delta L_n \cdot \cos \varphi_n$) del elemento $\boldsymbol{\Delta L}$ sobre $\boldsymbol{B}$, es igual al arco de circunferencia ΔS_n, es decir:

$$C_C = \sum \bar{B}_n \cdot \overline{\Delta L_n} = \sum B_n \cdot \Delta L_n \cdot \cos \varphi_n = \sum B_n \cdot \Delta s_n \qquad [5.31]$$

Por otra parte, *apartado 5.6*, la inducción magnética $\boldsymbol{B}$ en un punto cualquiera del recorrido es perpendicular al radio que une ese punto con el conductor. En cada punto el módulo B_n de la inducción magnética se obtiene por la *fórmula [5.22]* y para un arco de circunferencia se cumple:

$$\text{arco} = \text{ángulo} \cdot \text{radio} \Rightarrow \Delta s_n = r_n \cdot \theta_n \qquad [5.32]$$

Una vez realizado todo el recorrido, la suma de todos los ángulos $\Delta\theta_n$ supone 360º, es decir $2 \cdot \pi$ radianes, obteniéndose finalmente:

$$C_C = \sum B_n \cdot \Delta s_n = \sum B_n \cdot r_n \cdot \Delta\theta_n = \sum \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r_n} \cdot r_n \cdot \Delta\theta_n = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi} \sum \Delta\theta_n = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi} 2 \cdot \pi = \mu_0 \cdot I \qquad [5.33]$$

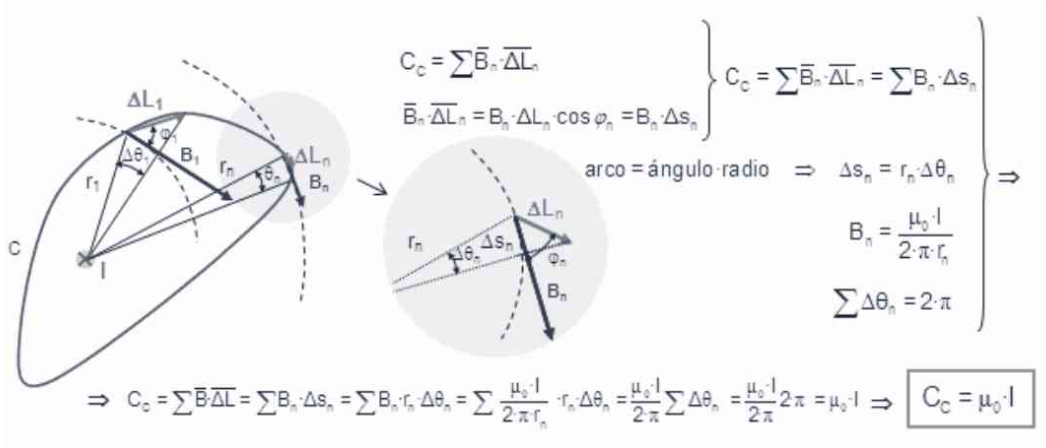


Figura 5.17. Demostración del Teorema de Ampère

Obsérvese, *figura 5.18*, que si la corriente *I* estuviese fuera del recorrido en el que se realiza la circulación C_c, $(C_{ab} + C_{bc})$, el valor de ésta sería positivo, (C_{ab}), pues la proyección $B_n \cdot \cos \varphi_n$ tienen el mismo sentido que C_c y negativo, (C_{bc}), pues la proyección $B_n \cdot \cos \varphi_n$ tienen sentido contrario a C_c, cumpliéndose que $C_{ab} = -C_{bc}$, resultando $C_c = 0$.

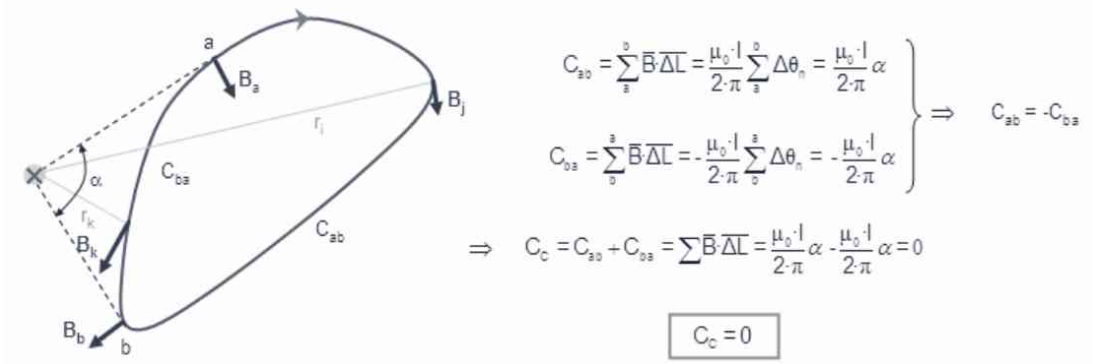


Figura 5.18. Teorema de Ampère: intensidad I fuera del recorrido de la circulación

Puede demostrarse que la ley de Ampère se cumple también aunque el conductor por el que circula *I* no fuera rectilíneo. Además, por el *principio de superposición*, si la trayectoria de circulación encierra varias corrientes I_i la circulación de $\boldsymbol{B}$ se obtiene de la suma de los campos B_j de cada corriente. Esto permite enunciar el Teorema de Ampère, tal como se ha hecho.

Otra forma de calcular el módulo *B* de la inducción magnética de una corriente rectilínea de larga longitud, *apartado 5.6*, es aplicando el Teorema de Ampère a una circunferencia de radio *x* concéntrica con dicho conductor, *figura 5.19.*

En efecto, *t*eniendo en cuenta que la inducción $\boldsymbol{B}$ es tangente a la circunferencia en cada punto de ella y que el elemento ΔL (arco de circunferencia) se toma lo suficientemente pequeño para que se considere que tiene la misma dirección que $\boldsymbol{B}$ en ese elemento, se tiene que:

En cada elemento ΔL, el producto escalar de $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\Delta L} = B \cdot \Delta L \cdot \cos 0^\circ = B \cdot \Delta L$.

Puesto que la distancia x de $\boldsymbol{B}$ al conductor es la misma para toda la circunferencia, el módulo B de la inducción magnética $\boldsymbol{B}$ tiene el mismo valor en todos los puntos de la circunferencia.

La suma $\Sigma\Delta L$ de todos los elementos ΔL a lo largo de la circunferencia es su longitud $2 \cdot \pi \cdot x$.

Aplicando ahora el Teorema de Ampère a la circunferencia de radio x, *ecuación [5.31]*, se obtiene el módulo B de la inducción magnética:

$$C_c = B \cdot 2 \cdot \pi \cdot x = \mu_0 \cdot I \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot x} \qquad [5.34]$$

Que coincide con el calculado en el *apartado 5.6.*

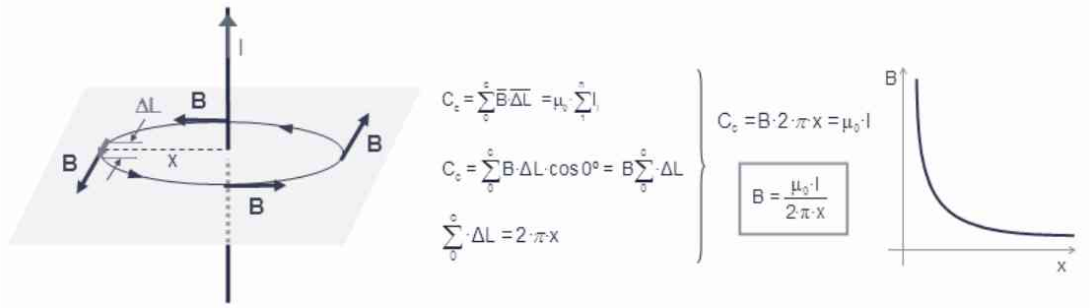


Figura 5.19. Corriente rectilínea: cálculo de la inducción magnética B por el Teorema de Ampère

Utilizando el cálculo integral, el Teorema de Ampère, *fórmula [5.29]*, tiene la forma:

$$C_c = \int_c \bar{B} \cdot \overline{dL} = \mu_0 \cdot \sum_1^n I_i \qquad [5.35]$$

Observa:

El cable en forma de *par trenzado* utilizado en comunicaciones, el trenzado consigue la simetría que los dos conductores no tiene, por lo que en este caso se puede aplicar el Teorema de Ampère a una circunferencia de radio r que rodee el par. Como la corriente tiene sentidos contrarios en los dos conductores ($\Sigma I = I - I = 0$), y conforme al Teorema de Ampère, $B \cdot 2\pi \cdot r = 0$, lo que implica que la inducción magnética $\boldsymbol{B}$ es nula, impidiendo interferencias eléctricas en pares cercanos o en otros elementos.

5.10 INDUCCIÓN MAGNÉTICA EN EL INTERIOR DE UN CONDUCTOR RECTILÍNEO

En el *apartado 5.9* se ha visto la inducción magnética ***B*** creada alrededor de una corriente *I* que circula por un conductor rectilíneo, no magnético, de longitud infinita (o de longitud muy superior a su radio), *fórmula [5.31]*. Ahora, aplicando el Teorema de Ampère, se procede a calcular ***B*** en el interior de dicho conductor, *figura 5.19*.

Se considera, *figura 5.20*, que el conductor de sección *S* tiene una densidad de corriente *J* (*J = I/S*) constante. De la misma manera que para el campo magnético en el exterior, en el interior del conductor, a una distancia *x* del centro, el módulo *B* de la inducción magnética tiene el mismo valor para todos los puntos situados sobre una circunferencia de radio *x*. Si se aplica el Teorema de Ampère a la circulación del vector ***B*** a lo largo de dicha circunferencia ($L = 2\pi \cdot x$), teniendo en cuenta que la corriente delimitada por la curva es la correspondiente al radio *x* ($I_x = x^2 \cdot I/R^2$), se tiene para el módulo *B* de la inducción magnética:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot R^2} x \qquad [5.36]$$

Este resultado es fundamental para la comprensión del *efecto Skin o pelicular* que se produce en los conductores recorridos por corriente alterna, como se verá en el siguiente capítulo.

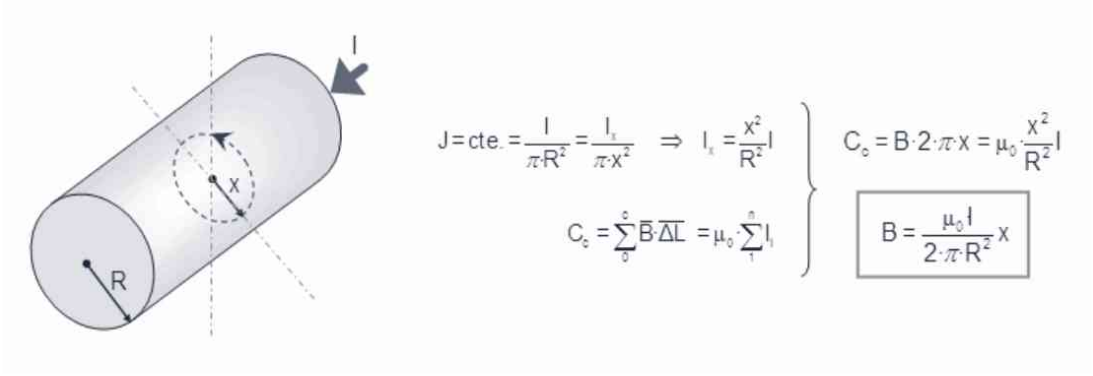


Figura 5.20. Inducción magnética B en el interior de un conductor rectilíneo (con R << Longitud)

En la *figura 5.21* se hace una representación gráfica del módulo *B* de la inducción magnética en el exterior e interior del conductor en función de la distancia *x* al centro del conductor.

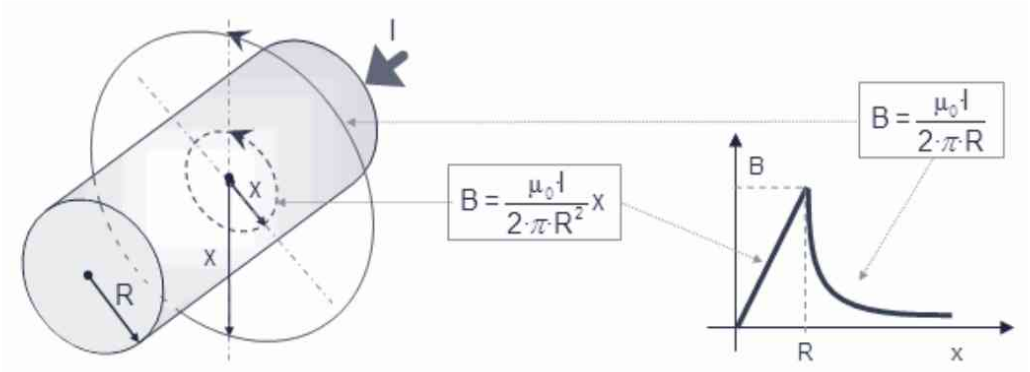


Figura 5.21. Inducción magnética B en el interior y exterior de un conductor rectilíneo (con R << Longitud)

5.11 INDUCCIÓN MAGNÉTICA EN UN SOLENOIDE

Un solenoide lo constituye un conjunto de espiras de igual diámetro, arrolladas una al lado de la otra formando un cilindro. En la práctica se realiza con un conductor aislado arrollado en forma de hélice con espiras muy próximas entre sí, *figura 5.22*.

Cuando un solenoide es atravesado por una corriente *I*, su longitud *L* es considerablemente mayor que su diámetro *D*, se crea un campo magnético, uniforme en el interior, pero no en las proximidades de sus extremos, por lo que las líneas del campo son paralelas entre sí y espaciadas uniformemente. En este caso, el solenoide se convierte en un imán, cuyos polos norte y sur son los extremos por donde salen y entran, respectivamente, las líneas de campo magnético. El sentido de las líneas en el interior de un solenoide es el del avance de un sacacorchos que gira en el sentido de la corriente.

La inducción magnética *B* producida en cualquier punto es la suma vectorial de las inducciones magnéticas B_i debidas a cada una de ellas.

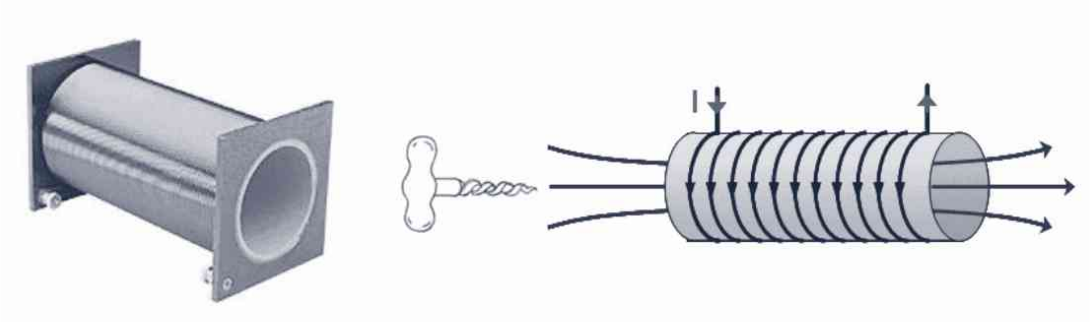


Figura 5.22. Solenoide

Para encontrar el valor de B en el interior se considera un solenoide de N espiras, muy próximas, que tiene una longitud L muy superior a su diámetro D, con el fin de considerar la inducción magnética B en su interior constante, *figura 5.23.*

Si se aplica el Teorema de Ampère, *figura 5.23*, al recorrido C_c correspondiente a un rectángulo *ABCDA,* que tiene la base inferior *AB* dentro del solenoide y paralela al campo, y la base superior *CD* fuera del solenoide, se tiene:

- La circulación de la inducción magnética $\boldsymbol{B}$ a lo largo del rectángulo *ABCDA* sólo contribuye el lado *AB,* pues en los tramos *bC, CD y Dd,* la inducción $\boldsymbol{B} = 0$, y en los tramos *Bb* y *dA,* el vector $\boldsymbol{B}$ es perpendicular al recorrido correspondiente L_{Bb} y L_{dA} respectivamente, siendo su circulación también nula en estos dos tramos. Así pues, se obtiene para la circulación de $\boldsymbol{B}$, $C_c = B \cdot L_i$.

- La corriente encerrada por el rectángulo *ABCDA*, correspondiente a una longitud L_i del solenoide, de *N/L* espiras/unidad longitud, es $N \cdot L_i \cdot I/L$.

Aplicando el Teorema de Ampère a la curva, se obtiene para el módulo B de la inducción magnética para el interior del solenoide, en zonas alejadas de sus extremos:

$$B = \mu_0 \frac{N \cdot I}{L} \qquad [5.37]$$

En la representación esquemática de la *figura 5.23,* correspondiente a la sección axial del solenoide, las cruces (x) en la parte superior indican que la corriente I penetra en el plano de la página y los puntos (·) en la parte inferior, indican que la corriente I sale del plano de la página.

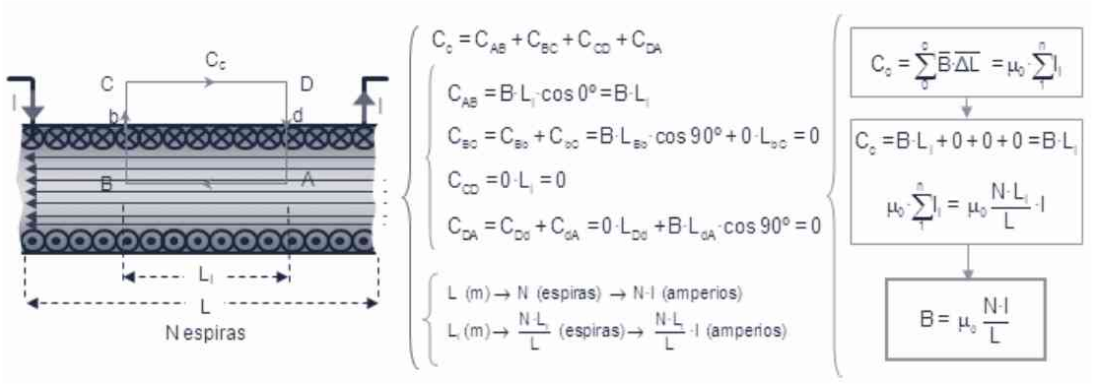


Figura 5.23. Inducción magnética B en el interior de un solenoide

En la *figura 5.24* se muestra la inducción magnética B en el eje de un solenoide para diferentes relaciones entre su longitud L y su radio R.

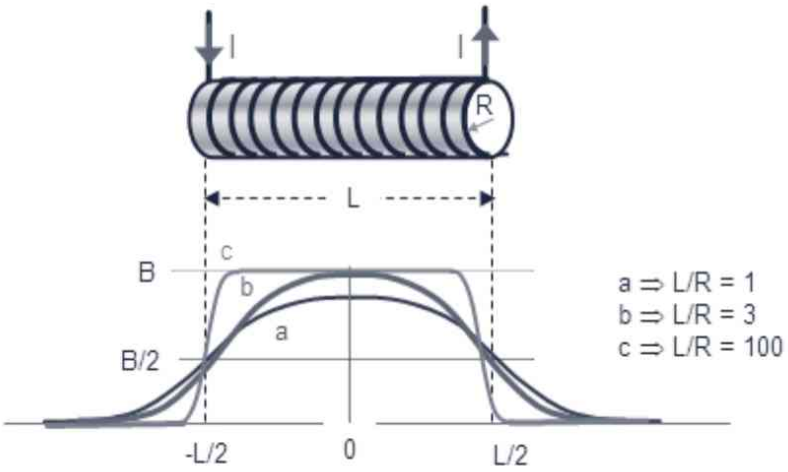


Figura 5.24. Formación del campo magnético en el solenoide

5.12 INDUCCIÓN MAGNÉTICA EN UNA BOBINA

Una bobina toroidal consiste en un hilo conductor arrollado en forma de N espiras sobre un soporte de forma toroidal, *figura 5.25*. Al circular una corriente I por las espiras se crea un campo magnético de inducción B cuya magnitud se determina a continuación.

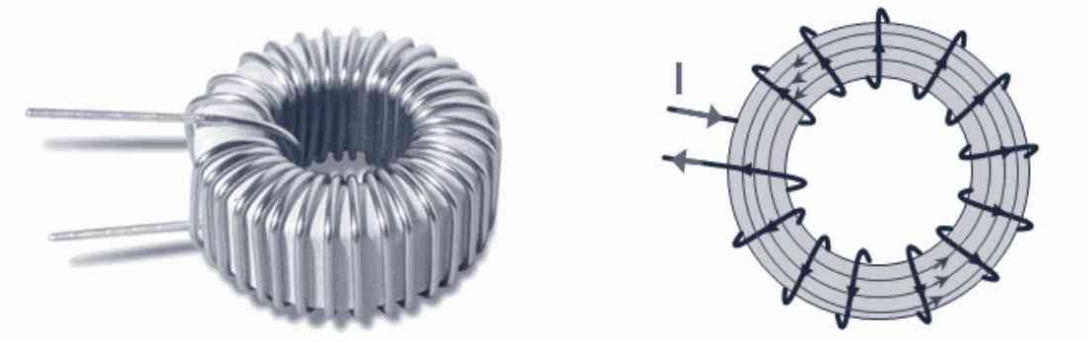


Figura 5.25. Bobina toroidal

Si las espiras están muy próximas unas a otras se puede considerar que las líneas del campo magnético son circunferencias concéntricas con centro el mismo centro del toroide, pero no se puede afirmar que su módulo sea independiente de la distancia r al centro, salvo que, *figura 5.26*, la relación entre la diferencia de sus radios exterior e interior (r_e - r_i) y su radio exterior (r_e) sea pequeña, en cuyo caso se puede considerar que el módulo B de la inducción magnética es constante en todo el interior del toroide.

Para calcular el módulo de $\boldsymbol{B}$ se toma la circunferencia de radio medio r_m [$r_m = (r_i + r_e)/2$] y se calcula la circulación C_c de $\boldsymbol{B}$ a lo largo de ella. Como $\boldsymbol{B}$ tiene la misma

dirección que todo $\Delta \boldsymbol{L}$ y su módulo B es constante en todos los puntos de la circunferencia se tiene para la circulación, $C_c = B \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_m$.

Por otra parte, si I es la intensidad que recorre las N espiras de la bobina, la circunferencia elegida encierra una corriente total de valor $N \cdot I$, obteniéndose conforme al Teorema de Ampère, $C_c = B \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_m = \mu_0 \cdot NI$, de donde se obtiene el módulo B de la inducción magnética en el interior de la bobina toroidal:

$$B = \mu_0 \frac{N \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r_m} \qquad [5.38]$$

Teniendo en cuenta que la longitud media L_m del toroide es $L_m = 2 \cdot \pi \cdot r_m$, la fórmula anterior se puede poner como:

$$B = \mu_0 \frac{N \cdot I}{L_m} \qquad [5.39]$$

Obsérvese que una bobina toroidal se puede considerar un solenoide cuyos extremos se juntan formando un toroide.

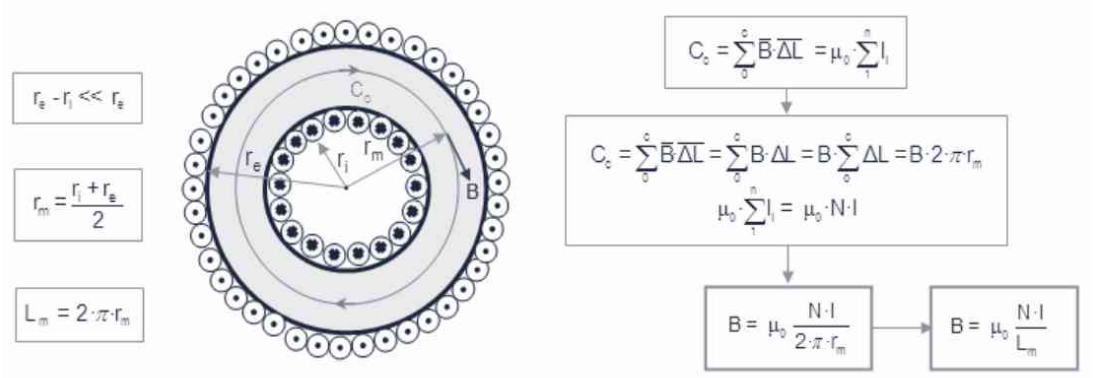


Figura 5.26. Inducción magnética B en el interior de una bobina toroidal

Si la circunferencia se toma con el mismo centro pero de radio $r < r_i$ la corriente encerrada es nula, por lo que, aplicando el Teorema de Ampère, la circulación C_c a lo largo de dicha circunferencia debe ser nula, lo que implica que el módulo $B = 0$, es decir el campo magnético $\boldsymbol{B}$ es nulo.

Si la circunferencia se toma con el mismo centro pero de radio $r > r_e$ la corriente neta encerrada también es nula (corrientes iguales pero de sentido opuesto, ($+N \cdot I$ y $-N \cdot I$), y esto, como en el caso anterior implica que el campo magnético $\boldsymbol{B}$ es nulo.

Se concluye que en una bobina toroidal ideal, el campo magnético está confinado en el interior del mismo.

5.13 FUERZA MAGNÉTICA SOBRE UNA CARGA ELÉCTRICA EN EL INTERIOR DE UN CAMPO MAGNÉTICO FUERZA DE LORENTZ

Si una carga eléctrica q está situada en el interior de un campo magnético $\boldsymbol{B}$, *figura 5.27*, se observa que:

- Si la carga q se mueve, surge sobre ella una fuerza $\boldsymbol{F}$, fuerza electromagnética, que es máxima cuando la velocidad de la carga $\boldsymbol{v}$ y el campo $\boldsymbol{B}$ son perpendiculares y es nula cuando son paralelos.
- La fuerza $\boldsymbol{F}$ es perpendicular al plano formado por $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{B}$.
- Si la carga q está en reposo, el campo $\boldsymbol{B}$ no ejerce ninguna fuerza sobre ella.
- Si la carga q cambia de signo, la fuerza $\boldsymbol{F}$ cambia de sentido.
- La fuerza $\boldsymbol{F}$ es proporcional al valor de la carga q, a la inducción magnética $\boldsymbol{B}$ y a la componente normal de la velocidad $\boldsymbol{v}$ respecto a la dirección del campo magnético $\boldsymbol{B}$ (la componente que *corta* las líneas de campo magnético), es decir $v \cdot \text{sen}\ \alpha$.

El físico y matemático holandés H. A. Lorentz (1853-1928) cuantificó el valor de esta fuerza electromagnética $\boldsymbol{F}$, mediante la expresión:

$$F = q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}\alpha \qquad [5.40]$$

Siendo α el ángulo formado por las direcciones de la inducción magnética $\boldsymbol{B}$ y la velocidad $\boldsymbol{v}$.

La fuerza electromagnética $\boldsymbol{F}$ también se puede expresar en forma de producto vectorial:

$$\bar{F} = q \cdot \bar{v} \times \bar{B} \qquad [5.41]$$

Si la inducción magnética $\boldsymbol{B}$ y la velocidad $\boldsymbol{v}$ son perpendiculares ($\alpha = 90^\circ$), se tiene la fuerza máxima $\boldsymbol{F_{max}}$ sobre el conductor, de módulo:

$$F_{max} = q \cdot v \cdot B \qquad [5.42]$$

Otra forma de determinar la dirección y el sentido de la fuerza de Lorentz, es mediante la *regla de la mano izquierda, figura 5.27*. Si extendemos perpendicularmente entre sí los tres primeros dedos de la mano izquierda (pulgar, medio e índice) de forma que el *índice* señale la dirección y el sentido del campo magnético ***B***, el *medio* la dirección y sentido de la velocidad ***v*** de una *carga eléctrica positiva*, el *pulgar* indicará la dirección y sentido de la fuerza ***F***. Si la *carga eléctrica fuese negativa* el sentido de ***F*** será el contrario al indicado por el pulgar.

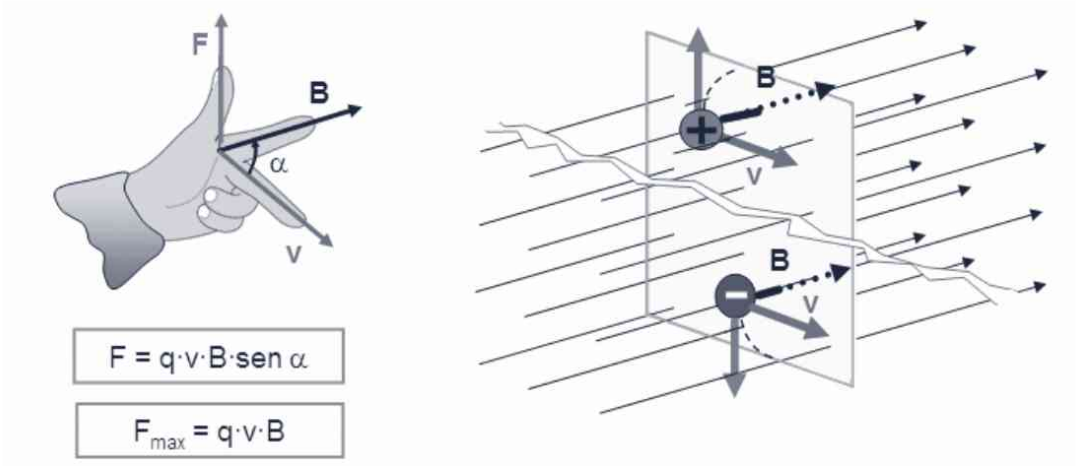


Figura 5.27. Fuerza electromagnética sobre una carga eléctrica (Fuerza de Lorentz)

También, para averiguar el sentido de la fuerza ***F*** se puede aplicar la *regla del tornillo:* cuando el tornillo gira de ***v*** hacia ***B***, por el recorrido más corto**,** el tornillo avanza o retrocede indicando la dirección de la fuerza ***F*** para una carga positiva, si la carga es negativa el sentido de ***F*** es el contrario.

Nótese que, así como en un campo eléctrico ***E*** las *líneas de fuerza* indican la dirección en la que se ejerce la fuerza eléctrica sobre la carga, *apartado 1.7*, *las líneas del campo magnético* no indican la dirección en la que se ejerce la fuerza electromagnética sobre la carga, pues ésta es, como se ha visto, perpendicular a la inducción magnética ***B*** y por tanto a la línea de campo magnético que pasa por la partícula. En cada punto las líneas del campo magnético indican la dirección en la que se orientará una brújula situada en tal punto.

Si además del campo magnético ***B*** existe un campo eléctrico ***E***, la fuerza total ***F***, sobre la carga, fuerzas de Lorentz, es la resultante de las fuerzas debidas a ambos campos:

$$\bar{F} = q\cdot\bar{E} + q\cdot\bar{v}\times\bar{B} \qquad [5.43]$$

5.14 FUERZA MAGNÉTICA SOBRE UN CONDUCTOR RECTILÍNEO POR EL QUE CIRCULA UNA CORRIENTE. FUERZA DE LAPLACE

Sea un conductor rectilíneo por el que circula una corriente de intensidad I, colocado en el interior de un campo magnético uniforme de inducción $\boldsymbol{B}$, y tal que la dirección del conductor y $\boldsymbol{B}$ forman un ángulo α, *figura 5.28*. Sobre cada portador de carga aparecerá una fuerza $\boldsymbol{F_q} = q \cdot \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{B}$, donde $\boldsymbol{v}$ es la velocidad de arrastre.

La fuerza total sobre el conductor de longitud L y sección S *se* puede calcular sumando las fuerzas individuales ejercidas sobre cada carga. Si hay n cargas por unidad de volumen, el número N de ellas en el volumen $S \cdot L$ será:

$$N = n \cdot S \cdot L \qquad [5.44]$$

El módulo de la fuerza total sobre el conductor:

$$F = N \cdot F_q \qquad [5.45]$$

Sustituyendo y recordando, *apartado 3.3*, que la densidad de corriente en el conductor es $J = n \cdot q \cdot v$ y que $I = J \cdot S$, la fuerza resulta ser:

$$F = N \cdot F_q = n \cdot S \cdot L \cdot (q \cdot v \cdot B \cdot \operatorname{sen}\alpha) = (n \cdot q \cdot v) \cdot S \cdot L \cdot B \cdot \operatorname{sen}\alpha = (J \cdot S) \cdot L \cdot B \cdot \operatorname{sen}\alpha = I \cdot L \cdot B \cdot \operatorname{sen}\alpha \qquad [5.46]$$

Se conoce esta fuerza con el nombre de fuerza de Laplace, en honor del físico y matemático francés P. S. Laplace (1749-1827):

$$F = I \cdot L \cdot B \cdot \operatorname{sen}\alpha \qquad [5.47]$$

Si la inducción magnética $\boldsymbol{B}$ y el conductor son perpendiculares ($\alpha = 90º$), se tiene la fuerza máxima $\boldsymbol{F_{max}}$ sobre el conductor, de módulo:

$$F_{max} = I \cdot L \cdot B \qquad [5.48]$$

La fuerza de Laplace, *fórmula [5.47],* se puede poner en forma de producto vectorial:

$$\bar{F} = \overline{I \cdot L} \times \bar{B} \qquad [5.49]$$

Se obtiene la fuerza en N, expresando la intensidad en A, la longitud en m y la inducción magnética en T.

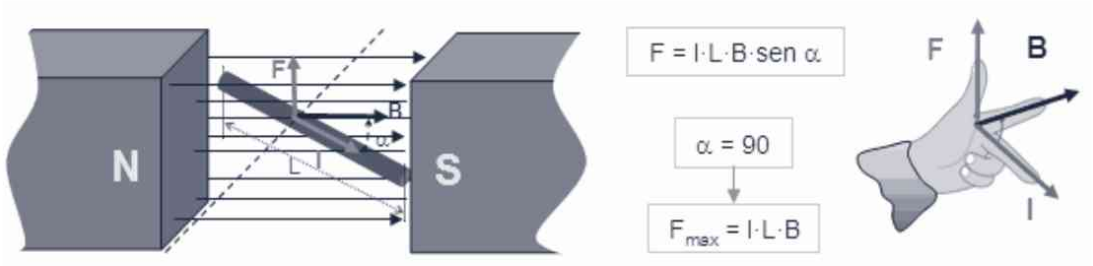


Figura 5.28. Fuerza electromagnética sobre una corriente eléctrica (Fuerza de Laplace)

En la *figura 5.29.a,* se tiene un conductor rectilíneo, perpendicular a la inducción magnética ***B*** de un campo magnético uniforme, por el que no circula *corriente*. El paso de una corriente *I* por el conductor origina un campo magnético $\boldsymbol{B_I}$ circular, *figura 5.29.b,* que modifica el campo magnético ***B*** uniforme previo al paso de la corriente *I*, dando lugar al campo magnético $\boldsymbol{B_R}$ resultante de ambos, *figura 5.29.b,* produciéndose un aumento de la inducción magnética en una zona, líneas más unidas, y una disminución en otra, líneas más separadas. Como resultado el conductor es *empujado* hacia zonas donde la inducción magnética es menor, líneas más separadas. Nótese que la fuerza ***F*** sobre el conductor ($\boldsymbol{F = I \cdot L \cdot B}$) es debida a ***B*** y no a $\boldsymbol{B_R}$.

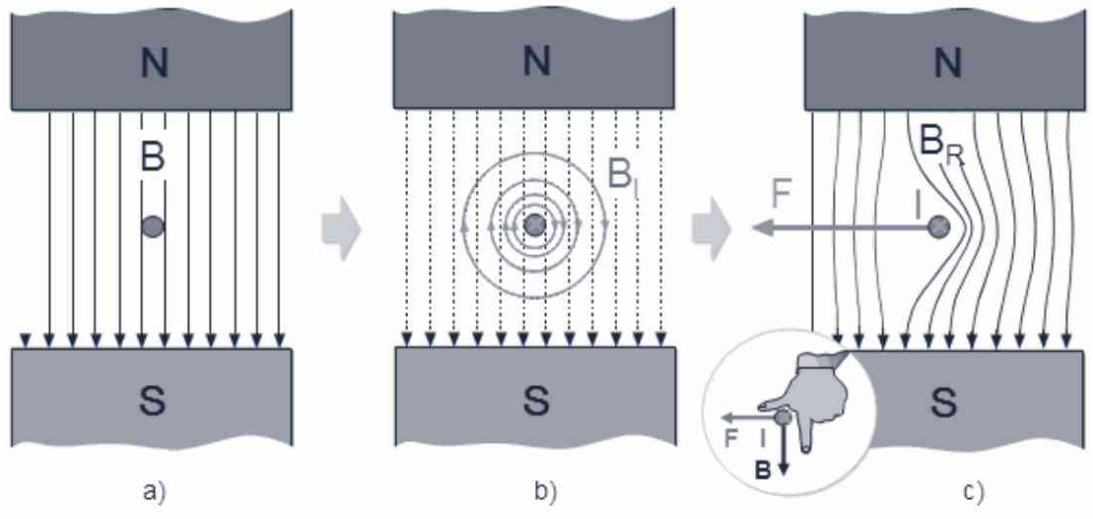


*Figura 5.29. Deformación del campo magnético uniforme original **B** debido a una corriente I*

El sentido de la fuerza electromagnética ***F*** viene dado por la *regla de la mano izquierda, figura 5.28*, que dice, "si extendemos perpendicularmente entre sí los tres primeros dedos de la mano izquierda (pulgar, medio e índice) de forma que el *índice* señale la dirección y el sentido del campo magnético ***B***, el *medio* el sentido de la corriente *I*, el pulgar indicará la dirección y sentido de la fuerza ***F***".

En la *figura 5.30* se tienen el valor de la fuerza de Laplace para diferentes ángulos entre la dirección de la corriente *I* y la inducción magnética ***B***.

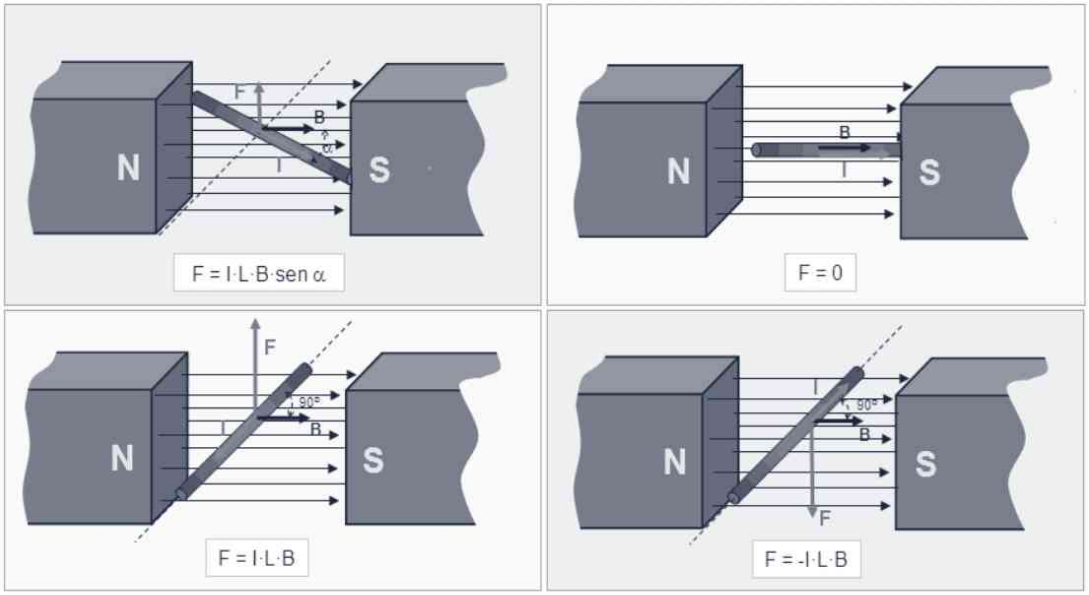


Figura 5.30. Fuerza de Laplace en diferentes situaciones

5.15 FUERZA MAGNÉTICA SOBRE UN CONDUCTOR CUALQUIERA

Si el conductor no fuera rectilíneo se deben tomar elementos ΔL del mismo que se puedan considerar rectilíneos ($\Delta L \to 0$), siendo la fuerza sobre cada elemento ΔL:

$$\Delta F = I \cdot \Delta L \cdot B \cdot \operatorname{sen} \alpha \qquad [5.50]$$

La fuerza total sobre el conductor es debida a la suma de todas las fuerzas ejercidas sobre cada elemento de corriente $I \cdot \Delta L$, entre los puntos a y b considerados, es decir:

$$F = \sum_{a}^{b} I \cdot \Delta L \cdot B \cdot \operatorname{sen} \alpha \qquad [5.51]$$

Si el conductor se encuentra en el plano del papel, en un campo magnético de inducción $\boldsymbol{B}$ constante, *figura 5.31*, la fuerza sobre dicho conductor, entrando perpendicular al plano del papel, es equivalente a la ejercida sobre un conductor de longitud L_P perpendicular a las líneas del campo (o también, a la fuerza ejercida sobre un conductor recto entre a y b, de longitud L_{ab} ($L_P = L_{ab} \cdot \operatorname{sen} \theta$).

$$F = I \cdot L_p \cdot B \qquad [5.52]$$

$$F = I \cdot L_{ab} \cdot B \cdot \operatorname{sen}\theta \qquad [5.53]$$

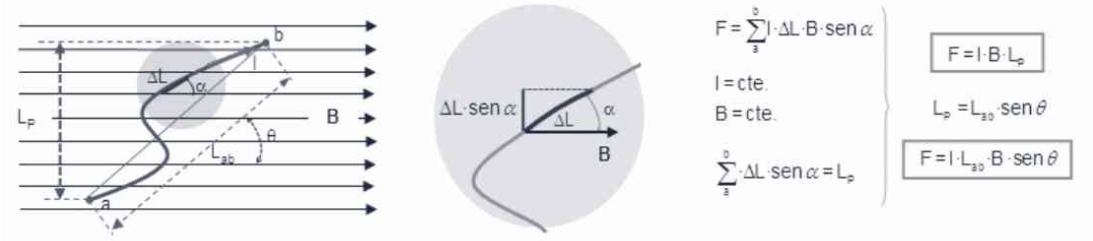


Figura 5.31. Fuerza electromagnética sobre un conductor no rectilíneo

Si el conductor de longitud L tuviese la forma de una espira cerrada de forma cualquiera, paralela al campo magnético, *figura 5.32*, la fuerza sobre la espira puede considerarse debida a la suma de las fuerzas correspondientes al tramo *ab*, de longitud L_{ab}, más la debida al tramo *ba*, de longitud L_{ba}. Como ambas fuerzas tienen igual módulo pero sentido contrario (saliendo en el plano del papel en el tramo L_{ab} y entrando en el tramo L_{ba}) resulta una fuerza neta nula sobre dicha espira, pero que, como se verá en el próximo apartado, aparece un par que tiende a orientar el plano de la espira perpendicular a la dirección del campo magnético.

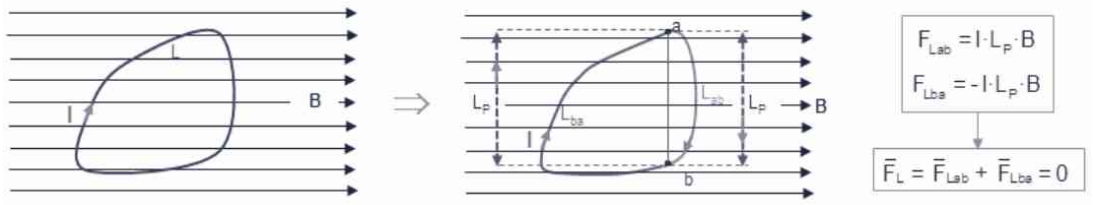


Figura 5.32. Fuerza electromagnética sobre una espira paralela al campo magnético

En forma diferencial, la *fórmula [5.50]* es:

$$dF = I \cdot dL \cdot B \cdot \operatorname{sen}\alpha \qquad [5.54]$$

De esta manera se puede integrar sobre un recorrido para hallar la fuerza sobre un conductor cualquiera:

$$F = \int_a^b I \cdot dL \cdot B \cdot \operatorname{sen}\alpha \qquad [5.55]$$

5.16 MOMENTO SOBRE UNA ESPIRA DE CORRIENTE. PRINCIPIO DEL FLUJO MÁXIMO. MOMENTO MAGNÉTICO DE UNA ESPIRA

La fuerza de un campo magnético sobre un conductor cerrado o espira de corriente es nula, como se ha visto en el apartado anterior. Sin embargo, se produce un par $\boldsymbol{T}$ que tiende a orientar la espira en dirección perpendicular al campo.

Supongamos una espira rectangular por la que circula una corriente eléctrica de intensidad I como se indica en la *figura 5.33*. La fuerza electromagnética $\boldsymbol{F'}$ en los lados *ad* y *bc,* tienen igual módulo y dirección pero sentido contrario, anulándose entre si. La fuerza electromagnética $\boldsymbol{F}$ en los lados *ab* y *cd,* tienen igual módulo, direcciones paralelas y sentidos contrarios, dando lugar a un par de fuerzas cuyo módulo T es el producto del módulo F de una de las fuerzas por la mínima distancia entre sus direcciones ($L_{ad} \cdot \text{sen } \alpha = L' \cdot \text{sen } \alpha$):

$$T = F \cdot L' \cdot \text{sen } \alpha \qquad [5.56]$$

Sustituyendo el módulo F de la fuerza electromagnética en los conductores *ab* y *cd* ($F = I \cdot L \cdot B$) y teniendo en cuenta la sección S de la espira ($S = L \cdot L'$):

$$T = I \cdot S \cdot B \cdot \text{sen } \alpha \qquad [5.57]$$

Debido al par resultante $\boldsymbol{T}$ de las fuerzas, la espira tiende a girar en el sentido contrario a las agujas de un reloj, hasta que las fuerzas que producen el par estén en la misma dirección ($\alpha = 0^\circ$), que coincide con la posición de flujo máximo a través de la espira. Esto permite enunciar el **principio del flujo máximo** que dice *"todo circuito recorrido por una corriente tiende a abrazar el máximo flujo*".

Si el sentido de la corriente en la espira se invierte, el par resultante $\boldsymbol{T}$ sería de sentido contrario al anterior y la tendencia de giro será del mismo sentido que las agujas de un reloj.

Obsérvese que el par máximo $\boldsymbol{T_{max}}$ se produce cuando $\alpha = 90^\circ$ o $\alpha = 270^\circ$, siendo $T_{max} = I \cdot S \cdot B$, y el par es mínimo $\boldsymbol{T_{min}}$ cuando $\alpha = 0^\circ$ o $\alpha = 180^\circ$, siendo $T_{min} = 0$. Nótese que la posición de flujo máximo corresponde a una posición de mínima energía potencial.

Se obtiene el par en $N \cdot m$, expresando la intensidad en A, la sección en m^2 y la inducción magnética en T.

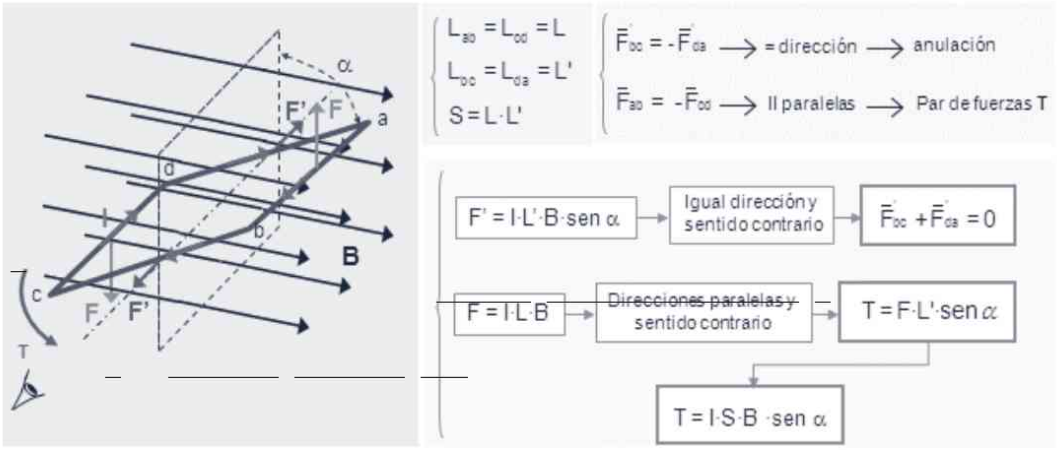


Figura 5.33. Fuerzas y par en una espira rectangular

El producto $I \cdot S$, que aparece en la *fórmula [5.57], es* característico de cada espira, independiente del campo magnético pues sólo tiene en cuenta las características de ella, intensidad de corriente y superficie, se le denomina **momento magnético de la espira** (también llamado *momento dipolar magnético*). A partir de aquí, *figura 5.34*, se define el momento magnético de la espira ***M***, como un vector perpendicular al plano que contiene a la espira (la misma dirección que el vector superficie ***S***) y sentido el que da la regla de la mano derecha según el sentido de la corriente eléctrica (tiende hacer coincidir ***M*** con ***B***).

$$\bar{M} = I \cdot \bar{S} \qquad [5.58]$$

La unidad del momento magnético en el SI es el A·m.

Para el par ***T***, la *fórmula [5.57]* toma la forma:

$$T = M \cdot B \cdot \text{sen}\,\alpha \qquad [5.59]$$

Esta expresión se puede poner en forma de producto vectorial:

$$\bar{T} = \bar{M} \times \bar{B} \qquad [5.60]$$

Obsérvese (*apartado 2.7*) la similitud con el comportamiento de los dipolos eléctricos ($\boldsymbol{p} = q \cdot \boldsymbol{d}$) que en un campo eléctrico ***E***, se alinean con el campo ***E*** debido a un par de fuerzas ($\boldsymbol{T} = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}$).

La *figura 5.33* vista desde el observador indicado muestra el perfil de la *figura 5.34,* en el que se aprecia como el par de fuerzas ***T*** tiende a girar la espira de forma que su momento magnético ***M*** quede alineado con la inducción magnética ***B***. El comportamiento de la espira es el mismo que si la espira fuese un imán, con ***M*** orientado del polo sur al polo norte. Por eso se dice la espira de corriente constituye un *dipolo magnético*, comportándose la cara de la que sale ***M*** como un norte magnético (N) y la cara opuesta como un sur

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

magnético (S). Nótese, también, cómo el campo magnético de la bobina, circular, deforma el campo magnético inductor, rectilíneo ***B***, dando lugar a un campo magnético resultante diferente a este último, representado en la *figura 5.34* por líneas de campo de trazo continuo.

Si en lugar de una espira se tratara de una bobina formada por N espiras, tanto el momento magnético de la bobina como el par sobre la bobina, se obtendría multiplicando por N los valores obtenidos para la espira.

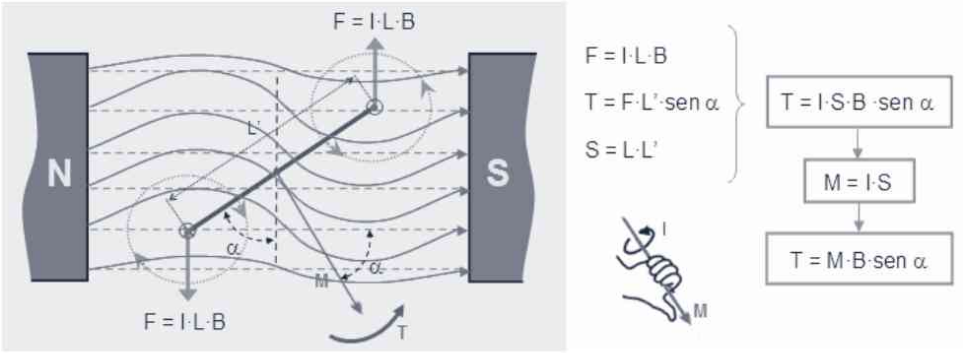


*Figura 5.34. Fuerzas **F**, par **T** y momento magnético **M** en una espira rectangular*

El momento magnético de una espira plana de superficie S de cualquier forma es también $\boldsymbol{M} = I \cdot \boldsymbol{S}$, *figura 5.35*. Para ello se considera el circuito dividido en pequeñas espiras rectangulares de área $\boldsymbol{\Delta S}$ ($\Delta S \to 0$) recorridas por corrientes idénticas I, teniendo cada una de ellas un momento $\boldsymbol{\Delta M}$:

$$\overline{\Delta M} = I \cdot \overline{\Delta S} \qquad [5.61]$$

Como las intensidades en los lados contiguos son opuestas, sus efectos magnéticos se cancelan, siendo la espira completa equivalente a la superposición de los rectángulos $\boldsymbol{\Delta S}$, siendo el momento resultante $\boldsymbol{M}$ sobre la espira la suma de los momentos $\boldsymbol{\Delta M}$, y como el área total de la espira es $S = \Sigma \Delta S$:

$$\overline{M} = \sum \overline{\Delta M} = I \cdot \sum \overline{\Delta S} = I \cdot \overline{S} \qquad [5.62]$$

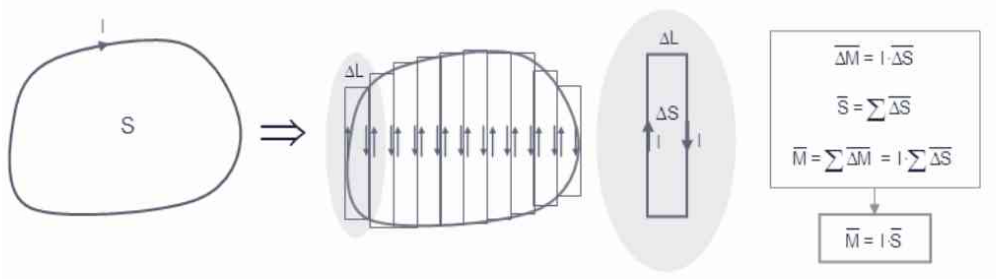


*Figura 5.35. Momento magnético **M** de una espira plana de forma irregular*

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Las fuerzas y pares estudiados en este apartado constituyen el principio de funcionamiento de los motores eléctricos y de muchos aparatos de medidas eléctricas (galvanómetros, amperímetros, voltímetros, etc.), *figura 5.36*.

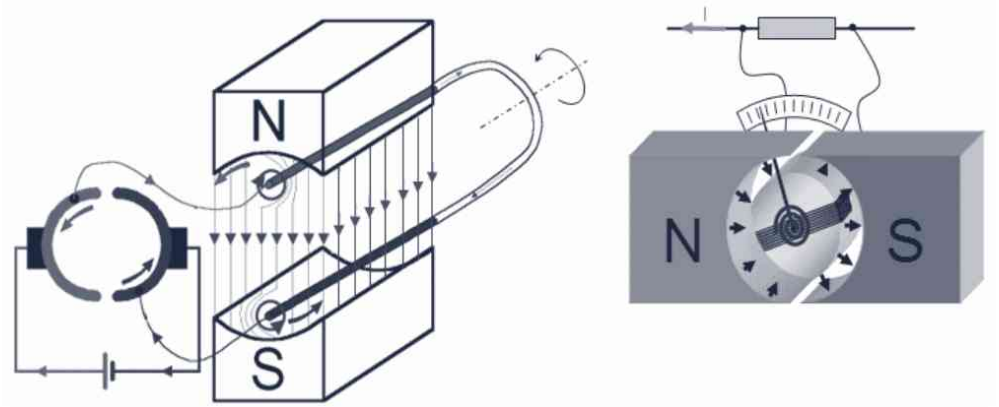


Figura 5.36. Principio de funcionamiento de un motor de corriente continua (izquierda) y galvanómetro (derecha)

Observa:

El principio del flujo máximo explica desplazamientos que se producen en un circuito recorrido por una corriente. Por ejemplo, un circuito constituido por un conductor flexible, *figura 5.37, izquierda*, puede tomar la forma circular si es recorrido por una corriente lo suficientemente intensa, un fusible que no esté sujeto adecuadamente al portafusible, en caso de un cortocircuito puede ser expulsado antes de fundirse, *figura 5.36, centro*.

En las máquinas eléctricas el fenómeno, y sus consecuencias, debido a la modificación del campo magnético inductor por parte del campo magnético del inducido (espira), se conoce con el nombre *de reacción del inducido, figura 5.37 derecha*.

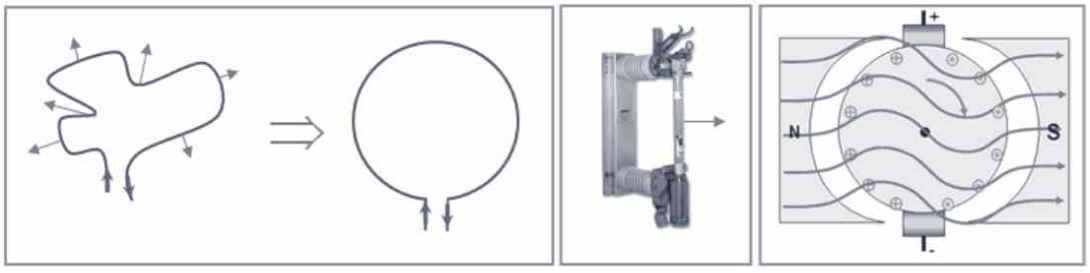


Figura 5.37. Principio de flujo máximo (figura izquierda y centro). Reacción del inducido (figura derecha)

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

5.17 FUERZA ELECTROMAGNÉTICA ENTRE DOS CORRIENTES RECTILÍNEAS PARALELAS

Sean dos conductores paralelos muy largos, *figura 5.38*, por los que circulan las corrientes I_1 e I_2 **con el mismo sentido**. La corriente I_2 crea a su alrededor un campo magnético de módulo B_{21} ($B_{21} = \mu_0 \cdot I_2/2 \cdot \pi \cdot x$), a la distancia x a la que se encuentra el conductor por el que circula la corriente I_1, tal como se ha visto en el *apartado 5.6*. Como consecuencia, *apartado 5.14*, sobre el conductor por el que circula la corriente I_1 actuará una fuerza de módulo F_1 ($F_1 = I_1 \cdot L \cdot B_{21}$), de dirección perpendicular a ambos conductores *y* cuyo sentido, aplicando la regla de la mano izquierda, es hacia la derecha.

Del mismo modo, la corriente I_1 crea a su alrededor un campo magnético de módulo B_{12} ($B_{12} = \mu_0 \cdot I_1/2 \cdot \pi \cdot x$), a la distancia x a la que se encuentra el conductor por el que circula la corriente I_2. Como consecuencia, sobre el conductor por el que circula la corriente I_2 actuará una fuerza de módulo F_2 ($F_2 = I_2 \cdot L \cdot B_{12}$), de dirección perpendicular a ambos conductores y cuyo sentido, aplicando la regla de la mano izquierda, es hacia la izquierda.

Se concluye que las fuerzas $\boldsymbol{F_1}$ y $\boldsymbol{F_2}$ tienden a unir los dos conductores, teniendo igual módulo F, de valor:

$$F = \frac{\mu_0 \cdot I_2 \cdot I_1 \cdot L}{2 \cdot \pi \cdot x} \qquad [5.63]$$

Si las corrientes tienen **distinto sentido**, *figura 5.38*, aplicando el mismo razonamiento anterior, se deduce que, en los conductores actúan dos fuerzas $\boldsymbol{F_1}$ y $\boldsymbol{F_2}$, de igual módulo F, pero que, ahora, tienden a separar los conductores.

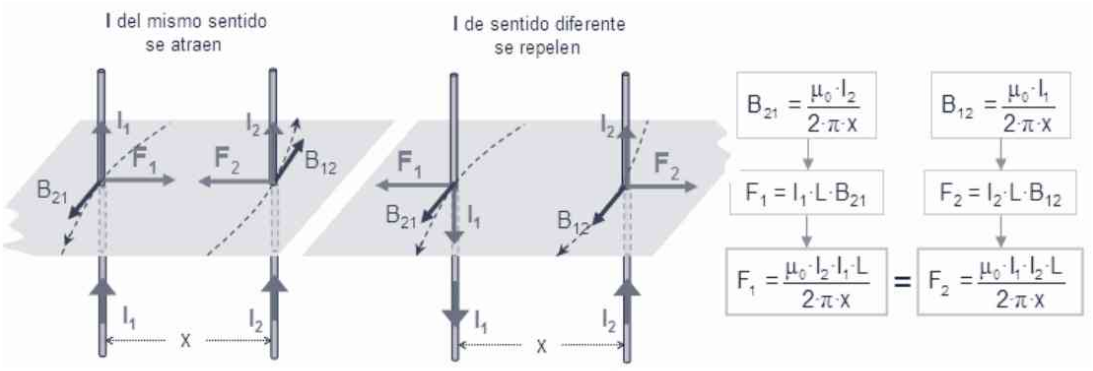


Figura 5.38. Fuerzas entre corrientes rectilíneas de igual y diferente sentido

Resumiendo, corrientes paralelas del mismo sentido se atraen, y de sentido diferente se repelen.

En la *figura 5.39*, se hace una representación gráfica del campo magnético resultante de la superposición de los campos magnéticos originados por las dos corrientes. Nótese cómo los conductores tienden a desplazarse hacia zonas donde la inducción magnética ***B*** es menor (líneas de campo más separadas).

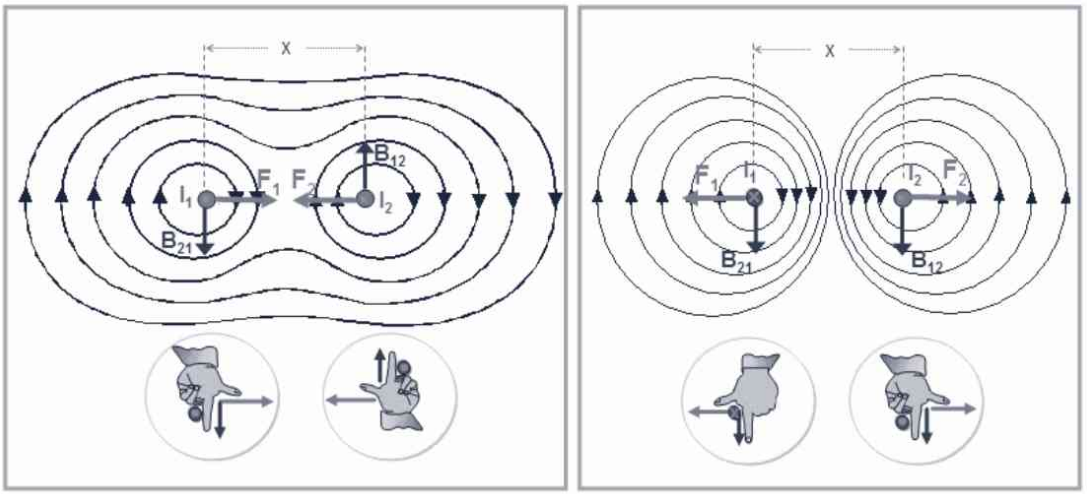


Figura 5.39. Campo magnético y fuerzas entre corrientes rectilíneas de igual y diferente sentido

La *fórmula [5.63]* permite dar una definición de amperio como unidad de intensidad eléctrica. Haciendo en dicha ecuación, $I_1 = I_2 = 1$ A y $L = x = 1$ m, como $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$, resulta:

$$F = \frac{\mu_0 \cdot I_2 \cdot I_1 \cdot L}{2 \cdot \pi \cdot x} = \frac{\mu_0 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot \pi \cdot 1} = 2 \cdot 10^{-7} \ \text{N/m} \qquad [5.64]$$

Lo cual permite definir el **amperio** como la intensidad de corriente que circulando por dos conductores rectilíneos paralelos de longitud muy larga, separados entre sí un metro en el vacío, producirá una fuerza electromagnética entre ellos de $2 \cdot 10^{-7}$ N por cada metro de longitud.

Observa:

En los circuitos eléctricos, en condiciones normales de funcionamiento, las fuerzas electromagnéticas entre conductores son muy pequeñas y se desprecian, pero en el caso de producirse cortocircuitos, sus valores pueden ser muy considerables, deformando embarrados, inducidos de máquinas eléctricas, etc. Por tanto, estas fuerzas se han de considerar en el diseño de los circuitos que puedan deformar.

5.18 EFECTO HALL

El efecto Hall, llamado así en honor a su descubridor el físico estadounidense E. W. Hall (1855-1938), consiste en la aparición de un campo eléctrico en un conductor cuando es atravesado por un campo magnético.

Cuando por un material conductor o semiconductor, situado inmovilizado en el interior de un campo magnético de inducción $\boldsymbol{B}$ circula una corriente eléctrica I, *figura 5.40*, los portadores de carga se desvían, debido a la Fuerza de Lorentz ($\boldsymbol{F} = q \cdot \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{B}$) y se agrupan a un lado del material conductor o semiconductor, apareciendo así un campo eléctrico perpendicular al campo magnético y al propio campo eléctrico generador de la corriente I. Este campo eléctrico es el denominado campo Hall y ligado a él aparece la tensión Hall, que se puede medir mediante un voltímetro tal como se indica en la *figura 5.40*.

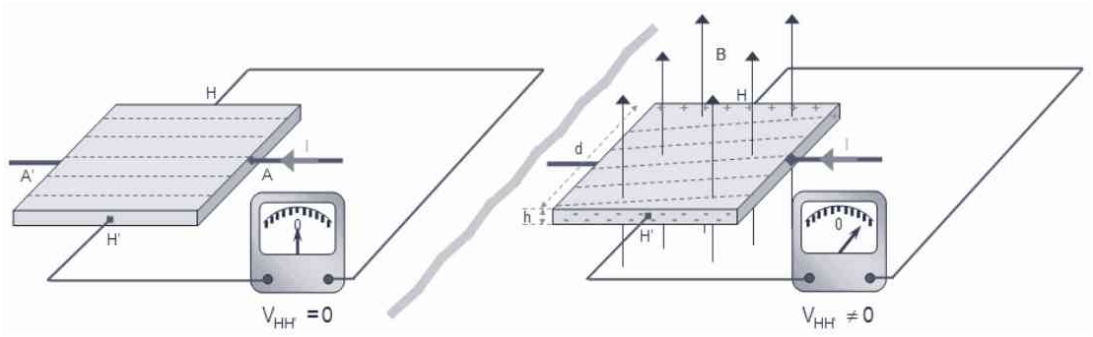


Figura 5.40. Efecto Hall

En la *figura 5.40* se considera un conductor metálico en forma de placa paralepipédica de espesor h y ancho d, recorrido por una corriente I. Si el conductor se encuentra fuera de un campo magnético, *figura 5.40 izquierda,* las líneas de corriente, de A a A', son paralelas y perpendiculares a los planos A y A', no existe ddp entre H y H' ($V_H = 0$).

Si perpendicular a la placa conductora actúa un campo magnético $\boldsymbol{B}$, *figura 5.40 derecha*, las líneas de corriente se desvían debido al efecto Hall, apareciendo una ddp entre H y H ($V_H \neq 0$) cuya polaridad depende del tipo de portadores de carga.

En efecto, cuando las cargas eléctricas se desplazan (electrones en este caso) de derecha a izquierda de la placa a una velocidad v, son desviados hacia la parte inferior de ella debido a la fuerza electromagnética $\boldsymbol{F}$, pero a medida que las cargas aumentan en este lado, se crea un campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ que se opone a este desplazamiento lateral de cargas, llegándose a un equilibrio en el que la tensión Hall tiene su máximo, siendo ahora la fuerza eléctrica $\boldsymbol{F_E}$, fuerza de Coulomb, igual en dirección y módulo a la fuerza electromagnética $\boldsymbol{F}$, pero de sentido contrario, cumpliéndose:

$$F_E = F \Rightarrow q \cdot E = q \cdot v \cdot B \Rightarrow E = v \cdot B \qquad [5.65]$$

Si en la ecuación anterior, *figura 5.40*, se sustituyen el valor del campo eléctrico E, *fórmula [1.11]*; el de la velocidad de arrastre v, *fórmula [3.5];* y de la densidad de corriente J, *fórmula [3.3]*; se obtiene para la tensión de Hall:

$$V_H = R_H \frac{I \cdot B}{h} \qquad [5.66]$$

Siendo R_H una constante que depende de cada material y se denomina constante de Hall.

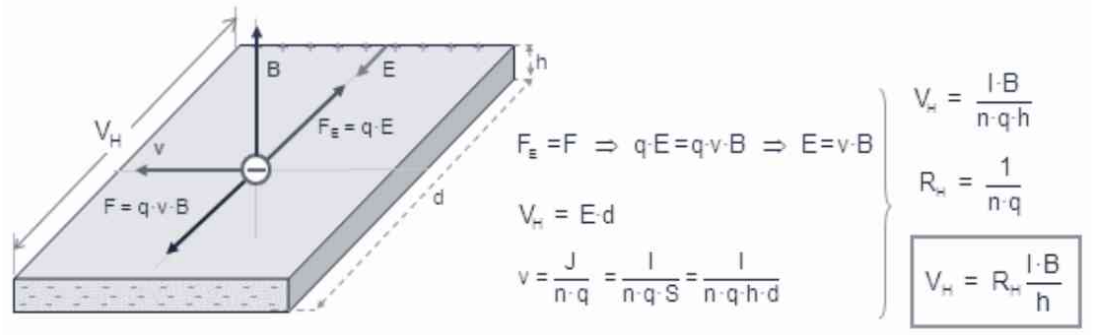


Figura 5.41. Deducción de la tensión de Hall

Los sensores de efecto Hall, basados en este principio, permiten medir campos magnéticos, intensidad de corrientes eléctricas, proximidades y movimientos, etc.

5.19 EXCITACIÓN MAGNÉTICA. PERMEABILIDAD MAGNÉTICA RELATIVA. CORRIENTES AMPERIANAS

Si se tiene un solenoide con una relación entre su longitud L y su radio R suficientemente grande, con N/L espiras, muy próximas, por unidad de longitud, y cuyo núcleo es el vacío (y aproximadamente el aire) se ha visto, *apartado 5.11,* que la inducción $\boldsymbol{B_0}$ en la parte interior central del mismo tiene por módulo $B_0 = \mu_0 \cdot N \cdot I/L$. En esta fórmula se observa que la inducción $\boldsymbol{B}$ es función:

a) De unas características propias del circuito eléctrico, *manantial del campo*, esto es, número de espiras por unidad de longitud (N/L) e intensidad del circuito (I).

b) De una característica propia de la sustancia interior que forma el núcleo, *permeabilidad magnética*, el vacío en este caso, μ_0.

Se define una nueva magnitud vectorial que sólo depende del manantial del campo y se denomina **excitación magnética H** o *intensidad de campo magnético*, siendo su módulo:

$$H = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{N \cdot I}{L} \qquad [5.67]$$

Como la cantidad de espiras es un número sin dimensiones, la unidad de ***H*** es el *amperio/metro* (A/m).

Si el núcleo del solenoide es ocupado por otra sustancia diferente al vacío, por ejemplo un metal férreo, *figura 5.41*, la inducción magnética ***B*** en un punto tiene un valor muy superior a la inducción magnética en el vacío ($B >> B_0$), cumpliéndose:

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \qquad [5.68]$$

Siendo μ una característica de la sustancia que forma el núcleo denominada *permeabilidad magnética absoluta* del medio magnético, tal que:

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r \qquad [5.69]$$

Siendo μ_0 la **permeabilidad magnética del vacío** ($\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$) ($N/A^2$) y μ_r *la permeabilidad magnética relativa* del medio magnético.

En la *tabla 5.1* se tienen los valores de la *permeabilidad relativa* μ_r de diferentes sustancias.

Permeabilidad relativa μ_r			
Ferromagnéticos		**Paramagnéticos**	
Sustancia	**μ_r (máx.)**	**Sustancia**	**$\mu_r = 1 + \chi$**
Hierro dulce	200	Aire	$1 + 3{,}6 \cdot 10^{-7}$
Cobalto	270	Aluminio	$1 + 2{,}2 \cdot 10^{-5}$
Níquel	600	Platino	$1 + 2{,}6 \cdot 10^{-4}$
Hierro fundido	600	**Diamagnéticos**	
Hierro magnético (0,1% Si)	$5{,}5 \cdot 10^3$	**Sustancia**	**$\mu_r = 1 - \chi$**
Acero forjado	$6 \cdot 10^3$	Oro	$1 - 3{,}6 \cdot 10^{-5}$
Hierro al silicio (4% Si)	$6{,}7 \cdot 10^3$	Cobre	$1 - 1 \cdot 10^{-5}$
Hipernik (50% Fe, 50% Ni)	$7 \cdot 10^4$	Agua	$1 - 0{,}9 \cdot 10^{-5}$

Tabla 5.1 Permeabilidad relativa de diferentes sustancias.

Para conocer la enorme intensidad de campo eléctrico ***H*** (cantidad de A/m) que es necesario para obtener una inducción magnética ***B*** de 1 tesla con un solenoide de núcleo de aire, de la *fórmula 5.64* se tiene que, $N \cdot I/L = B_0/\mu_0 = ¼ \cdot \pi \cdot 10^{-7} \approx 800.000$ A/m.

La magnitud ***B*** define la forma como se magnetiza la materia, depende del medio en el que se presenta el campo magnético, la magnitud ***H*** define el campo magnético externo aplicado, depende únicamente de la densidad de corriente aplicada ($N \cdot I/L$) y es independiente del medio físico en el que se manifiesta el campo.

En el vacío existe proporcionalidad rigurosa entre los vectores ***B*** y ***H*** y sus líneas de campo se confunden. En los medios magnéticos los vectores ***B*** y ***H*** dejan de ser proporcionales y, además, manifiestan propiedades completamente diferentes, como se verá en los próximos apartados.

Se tiene pues, *figura 5.41*, que el solenoide genera un campo magnético $\boldsymbol{B_0}$ en el vacío y que si el núcleo es una sustancia férrea, la inducción magnética ***B*** es ahora mucho mayor, ($B = \mu \cdot H$), pudiéndose considerar, también, que la inducción ***B*** es la suma de la inducción existente en el vacío $\boldsymbol{B_0}$ más la inducción $\boldsymbol{B_M}$ debida a la sustancia del núcleo:

$$\bar{B} = \bar{B}_0 + \bar{B}_M \qquad [5.70]$$

La hipótesis de Ampère, del físico francés A. M. Ampère (1775-1836), supone que este aumento de inducción magnética es debido a que por el núcleo del solenoide, *figura 5.42*, debido a la acción del campo magnético, circulan unas corrientes que provocan la imanación del material y que reciben el nombre de **corrientes amperianas** (para distinguirlas de las que circulan por los conductores llamadas *verdaderas*) que equivaldrían a que, estando el núcleo vacío, pasase por la bobina del solenoide una corriente adicional I_M, que sumada a la inicial I generarían la inducción ***B***, *figura 5.41*. Como en la técnica, el caso más frecuente es que $\boldsymbol{B_0}$ y $\boldsymbol{B_M}$ tengan la misma dirección, se puede poner:

$$B = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot (I + I_M)}{L} = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{L} + \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I_M}{L} \qquad [5.71]$$

La expresión $N \cdot I_M/L$ corresponde al módulo del llamado vector *magnetización o* **imanación** ***M***, que es de la misma naturaleza que el vector ***H*** (de módulo $N \cdot I/L$) teniendo la misma unidad (A/m). La expresión anterior, en su forma general, tiene la forma:

$$\bar{B} = \mu_0 \cdot \bar{H} + \mu_0 \cdot \bar{M} = \mu_0 \cdot (\bar{H} + \bar{M}) \qquad [5.72]$$

Siendo el módulo de ***M***:

$$M = \frac{N \cdot I_M}{L} \qquad [5.73]$$

La magnitud ***M*** representa el momento magnético por unidad de volumen (*M/V*), pues teniendo en cuenta la *fórmula [5.62],* se tiene para un volumen *V* de núcleo del solenoide de sección *S* y longitud *L*: $M/V = M/S \cdot L = (I_M \cdot S) \cdot N/S \cdot L = N \cdot I_M/L$.

En una sustancia imanada, las corrientes amperianas suman al campo existente **H**, cuando el medio era el vacío, un campo de imanación **M**. Nótese la similitud entre el vector **M** en el campo magnético y el vector polarización **P** en el campo eléctrico, apartado 2.7.

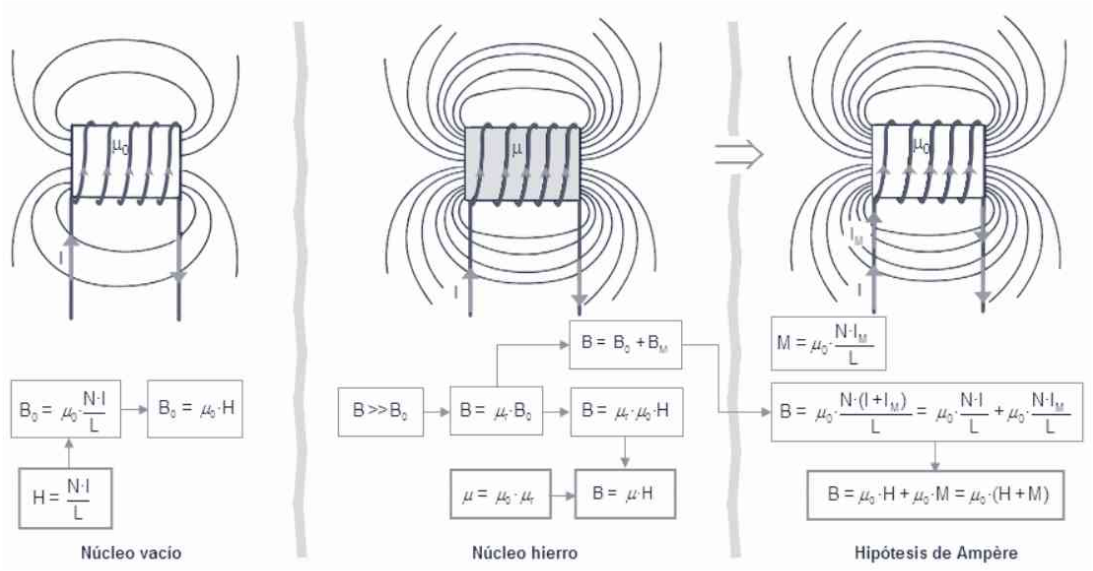


Figura 5.42. Inducción magnética en un solenoide: núcleo vacío y núcleo férreo

De las ecuaciones anteriores se deduce una interesante relación para la permeabilidad relativa μ_r. En efecto, en el solenoide con núcleo férreo se tiene $B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot N \cdot I/L$, *fórmula [5.68]*, y en el solenoide en la hipótesis ***Ampère*** [$B = \mu_0 \cdot N \cdot (I + I_M)/L$], *fórmula [5.71]*, de donde se deduce:

$$\mu_r = \frac{N \cdot I + N \cdot I_M}{N \cdot I} = \frac{\text{Suma de las corrientes verdaderas y amperianas}}{\text{Suma de las corrientes verdaderas}} \qquad [5.74]$$

Nótese la similitud entre las magnitudes del campo magnético y las magnitudes del campo eléctrico en la *Ley de Gauss* para los campos eléctricos, *apartado 2.9,* corrientes verdaderas equivaldrían a cargas libres, corrientes amperianas equivaldrían a cargas inducidas.

5.20 IMANACIÓN. TEOREMA DE AMPÈRE PARA EL VECTOR H

Si se tiene un núcleo cilíndrico imanado según su eje, *figura 5.43*, la hipótesis de las *corrientes amperianas* supone que en el interior del núcleo existen unas corrientes eléctricas microscópicas circulares, en planos paralelos entre sí y perpendiculares al eje, de resistencia nula y, por tanto, de duración indefinida; cada una de estas corrientes produciría un campo magnético elemental y la suma de todos ellos explicaría las propiedades magnéticas de los materiales. Por otra parte, los efectos de todas las *corrientes amperianas* se destruyen en las líneas de contacto de todos sus circuitos respectivos, pero no en la periferia, pudiéndose considerar el campo magnético debido a todas ellas equivalente al creado por una capa de corriente que rodea al núcleo, es decir que circula sobre su superficie lateral, y equivalente a $N \cdot I_M/L$.

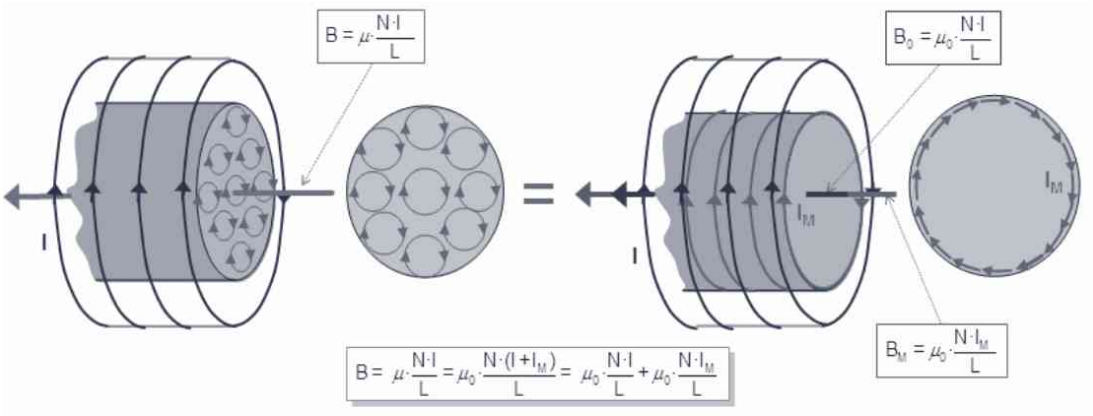


Figura 5.43. Corrientes verdaderas I y corrientes amperianas I_M

Actualmente, se sabe que los electrones en los átomos se comportan, efectivamente, como pequeños anillos de corriente, con sus correspondientes momentos magnéticos. Junto a su movimiento orbital en torno al núcleo, cada electrón efectúa una especie de rotación en torno a sí mismo (espín), contribuyendo ambos fenómenos al magnetismo de cada átomo y todos los átomos al magnetismo del material. En la época de Ampère se ignoraba la existencia del electrón, por lo que su hipótesis de las corrientes circulares se adelantó casi un siglo a la moderna teoría atómica.

En el solenoide correspondiente a la hipótesis de Ampère, *figura 5.42*, *y* de la *ecuación [5.72],* se tiene:

$$\bar{H} = \frac{B}{\mu_0} - \bar{M} \qquad [5.75]$$

Multiplicando los dos miembros de la igualdad anterior por L se tiene:

$$\bar{H}\cdot L = \left(\frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M}\right)\cdot L \qquad [5.76]$$

Si en dicho solenoide, *figura 41 derecha*, de forma análoga a como se hizo en el *apartado 5.11* para la inducción magnética $\boldsymbol{B}$, *figura 5.22*, se halla la circulación $\boldsymbol{C_c}$ del campo magnético $\boldsymbol{H}$ a lo largo de un recorrido rectangular *abcda* (*interior y exterior al solenoide*) se tiene que $C_c = H \cdot L$.

Por otra parte, sustituyendo en la *ecuación [5.76],* cuya expresión también se cumple en forma aritmética en el solenoide que se estudia ($\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{H}$ tienen la misma dirección), el módulo de $\boldsymbol{M}$ dado por la *ecuación [5.73],* se tiene

$$H\cdot L = \frac{B\cdot L}{\mu_0} - N\cdot I_M \qquad [5.77]$$

También conforme al Teorema Ampère ($C_c = \Sigma \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{L} = \mu_0\cdot\Sigma I$), *ecuación [5.29],* se ha de cumplir para la circulación de $\boldsymbol{B}$ al recorrido considerado:

$$B\cdot L = \mu_0\cdot N\cdot (I + I_M) \qquad [5.78]$$

Despejando B de la ecuación anterior y sustituyendo en la *ecuación [5.77],* se obtiene:

$$H\cdot L = N\cdot I \qquad [5.79]$$

Lo que significa que la circulación del vector intensidad de campo magnético **H** a lo largo de una línea cerrada es igual a la suma de corrientes **convencionales** que atraviesa el área de dicha curva, es decir, que no depende de las corrientes de magnetización.

La fórmula anterior se puede generalizar para una curva cerrada cualquiera, de forma análoga a como se hizo en el *apartado 5.9* para la inducción $\boldsymbol{B}$, obteniéndose el *Teorema de Ampère* para el vector $\boldsymbol{H}$:

$$C_c = \sum_0^c \bar{H}\cdot\overline{\Delta L} = \sum_1^n I_i \qquad [5.80]$$

"*En un campo magnético, la circulación C_c del vector intensidad de campo magnético $\boldsymbol{H}$ a lo largo de una curva cerrada C es igual a la corriente neta (suma aritmética de las intensidades) que corta el área limitada por dicha curva*". La posibilidad

de aplicar el Teorema de ***Ampère a la circulación del vector* H *sobre cualquier circuito constituye la* principal justificación *de haberse definido el vector* H.**

Utilizando el cálculo integral la fórmula anterior tiene la forma:

$$C_c = \int_c \overline{H} \cdot \overline{dL} = \sum_1^n I_i \qquad [5.81]$$

5.21 MATERIALES MAGNÉTICOS: DIAMAGNETISMO, PARAMAGNETISMO, FERROMAGNETISMO

La explicación del comportamiento magnético de las sustancias se encuentra en la estructura interna de la materia, *apartado 5.2*, teniendo en cuenta que, como sugirió Ampère, el origen del magnetismo son las corrientes eléctricas. Los electrones tienen en los átomos un movimiento orbital alrededor del núcleo y un movimiento de giro sobre sí mismos (espín), por lo que actúan como pequeñas espiras de corriente que generan un campo magnético; es decir, se comportan como pequeños imanes. Los efectos de estos pequeños imanes atómicos pueden acumularse o anularse entre sí. Además, los imanes atómicos pueden agruparse en conjuntos de átomos, denominados dominios, que actúan como si se tratase de un solo átomo.

En ausencia de un campo magnético la mayor parte de la materia no manifiesta propiedades magnéticas; eso es debido a que internamente los campos magnéticos generados por el movimiento de los electrones están compensados unos con otros. Sin embargo, al someter cualquier material a la acción de un campo magnético exterior, se produce una **modificación** del movimiento electrónico modificándose consecuentemente sus propiedades magnéticas.

Debido a ello las sustancias se comportan de modo diferente cuando se encuentran en presencia de un campo magnético. Para comprobarlo, basta con introducirlas por uno de los extremos de un electroimán y medir la fuerza que ejerce el campo magnético sobre ellas. Cuando esta experiencia se realiza con diversos tipos de sustancias, algunas se mueven hacia el interior del electroimán (zona donde el campo magnético es mayor), otro grupo de sustancias, como por ejemplo compuestos de hierro y níquel, manifiestan este comportamiento de manera muy acentuada experimentando una intensa fuerza magnética y en otro grupo, la muestra se aleja del electroimán moviéndose hacia la zona de menor intensidad de campo magnético.

Cuando la *permeabilidad relativa* μ_r del medio magnético *permanece constante*, independiente de la intensidad de campo magnético $\boldsymbol{H}$, se dice que el **medio magnético es perfecto** *[medio magnético lineal, homogéneo e isótropo (LHI)]*. Como $\boldsymbol{B} = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \boldsymbol{H}$, *fórmula [5.65]*, la curva $\boldsymbol{B(H)}$ es una recta que pasa por el origen. Teniendo en cuenta la ecuación $\boldsymbol{B} = \mu_0 \cdot (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M})$, *fórmula [5.69]*, se tiene $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{B}/\mu_0 - \boldsymbol{H}$, *fórmula [5.72]*, con lo cual la curva $\boldsymbol{M(H)}$ también pasa por el origen, por lo que se pude poner que:

$$\overline{M} = \chi \cdot \overline{H} \qquad [5.82]$$

El coeficiente χ, constante, se denomina *susceptibilidad magnética del medio,* diferente para cada sustancia, siendo para el vacío $\chi = 0$, puesto que sólo las sustancias pueden tener imanación. La *ecuación [5.69]* se puede poner en la forma:

$$\overline{B} = \mu_0 \cdot (\overline{H} + \overline{M}) = \mu_0 \cdot (\overline{H} + \chi \cdot \overline{H}) = \mu_0 \cdot \overline{H}\,(1 + \chi) \qquad [5.83]$$

De donde, teniendo en cuenta que $\boldsymbol{B} = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \boldsymbol{H}$, *fórmula [5.68],* se tiene:

$$\mu_r = 1 + \chi \qquad [5.84]$$

Tanto la permeabilidad relativa μ_r como la susceptibilidad magnética χ son magnitudes adimensionales.

Todas las sustancias, sólidas, líquidas y gaseosas, tienen propiedades magnéticas, es decir, se producen en ellas corrientes amperianas, pero su comportamiento es diferente cuando se sitúan en el interior de un campo magnético, *figuras 5.43, 5.44* y *5.45,* lo que permite clasificarlas en tres grandes grupos:

Sustancias diamagnéticas

En ellas los campos magnéticos ocasionados por las corrientes microscópicas de sus átomos (orbital y spin) se compensan, de modo que el campo magnético resultante del átomo es nulo. Cuando a estos materiales se les aplica un campo magnético, se generan por inducción pequeñas corrientes que se oponen al campo externo (ley de Lenz, capítulo 6, por lo que el efecto diamagnético está presente siempre en todas las sustancias), y el resultado final es que son repelidas por éste. Son sustancias diamagnéticas el agua, el cloruro sódico, el alcohol, el oro, la plata, el cobre, etc. Los materiales superconductores son diamagnéticos perfectos ($\chi = -1$).

En estas sustancias $\chi < 0$ ($|\chi| << 1$), los vectores $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{H}$ son proporcionales pero de sentido contrario. Su permeabilidad relativa es $\mu_r < 1$ (ligeramente inferior a 1 $\Rightarrow \mu_r < \mu_0$).

Sustancias paramagnéticas

En ellas los campos magnéticos ocasionados por las corrientes microscópicas de sus átomos (orbital y spin) no se compensan, de modo que el campo magnético resultante del átomo no es nulo, pero sus momentos magnéticos están orientados al azar. Cuando estas sustancias son sometidas a la acción de un campo magnético externo, además del efecto

diamagnético mucho más débil, se produce la alineación de los momentos magnéticos de los átomos a favor del campo externo, reforzándose. Generalmente, este efecto suele ser débil y se ve muy afectado por la agitación térmica (que tiende a destruir este orden), por lo que el paramagnetismo es muy sensible a la temperatura. Cuando el campo magnético externo se suprime, el movimiento térmico da lugar a que las direcciones de los momentos dipolares magnéticos se orienten de nuevo al azar. Estos materiales son atraídos ligeramente por imanes, pero no se convierten en materiales permanentemente magnetizados. Son sustancias paramagnéticas, el estaño, el platino, o el oxígeno y el aluminio.

En estas sustancias $\chi > 0$ ($\chi << 1$), los vectores $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{H}$ son proporcionales y del mismo sentido. Su permeabilidad relativa es $\mu_r > 1$ (ligeramente superior a $1 \Rightarrow \mu_r > \mu_0$).

Sustancias ferromagnéticas

Llamadas así por ser el hierro el más caracterizado de ellos. En estas sustancias, al igual que en las paramagnéticas, los campos magnéticos ocasionados por las corrientes microscópicas de sus átomos (orbital y spin) no se compensan, de modo que el campo magnético resultante del átomo no es nulo, pero en las ferromagnéticas los momentos magnéticos de grupos de átomos vecinos se mantienen alineados en regiones llamadas dominios magnéticos, incluso en ausencia de campo magnético externo. En la figura 5.45 se han representado estos dominios mediante cuadrados de tono gris. Por tanto, pueden ser magnetizadas permanentemente por la aplicación de un campo magnético externo. Son sustancias ferromagnéticas el hierro, el níquel el cobalto, y sus aleaciones.

En estas sustancias, χ es variable y muy grande y los vectores $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{H}$ no tienen relación funcional, $\boldsymbol{M}$ depende de todos los valores tomados por $\boldsymbol{H}$ anteriormente, conociéndose este fenómeno *como histéresis magnética,* como se verá en el *apartado 5.22*. Su permeabilidad relativa es $\mu_r >>1$ ($\mu_r >> \mu_0$) pero **no es constante**, es variable dependiendo de $\boldsymbol{H}$, recurriéndose a tablas o gráficos para encontrar su valor. En la práctica éstas son consideradas las únicas sustancias magnéticas. El aumento de la inducción magnética debida a estos materiales es del orden de 10^3 a 10^4 veces mayor que la existente cuando el núcleo es aire.

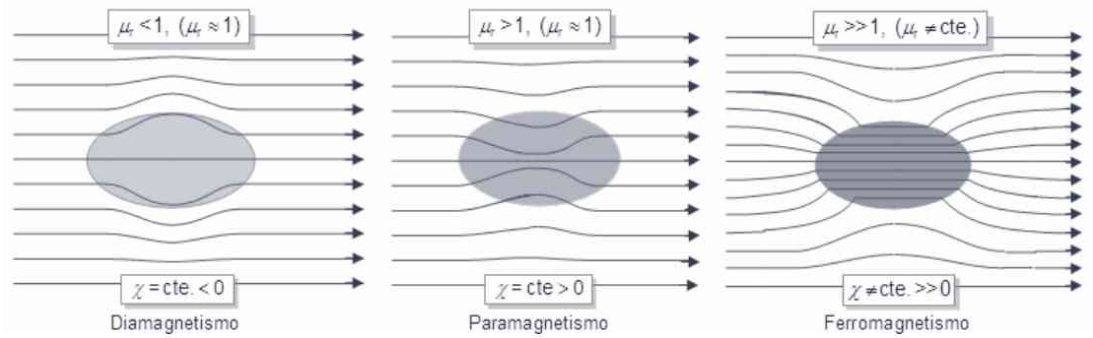


Figura 5.44. Comportamiento de las sustancias en el interior de un campo magnético

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

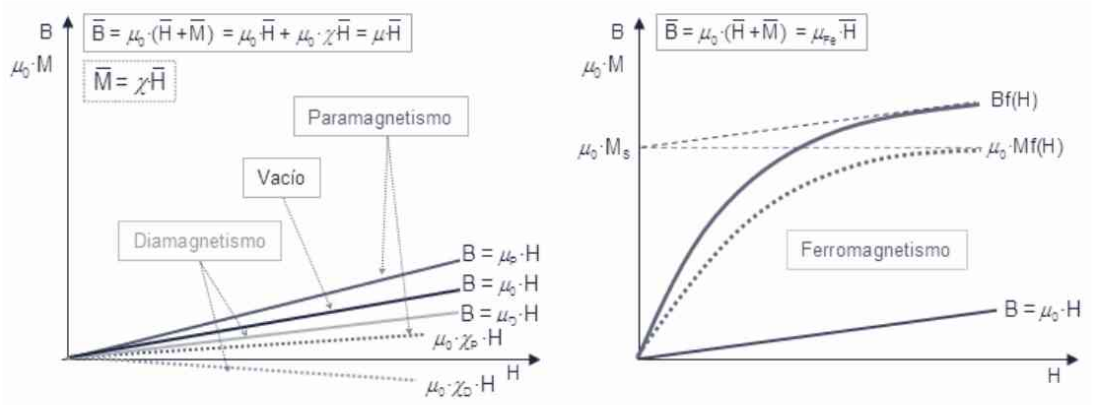


Figura 5.45. Inducción B(H) e imanación M(H)

Así como el diamagnetismo y el paramagnetismo se explica por las corrientes microscópicas de sus átomos, para el ferromagnetismo, como se ha visto, es necesario, también, considerar su organización dentro del *cristal metálico*, considerando los *dominios magnéticos* como agrupación de átomos, *figura 5.46*. Fue el físico francés P. E. Weiss (1865-1940) quien postuló la existencia de estos dominios que, en su honor, llevan su nombre.

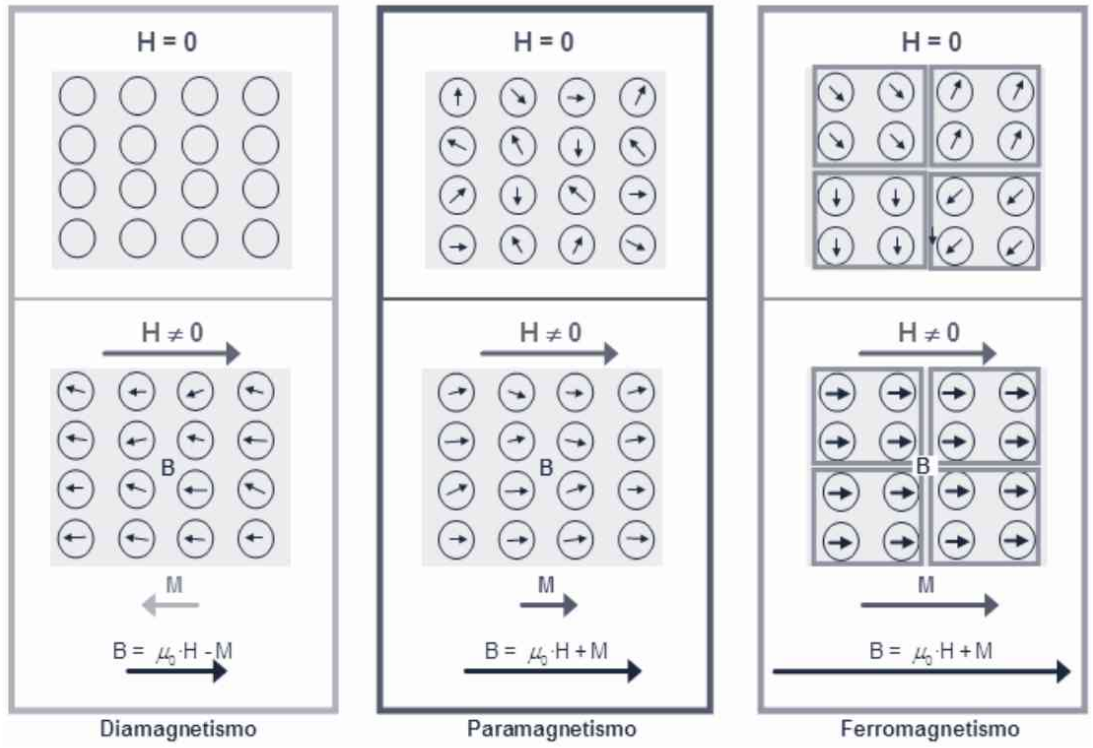


Figura 5.46. Sustancias diamagnéticas, paramagnéticas y ferromagnéticas

Si se somete un material ferromagnético a un campo H progresivo, se producen las siguientes modificaciones en los dominios magnéticos, *figura 5.47*:

1. Si no existe campo ***H*** exterior, los dominios están orientados aleatoriamente y la inducción ***B*** en el material es nula.

2. Comienza un ensanchamiento de los dominios magnéticos (en diferente tono en el gráfico) donde los imanes atómicos tienen direcciones paralelas, o casi paralelas, comenzando el material a magnetizarse.

3. Comienza la rotación del resto de los dominios para llevarlos a la dirección de ***H***, incrementándose la magnetización ***M*** y, por tanto, $B = \mu_0 \cdot (H + M)$, la inducción ***B*** del material.

4. La orientación de todos los dominios magnéticos ha tomado la dirección de ***H*** alcanzándose la *saturación* $B_S = \mu_0 \cdot (H + M_S)$. A partir de aquí no varía la imanación ***M*** del material y en la fórmula $B = \mu_0 \cdot (H + M)$, M se hace constante ($M = M_S$ = cte.), por lo que la inducción magnética ***B*** aumenta con la misma ley que en el vacío ($\Delta B = \Delta[\mu_0 \cdot (H + M)] = \mu_0 \cdot \Delta H + \mu_0 \cdot \Delta M) = \mu_0 \cdot \Delta H$, puesto que $\Delta M = 0$). Se dice que el metal está *saturado, figura 5.45 derecha.*

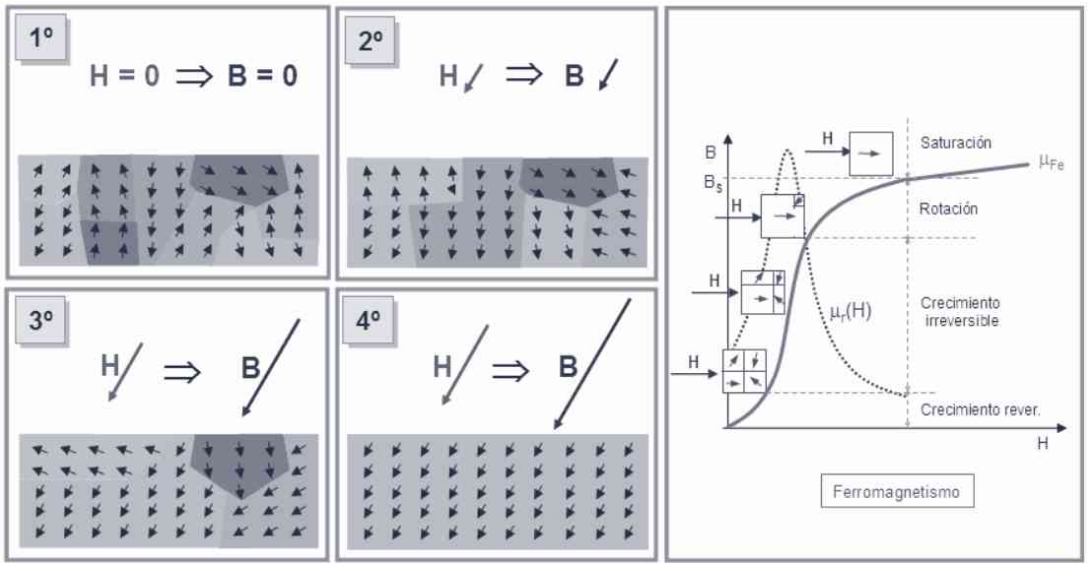


Figura 5.47. Ferromagnetismo: modificaciones en los dominios magnéticos debidas a un campo ***H***

La **temperatura** influye sobre las propiedades magnéticas de las sustancias, pues provoca un aumento de la agitación térmica de los átomos, haciendo cada vez más difícil su orientación. Cuando la temperatura alcanza un valor suficientemente elevado las sustancias pierden el efecto de la orientación alcanzado por sus átomos y pierde el magnetismo. La temperatura a partir de la cual una sustancia ferromagnética pierde sus propiedades

magnéticas volviéndose paramagnética se denomina *temperatura crítica o punto de Curie*, por ejemplo, para el hierro es de 1.043 ºC, para el níquel 631 ºC y para el cobalto 1.394 ºC.

Una prueba de la teoría de los dominios magnéticos es el **efecto Barkhausen**, en honor del físico alemán H. G. Barkhausen (1881-1956), que consiste en un aumento brusco del valor del campo magnético que tiene lugar en el proceso de magnetización de cualquier material ferromagnético, y que incluso puede ser escuchado mediante un altavoz.

5.22 HISTÉRESIS MAGNÉTICA

Si un material tiene un comportamiento lineal, al aplicarle un campo magnético $\boldsymbol{H}$, se producirá en su interior una inducción magnética $\boldsymbol{B}$, tal que $\boldsymbol{B} = \mu \cdot \boldsymbol{H}$. Esto representado gráficamente corresponde a una recta, *figura 5.44 izquierda*, al aumentar el valor de $\boldsymbol{H}$, aumenta el valor de $\boldsymbol{B}$ y la pendiente de la recta es constante, $\mu = \boldsymbol{B/H}$.

Los materiales ferromagnéticos refuerzan el efecto del campo magnético exterior y además se comportan de una forma no lineal, *figura 5.44 derecha*. La relación $\boldsymbol{B/H}$ depende de $\boldsymbol{H}$ (es decir μ es variable) y además depende de la "historia" del material.

Si a un material ferromagnético, inicialmente no imanado, *figura 5.48*, se le aplica un campo magnético progresivo $\boldsymbol{H}$, se tiene que a medida que aumenta el módulo de $\boldsymbol{H}$ se observa un aumento de la inducción $\boldsymbol{B}$. Este aumento, recorrido *oa*, es inicialmente lento (debido al movimiento reversible de las paredes de los dominios magnéticos), para luego acelerarse (movimiento irreversible de paredes de dominios), siguiendo una línea recta cuya pendiente define la permeabilidad magnética del material μ_r. En ambos casos de movimientos de paredes, crecen los dominios favorablemente orientados en la dirección del campo aplicado. Este proceso continúa hasta alcanzar un valor de saturación B_s, con un único dominio con su imanación en la dirección del campo aplicado $\boldsymbol{H}$, por encima del cual, punto *a*, $\boldsymbol{B}$ sigue una línea de crecimiento recta que es función únicamente al aumento de $\boldsymbol{H}$.

Si ahora se reduce el valor del campo magnético $\boldsymbol{H}$, la inducción $\boldsymbol{B}$ no recorre el mismo camino, recorrido *oa*, sino que decrece más lentamente, recorrido *ab* (tomando un valor más elevado para $\boldsymbol{B}$ que en el curso de crecimiento del campo $\boldsymbol{H}$, de aquí le viene el nombre de *histéresis*, palabra de origen griego con el significado de retraso) hasta alcanzar un valor B_r, denominado *inducción remanente*, con un campo magnético aplicado $\boldsymbol{H}$ nulo (si en este momento se saca el material del campo magnético $\boldsymbol{H}$ aplicado, queda convertido en un imán permanente, cuya imanación depende del segmento *ob*). Esta inducción magnética B_r está asociada al movimiento irreversible de paredes de los dominios magnéticos. Es necesario aplicar un *campo magnético coercitivo* H_c en sentido opuesto al primero para anular esta imanación remanente, recorrido *bc*. Si se sigue aumentando $\boldsymbol{H}$ negativamente, recorrido *cd*, se llega a la saturación, punto *d*, del mismo módulo B_r pero sentido contrario a la anterior (polos magnéticos invertidos). Si a partir de aquí se disminuye **H**, recorrido *de*, en el punto *e*, el material queda convertido en un imán

permanente, con la misma magnetización pero de polaridad contraria a la anterior. Aumentando positivamente ***H***, recorrido *ef*, se consigue desmagnetizar el material, punto *f*. Si a partir de aquí se aumenta ***H***, recorrido *fa*, se llega de nuevo a la saturación, punto *a*, cerrándose el ciclo.

En el proceso de imanación se gasta energía, empleada en desplazar las paredes de los dominios y en girar la imanación en el sentido del campo aplicado ***H*** (la misma dirección pero sentido contrario), que es disipada en forma de calor, y que es proporcional al área *abcdea* del ciclo de histéresis (ver *tema 6*). Así, para anular la inducción remanente B_r se necesita una energía proporcional al área *obco.*

Si se quiere *desmagnetizar* el material, se somete a ciclos de histéresis sucesivos mediante campos decrecientes, hasta finalizar en el punto inicial *o*.

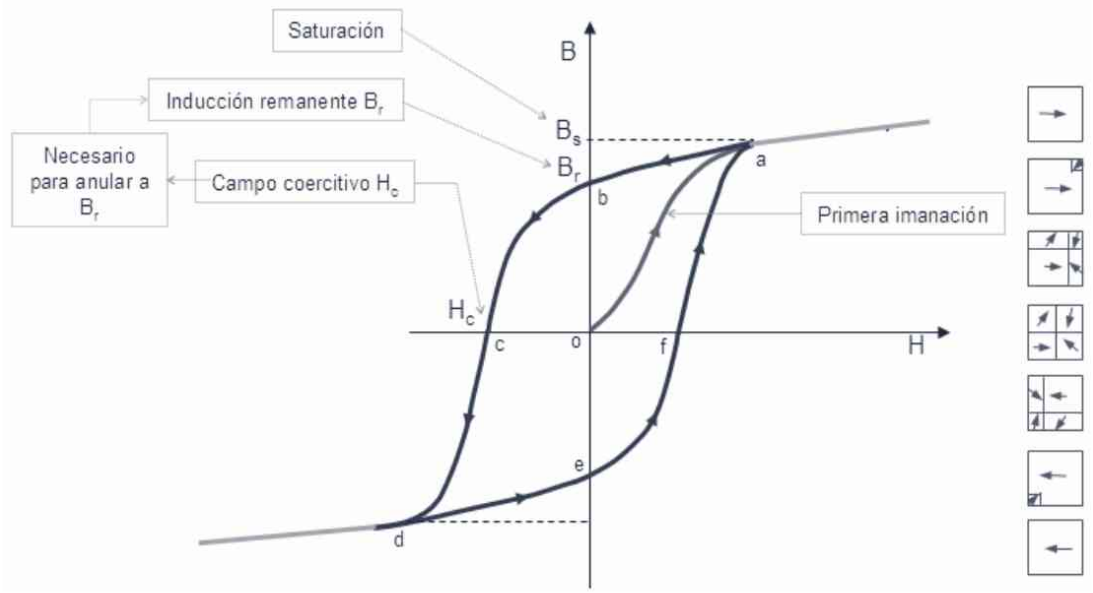


Figura 5.48. Ferromagnetismo: ciclo de histéresis

Existen materiales ferromagnéticos de diverso tipo, y en relación al comportamiento descrito, pueden distinguirse, entre otros, unos materiales magnéticamente "*blandos*", que son aquéllos con una imantación remanente muy baja, por ejemplo el hierro dulce, y otros magnéticamentes "*duros*", con una imantación remanente alta, por ejemplo aceros, *figura 5.49*. Los blandos producen una disipación de energía en forma de calor muy pequeña, se utilizan, por ejemplo, en los núcleos de las máquinas eléctricas para evitar que se calienten. Los duros disipan más energía, pero interesan donde se desee una gran imanación remanente, como por ejemplo en los imanes permanentes. También existen materiales magnéticos, por ejemplo la ferrita, cuyo ciclo es prácticamente cuadrado utilizados en las memorias de los ordenadores electrónicos.

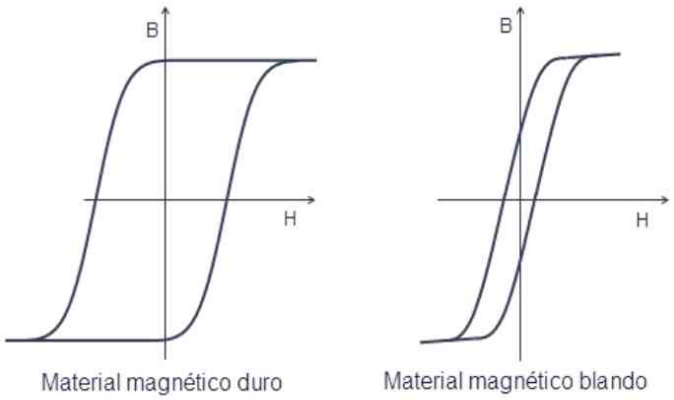


Figura 5.49. Materiales magnéticos "duros" y "blandos"

En las máquinas eléctricas rotativas se ha de tener en cuenta, además, que el núcleo del rotor es giratorio (*histéresis giratoria*) y que el campo **H** varía en dirección, sentido y módulo.

5.23 BOBINA DE NÚCLEO CORTO: CAMPO DESMAGNETIZANTE

Considérese, en primer lugar, dos barras imanadas, una larga y otra de corta longitud, con la misma imanación $\boldsymbol{M}$ y por tanto la misma inducción interior $\boldsymbol{B_i}$, *figura 5.50*.

En los puntos de simetría P_1 y P_2 situados en los planos de simetría de las barras se tienen las inducciones $\boldsymbol{B_{D1}}$ y $\boldsymbol{B_{D2}}$, que tienen sentidos opuestos, pero paralelos, a la inducción $\boldsymbol{B_i}$ en su interior. Una misma superficie S situada en cada uno de los puntos anteriores (*apartado 5.2*) es atravesada por un número de líneas de campo mayor en la barra corta que en la barra larga, es decir que $B_{D2} > B_{D1}$, por tanto:

$$B_{D2} > B_{D1} \quad \Rightarrow \quad \frac{B_{D2}}{\mu_0} > \frac{B_{D1}}{\mu_0} \quad \Rightarrow \quad H_{D2} > H_{D1} \qquad [5.85]$$

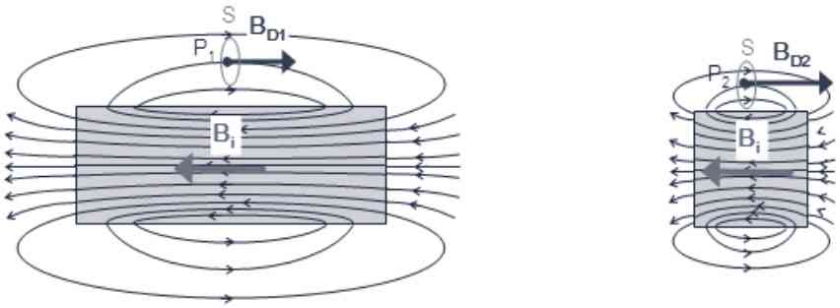


*Figura 5.50. **B** y **H** en el exterior de barras imanadas*

Supóngase, ahora, un solenoide muy largo en el que un material ferromagnético, por ejemplo hierro, ocupa toda la longitud de su núcleo, *figura 5.51*. Se tiene:

1. El campo magnético $\boldsymbol{H}$ en un punto del hierro es el mismo que en el aire, punto P, ($H = H_P = H_{Fe} = N \cdot I/L$). Esto es debido a que la circulación de $\boldsymbol{H}$ no está afectada por las corrientes amperianas (*apartado 5.20*).

2. La inducción $\boldsymbol{B}$ es mucho mayor en el hierro ($B_{Fe} = \mu \cdot H$) que en el aire ($B_P = \mu_0 \cdot H$). Esto es debido a que la circulación de $\boldsymbol{B}$ sí está afectada por las corrientes amperianas (*apartado 5.19*).

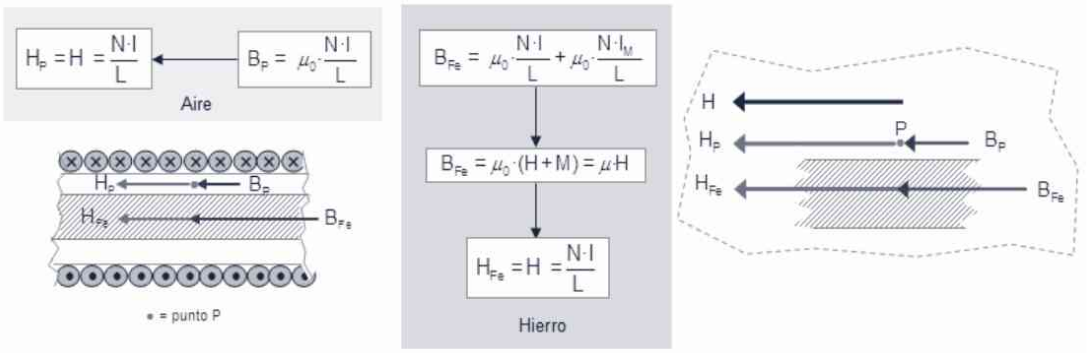


Figura 5.51. Solenoide de núcleo largo

Por otra parte, si se tiene un solenoide con las mismas características que el anterior, excepto que se ha sustituido el núcleo largo por uno corto, ocupando sólo un tramo de su longitud, *figura 5.52*, la inducción $\boldsymbol{B_P}$ en un punto P exterior al núcleo, conforme a lo visto para la barra imanada, tiene por módulo:

$$B_P = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{L} - B_D \qquad [5.86]$$

Si se divide por μ_0 se obtiene el campo magnético en el punto P, que ahora no tiene por módulo $H = N \cdot I/L$ como en el solenoide con núcleo largo, sino:

$$H_P = \frac{B_P}{\mu_0} = \frac{N \cdot I}{L} - \frac{B_D}{\mu_0} = H - H_D \qquad [5.87]$$

Este campo $\boldsymbol{H_P}$ es tangente al hierro del núcleo y conserva esta dirección en el interior del mismo (*apartado 5.24*). Por consiguiente, el módulo del campo magnético que realmente actúa en el hierro es:

$$H_P = H - H_D \qquad [5.88]$$

Es decir, la diferencia entre el campo $\boldsymbol{H}$ debido a la corriente verdadera ($H = N \cdot I/L$) y un campo $\boldsymbol{H_d}$ denominado *desmagnetizante*.

Como el campo que realmente actúa en el núcleo de hierro es más débil, también lo será la inducción en el núcleo, puesto que:

$$B_{Fe} = \mu \cdot H_P = \mu \cdot (H - H_D) \qquad [5.89]$$

Se puede expresar está inducción en función del campo H producido por las corrientes verdaderas introduciendo una permeabilidad aparente $\mu_a < \mu$, siendo μ la permeabilidad absoluta del hierro:

$$B_{Fe} = \mu \cdot (H - H_D) = \mu_a \cdot H \qquad [5.90]$$

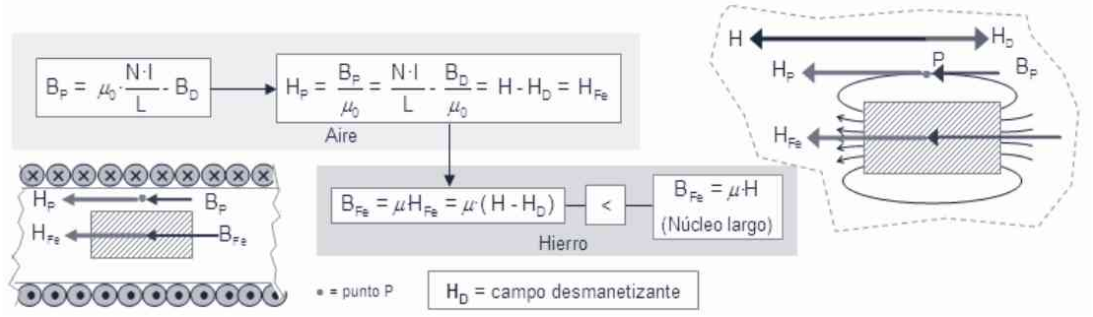


Figura 5.52. Solenoide de núcleo corto

Puesto que la inducción $\boldsymbol{B_D}$ tiene un módulo mayor en una barra imanada corta que en una larga, el campo desmagnetizante $\boldsymbol{H_D}$ *es tanto mayor cuanto más corto sea el núcleo*.

Las conclusiones anteriores son también válidas cuando la bobina es tan corta como el núcleo, pero en este caso el campo debido a las corrientes verdaderas es menor al dado por la fórmula $H = N \cdot I/L$.

5.24 REFRACCIÓN DE LAS LÍNEAS DE INDUCCIÓN MAGNÉTICA

Cuando las líneas de inducción magnética pasan de un medio de permeabilidad μ_1 a otro de permeabilidad μ_2 sufren una refracción, *figura 5.53*, de tal manera que:

- La componente normal de $\boldsymbol{B}$ y la componente tangencial de $\boldsymbol{H}$ se conservan.

- Las componentes tangenciales de $\boldsymbol{B}$ están en razón directa de las permeabilidades.

- Las componentes normales de $\boldsymbol{H}$ están en razón inversa de las permeabilidades.

En la *figura 5.53* se hacen las demostraciones a partir de la consideración de la conservación del flujo magnético Φ ($\Phi = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{S}$) al pasar de un medio a otro a través de la superficie de separación ΔS, aplicando el Teorema de Ampère a una pequeña trayectoria rectangular C en un plano normal a la superficie ΔS de separación (donde no existen corrientes *verdaderas*), y sabiendo que $B = \mu \cdot H$.

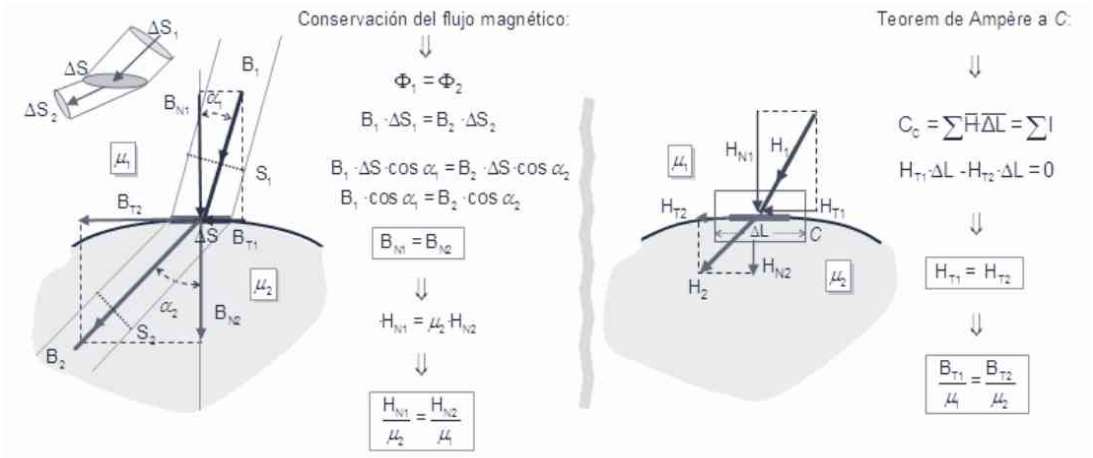


Figura 5.53. Refracción de las líneas de inducción magnética

Se tiene también, *figura 5.53*, que, tag $\alpha_1 = B_{T1}/B_{N1}$ y tag $\alpha_2 = B_{T2}/B_{N2}$, y puesto que, $B_{N1} = B_{N2}$, y $H_{T1} = H_{T2}$, se deduce:

$$\frac{\text{tag}\,\alpha_1}{\text{tag}\,\alpha_2} = \frac{B_{T1}}{B_{T2}} = \frac{\mu_1 \cdot H_{T1}}{\mu_2 \cdot H_{T2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \qquad [5.91]$$

Si los dos medios son el aire, de permeabilidad μ_0 y el hierro de permeabilidad μ_{Fe}, se tiene:

$$\frac{\text{tag}\,\alpha_1}{\text{tag}\,\alpha_2} = \frac{\text{tag}\,\alpha_0}{\text{tag}\,\alpha_{Fe}} = \frac{\mu_0}{\mu_{Fe}} = \frac{1}{\mu_r} \qquad [5.92]$$

Como μ_r tiene valores elevados resulta que tag $\alpha_1 <<$ tag α_2, es decir, $\alpha_1 << \alpha_2$, lo que significa que *en el aire las líneas de inducción magnética son casi perpendiculares al hierro*.

5.25 TABLA COMPARATIVA DE CAMPO MAGNÉTICO Y CAMPO ELÉCTRICO

En la *tabla 5.2* se muestran las diferentes unidades correspondientes a un cilindro, uniformemente imanado, en el interior de un campo magnético, con un cilindro equivalente, uniformemente polarizado, en el interior de un campo eléctrico.

Campo magnético		**Campo eléctrico**	
Debido a	Cargas eléctricas en movimiento	Debido a	Cargas eléctricas en reposo o movimiento
Líneas de campo	Cerradas	Líneas de campo	Abiertas
Dipolos	Magnéticos no separables	Dipolos	Eléctricos separables
Momento dipolar	$\bar{M} = I\bar{S}$	Momento dipolar	$\bar{p} = q\bar{d}$
Par de torsión ***T*** por campo externo	$\bar{T} = \bar{M} \times \bar{B}$	Par de torsión ***T*** por campo externo	$\bar{T} = \bar{p} \times \bar{E}$
Inducción	Imanación ***M*** (debida a corrientes amperianas I_M)	Inducción	Polarización ***P*** (debida a cargas σ_i)
Imanación ***M***	$M = \dfrac{N \cdot I_M}{L}$	Polarización ***P***	$P = \sigma_i$
	$M = \chi \cdot H$ (medio LHI)		$P = \varepsilon_0 \cdot \chi \cdot E$ (medio LHI)
Inducción magnética ***B***	$\bar{B} = \mu \cdot \bar{H}$ $\bar{B} = \mu_r \cdot \bar{B}_0$ $\bar{B} = \bar{B}_0 + \bar{B}_M$ Más frecuente: $B = B_0 + B_M = B_0 + \mu_0 \cdot M$ $\bar{B} = \mu_0 \cdot \bar{H} + \mu_0 \cdot \bar{M} = \mu_0 \cdot (\bar{H} + \bar{M})$	Intensidad de campo eléctrico ***E***	$\bar{E} = \dfrac{\bar{D}}{\varepsilon}$ $\bar{E} = \dfrac{\bar{E}_0}{\varepsilon_r}$ $\bar{E} = \bar{E}_0 + \bar{E}_i$ Más frecuente: $E = E_0 - E_i = E_0 - P$ $\bar{E} = \dfrac{\bar{D}}{\varepsilon_0} - \dfrac{\bar{P}}{\varepsilon_0}$

B en función de *l* verdaderas e I_M amperianas	$B = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{L} + \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I_M}{L} = \mu \frac{N \cdot I}{L}$	*E* en función de las cargas inducidas σ_i	$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$
Fuerza ***F*** sobre carga *q* debida a ***B***	$\bar{F} = q \cdot \bar{v} \times \bar{B}$ Perpendicular a ***B***	Fuerza ***F*** sobre carga *q* debida a ***E***	$\bar{F} = q \cdot \bar{E}$ Igual dirección que ***E***
Flujo magnético	$\Phi = \bar{B} \cdot \bar{S}$	Flujo eléctrico	$\Phi = \bar{E} \cdot \bar{S}$
Flujo Φ conservativo de	$\bar{B}$	Flujo conservativo de	$\bar{D}$ $(\Phi_D = \bar{D} \cdot \bar{S})$
Permeabilidad magnética absoluta μ	$\mu = \mu_r \mu_0$	Permitividad eléctrica absoluta ε	$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$
Permeabilidad magnética relativa μ_r	$\mu_r = 1 + \chi_m$	Permitividad eléctrica relativa ε_r	$\varepsilon_r = 1 + \chi_m$
Susceptibilidad magnética	Medio LHI $\Rightarrow$ χ = cte. Medio no LHI $\Rightarrow$ $\chi \neq$ cte.	Susceptibilidad eléctrica	Medio LHI $\Rightarrow$ χ = cte. Medio no LHI $\Rightarrow$ $\chi \neq$ cte
Uso frecuente	Ferromagnéticos (materiales no LHI)	Uso frecuente	Materiales LHI
Excitación magnética **H**	$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu}$ $\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M}$	Desplazamiento ***D***	$\bar{D} = \varepsilon \cdot \bar{E}$ $\bar{D} = \varepsilon_0 \cdot \bar{E} + \bar{P}$
T. de Ampère para ***B*** (*l* verdaderas e I_M amperianas)	$C_c = \sum_0^c \bar{B} \cdot \overline{\Delta L} = \mu_0 \cdot \sum_1^n (I + I_M)$	Ley de Gauss para ***E*** (cargas libres y de polarización)	$\Phi_E = \frac{Q_{Total}}{\varepsilon_0} = \frac{(\sigma - \sigma_i) \cdot A}{\varepsilon_0}$
T. de Ampère para ***B*** (*I* verdaderas)	$C_c = \sum_0^c \bar{B} \cdot \overline{\Delta L} = \mu \cdot \sum_1^n I$	Ley de Gauss para ***E*** (cargas libres)	$\Phi_E = \frac{Q_{Libres}}{\varepsilon} = \frac{\sigma \cdot A}{\varepsilon}$

T. de Ampère para ***H*** (*I* verdaderas)	$C_c = \sum_0^c \bar{H}\cdot\overline{\Delta L} = \sum_1^n I$	Ley de Gauss Para ***D*** (cargas libres)	$\Phi_D = Q_{Libres} = \sigma\cdot A$
Refracción de líneas. Se conserva	Componente normal de ***B*** Componente tangencial de ***H***	Refracción de líneas. Se conserva	Componente normal de ***D*** Componente tangencial de ***E***

Tabla 5.2. Campo magnético y campo eléctrico

5.26 RESUMEN DE CONCEPTOS Y FÓRMULAS DE ESTE CAPÍTULO

En la *figura 5.54* se hace un resumen de conceptos y en la *tabla 5.3* de fórmulas de este capítulo.

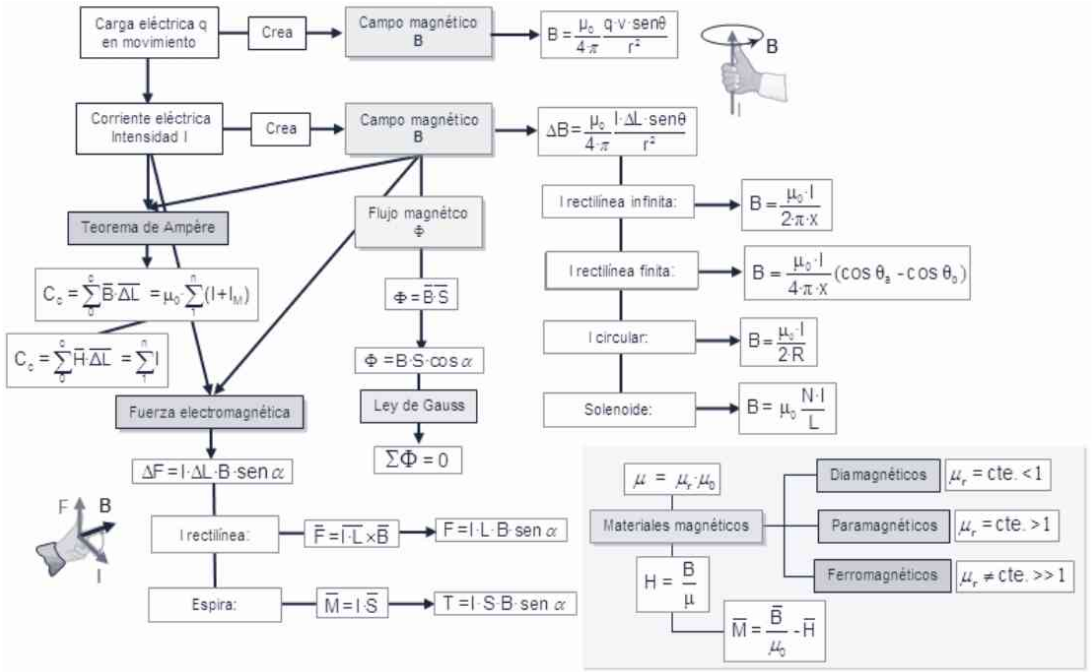


Figura 5.54. Resumen de conceptos de este capítulo

B creada por carga q en movimiento	$B = \frac{\mu_0}{4\cdot\pi}\frac{q\cdot v\cdot \text{sen}\theta}{r^2}$
B creada por corriente I	$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\cdot\pi}\frac{I\cdot\Delta L\cdot \text{sen}\theta}{r^2}$
B creada por corriente rectilínea L infinita	$B = \frac{\mu_0\cdot I}{2\cdot\pi\cdot x}$
B creada por corriente rectilínea L infinita (interior del conductor de radio R)	$B = \frac{\mu_0\cdot I}{2\cdot\pi\cdot R^2}x$
B creada por corriente rectilínea L finita	$B = \frac{\mu_0\cdot I}{4\cdot\pi\cdot x}(\cos\theta_a - \cos\theta_b)$
B creada por corriente circular en el centro	$B = \frac{\mu_0\cdot I}{2\cdot R}$
B creada por corriente circular en el eje	$B = \frac{\mu_0\cdot I\cdot R^2}{2\cdot(X^2+R^2)^{3/2}}$ (x = distancia del centro)
B creada por solenoide/toroide L infinita	$B = \mu_0\frac{N\cdot I}{L}$
Flujo magnético Φ	$\Phi = B\cdot A\cdot\cos\alpha$
Teorema de Ampère para ***B***	$C_c = \sum_0^c \bar{B}\cdot\overline{\Delta L} = \mu_0\cdot\sum_1^n (I + I_M)$
Fuerza F sobre carga q debida a ***B***	$F = q\cdot v\cdot B\cdot\text{sen}\alpha$
Fuerza ΔF sobre $I\cdot\Delta L$ debida a ***B***	$\Delta F = I\cdot\Delta L\cdot B\cdot\text{sen}\,\alpha$
Momento magnético ***M*** de una espira	$\bar{M} = I\cdot\bar{S}$
Par de giro ***T*** en una espira debido a ***B***	$T = M\cdot B\cdot\text{sen}\,\alpha$
Intensidad de campo magnético ***H***	$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu}$
Teorema de Ampère para H	$C_c = \sum_0^c \bar{H}\cdot\overline{\Delta L} = \sum_1^n I$
Permeabilidad absoluta μ	$\mu = \mu_0\cdot\mu_r$
Imanación M	$\bar{M} = \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{H}$
Susceptibilidad magnética χ	$\mu_r = 1 + \chi$
Diamagnetismo	$\chi = \text{cte.}\,;\quad \mu_r < 1$
Paramagnetismo	$\chi = \text{cte.}\,;\quad \mu_r > 1$
Ferromagnetismo	$\chi \neq \text{cte.}\,;\quad \mu_r >> 1$

Tabla 5.3. Resumen de fórmulas del capítulo

5.27 EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Ejercicio 5.27.1

Por una espira de 40 cm^2 situada en el interior de un campo magnético uniforme de inducción 1,5 T, formando el plano que contiene a la espira un ángulo de 60º con la dirección del campo, circula una corriente de 6 A. Calcular

a) El flujo magnético que atraviesa la espira.

b) Momento magnético de la espira.

c) Par electromagnético sobre la espira

Solución:

a) Para el flujo magnético Φ que atraviesa la espira, *fórmula [5.3]*, *figura 5.55:*

$$\alpha = 90º - 60º = 30º$$

$$\Phi = B \cdot A \cdot \cos\alpha = 1,5 \cdot 40 \cdot 10^{-4} \cdot \cos 30º = 5,2\ mWb$$

b) Para el momento magnético M de la espira, *fórmula [5.58]:*

$$M = I \cdot S = 6 \cdot 40 \cdot 10^{-4} = 0,024\ A \cdot m^2$$

Dirección y sentido el indicado en la *figura 5.55.*

c) Para el par T sobre la espira, *fórmula [5.59]:*

$$T = M \cdot B \cdot \text{sen}\,\alpha = 0,024 \cdot 1,5 \cdot \text{sen}\,30º = 0,018\ N \cdot m$$

Dirección y sentido el indicado en la *figura 5.55.*

En todos los caso, nótese cómo el par T tiende a alinear al momento magnético M con la inducción magnética B.

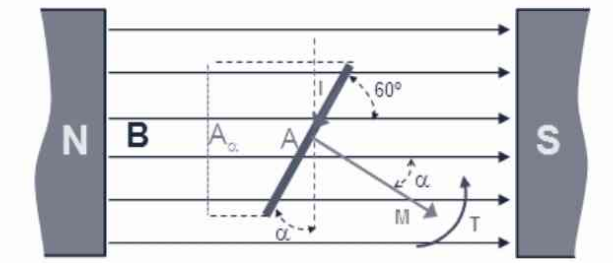


Figura 5.55. Solución de ejercicio 5.27.1

Ejercicio 5.27.2

La *figura 5.56* representa dos conductores rectilíneos paralelos en el aire, de longitud indefinida, circulando una intensidad de 100 A por cada uno de ellos con el sentido indicado. Hallar la inducción magnética en los puntos P1, P2, P3 y P4 sabiendo que la distancia $d = 10$ cm.

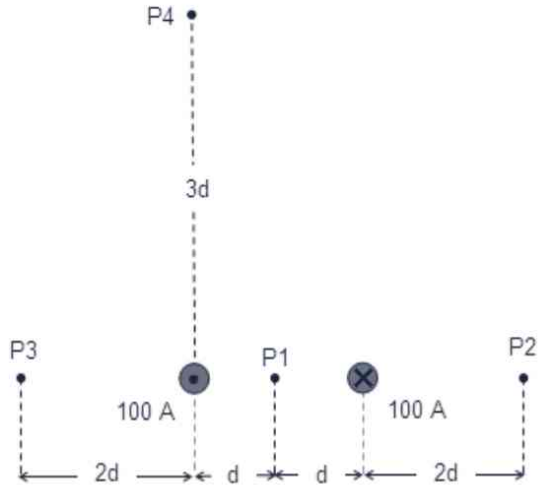


Figura 5.56. Ejercicio 5.27.2

Solución:

Ver el esquema de la *figura 5.57*.

- Inducción en P1.

Por la *fórmula [5.22], se halla la inducción* debida a cada corriente (conductor izquierdo B_I y conductor derecho B_D):

$$B_I = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot x} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 100}{2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 2 \cdot 10^{-4}\,T$$

$$B_D = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot x} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 100}{2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 2 \cdot 10^{-4}\,T$$

Aplicando la regla de la mano derecha se verifica que tienen la misma dirección y mismo sentido:

$$\bar{B}_{T1} = \bar{B}_I + \bar{B}_D \Rightarrow B_{T1} = B_I + B_D = 2 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-4} = 4 \cdot 10^{-4}\,T$$

- Inducción en P2.

  Por la *fórmula [5.22],* se halla la inducción debida a cada corriente:

$$B_I = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot x} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 100}{2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 0{,}5 \cdot 10^{-4}\,T$$

$$B_D = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot x} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 100}{2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 1 \cdot 10^{-4}\,T$$

  Tienen la misma dirección y sentido contrario (regla mano derecha):

$$\bar{B}_{T2} = \bar{B}_I + \bar{B}_D \Rightarrow B_{T2} = B_I - B_D = 0{,}5 \cdot 10^{-4} - 1 \cdot 10^{-4} = -0{,}5 \cdot 10^{-4}\,T \quad \Rightarrow \quad 0{,}5\ T \text{ en el sentido de } \boldsymbol{B_D}$$

- Inducción en P3.

  Por la *fórmula [5.22],* se halla la inducción debida a cada corriente:

$$B_I = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot x} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 100}{2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 1 \cdot 10^{-4}\,T$$

$$B_D = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot x} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 100}{2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 0{,}5 \cdot 10^{-4}\,T$$

$$\bar{B}_{T3} = \bar{B}_I + \bar{B}_D \Rightarrow B_{T3} = B_I - B_D = 1 \cdot 10^{-4} - 0{,}5 \cdot 10^{-4} = 0{,}5 \cdot 10^{-4}\,T \quad \Rightarrow \quad 0{,}5\ T \text{ en el sentido de } \boldsymbol{B_I}$$

- Inducción en P4.

$$B_I = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot x} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 100}{2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 0{,}66 \cdot 10^{-4}\,T$$

  Distancia del punto P4 al conductor derecho: $x = \sqrt{(2 \cdot d)^2 + (3 \cdot d)^2} = 3{,}6 \cdot d$

$$B_D = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot x} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 100}{2 \cdot \pi \cdot 3.6 \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 0{,}55 \cdot 10^{-4}\,T$$

  Para hallar el ángulo β formado por $\boldsymbol{B_I}$ y $\boldsymbol{B_D}$ como B_I y B_D son perpendiculares a sus radios respectivos, *figura 5.56*, se tiene: $360^\circ = 90^\circ + \alpha + 90^a + \beta \Rightarrow \beta = 180^\circ - \alpha$

Por otra parte:

$$\alpha = \text{arctag}\frac{2\cdot d}{3\cdot d} = 33,7^{\circ} \quad \Rightarrow \quad \beta = 180 - 33,7 = 146,3^{\circ}$$

El módulo de B_{T4} se obtiene por la fórmula para obtener la suma de dos vectores concurrentes:

$$B_{T4} = \sqrt{B_I^2 + B_D^2 + B_I \cdot B_D \cdot \cos\beta} = \sqrt{\left(0,66\cdot 10^{-4}\right)^2 + \left(0,55\cdot 10^{-4}\right)^2 + 0,66\cdot 10^{-4}\cdot 0,55\cdot 10^{-4}\cdot \cos 146,3} = 0,66\cdot 10^{-4}\ \text{T}$$

Siendo la dirección y sentido el indicado en la *figura 5.57.*

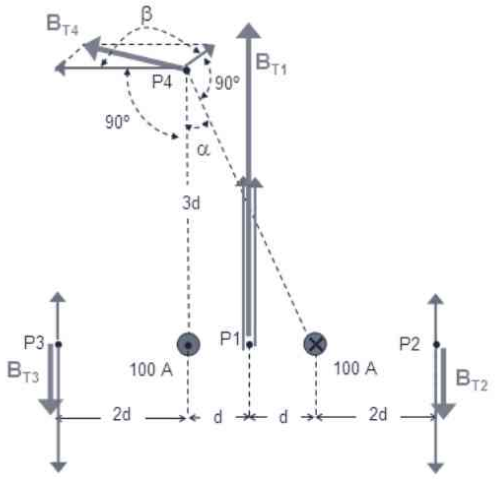


Figura 5.57. Solución del ejercicio 5.27.2

Ejercicio 5.27.3

Dos conductores rectilíneos de longitud indefinida están situados perpendicularmente en el aire, a la distancia de 30 cm, *figura 5.58*, circulando por cada uno de ellos 20 A y 40 A. Hallar la inducción magnética ***B*** en el punto *P* indicado en la figura.

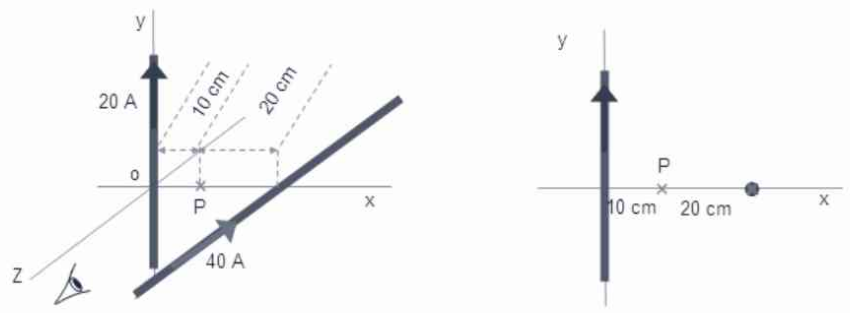


Figura 5.58. Ejercicio 5.27.3

Solución:

- Inducción en *P* debida al conductor de la izquierda, *fórmula [5.22]*:

$$B_I = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot x} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 20}{2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 4 \cdot 10^{-5}\,T$$

- Inducción en *P* debida al conductor de la derecha, *fórmula [5.22]*:

$$B_D = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot x} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 40}{2 \cdot \pi \cdot 20 \cdot 10^{-2}} = 4 \cdot 10^{-4}\,T$$

- Inducción total en *P*:

  Suma vectorial de las inducciones, $\boldsymbol{B_T} = \boldsymbol{B_I} + \boldsymbol{B_D}$, y como las direcciones de las inducciones forman 90º:

$$B_{T4} = \sqrt{B_I^2 + B_D^2} = \sqrt{\left(4 \cdot 10^{-5}\right)^2 + \left(4 \cdot 10^{-5}\right)^2} = 5{,}65 \cdot 10^{-5}\,T$$

  Situado en un plano paralelo a *zoy*, con la dirección y sentido indicado en la *figura 5.59*.

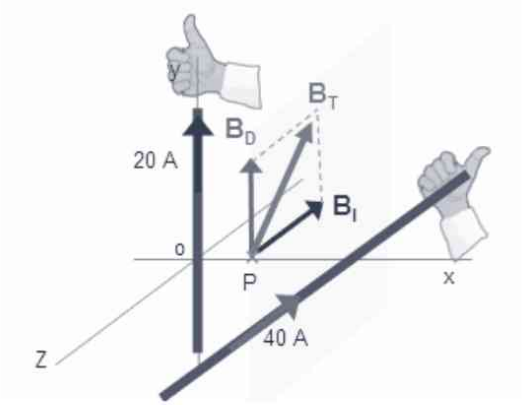


Figura 5.59. Solución del ejercicio 5.27.3

Ejercicio 5.27.4

Por un conductor situado en el interior de un campo magnético uniforme de 1 T, *figura 5.59,* circula una corriente de 5 A con sentido *AC*. La longitud de cada segmento es, $L_{AB} = 30$ cm y $L_{BC} = 40$ cm.

a) Calcular la fuerza total sobre el conductor.

b) Verificar que la fuerza es la misma que si el conductor fuese un segmento recto desde *A* hasta *C*.

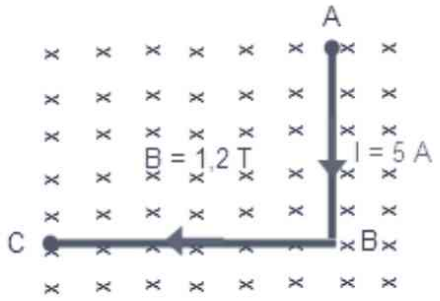


Figura 5.60. Ejercicio 5.27.4

Solución:

a) Fuerza total sobre el conductor, *figura 5.61 izquierda*:

Fuerza sobre el conductor L_{AB}, como $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{L}$ son perpendiculares, *fórmula [5.48]:*

$$F_{AB} = I \cdot L_{AB} \cdot B = 5 \cdot 30 \cdot 10^{-2} \cdot 1,2 = 1,8\,N$$

Fuerza sobre el conductor L_{BC}, como $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{L}$ son perpendiculares, *fórmula [5.48]:*

$$F_{BC} = I \cdot L_{BC} \cdot B = 5 \cdot 40 \cdot 10^{-2} \cdot 1,2 = 2,4\,N$$

Fuerza total:

$$\bar{F}_{ABC} = \bar{F}_{AB} + \bar{F}_{BC}$$

Como tienen direcciones perpendiculares, el módulo *F* es:

$$F_{ABC} = \sqrt{F_{AB}^2 + F_{BC}^2} = \sqrt{1,8^2 + 2,4^2} = 3\,N$$

$$\alpha = \text{arctag}\,\frac{1,8}{2,4} = 36,8^\circ$$

b) Fuerza sobre conductor equivalente L_{AC}, como $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{L}$ son perpendiculares, *fórmula [5.48]*, *figura 5.61 derecha*:

$$L_{AC} = \sqrt{L_{AB}^2 + L_{BC}^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50\,cm$$

$$F_{AC} = I \cdot L_{AC} \cdot B = 5 \cdot 50 \cdot 10^{-2} \cdot 1,2 = 3\,N$$

Con dirección perpendicular a *AC* en el punto medio.

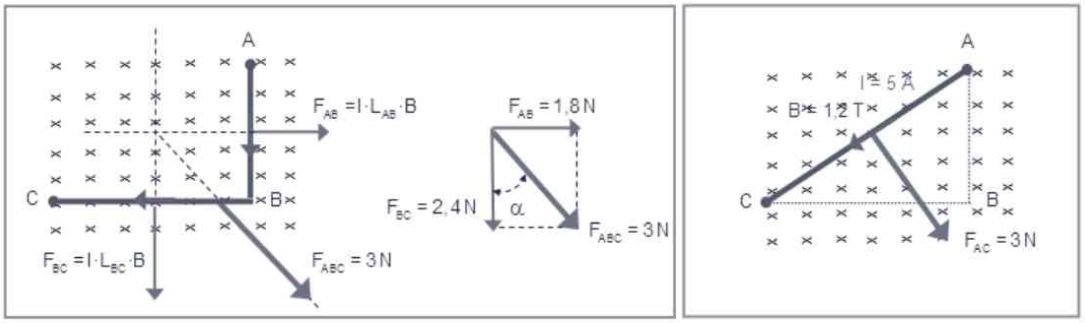


Figura 5.61. Solución del ejercicio 5.27.4

Ejercicio 5.27.5

Aplicando el Teorema de Ampère, calcular la circulación *C* del vector inducción magnética ***B*** en el sentido indicado, a lo largo de los circuitos C1, C2, C3 y C4 de la *figura 5.62*, si las corrientes eléctricas que recorren los conductores, perpendiculares al plano del papel, son I_1 entrando en el plano del papel e I_2 saliendo del plano. Los circuitos se encuentran en el vacío, contenidos en el plano del papel.

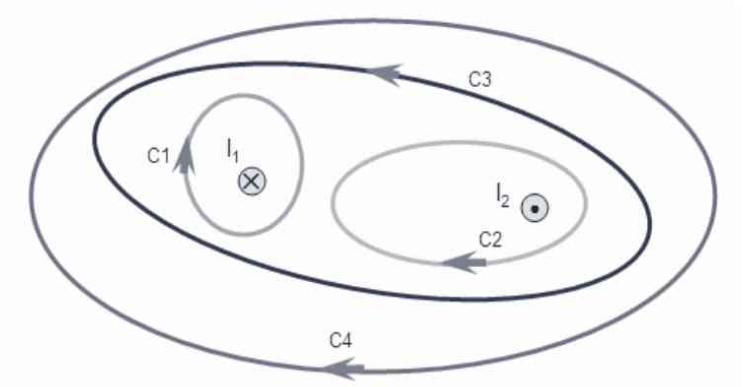


Figura 5.62. Ejercicio 5.27.5

Solución:

Conforme al Teorema de Ampère, *fórmula [5.29]:* $C_c = \sum_0^c \overline{B} \cdot \overline{\Delta L} = \mu_0 \cdot \sum_1^n I_i$

$$\boldsymbol{C_1} = \mu_0 \cdot I_1$$

Para C_2 nótese que el sentido de la circulación y la de la inducción magnética debido a I_2 (regla de la mano derecha) tienen sentidos contrarios: $\boldsymbol{C_2} = \mu_0 \cdot (-I_2) = -\mu_0 \cdot I_2$

Razonando de forma análoga que en el párrafo anterior: $\boldsymbol{C_3} = \mu_0 \cdot (- I_1 + I_2) = \mu_0 \cdot (I_2 - I_1)$

De forma semejante: $\boldsymbol{C_4} = \mu_0 \cdot (I_1 - I_2)$

Ejercicio 5.27.6

Aplicando el Teorema de Ampère, calcular la circulación C_c del vector inducción magnética $\boldsymbol{B}$, a lo largo de cada uno de los circuitos, en el vacío, en el sentido indicado en la *figura 5.63.*

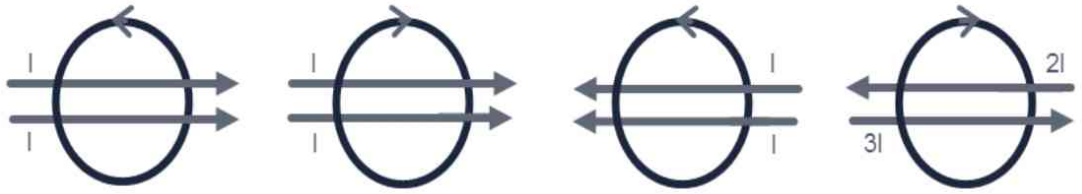


Figura 5.63. Ejercicio 5.27.6

Solución:

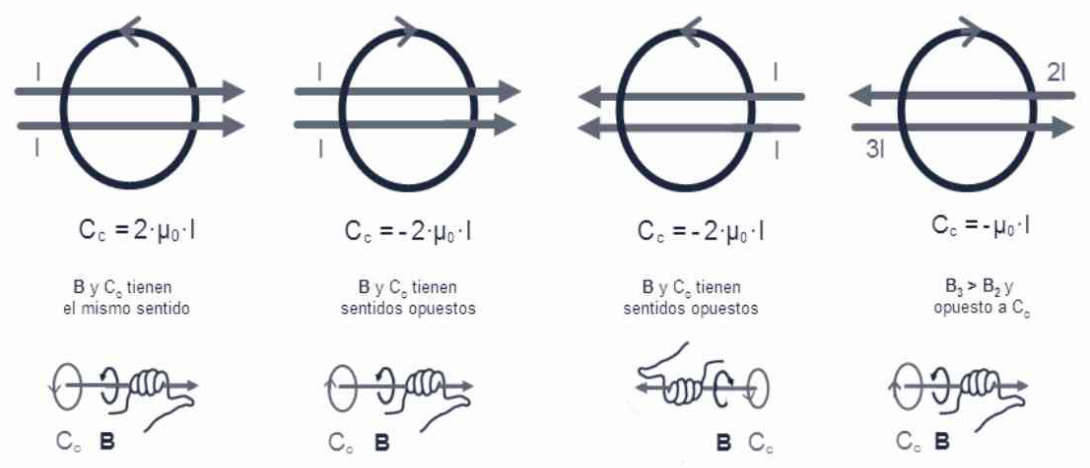


Figura 5.64. Solución del ejercicio 5.27.6

Ejercicio 5.27.8

Los conductores y espiras de la *figura 5.65*, perpendiculares a las líneas de campo, conducen la misma corriente en igual campo magnético uniforme. Clasificar los cuatro casos, de mayor a menor, según sea la fuerza electromagnética que actúa sobre cada conductor y espira.

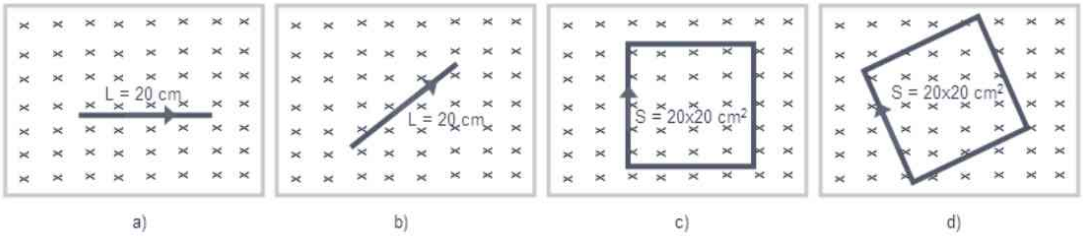


Figura 5.65. Ejercicio 5.27.8

Solución:

1. Sobre *a* y *b* actúa la misma fuerza, $F = I \cdot L \cdot B$, aunque en direcciones diferentes.

2. La fuerza resultante sobre cada espira es 0 (*apartado 5.15*).

Ejercicio 5.27.9

Los conductores de la *figura 5.66*, en un plano paralelo a las líneas de campo, conducen la misma corriente en igual campo magnético uniforme. Clasificar los cuatro casos, de mayor a menor, según sea la fuerza electromagnética que actúa sobre cada conductor.

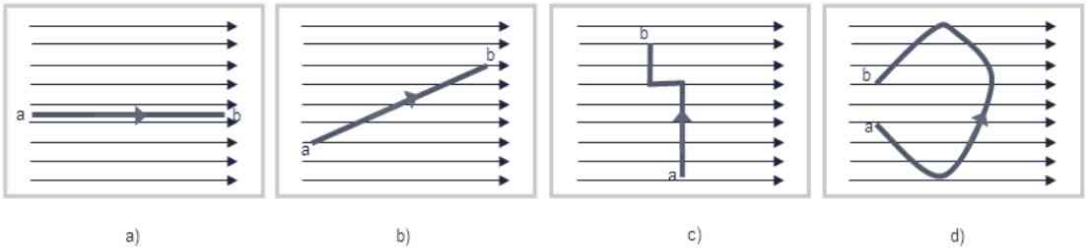


Figura 5.66. Ejercicio 5.27.9

Solución:

La fuerza sobre un conductor de longitud L depende de la longitud recta L_P perpendicular a las líneas del campo del conductor equivalente de longitud recta entre el inicio *a* y el final *b* del conductor, *apartado 5.15.* Como $F = I \cdot L_P \cdot B$, *fórmula [5.22],* y, $L_{Pc} > L_{Pb} > L_{Pd} > L_{Pa}$, se tiene, *figura 5.67*:

1. Conductor *c.*
2. Conductor *b.*
3. Conductor *d.*
4. Conductor a ($F = I \cdot L_P \cdot B = 0$).

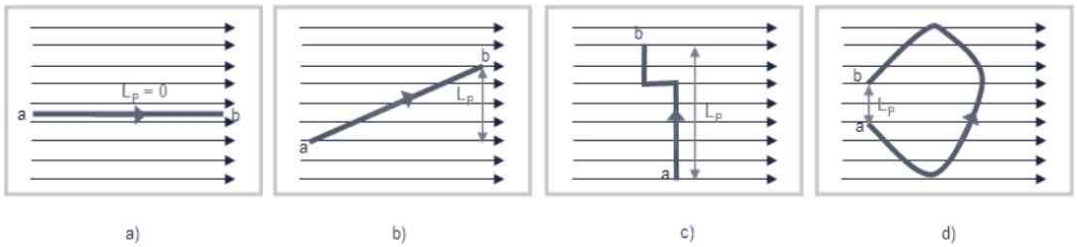


Figura 5.67. Solución del ejercicio 5.27.9

Ejercicio 5.27.10

Un conductor formado por varios segmentos rectilíneos, contenidos en los planos de un cubo de 20 cm de lado, está situado en el interior de un campo magnético uniforme de inducción B = 0,4 T, dirección y sentido perpendicular al plano *xoy*, *figura 5.68.* Determinar la fuerza electromagnética sobre cada segmento.

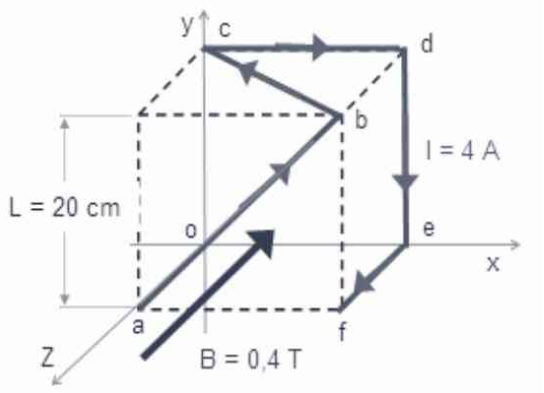


Figura 5.68. Ejercicio 5.27.10

Solución:

La dirección y sentido se especifican en la *figura 5.69*, pasando la dirección en todos los segmentos por su punto medio.

- Fuerza sobre el segmento L_{ab}, como $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{L}$ son perpendiculares, *fórmula [5.48]:*

$$L_{ab} = \sqrt{20^2 + 20^2} = 28,3 \text{ cm}$$

$$F_{ab} = I \cdot L_{ab} \cdot B = 4 \cdot 28,3 \cdot 10^{-2} \cdot 0,4 = 0,45 \text{ N}$$

- Fuerza sobre el segmento L_{bc}, como $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{L}$ no son perpendiculares, *fórmula [5.47]:*

  Ángulo formado por $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{L}$:

$$\alpha = \arccos\frac{L}{L_{bc}} = \arccos\frac{20}{28,3} = 45^{\circ}$$

$$F_{bc} = I \cdot L_{bc} \cdot B \cdot \operatorname{sen}\alpha = 4 \cdot 28,3 \cdot 10^{-2} \cdot 0,4 \cdot \operatorname{sen} 45^{\circ} = 0,32\,N$$

- Fuerza sobre el segmento L_{cd}, como $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{L}$ son perpendiculares, *fórmula [5.48]:*

$$F_{cd} = I \cdot L_{cd} \cdot B = 4 \cdot 20 \cdot 10^{-2} \cdot 0,4 = 0,32\,N$$

  Nótese que la fuerza $\boldsymbol{F_{cd}}$ tiene el mismo módulo que $\boldsymbol{F_{bc}}$, pues los segmentos correspondientes L_{cd} y L_{bc} tienen la misma componente perpendicular (L_{bc}) a las líneas de campo.

- Fuerza sobre el segmento L_{de}, como $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{L}$ son perpendiculares, *fórmula [5.48]:*

$$F_{de} = I \cdot L_{de} \cdot B = 4 \cdot 20 \cdot 10^{-2} \cdot 0,4 = 0,32\,N$$

- Fuerza sobre el segmento L_{ef}, como $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{L}$ no son perpendiculares, *fórmula [5.47]:*

$$F_{ef} = I \cdot L_{ef} \cdot B \cdot \operatorname{sen}\alpha = 4 \cdot 20 \cdot 10^{-2} \cdot 0,4 \cdot \operatorname{sen} 0^{\circ} = 0\,N$$

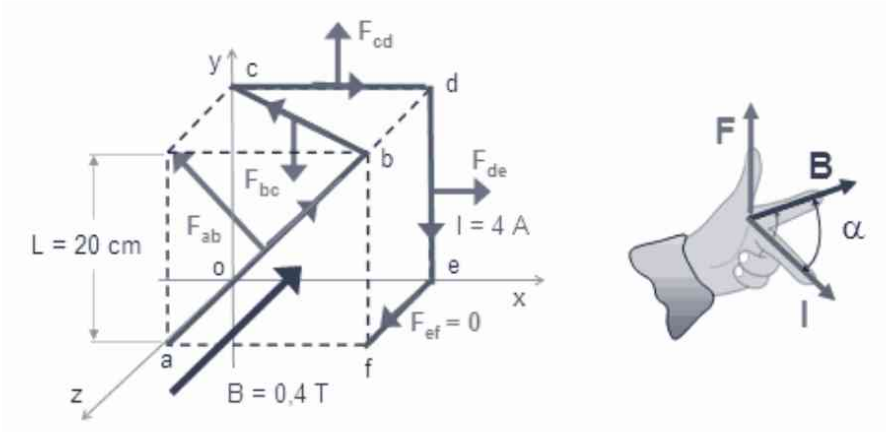


Figura 5.69. Solución del ejercicio 5.27.10

Ejercicio 5.27.11

En el embarrado de baja tensión de un centro de transformación se tienen dos pletinas de cobre paralelas separadas una distancia de 40 cm. Si se produce un cortocircuito de 35 kA, ¿cuál es la fuerza electromagnética a la que están sometidas las pletinas?

Solución:

La fuerza electromagnética, *fórmula [5.63]*, se puede poner en la forma de fuerza por unidad de longitud *F/L*:

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 \cdot I_2 \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot x} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot (35 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot \pi \cdot 40 \cdot 10^{-2}} = 612{,}5\,\text{N/m} = 61{,}2\,\text{kg/m}$$

En consecuencia las pletinas se han de dimensionar para soportar esta fuerza de atracción/repulsión según el sentido de las corrientes en ellas.

Ejercicio 5.27.12

Una bobina circular de 10 cm de diámetro, formada por cinco espiras, está situada en el interior de un campo magnético uniforme de 0,8 T de inducción. El plano de las espiras es paralelo a las líneas de campo, *figura 5.70*, y por la bobina circula una intensidad de 20 A. Calcular:

a) Momento magnético de la bobina.

b) Par de torsión sobre la bobina.

c) Par de torsión sobre la bobina si su eje se coloca ahora formando un ángulo de 60º con las líneas del campo magnético.

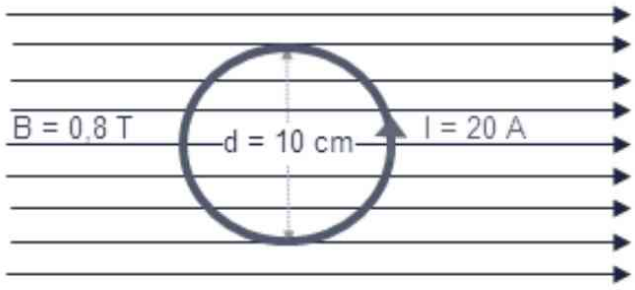


Figura 5.70. Ejercicio 5.27.12

Solución:

a) Momento magnético de la bobina.

Para el momento magnético $\boldsymbol{M}$ de una espira, *fórmula [5.58]:*

Sección S de una espira: $S = \pi \cdot r^2 = 3{,}14 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2 = 7{,}85 \cdot 10^{-3}\ m^2$

$$M = I \cdot S = 20 \cdot 7{,}85 \cdot 10^{-3} = 0{,}157\ A \cdot m^2$$

Momento magnético total $\boldsymbol{M_T}$ de la bobina:

$$M_T = N \cdot M = 5 \cdot 0{,}157 = 0{,}785\ A \cdot m^2$$

Dirección y sentido el indicado en la *figura 5.70.*

b) Par de torsión sobre la bobina.

Para el par $\boldsymbol{T}$ sobre una espira, *fórmula [5.59]:*

Como $\alpha = 90^\circ$

$$T = M \cdot B \cdot \operatorname{sen} \alpha = 0{,}157 \cdot 0{,}8 \cdot \operatorname{sen} 90^\circ = 0{,}12\ N \cdot m$$

El par total $\boldsymbol{T_T}$ sobre la bobina:

$$T_T = N \cdot M_T = 5 \cdot 0{,}12 = 0{,}62\ N \cdot m$$

Dirección y sentido el indicado en la *figura 5.71.*

También directamente:

$$T_T = M_T \cdot B \cdot \operatorname{sen} \alpha = 0{,}785 \cdot 0{,}8 \cdot \operatorname{sen} 90^\circ = 0{,}62\ N \cdot m$$

Dirección y sentido el indicado en la *figura 5.71.*

c) Par de torsión para $\alpha = 60^\circ$.

$$T_T = M_T \cdot B \cdot \operatorname{sen} \alpha = 0{,}785 \cdot 0{,}8 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = 0{,}54\ N \cdot m$$

Con la misma dirección y sentido que en el caso anterior.

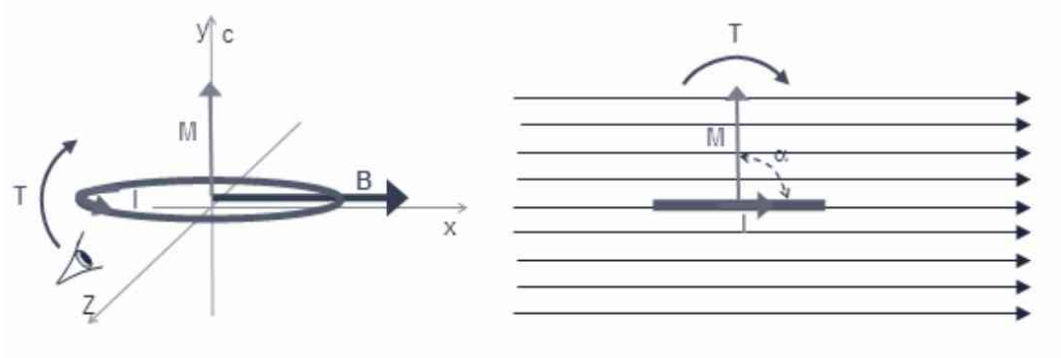


Figura 5.71. Solución del ejercicio 5.27.12

En todos los casos, nótese cómo el par ***T*** tiende a alinear al momento magnético ***M*** con la inducción magnética ***B***.

Ejercicio 5.27.13

Por un conductor rectilíneo de longitud indefinida situado en el aire circula una corriente de 10 A en el sentido indicado en la *figura 5.72*. Paralelo a dicho conductor, a la distancia de 5 cm, se sitúa una espira rectangular, de 10 × 15 cm, por la que circula una intensidad de 5 A. Determinar el módulo, dirección y sentido de la fuerza electromagnética neta ejercida sobre dicha espira.

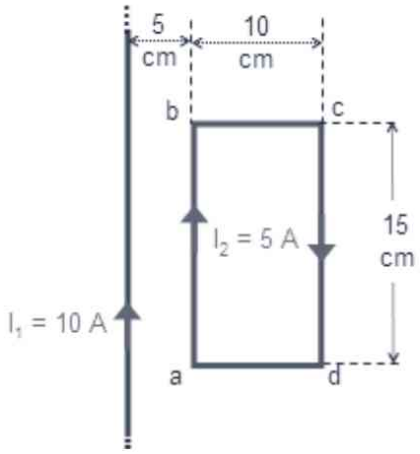


Figura 5.72. Ejercicio 5.27.13

Solución:

Se hallan las fuerzas electromagnéticas sobre cada lado de la espira y a continuación se determina su resultante, *figura 5.73.*

- La fuerza electromagnética $\boldsymbol{F_{bc}}$ sobre el lado *bc,* es igual a la fuerza $\boldsymbol{F_{da}}$ sobre el lado *da,* pues ambos lados son iguales y están a la misma distancia del conductor rectilíneo. Para hallar la inducción magnética $\boldsymbol{B}$ en dichos lados no se puede aplicar la *fórmula [5.22],* $B = \mu_0 \cdot I/2 \cdot \pi \cdot x$, pues x es variable a lo largo de cada lado, pero se sabe que la resultante de las fuerzas en cada lado tienen la misma dirección (más próximas al lado *ab* que al *cd*) y que tienen sentido contrario (regla de la mano izquierda), por lo que la resultante de ambas sobre la espira es nula.

- Para la fuerza electromagnética $\boldsymbol{F_{ab}}$:

  Inducción a la distancia de 5 cm debida al conductor rectilíneo, *fórmula [5.22]*:

$$B_{ab} = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot x} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 10}{2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^{-2}} = 4 \cdot 10^{-5}\,T$$

  Fuerza sobre el conductor L_{ab}, como $\boldsymbol{B_{ab}}$ y L_{ab} son perpendiculares, *fórmula [5.48]*:

$$F_{ab} = I_2 \cdot L_{ab} \cdot B_{ab} = 5 \cdot 15 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-5} = 3 \cdot 10^{-5}\,N$$

- Para la fuerza electromagnética $\boldsymbol{F_{cd}}$:

  Inducción a la distancia de 15 cm debida al conductor rectilíneo, *fórmula [5.22]*:

$$B_{cd} = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot x} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 10}{2 \cdot \pi \cdot 15 \cdot 10^{-2}} = 1{,}3 \cdot 10^{-5}\,T$$

  Fuerza sobre el conductor L_{cd}, como $\boldsymbol{B_{cd}}$ y L_{cd} son perpendiculares, *fórmula [5.48]*:

$$F_{cd} = I_2 \cdot L_{cd} \cdot B_{cd} = 5 \cdot 15 \cdot 10^{-2} \cdot 1{,}3 \cdot 10^{-5} = 1 \cdot 10^{-5}\,N$$

- Resultante sobre la espira:

$$F_R = F_{ab} - F_{cd} = 3 \cdot 10^{-5} - 1 \cdot 10^{-5} = 2 \cdot 10^{-5}\,N$$

  Su dirección pasa por el punto medio de los lados mayores y su sentido hacia el conductor rectilíneo.

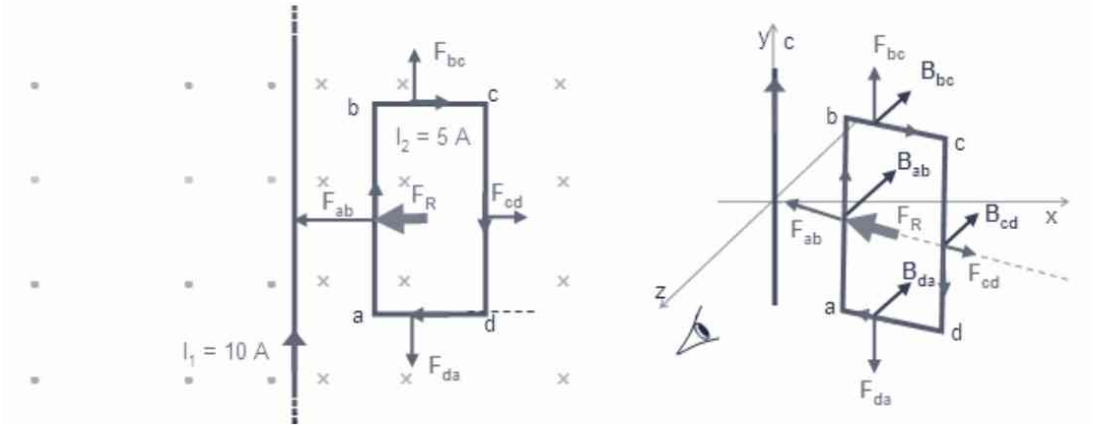


Figura 5.73. Solución del ejercicio 5.27.13

Mediante el cálculo integral se puede calcular el módulo de las fuerzas $F_{bc} = F_{da}$, obteniéndose:

$$F_{bc} = F_{da} = \int_{d_5}^{d_5+L_{bc}} \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot x} dx = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2 \cdot \pi} \ln\left(1 + \frac{L_{bc}}{d_5}\right) = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 5}{2 \cdot \pi} \ln\left(1 + \frac{10}{5}\right) = 1{,}1 \cdot 10^{-5}\ \text{N}$$

Ejercicio 5.27.14

Un cable coaxial está formado por dos conductores concéntricos, el interior macizo de radio *a*, y el exterior de radio interno *b* y radio externo *c*, *figura 5.74*. Por los conductores circula la misma intensidad de corriente *I* pero de sentido contrario. La densidad de corriente es uniforme en los conductores y la longitud de los mismos es muy superior a sus radios. Se pide:

a) La inducción magnética en el interior y en el exterior del conductor.

b) Hacer una representación gráfica de B en función del radio del conductor.

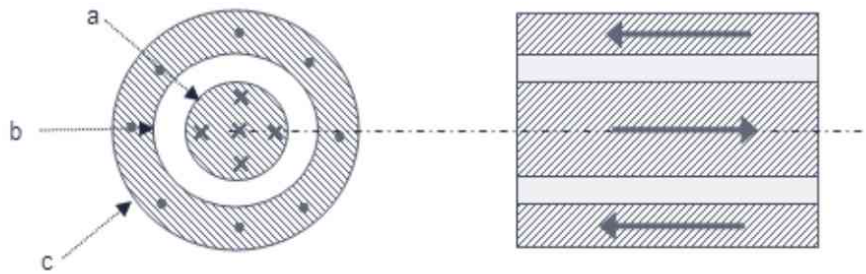


Figura 5.74. Ejercicio 5.27.14

Solución:

Teniendo en cuenta que para corrientes rectilíneas las líneas de campo son circunferencias concéntricas a las que la inducción B es tangente en cada punto, se tiene, aplicando el Teorema de Ampère, $\mathbf{C}_c = B \cdot L = \boldsymbol{\mu}_0 \cdot \boldsymbol{\Sigma} I$, *fórmula [5.29]*, a lo largo de una circunferencia (línea amperiana) para cada uno de los siguientes casos, figura 5.75:

a) Para el radio de circunferencia $x \leq a$.

Como la densidad de corriente J es constante, a un radio x le corresponde una superficie que encierra la intensidad I_x.

$$J = \text{cte.} = \frac{I}{\pi \cdot a^2} = \frac{I_x}{\pi \cdot x^2} \quad \Rightarrow \quad I_x = \frac{x^2}{a^2} I$$

$$C_c = B \cdot L = B \cdot 2 \cdot \pi \cdot x = \mu_0 \cdot I_x = \mu_0 \cdot \frac{x^2}{a^2} I \quad \Rightarrow \quad B = \mu_0 \cdot \frac{I \cdot x}{2 \cdot \pi \cdot a^2}$$

b)

– Para el radio de circunferencia, $a \leq x \leq b$.

Toda la corriente del conductor interior, de radio a, atraviesa la superficie limitada por la circunferencia de radio x.

$$C_c = B \cdot L = B \cdot 2 \cdot \pi \cdot x = \mu_0 \cdot I_x = \mu_0 \cdot I \quad \Rightarrow \quad B = \mu_0 \cdot \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot x}$$

– Para el radio de circunferencia, $b \leq x \leq c$.

Para estas distancias, la intensidad I_x que atraviesa la superficie limitada por la circunferencia de radio x, es por una parte la intensidad I del conductor interior y, por otra, y en sentido contrario, la cantidad correspondiente a la corona cilíndrica del conductor exterior I_{xext}.

$$J = \text{cte.} = \frac{I}{\pi \cdot (c^2 - b^2)} = \frac{I_{xext}}{\pi \cdot (x^2 - b^2)} \quad \Rightarrow \quad I_{xext} = \frac{x^2 - b^2}{c^2 - b^2} I$$

$$C_c = B \cdot L = B \cdot 2 \cdot \pi \cdot x = \mu_0 \cdot (I - I_{xext}) = \mu_0 \cdot I \left(1 - \frac{x^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right) \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot (c^2 - x^2)}{2 \cdot \pi \cdot x \cdot (c^2 - b^2)}$$

– Para el radio de circunferencia, $x \geq c$.

En el exterior del cable, la intensidad que atraviesa el área limitada por la circunferencia es nula (corrientes iguales pero de sentido contrario, $\Sigma I = 0$).

$$C_c = B \cdot L = B \cdot 2 \cdot \pi \cdot x = \mu_0 \cdot I_x = \mu_0 \cdot (I - I) = 0 \Rightarrow B = 0$$

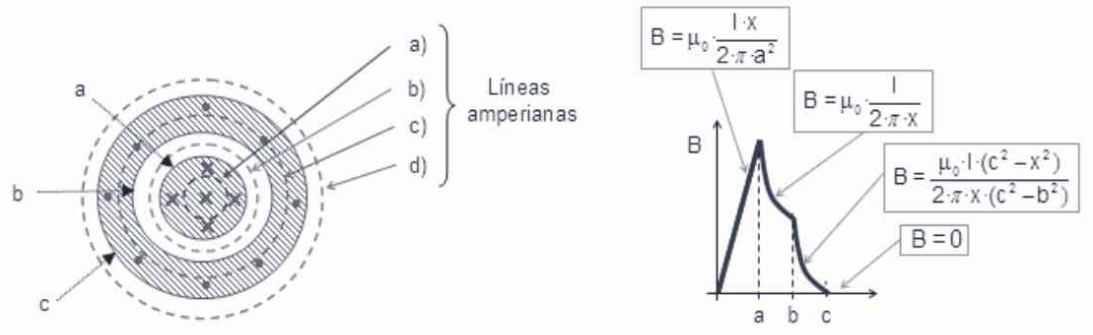


Figura 5.75. Solución del ejercicio 5.27.14

Ejercicio 5.27.15

Por un solenoide toroidal de 1.200 espiras/m con núcleo de hierro circula una corriente de 4 A que produce un campo magnético de 1,5 T. Calcular:

a) La intensidad de campo ***H***.

b) La magnetización ***M***.

c) La susceptibilidad magnética χ y permeabilidad relativa μ_r en estas condiciones de trabajo.

d) Corriente amperiana debida al núcleo de hierro.

e) Intensidad de corriente que deberá circular por el solenoide si se quiere tener la misma inducción magnética interior después de retirar el núcleo de hierro y quedar sólo aire.

Solución:

a) La intensidad de campo ***H*** es independiente del material del núcleo, su módulo se halla por la *fórmula [5.67]*.

$$\frac{N}{L} = 1.200 \text{ espiras/m} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{N \cdot I}{L} = 1.200 \cdot 4 = 4.800 \text{ A/m}$$

b) El módulo de la magnetización $\boldsymbol{M}$ se halla por la *fórmula [5,75]*, que se puede poner en forma aritmética pues, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{H}$ tienen la misma dirección.

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M \quad \Rightarrow \quad M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{1,5}{4\cdot\pi\cdot 10^{-7}} - 4.800 = 11,888\cdot 10^5 \text{ A/m}$$

c) Como el núcleo es ferromagnético, la susceptibilidad χ y la permeabilidad relativa μ_r, sólo son válidas para estas condiciones de trabajo (H = 4.800 A/m), obteniéndose por las *fórmulas [5.82] y [5.84].*

$$M = \chi\cdot H \quad \Rightarrow \quad \chi = \frac{M}{H} = \frac{11,88\cdot 10^5}{4.800} = 247,5$$

$$\mu_r = 1 + \chi = 1 + 247,5 = 248,5$$

También se puede hallar μ_r, a partir de las *fórmulas [5.68] y [5.69]:*

$$B = \mu_r\cdot\mu_0\cdot H \quad \Rightarrow \quad \mu_r = \frac{B}{\mu_0\cdot H} = \frac{1,5}{4\cdot\pi\cdot 10^{-7}\cdot 4.800} = 248,5$$

d) A partir de la *fórmula [5.73]* se obtiene la corriente amperiana I_M debida al núcleo de hierro.

$$M = \frac{N\cdot I_M}{L} \quad \Rightarrow I_M = \frac{L\cdot M}{N} = \frac{11,888\cdot 10^5}{1.200} = 990,7 \text{ A}$$

e) A partir de la inducción magnética en el interior del toroide con núcleo de aire, *fórmula [5.39]*, se obtiene la intensidad necesaria.

$$B = \mu_0 \frac{N\cdot I}{L_m} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{B}{\mu_0 \dfrac{N}{L_m}} = \frac{1,5}{4\cdot\pi\cdot 10^{-7}\cdot 1.200} = 994,7 \text{ A}$$

Nótese que, con núcleo de aire la intensidad necesaria (994,7 A) equivale a la suma de la corriente verdadera (4 A) y la corriente amperiana (990,7 A) cuando el núcleo es de hierro.

Ejercicio 5.27.16

Una delgada lámina de longitud indefinida conduce una corriente cuya densidad lineal es λ A/m. Hallar la inducción magnética $\boldsymbol{B}$ por encima y por debajo de la lámina.

Figura 5.76. Ejercicio 5.27.16

Solución:

Aplicando la regla de la mano derecha a cada uno de los hilos de corriente que forman la lámina, y teniendo en cuenta que, por simetría, la inducción ***B*** no debe variar de un punto a otro para una dirección dada, se obtienen las direcciones y sentidos de ***B*** por encima y por debajo de la lámina. Para determinar el módulo de ***B***, se considera una *línea amperiana* rectangular *abcda* con los lados mayores paralelos a la lámina.

Se aplica el Teorema de Ampère, *fórmula [5.29],* al rectángulo *abcda,* y teniendo en cuenta que la circulación de ***B*** en los tramos *ab* y *cd* es nula (***B*** y L_{ab}/L_{cd} perpendiculares):

$$C_c = \sum_0^c \bar{B}\cdot\overline{\Delta L} = \mu_0\cdot\sum_1^n I_i$$

$$\sum_0^c \bar{B}\cdot\overline{\Delta L} = B\cdot L_{ab}\cdot\cos 90^\circ + B\cdot L_{bc}\cdot\cos 0^\circ + B\cdot L_{cd}\cdot\cos 90^\circ + B\cdot L_{da}\cdot\cos 0^\circ$$

$$\sum_0^c \bar{B}\cdot\overline{\Delta L} = \cos 90^\circ + 2\cdot B\cdot L_{bc}$$

$$\mu_0\cdot\sum_1^n I_i = \mu_0\cdot\lambda\cdot L_{bc}$$

Se obtiene:

$$B = \frac{\mu_0\cdot\lambda}{2}$$

Véase la similitud con la intensidad de campo eléctrico ***E*** debido a un plano infinito de distribución uniforme de densidad de carga, *apartado 1.21*.

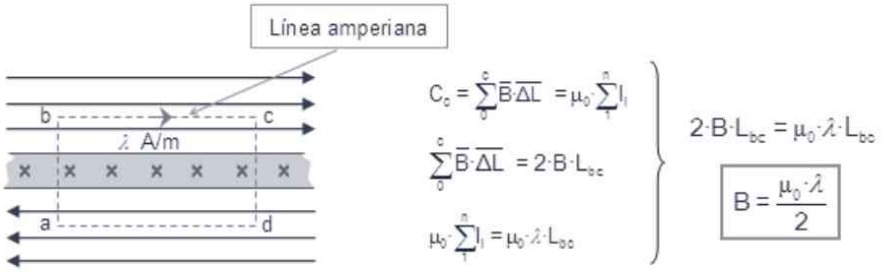


Figura 5.77. Solución del ejercicio 5.27.16

Capítulo 6

ELECTROMAGNETISMO: INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA, CIRCUITOS MAGNÉTICOS

Objetivos:

- Entender los efectos de la inducción electromagnética.
- Relacionar las magnitudes y unidades fundamentales de los fenómenos electromagnéticos.
- Describir y relacionar las magnitudes y unidades fundamentales de los circuitos magnéticos.
- Calcular circuitos magnéticos de diferentes características.
- Describir el principio de funcionamiento de los generadores de energía eléctrica.
- Relacionar las magnitudes electrostáticas, electrocinéticas y electromagnéticas.
- Exponer situaciones observables que ayuden a entender los contenidos del capítulo.
- Resolver ejercicios y problemas con contenidos propios de este capítulo.

6.1 FUERZA ELECTROMOTRIZ INDUCIDA. LEY DE FARADAY-HENRY

El fenómeno consistente en generar campos eléctricos a partir de campos magnéticos variables se denomina *inducción electromagnética*, y su descubrimiento se debe al físico inglés M. Faraday (1791-1867) y al norteamericano J. Henry (1797-1878) que, por el año 1830 e independientemente, llevaron a cabo una serie de experiencias que condujeron al descubrimiento de la inducción electromagnética y de la ley que lleva sus nombres. Las experiencias fueron las siguientes:

Se tiene una bobina conductora, por la que no pasa corriente eléctrica, unida a un galvanómetro y situada próxima a un imán se comprueba que el galvanómetro no indica corriente, *figura 6.1.a*. Si se le aproxima el imán, se observa que el galvanómetro indica el paso de una corriente **mientras** dura el movimiento del imán, *figura 6.1.b*. Si se aleja el imán, se observa que el galvanómetro indica el paso de una corriente, pero de sentido contrario a la anterior, **mientras** dura el movimiento del imán, *figura 6.1.c*. En todos los casos la magnitud de la corriente es proporcional a la velocidad del movimiento del imán, tal que, a mayor velocidad mayor corriente y a menor velocidad menor corriente.

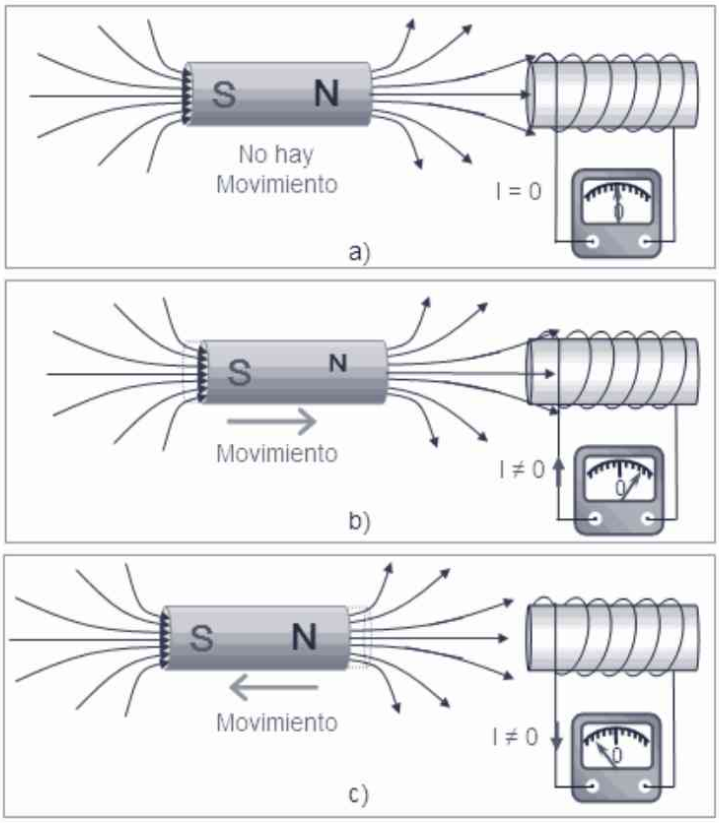


Figura 6.1. Fuerza electromotriz inducida debida al movimiento de un imán

Si permanece fijo el imán y es la espira la que se mueve, también se origina en ella un paso de corriente, con las mismas características que cuando se mueve el imán, es decir, lo importante es el **movimiento relativo** entre el imán y la bobina.

El mismo fenómeno, circulación de corriente, puede observarse si en vez de disponer de un imán móvil, la experiencia se realiza con un *solenoide* por el que circula una corriente de intensidad constante, *figura 6.2*, según se desplaza el solenoide a la derecha, *figura 6.2.a*, o hacia la izquierda, *figura 6.2.b*, la corriente tiene un sentido o el contrario.

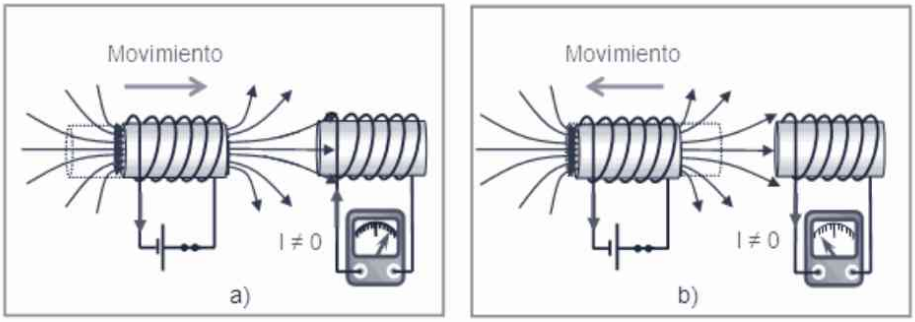


Figura 6.2. Fuerza electromotriz inducida debida al movimiento de un solenoide

También puede originarse una corriente en la espira sin existir movimiento relativo entre el solenoide y el conductor. Basta para ello que por el solenoide circule una *corriente variable* (por ejemplo, al abrir o cerrar el circuito o al modificar el valor de la intensidad mediante un reóstato).

Así, en la *figura 6.3.a*, **mientras** se disminuye la resistencia del reóstato aumenta la intensidad *I* por el solenoide, aumentando su inducción magnética, produciéndose una corriente en la bobina que está enfrente de él. Esta variación de corriente tiene, sobre la bobina, el mismo efecto que el acercamiento del solenoide en la *figura 6.2.a*. Si se aumenta la resistencia del reóstato, *figura 6.2.b*, disminuye la corriente en el solenoide disminuyendo su inducción magnética, produciéndose una corriente en la bobina que está enfrente de él, **mientras** dura la variación de la resistencia, pero con sentido contrario al caso anterior. Esta variación de corriente tiene, sobre la bobina, el mismo efecto que el alejamiento del solenoide en la *figura 6.2.b*.

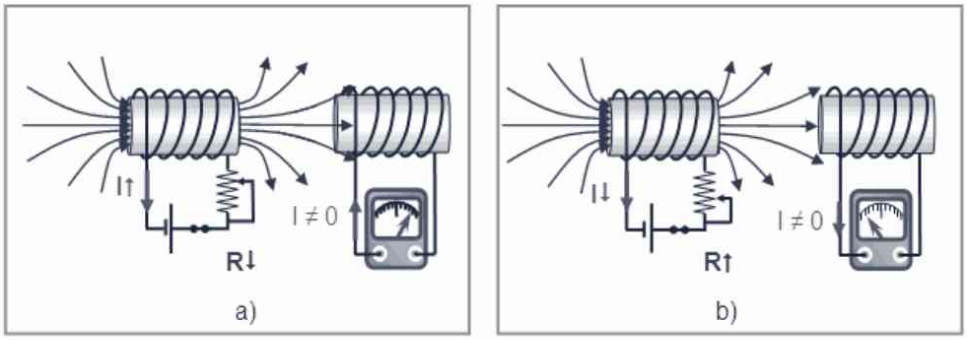


Figura 6.3. Fuerza electromotriz inducida debida a la variación de corriente

Por otra parte, se sabe, *apartado 3.4*, que para que circule una intensidad de corriente por un circuito, debe haber un generador que suministre energía W a las cargas eléctricas Q a lo largo del circuito, siendo la energía suministrada a la unidad de carga la *fuerza electromotriz* $e = W/Q$. En este capítulo, con objeto de que no se produzcan confusiones entre fem y campo eléctrico (usualmente expresadas ambas mediante la letra E), se utiliza para expresar la fem, la letra *"e"* en lugar de E, dejando ésta para expresar el campo eléctrico.

En las experiencias anteriores, para que circule corriente por la bobina conectada al galvanómetro, es necesario que en ella exista una fem que la genere. Como la característica común en todas las experiencias anteriores es la **variación de flujo magnético** que se produce a través de la superficie que forma cada una de las espiras de la bobina, se deduce que, la causa de la *fuerza electromotriz inducida e* y, como consecuencia, de la corriente, llamada *corriente inducida*, producida en el circuito que forma la bobina, es dicha variación de flujo.

Se tiene, pues, que, *siempre que varíe el flujo magnético a través de un circuito se origina en él una fuerza electromotriz inducida, de tal manera que, un aumento de flujo supone una fem en un sentido y una disminución de flujo una fem en sentido contrario a la anterior*. El circuito donde se origina la fuerza electromotriz inducida recibe el nombre de inducido y el cuerpo o circuito que crea el campo magnético recibe el nombre de inductor.

Las experiencias anteriores se resumen en la ley de Faraday, también conocida como ley de Faraday-Henry:

"*La fuerza electromotriz inducida "e" en un circuito es proporcional a la rapidez con la que varía el flujo magnético que lo atraviesa*". En forma matemática:

$$e = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \qquad [6.1]$$

Si se quiere tener en cuenta la polaridad de la fem inducida, esta fórmula, como se verá en el apartado siguiente con la ley de Lenz, debe estar precedida del signo menos para tener en cuenta la polaridad de la fem inducida, es decir:

$$e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \qquad [6.2]$$

Por otra parte, *fórmula [5.4],* el flujo es el producto escalar de los vectores $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{A}$ ($\Phi = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = B \cdot A \cdot \cos\alpha$), se tiene:

$$e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta B \cdot A \cdot \cos\alpha}{\Delta t} \qquad [6.3]$$

De la fórmula anterior se deduce, *figura 6.*4, que se puede obtener una fem *e* inducida de tres formas diferentes o una mezcla de las tres:

a) Variando el módulo de la inducción magnética ***B***.

b) Variando la superficie *A* del circuito.

c) Variando el ángulo α, es decir, la orientación relativa entre ***B*** y *A*.

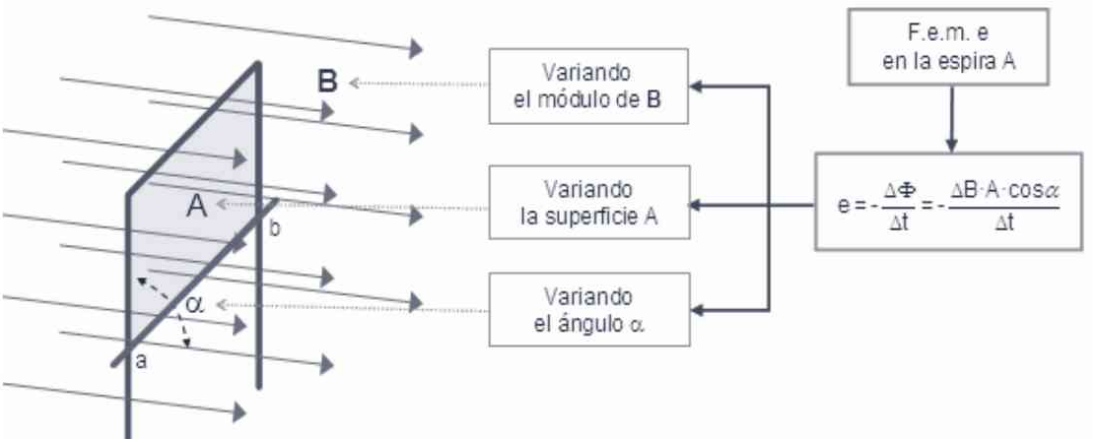


Figura 6.4. Ley de Farady-Henry

El flujo Φ se refiere al flujo total abarcado por el circuito. Si Φ hace referencia al flujo de una espira y el circuito tiene *N* espiras, la fem *e* inducida será:

$$e = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \qquad [6.4]$$

También se ha de tener en cuenta que el flujo Φ comprende, además del flujo exterior inducido Φ_e, el flujo generado por el propio circuito inducido Φ_i debido a la corriente inducida, cuando exista.

$$\Phi = \Phi_e + \Phi_i \qquad [6.5]$$

En efecto, si en el circuito cerrado de la *figura 6.*4, se considera que la fem inducida *e* es debida sólo al flujo exterior Φ_e ($e = \Delta\Phi_e / \Delta t$) y se tiene que *R* es la resistencia del circuito, como la intensidad que circula por el mismo tiene la expresión $I = e/R$, cuando $R = 0$ *se* tendría que $I = \infty$, lo que contradice la experiencia, por lo que es obligado que *e* tienda a cero ($e \to 0$) cuando *R* tienda a cero ($R \to 0$), lo que hace necesario tener en cuenta el flujo del propio circuito Φ_i haciendo, $e = \Delta\Phi/\Delta t = \Delta(\Phi_e + \Phi_i)/\Delta t$, puesto que como Φ_i tiene sentido contrario a Φ_e (ver ley de Lenz) anula la variación de éste, de tal manera que si $R \to 0 \Rightarrow e \to 0$.

La *fórmula [6.2]* en forma diferencial es:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad [6.6]$$

Que se puede poner en la forma:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(B \cdot A \cdot \cos\alpha)}{dt} = -A \cdot \cos\alpha \cdot \frac{dB}{dt} - B \cdot \cos\alpha \cdot \frac{dA}{dt} + B \cdot A \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt} \qquad [6.7]$$

Lo que evidencia las diferentes formas para obtener fem inducida *e*, vistas en un párrafo anterior: por variación de *B*, variación de *A* y variación de α.

6.2 LEY DE LENZ

Aunque la ley de Faraday-Henry nos permite conocer la magnitud de la fem inducida *e,* nada nos dice a cerca del sentido de la corriente inducida. Fue el físico alemán H. F. Lenz (1804-1865) quien en 1834 propuso la regla para determinar dicho sentido, conociéndose como *ley de Lenz*:

"*Las corrientes inducidas en un circuito se producen en un sentido tal que con sus efectos magnéticos tienden a oponerse a la causa que las originó*".

Así, *figura 6.5*, cuando el polo norte *N* de un imán se aproxima a una espira, que se mantiene fija, la corriente inducida i_i circulará en un sentido tal que la polaridad magnética que origina en la espira sea un polo norte *N*, enfrentada al polo norte del imán que se le aproxima, con lo que ejercerá una acción magnética repulsiva sobre el imán, la cual es preciso vencer para que se siga manteniendo el fenómeno de la inducción. La corriente inducida i_i origina una inducción magnética B_i que debilita el campo magnético inductor.

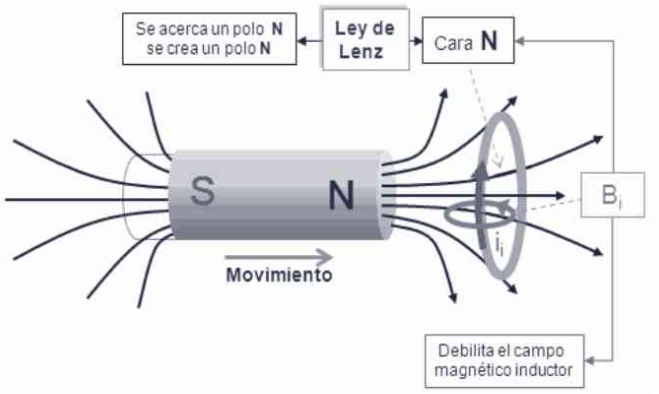


Figura 6.5. Ley de Lenz. Imán acercándose a la espira

Si el polo norte N del imán se aleja de la espira, *figura 6.6*, la corriente inducida i_i tiene un sentido tal que genere un polo Sur que se oponga a la separación de ambos, ejerciendo una acción magnética atractiva sobre el imán, la cual es preciso vencer para que se siga manteniendo el fenómeno de la inducción. La corriente inducida i_i origina una inducción magnética B_i que refuerza el campo magnético inductor.

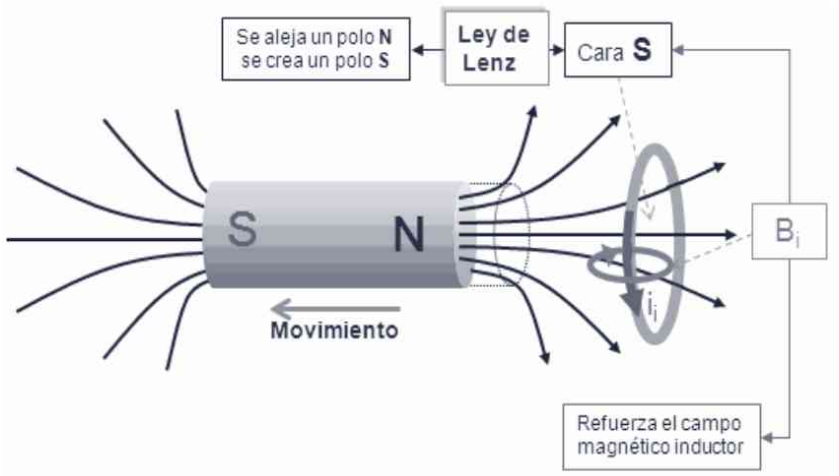


Figura 6.6. Ley de Lenz. Imán alejándose de la espira

En los dos casos anteriores, sólo manteniendo el movimiento relativo entre espira e imán persistirán las corrientes inducidas, de modo que si se detiene el proceso de acercamiento o de separación cesarían aquéllas y, por tanto, la fuerza magnética entre el imán y la espira desaparecería.

La ley de Lenz hace referencia a corrientes inducidas, pero también puede aplicarse a un circuito abierto por el que, por tanto, no circula corriente. En este caso se supone lo que ocurriría si el circuito estuviese cerrado y se determina el sentido de la corriente inducida.

La ley de Lenz es una consecuencia del *principio de la conservación de la energía*. La producción de una corriente eléctrica requiere un consumo de energía. En los fenómenos de inducción electromagnética anteriores, es el trabajo realizado en contra de las fuerzas magnéticas (de repulsión o atracción) que aparecen entre espira e imán el que suministra la energía necesaria para mantener la corriente inducida. Ciertamente:

Si no hay desplazamiento, el trabajo es nulo, no se transfiere energía al sistema y las corrientes inducidas no pueden aparecer. Análogamente, si éstas no se opusieran a la acción magnética del imán, no habría trabajo exterior, ni por tanto cesión de energía al sistema. Así, por ejemplo, si al acercar el polo norte N a la espira, *figura 6.5*, se produjera en ésta una corriente inducida i_i con un sentido que originase un polo sur S enfrentado al polo norte N que se acerca (sentido contrario al indicado en la figura), los polos se atraerían sin mediar fuerza exterior, acelerando el movimiento del imán hacia la espira, aumentando, su energía cinética a medida que se acercan (pues aumenta su velocidad), y aumentado la corriente inducida i_i (mayor variación de flujo en el tiempo) y como consecuencia

aumentando la energía calorífica en la espira ($I^2 \cdot R \cdot t$) y todo esto sin aporte de energía al sistema, lo cual vulnera el *principio de la conservación de la energía.*

Si se quiere expresar en magnitud y signo la fem inducida *e*, la fórmula de la ley de Faraday, *fórmula [6.1]*, debe estar precedida del signo menos, *fórmula [6.2]*. En efecto, *figura 6.7.a*, a una corriente *I* positiva le corresponde un flujo positivo como se ve en dicha figura. Si este flujo crece, *figura 6.7.b*, en virtud de la ley de Lenz, la corriente inducida i_i ha de crear un flujo que se oponga al anterior y puesto que $\Phi_2 > \Phi_1$, conforme a la ley de Faraday se creará una fem $e = \Delta\Phi/\Delta t = (\Phi_2 - \Phi_1)/\Delta t > 0$, con lo cual la corriente sería positiva que, como se ha visto contraviene el principio de conservación de la energía, por lo que ha de ser la fem *e* negativa, es decir, $e = -\Delta\Phi/\Delta t = -(\Phi_2 - \Phi_1)/\Delta t < 0$.

De la misma manera, si el flujo disminuye, *figura 6.7.c*, en virtud de la ley de Lenz, la corriente inducida i_i ha de crear un flujo que refuerce al anterior y puesto que $\Phi_2 < \Phi_1$, conforme a la ley de Faraday se creará una fem $e = \Delta\Phi/\Delta t = (\Phi_2 - \Phi_1)/\Delta t < 0$, con lo cual la corriente sería negativa que, también contraviene el principio de conservación de la energía, por lo que ha de ser la fem *e* positiva, es decir, $e = -\Delta\Phi/\Delta t = -(\Phi_2 - \Phi_1)/\Delta t > 0$.

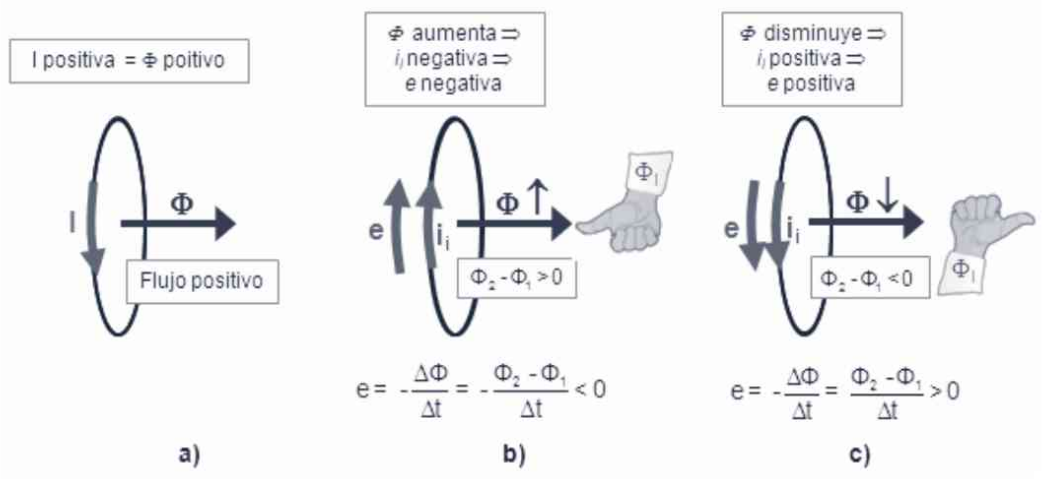


Figura 6.7. Explicación del signo menos en la ley de Faraday

En la *figura 6.8* se muestra la relación entre las leyes de Faraday y Lenz.

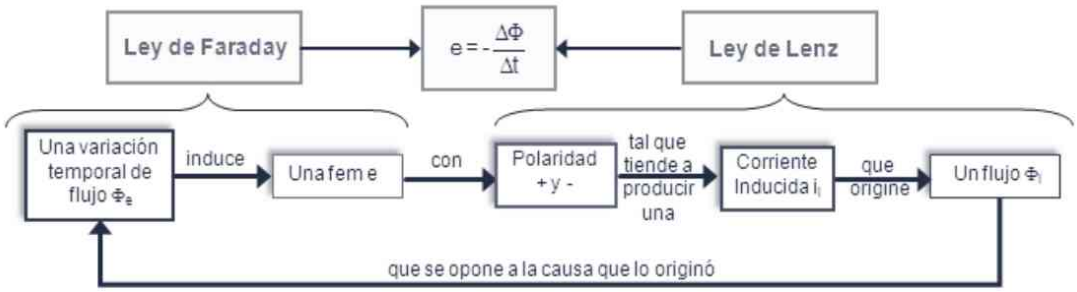


Figura 6.8. Ley de Faraday y ley de Lenz

Se tienen dos formas de obtener fem inducida:

- Fuerza electromotriz inducida dinámica.
- Fuerza electromotriz inducida estática.

Cada una de ellas se verá a continuación.

6.3 FUERZA ELECTROMOTRIZ INDUCIDA DINÁMICA: CAMPO ELÉCTRICO INDUCIDO Y FEM INDUCIDA EN UN CONDUCTOR EN MOVIMIENTO

Sea un conductor metálico *ab* de longitud *L* que se desplaza a una velocidad $\boldsymbol{v}$ perpendicular a las líneas de inducción magnética $\boldsymbol{B}$ perpendiculares al plano del papel, en la dirección y sentido indicado en la *figura 6.9.a.*

Los electrones libres del conductor (se ha exagerado el ancho del mismo para visualizar mejor el fenómeno) que se desplazan a la velocidad $\boldsymbol{v}$ en el interior un campo magnético de inducción $\boldsymbol{B}$, y perpendicular a él, están sometidos a una fuerza $\boldsymbol{F}$, fuerza de Lorentz, dada por la *fórmula [5.42]*, $F = q \cdot v \cdot B$, que es, a su vez, perpendicular a $\boldsymbol{v}$ y a $\boldsymbol{B}$, es decir, con la misma dirección que el conductor. Debido a esta fuerza los electrones son desviados hacia la parte derecha de dicho conductor, acumulándose en el extremo *b* y disminuyendo en el extremo *a*. A medida que las cargas aumentan en ese lado, se crea un campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ que se opone a ese desplazamiento de cargas, llegándose a un equilibrio en el que la fuerza electromagnética hacia la derecha se equilibra con la fuerza eléctrica hacia la izquierda debida al campo eléctrico $\boldsymbol{E}$, siendo ahora la fuerza eléctrica $\boldsymbol{F_E}$, fuerza de Coulomb, *fórmula [1.7]*, igual en dirección y módulo a la fuerza electromagnética $\boldsymbol{F}$, pero de sentido contrario, cumpliéndose:

$$F_E = F \quad \Rightarrow \quad q \cdot E = q \cdot v \cdot B \quad \Rightarrow \quad E = v \cdot B \qquad [6.8]$$

Este campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ crea una diferencia de potencial V_{ab} entre los puntos *a* y *b*, distante una distancia *L*, cuyo valor es, *fórmula [1.11]*, $V_{ab} = E \cdot L$. Sustituyendo el valor de *E,* obtenido en *[6.8]*, se tiene:

$$V_{ab} = B \cdot L \cdot v \qquad [6.9]$$

Esto quiere decir que el conductor que se mueve se está comportando como un generador de fem, *apartado 3.4*, cuya magnitud *e* es, precisamente, igual a la ddp V_{ab}, es decir:

$$e = B \cdot L \cdot v \qquad [6.10]$$

Se obtiene la fem en V (voltios), expresando la inducción magnética en T (teslas), la longitud en m y la velocidad en m/s.

La diferencia de potencial V_{ab} debida a la fem e se mantiene mientras continúe el movimiento del conductor a través del campo magnético. Si el sentido del movimiento del conductor es opuesto al indicado en la *figura 6.9.a*, la polaridad de la fem e también se invierte.

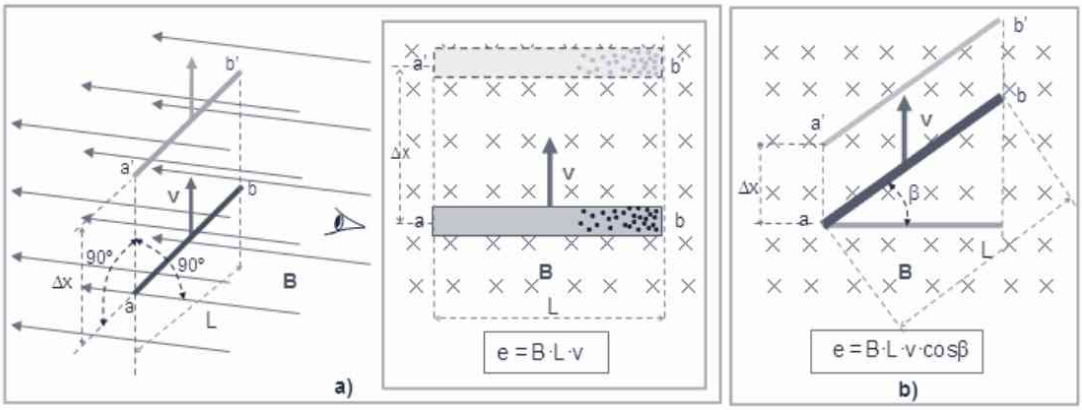


Figura 6.9. Fuerza electromotriz inducida por un conductor en movimiento

El sentido de la fem inducida viene dado por la *regla de la mano derecha, figura 6.10,* que dice, "si extendemos perpendicularmente entre sí los tres primeros dedos de la mano derecha (pulgar, medio e índice) de forma que el *índice* señale la dirección y el sentido del campo magnético ***B***, el *pulgar* la dirección y sentido del movimiento ***v***, el *medio* indicará el sentido de la fem e (o la corriente inducida I)".

Si las direcciones de las magnitudes indicadas en el párrafo anterior no forman entre ellas ángulos de 90º, se pueden dar diferentes casos, pero teniendo siempre en cuenta que la fem inducida *e,* siempre se produce cuando un conductor corta líneas de inducción magnética. Ejemplos:

- Si la inducción magnética ***B*** y la dirección del movimiento ***v*** son perpendiculares ($\alpha = 90º$), se tiene la fem máxima e_{max}, *fórmula [6.10].*

- Si el conductor se mueve paralelo a las líneas de inducción magnética ***B***, los conductores "no cortan" las líneas de inducción, las cargas eléctricas libres del mismo no están sometidas a la fuerza electromagnética ***F***, por lo que no existe desplazamiento de cargas y por consiguiente tampoco campo eléctrico ***E*** ni fem e.

- Si el desplazamiento del conductor*, figura 6.9.b*, forma un ángulo β respecto a la componente del conductor que "corta líneas de inducción", $L \cdot \cos \beta$, la fem inducida es:

$$e = B \cdot L \cdot v \cdot \cos\beta \qquad [6.11]$$

- Si la velocidad $\boldsymbol{v}$ del movimiento del conductor forma un ángulo α con la dirección de la inducción magnética $\boldsymbol{B}$, *figura 6.10*, la fem e está dada por:

$$e = B \cdot L \cdot v \cdot \operatorname{sen}\alpha \qquad [6.12]$$

Es decir, que sólo crea fem inducida la componente de la velocidad, $v \cdot \operatorname{sen}\alpha$, perpendicular a la inducción magnética $\boldsymbol{B}$.

En general, la fórmula de la fem inducida se puede poner en la forma de producto vectorial y escalar:

$$e = \left(\bar{v} \times \bar{B}\right)\bar{L} \qquad [6.13]$$

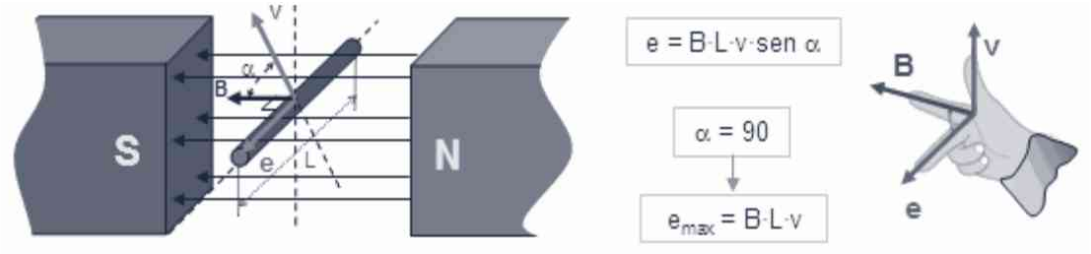


Figura 6.10. Fuerza electromotriz inducida

De la misma manera que en la *figura 6.9.a,* considérese un conductor de longitud L que se desplaza a una velocidad constante $\boldsymbol{v}$ en el interior de un campo magnético de inducción $\boldsymbol{B}$, las direcciones de L, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{B}$ son perpendiculares, pero ahora, *figura 6.11*, el desplazamiento del conductor *ab* se realiza sobre otros dos conductores unidos a una resistencia R, formando todos ellos un circuito cerrado. Para simplificar el estudio del circuito se considera que tanto los contactos de los conductores, como ellos mismos, carecen de resistencia eléctrica.

Considérese un desplazamiento del conductor *ab* una distancia Δx en un tiempo Δt. Este movimiento, como se ha visto, dará lugar a una fem e, *fórmula [6.10].* Como la velocidad v del desplazamiento se ha supuesto constate, $v = \Delta x/\Delta t$, por lo que se puede poner:

$$e = B \cdot L \cdot v = B \cdot \frac{L \cdot \Delta x}{\Delta t} = B \cdot \frac{\Delta A}{\Delta t} \qquad [6.14]$$

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Siendo ΔA el área cortada por el conductor *ab.* Como, por otra parte, se tiene que, $\Phi = B \cdot A$, *fórmula [5.1],* se puede poner:

$$e = B \cdot \frac{\Delta A}{\Delta t} = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \qquad [6.15]$$

Que es la expresión matemática de la ley de Faraday, *fórmula [6.2].* El signo menos se explica conforme a la ley de Lenz de la siguiente manera:

En la *figura 6.11 izquierda*, al pasar el conductor móvil de la posición *ab* a la posición *a'b'*, el flujo que atraviesa la espira formada por el conductor que se mueve hacia arriba, los dos conductores laterales y la resistencia *R*, pasa de tener un valor Φ_1 a tener otro valor Φ_2 menor, $\Phi_2 - \Phi_1 < 0$, la fem *e* debe ser positiva para que la corriente a que da lugar refuerce el flujo magnético que está disminuyendo en la espira, lo que justifica el signo menos en la *fórmula [6.15], e* = $-(\Phi_2 - \Phi_1)/\Delta t > 0$. Si el conductor, desde la posición *a'b'*, *figura 6.11 derecha*, se moviera hacia abajo, el flujo abarcado por la espira citada aumentaría, siendo $\Phi_2 - \Phi_1 > 0$ y, en este caso, la fem *e* debe ser negativa para que la corriente a que da lugar debilite el flujo magnético que está aumentando en la espira, lo que, también, justifica el signo menos en dicha fórmula, $e = -(\Phi_2 - \Phi_1)/\Delta t < 0$.

La fem *e* generada por el desplazamiento del conductor, en los dos casos anteriores, al estar el circuito cerrado, produce una corriente *I* que, conforme a la ley de Lenz, tiene el sentido de las agujas de un reloj (refuerza el flujo que está disminuyendo) si el conductor se desplaza de la posición *ab* a *a'b', figura 6.11 izquierda*, y el sentido contrario a las agujas de un reloj (debilita el flujo que está aumentando) si el conductor se desplaza de *a'b'* a *ab*, *figura 6.11 derecha*.

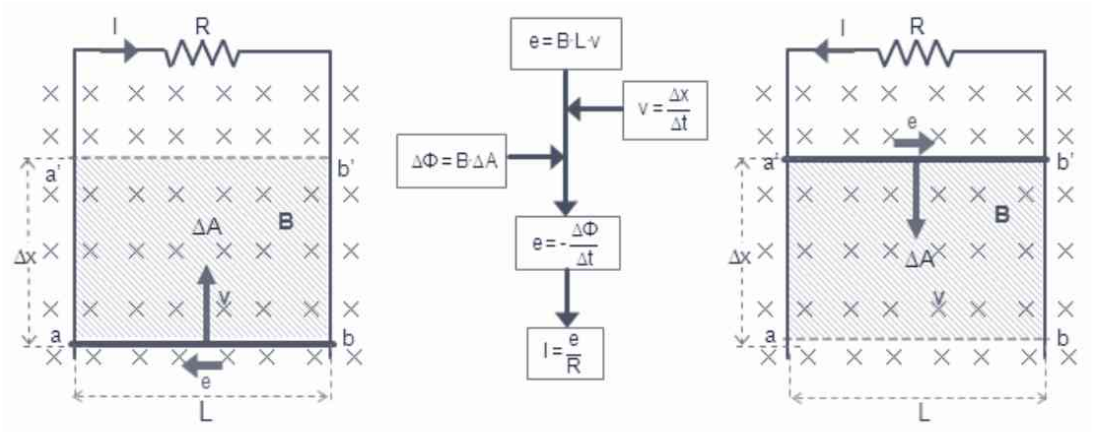


Figura 6.11. Fuerza electromotriz e y corriente inducida I

La *figura 6.12.a* es una representación del circuito de la *figura 6.11* visto lateralmente, estando el conductor en el interior del campo magnético de inducción ***B***, en reposo y por tanto no generando fem inducida *e*. En la *figura 6.12.b* el conductor se mueve a la velocidad ***v***, generando una fem inducida *e* y, como el circuito está cerrado, una

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

corriente inducida *I* que penetra en el plano del papel (regla de la mano derecha), creando un campo magnético $\boldsymbol{B_I}$ circular alrededor del conductor. En la *figura 6.12.c* se representa el campo magnético resultante $\boldsymbol{B_R}$ de la interacción de los dos anteriores, observándose que la inducción magnética aumenta delante del conductor en el sentido del movimiento, líneas más unidas, y se debilita detrás del mismo, líneas más separadas.

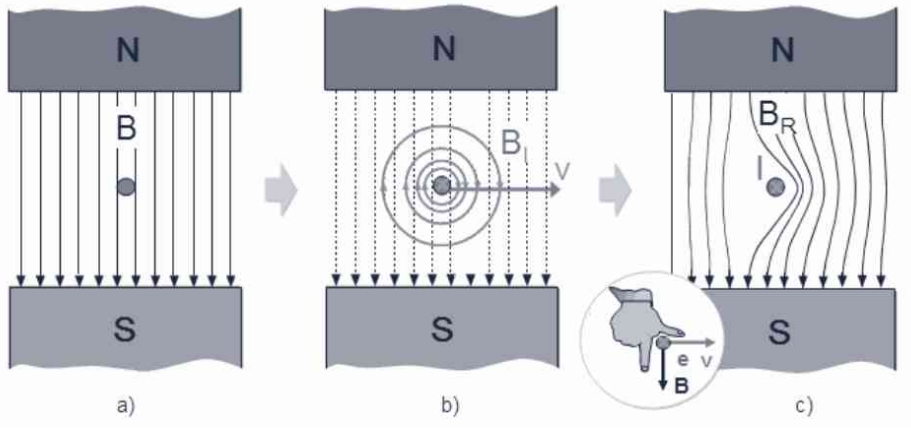


Figura 6.12. Campo magnético del inductor, inducido y resultante

Tanto aquí como en el caso de un conductor, situado en el interior de un campo magnético, por el que circula una corriente, *apartado 5.14*, el campo magnético "empuja" al conductor hacia zonas donde la inducción magnética es menor.

En la *figura 6.13* se tienen el valor de la fuerza electromotriz inducida *e* para diferentes ángulos entre la dirección del conductor de longitud *L* y la inducción magnética ***B***.

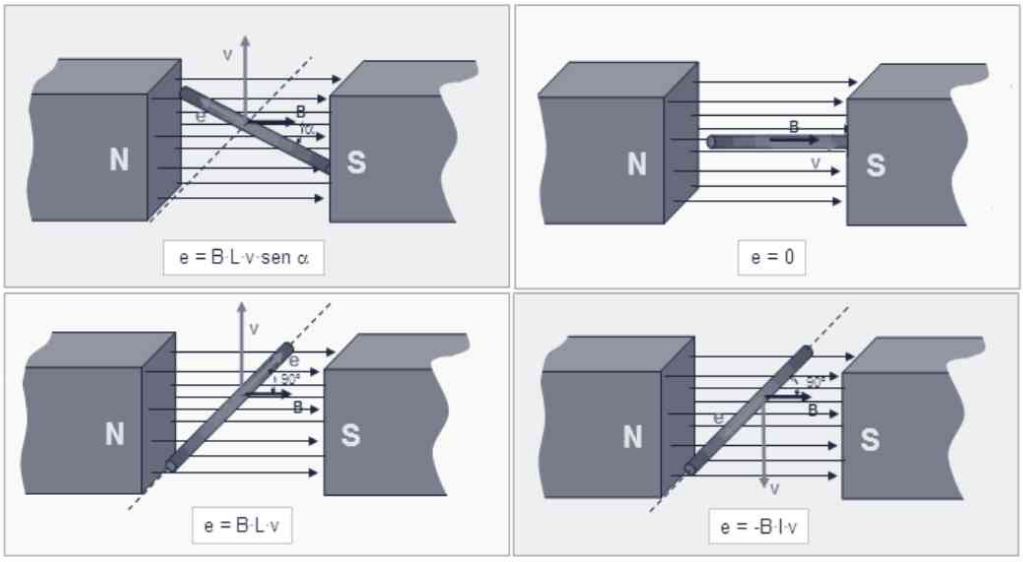


Figura 6.13. Fuerza electromotriz inducida e en diferentes situaciones

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

6.4 FUERZA ELECTROMOTRIZ INDUCIDA ESTÁTICA: CAMPO ELÉCTRICO INDUCIDO Y FEM INDUCIDA POR UN FLUJO CAMBIANTE EN EL TIEMPO

En el apartado anterior se ha explicado cómo se origina un campo eléctrico que se desplaza en el interior de un campo magnético "cortando" sus líneas de inducción. Se verá a continuación cómo se origina el campo eléctrico, que a su vez produce una fem, cuando hay un flujo cambiante a través de una espira fija, tal como ocurre en el supuesto del apartado 6.3.

Sea una espira circular realizada con un conductor eléctrico situada en un campo magnético con su superficie perpendicular a las líneas de inducción $\boldsymbol{B}$, *figura 6.14.* Al variar la inducción con el tiempo, $\Delta B/\Delta t$, el flujo magnético a través de la espira también lo hará y, conforme a la ley de Faraday, se producirá una fem inducida $e = -\Delta\Phi/\Delta t$, y como consecuencia una corriente I con un sentido dado por la ley de Lenz, hacia la izquierda si el módulo de $\boldsymbol{B}$ aumenta y hacia la derecha si disminuye. Pero ahora, a diferencia de cuando el conductor está en movimiento, no existen fuerzas de Lorentz sobre los electrones que produzcan sus desplazamientos, pues la espira está en reposo. Sin embargo, puesto que se produce una corriente I, debe haber un campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ que produzca el desplazamiento de las cargas eléctricas (*figura 3.10)*.

El campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ producido en la espira, por simetría, debe tener la misma magnitud en todos sus puntos y, además, no puede tener una componente radial (si se toma como superficie gaussiana una superficie cilíndrica perpendicular al plano del papel, conforme a la ley de Gauss, puesto que no existe carga eléctrica interior, el flujo eléctrico a través de dicha superficie es cero, lo que implica que el campo eléctrico radial es cero), por lo que se concluye que el campo eléctrico inducido es tangencial, y las líneas del campo eléctrico son **círculos concéntricos**, *figura 6.14.*

En la espira, una carga eléctrica q al ser desplazada una vuelta completa ($2 \cdot \pi \cdot r$) por la acción del campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ realiza un trabajo, *fórmula 1.10*, $W = E \cdot q \cdot L = E \cdot q \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$. También se tiene, *fórmula 3.10*, que el trabajo y la fem están relacionados por $e = W/q$, de donde $W = e \cdot q$, igualando las dos expresiones anteriores se tiene:

$$e = E \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \qquad [6.16]$$

Si ΔL representa un arco de la espira lo suficientemente pequeño ($\Delta L \to 0$), $\Sigma \Delta L = 2 \cdot \pi \cdot r$, por lo que la fórmula anterior puede ponerse en forma de producto escalar:

$$e = \sum_{C} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\Delta L} \qquad [6.17]$$

Esta es una expresión general que, se puede demostrar, es válida para cualquier forma de circuito.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Sustituyendo en la *fórmula [6.2]* de la ley de Faraday, se tiene:

$$\sum_{C} \bar{E} \cdot \overline{\Delta L} = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \qquad [6.18]$$

Lo que evidencia que un flujo magnético cambiante produce un campo eléctrico. De esta manera se tiene que, los campos eléctricos inducidos no están asociados con cargas eléctricas sino con un flujo magnético cambiante, aunque ambos, como se ha visto, ejercen fuerzas eléctricas sobre las cargas eléctricas, existiendo una *notable diferencia entre ambos*, las líneas de campo eléctrico ***E*** debidas a un flujo magnético variable pueden formar círculos cerrados, como se ha visto, mientras que las debidas a cargas eléctricas siempre comienzan en una carga positiva y terminan en una carga negativa.

Es importante observar que la existencia del campo eléctrico inducido ***E***, es independiente de la presencia de la espira conductora, que puede estar presente o no (el área correspondiente a $\Delta\Phi$ existe independientemente de la espira conductora).

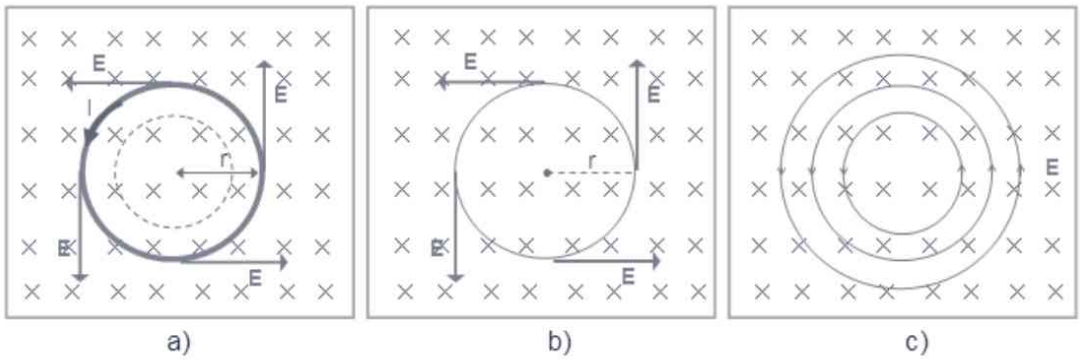


Figura 6.14. Campo eléctrico inducido por $\Delta B/\Delta t$

La fórmula que relaciona el campo eléctrico ***E***, debido a cargas eléctricas, con la ddp V_{ba} entre dos puntos *a* y *b,* distantes ΔL, *apartado 1.9*, en forma de producto escalar es:

$$V_{ba} = -\sum_{a}^{b} \bar{E} \cdot \overline{\Delta L} \qquad [6.19]$$

Cuando el punto *a* y *b* son el mismo punto, $V_{ba} = 0$, la ecuación anterior toma la forma:

$$\sum_{C} \bar{E} \cdot \overline{\Delta L} = 0 \qquad [6.20]$$

Se dice que el campo es conservativo.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Sin embargo, si el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ es debido a un flujo variable $\sum_C \bar{E}\cdot\overline{\Delta L} \neq 0$, de acuerdo a la ley de Faraday:

$$\sum_C \bar{E}\cdot\overline{\Delta L} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \neq 0 \qquad [6.21]$$

Se dice que **E** es un campo no conservativo.

Recordando, se dice que un *campo es conservativo* cuando el trabajo realizado para llevar la carga *q* entre dos puntos no depende del camino recorrido, y un *campo es no conservativo* cuando si depende del camino recorrido.

La *fórmula [6.18]* correspondiente a la ley de Faraday en forma diferencial es:

$$\int_C \bar{E}\cdot\overline{\Delta L} = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad [6.22]$$

6.5 ESTUDIO ENERGÉTICO DE UN GENERADOR Y UN MOTOR DE ENERGÍA ELÉCTRICA ELEMENTAL. TRABAJO ELECTROMAGNÉTICO

A continuación se estudia el comportamiento de un conductor rectilíneo que se encuentra en el interior de un campo magnético de inducción $\boldsymbol{B}$, moviéndose, debido a una fuerza externa (generador elemental) o debido a una corriente (motor elemental).

Generador elemental de energía eléctrica

Tal como se ha visto en los apartados anteriores, el circuito de la *figura 6.15* representa un generador elemental de energía eléctrica. Al mover el conductor a la velocidad *v* se origina una fem de inducción $e = B \cdot L \cdot V$, y si el circuito está cerrado a través de una resistencia *R*, se produce una corriente $I = e/R$.

Al mismo tiempo, la corriente *I*, que circula por el conductor *ab* que se desplaza en el interior del campo magnético $\boldsymbol{B}$, hace que sobre él actúe una fuerza electromagnética $\boldsymbol{F}$ de módulo, $F = I \cdot L \cdot B$, cuyo sentido, conforme a la Ley de Lenz, es de oposición al movimiento, es decir contrario al sentido de *v*, y si *v* se quiere mantener constante (y por tanto la fem *e*), la fuerza que produce el movimiento del conductor $\boldsymbol{F}_v$ ha de ser igual a **F** pero de sentido contrario, es decir, $\boldsymbol{F}_v = -\boldsymbol{F}$.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

De esta manera se tiene que, al conductor se le comunica una potencia mecánica, $P_M = F_V \cdot v$, y entrega una potencia eléctrica, $P_e = e \cdot I$. Como se tiene que, $F_v = F$, se puede poner:

$$P_M = F_V \cdot v = F \cdot v = B \cdot L \cdot I \cdot v \qquad [6.23]$$

$$P_e = e \cdot I = B \cdot L \cdot v \cdot I \qquad [6.24]$$

Es decir, la potencia mecánica comunicada al conductor P_M, éste la entrega en forma de potencia eléctrica P_e, y puesto que no se han considerado pérdidas, $P_M = P_e$. Ha ocurrido una transformación de potencia mecánica en potencia eléctrica.

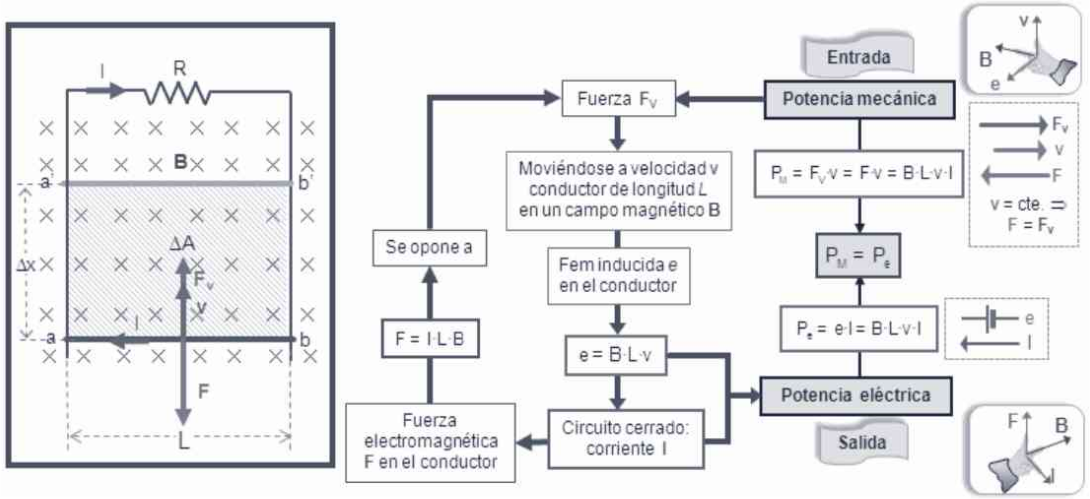


Figura 6.15. Generador elemental de energía eléctrica

Motor elemental de energía eléctrica

Si en el circuito de la *figura 6.15*, estando el conductor *ab* en reposo, se sustituye la resistencia *R* por una batería, *figura 6.16,* circulará una intensidad *I* a través de dicho conductor, y como éste se encuentra en el interior de un campo magnético ***B*** actúa sobre él una fuerza electromagnética ***F*** de módulo, $F = I \cdot L \cdot B$, moviéndolo a una velocidad *v,* de tal manera que si la velocidad permanece constante se ha de verificar que la fuerza ***F*** ha de ser igual pero de sentido contrario a la fuerza resistente $\boldsymbol{F_R}$ que se opone al movimiento (fuerza útil), es decir, $\boldsymbol{F_R} = -\boldsymbol{F}$.

Al mismo tiempo, como el conductor *ab* se desplaza a una velocidad *v* en el interior del campo magnético ***B***, se producirá en él una fem de inducción *e*, $e = B \cdot L \cdot v$, cuya polaridad, conforme a la Ley de Lenz, es de oposición a la corriente *I*, por esta razón recibe el nombre de fuerza contraelectromotriz *e'*.

De esta manera se tiene que, al conductor se le comunica una potencia eléctrica, $P_e = e' \cdot I$, y entrega una potencia mecánica (potencia útil), $P_M = F_R \cdot v$. Como se tiene que $F_R = F$, se puede poner:

$$P_e = e' \cdot I = B \cdot L \cdot v \cdot I \qquad [6.25]$$

$$P_M = F_R \cdot v = F \cdot v = B \cdot L \cdot I \cdot v \qquad [6.26]$$

Es decir, la potencia eléctrica comunicada al conductor P_e, éste la entrega en forma de potencia mecánica P_M, y puesto que no se han considerado pérdidas, $P_e = P_M$. Ha ocurrido una transformación de potencia eléctrica en potencia mecánica.

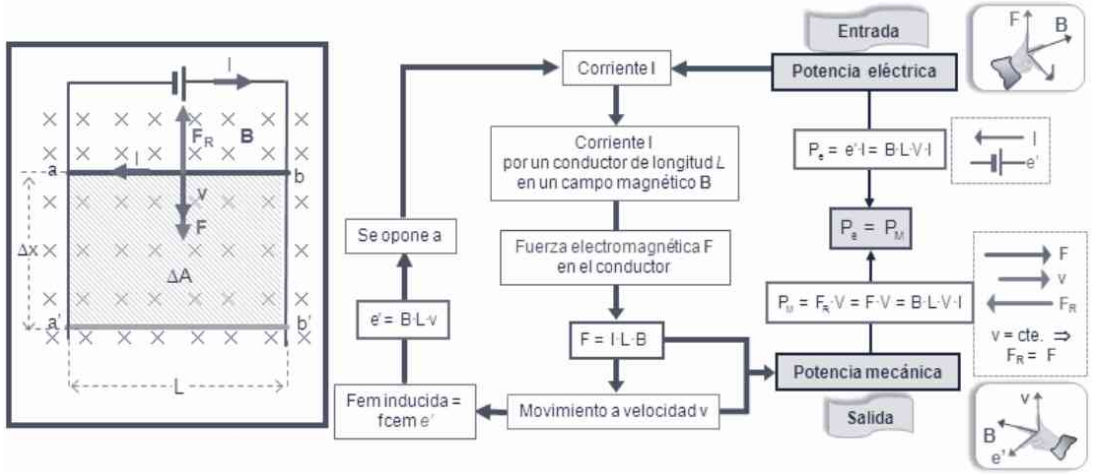


Figura 6.16. Motor elemental de energía eléctrica

En ambos casos, generador y motor, se genera un trabajo electromagnético T, para cuya determinación se considera un desplazamiento de la fuerza $\boldsymbol{F}$ una distancia Δx, teniéndose que, $T = F \cdot \Delta x$, es decir, $F = I \cdot L \cdot B \cdot \Delta x$, como $\Delta A = L \cdot \Delta x$, y, $\Delta \boldsymbol{\Phi} = B \cdot \Delta A$, se tiene finalmente:

$$T = I \cdot \Delta \Phi \qquad [6.27]$$

6.6 FÓRMULA GENERAL DE LA LEY DE AMPÈRE

En el *capítulo 5* se ha visto que una corriente eléctrica crea un campo magnético y que una forma de determinar el valor de dicho campo es, *fórmula [5.29]*, mediante el Teorema de Ampère, $C_c = \Sigma \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\Delta L} = \mu_0 \cdot (\Sigma I_i)$. A continuación se demostrará que dicho teorema, en la forma que se expresó, sólo es válido si el campo eléctrico es constante en el tiempo.

Sea un condensador, *figura 6.17*, que se está cargando, con una corriente $I = \Delta Q/\Delta t$, y considérense las dos superficies S_1 y S_2 delimitadas por la misma trayectoria C. Conforme al Teorema de Ampère a lo largo de dicha trayectoria se tiene que, $\Sigma \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\Delta L} = \mu_0 \cdot I$, siendo I la corriente que pasa por cualquier superficie delimitada por la trayectoria C.

Cuando la trayectoria C se considera como límite de la superficie S_1 se tiene que $\Sigma \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\Delta L} = \mu_0 \cdot I$, puesto que I pasa a través de la superficie S_1. Sin embargo, cuando la trayectoria C se considera como límite de la superficie S_2 se tiene que $\Sigma \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\Delta L} = 0$, puesto que no pasa ninguna corriente a través de S_2. Esto supone una contradicción. El físico escocés J. C. Maxwell (1831-1879) resolvió este problema introduciendo el concepto de *corriente de desplazamiento.*

En el *apartado 3.16*, *figura 3.31*, se definió la *corriente de desplazamiento* I_D como una corriente a través del dieléctrico de un condensador debida a la variación del campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ entre las armaduras del mismo. Para el vacío se tiene:

$$I_D = \varepsilon_0 \cdot S \frac{\Delta E}{\Delta t} = \varepsilon_0 \cdot \frac{\Delta \Phi_E}{\Delta t} \qquad [6.28]$$

Es decir, que en la carga del condensador, la corriente variable, $I = \Delta Q/\Delta t$, en el conductor que lo alimenta, "continúa" mediante la *corriente de desplazamiento* i_d en el dieléctrico del condensador.

Cuando a la corriente de conducción en la *ecuación [5.29],* del Teorema de Ampère, $C_c = \Sigma \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\Delta L} = \mu_0 \cdot (\Sigma I_i)$, se le añade la corriente de desplazamiento, *fórmula [6.28],* se obtiene la forma general del Teorema de Ampère:

$$\sum_0^c \overline{B} \cdot \overline{\Delta L} = \mu_0 \cdot (I + I_d) = \mu_0 \cdot I + \mu_0 \cdot \varepsilon \frac{\Delta \Phi_E}{\Delta t} \qquad [6.29]$$

Esta ecuación sigue siendo válida en un material magnético, siempre y cuando la magnetización sea proporcional al campo externo y se sustituya μ_0 por μ.

De esta manera se resuelve la contradicción surgida en la aplicación del teorema a las superficies citadas. En efecto, en la carga del condensador que se estudia, a través de la superficie S_2 no pasa corriente de conducción I, pero sí una corriente de desplazamiento I_D del mismo valor que la corriente de conducción I, como se demuestra a continuación:

Campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ entre las dos armaduras, *fórmula [1.31]:*

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot S} \qquad [6.30]$$

Flujo eléctrico Φ_E, *fórmula [1.20],* a través de la superficie S_2, el mismo que a través de la superficie S del condensador:

$$\Phi_E = E \cdot S = \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot S} S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad [6.31]$$

Corriente de desplazamiento I_D a través de S_2 igual a corriente de conducción I a través de S_1:

$$I_D = \varepsilon_0 \cdot \frac{\Delta \Phi_E}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = I \qquad [6.32]$$

Esta generalización del Teorema de Ampère, *fórmula [6.29],* también se conoce como Teorema de Ampère-Maxwell o Ley de Ampère-Maxwell.

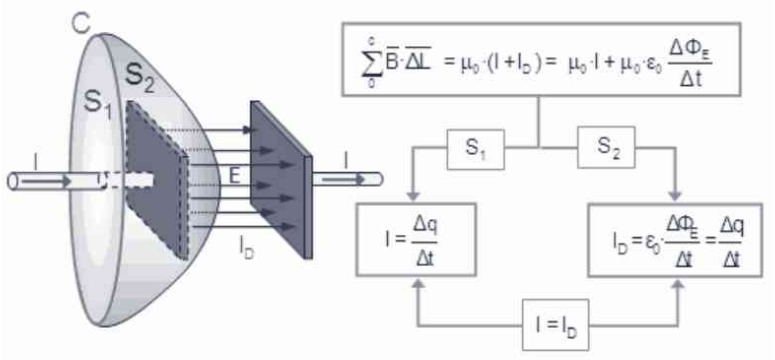


Figura 6.17. Forma general del Teorema de Ampère

La corriente de desplazamiento no es un artificio para satisfacer la Ley de Ampère cuando el campo eléctrico no es constante en el tiempo, sino que tiene un significado físico real, y fue uno de los descubrimientos más importantes que le permitió a Maxwell elaborar toda la teoría sobre los campos electromagnéticos.

La *fórmula [6.29]* en forma diferencial se expresa:

$$\int_C \overline{B} \cdot \overline{\Delta L} = \mu_0 \cdot (I + I_d) = \mu_0 \cdot I + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot S \frac{dE}{dt} \qquad [6.33]$$

6.7 CORRIENTES DE FOUCAULT

Las corrientes de Foucault (también denominadas corrientes parásitas, corrientes de torbellino o corrientes de Eddy), es un fenómeno eléctrico descubierto por el físico francés L. Foucault (1819-1869). Se producen cuando una masa metálica atraviesa un campo magnético, o bien, una masa metálica en reposo está situada en un campo magnético

variable, es decir, siempre que varíe el flujo magnético que penetre en dicha masa. En ambos casos, debido a la variación de flujo que se produce en la masa, en ésta se producen fem inducidas ($e = -\Delta\Phi/\Delta t$) y como consecuencia corrientes circulares en planos perpendiculares a las líneas de inducción que, conforme a la ley de Lenz, con sus efectos tienden a oponerse a las causas que las producen.

Por ejemplo, si se tiene una masa metálica que en forma pendular oscila en el interior de un campo magnético, *figura 6.18.a*, se observa que la masa, en su oscilación, es frenada a su paso por el campo magnético. Esto es debido a las corrientes de Foucault que se forman en dicha masa tienen un sentido cuando entra en el campo magnético y sentido contrario al anterior cuando la masa sale del campo magnético, en ambos casos el sentido está dado por la ley de Lenz, *figura 6.18.b*. Así, vista desde el polo N, la entrada de la masa en el campo magnético supone que se originen corrientes en ella que crean una polaridad N-S, con el N enfrentado al N del campo magnético del entrehierro. La salida de la masa del campo magnético supone que se originen corrientes en ella que crean una polaridad N-S, con el S enfrentado al N del campo magnético del entrehierro. Se produce una transformación de la energía cinética del movimiento de la masa en energía eléctrica que, a su vez, se transforma en calor por efecto Joule.

Las corrientes de Foucault también se forman si un disco está girando en el interior de un campo magnético limitado a una porción de su superficie, *figura 6.18.c*. En este caso se tienen corrientes de Foucault que circulan en sentidos contrarios, en el borde anterior y posterior del campo magnético que, al igual que en el caso anterior, producen una acción de frenado en la velocidad del disco.

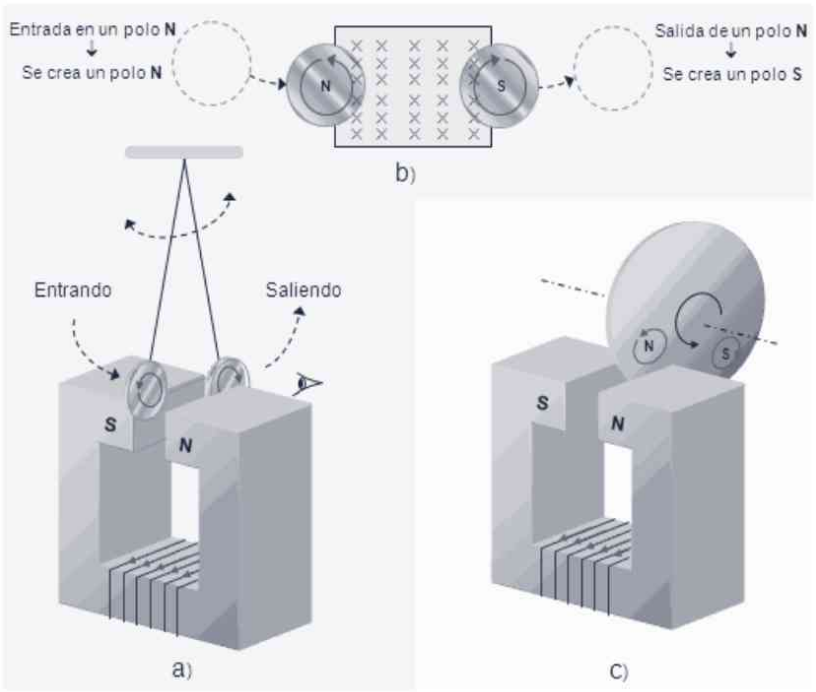


Figura 6.18. Corrientes de Foucault

Las fem inducidas $e = -\Delta\Phi/\Delta t = -\Delta B \cdot A/\Delta t$, por el movimiento pendular de la masa, originan corrientes $I = e/R$ en la misma. A partir de estas expresiones se tiene que, las corrientes de Foucault son proporcionales a: la inducción magnética aplicada $\boldsymbol{B}$, la superficie A perpendicular a la inducción magnética, la velocidad con que varía la inducción o la superficie expuesta a $\boldsymbol{B}$ (frecuencia), la resistencia R de los circuitos de corriente en la masa (conductividad ρ).

Se demuestra que si la inducción magnética tiene la forma $B = B_M \cdot \operatorname{sen} \omega t$, *figura 6.19.a*, frecuente en las máquinas eléctricas, la potencia P_F, en w/m^3, debidas a las corrientes de Foucault en una masa metálica que se encuentre sometida a dicha inducción son:

$$P_F = \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{e^2 \cdot B_M^2 \cdot f^2}{\rho} \qquad [6.34]$$

Obteniéndose P_F en w/m^3, si se expresa, el espesor e de las chapas en m, la inducción máxima B_M en T, la frecuencia f en Hz y la resistividad ρ en $\Omega \cdot$ m.

Las corrientes de Foucault que se producen en los circuitos magnéticos de las máquinas eléctricas, en general, son indeseadas ya que representan una inútil disipación de energía en forma de calor. Para minimizar estas pérdidas se toman diferentes medidas, siendo muy frecuente laminar los circuitos magnéticos en forma de chapas magnéticas de pequeño espesor e (perpendicular a $\boldsymbol{B}$) aisladas entre ellas (mediante barniz, oxidación, etc.), *figura 6.19.b*, y utilizar aceros de alta resistividad ρ.

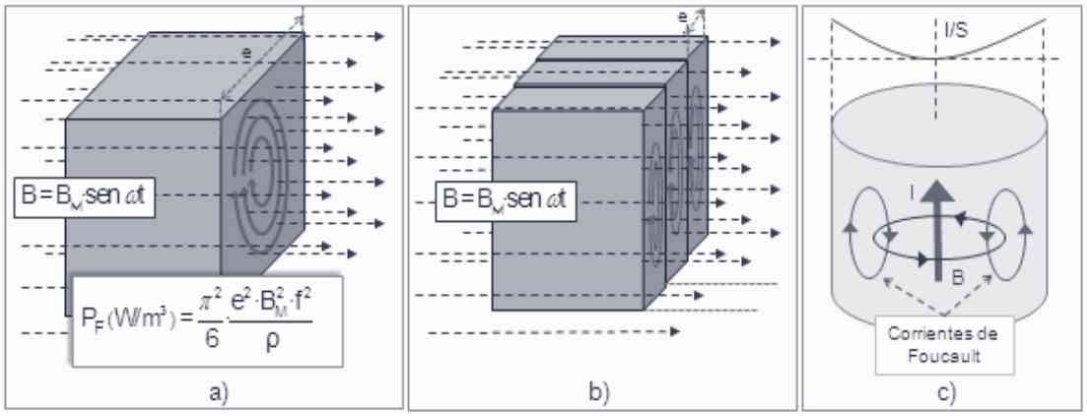


Figura 6.19. Corrientes de Foucault en máquinas eléctricas

Las corrientes de Foucault, también, en ciertas aplicaciones, son beneficiosas, por ejemplo, para realizar un frenado electromagnético (freno eléctrico, amortiguamiento), en la producción del calor (cocinas y hornos de inducción), en la fabricación de diferentes tipos de sensores, etc.

Observa:

El **efecto pelicular**, *figura 6.19.c*, también llamado efecto piel o skin, se produce únicamente en corriente alterna, y consiste en que la densidad de corriente es mayor en la periferia del conductor que en el interior, es decir, que la corriente tiende a fluir en una capa cercana a la superficie del conductor, aumentando esta tendencia a medida que aumenta la frecuencia de la corriente. Esto hace que no se utilice toda la sección disponible del conductor, incrementando su resistencia ($R = \rho \cdot L/S$, si disminuye S aumenta R), y por tanto, las pérdidas asociadas a ella ($P_p = I^2 \cdot R \cdot t$).

Al circular una corriente variable por el conductor, *figura 6.19.c*, crea un campo magnético circular variable que produce corrientes de Foucault en planos perpendiculares a la sección del conductor, haciendo que la corriente tienda a disminuir en el centro y aumentar en la periferia. La corriente instantánea en el conductor no cambia, pero sí su distribución sobre la sección del conductor. Como las corrientes inducidas son proporcionales a las variaciones de la corriente principal I, el fenómeno de redistribución de corriente se incrementa con la frecuencia.

En las instalaciones eléctricas a 50 Hz el efecto pelicular es despreciable. En electrónica, debido al uso de corrientes de alta frecuencia se reduce el efecto pelicular utilizando un tipo especial de conductor denominado *hilo de Litz*, consistente en un cable formado por muchos conductores de pequeña sección aislados unos de otros mediante una película aislante y unidos sólo en los extremos. Por la misma razón, también es frecuente la utilización de *conductores huecos*, puesto que, en estos casos, la corriente circula en su totalidad por la periferia de los mismos.

El **efecto proximidad** es un efecto análogo al efecto pelicular, que se produce al colocar un conductor por el que circula una corriente I próximo a otro conductor, que conduzca o no corriente. En este conductor se inducen corrientes de Foucault que producen pérdidas y, en caso de conducir una corriente, una redistribución de la misma.

6.8 AUTOINDUCCIÓN. COEFICIENTE DE AUTOINDUCCIÓN *L* DE UN CIRCUITO

La autoinducción es el fenómeno por el que, en un circuito eléctrico, una corriente eléctrica que varía en el tiempo produce en el propio circuito una fem de inducción que, como es debida a la variación del flujo producido por el propio circuito, recibe el nombre de *fem de autoinducción.*

Considérese un solenoide de longitud L_n y sección S, por el que circula una corriente I, *figura 6.20*, si esta corriente permanece constante existe un flujo Φ abrazado por las N espiras que forman el solenoide, pero como este flujo es constante ($\Phi = B \cdot A = \mu \cdot N \cdot I \cdot A/L_n$) no se produce fem autoinducida. Si se disminuye (o se aumenta) la resistencia R se produce un aumento (o disminución) de corriente ΔI, que lleva aparejada una variación

de flujo $\Delta\Phi$ en las N espiras ($\Delta\Phi = \Delta B \cdot A = \mu \cdot N \cdot \Delta I \cdot A/L_n$) con la consiguiente *fem autoinducida* e_a ($e_a = -N \cdot \Delta\Phi/\Delta t = \mu \cdot N^2 \cdot A \cdot \Delta I / L_n \cdot \Delta t$) y como, siempre que el núcleo no esté saturado, existe proporcionalidad ente el flujo Φ y la corriente I, haciendo, $L = \mu \cdot N^2 \cdot A/L_n$, se puede poner:

$$N \cdot \Phi = L \cdot I \qquad [6.35]$$

Siendo L el coeficiente de autoinducción, o inductancia, del circuito, que depende de la geometría del circuito y del medio magnético. Para un solenoide largo o una bobina toroidal, *figura 6.20*, el coeficiente de autoinducción L es, pues:

$$L = \frac{\mu \cdot N^2 \cdot A}{L_n} \qquad [6.36]$$

La unidad del coeficiente de autoinducción L es el henrio (H) en honor del físico estadounidense **Joseph Henry** (1816-1887).

Por tanto, *la fórmula 6.4,* para la fem autoinducida, se puede poner en la forma:

$$e_a = -L\frac{\Delta I}{\Delta t} \qquad [6.37]$$

El henrio (H) se puede definir de dos formas:

- Por la *fórmula 6.35*: el henrio es la inductancia de un circuito que recorrido por una corriente de 1 A produce y abraza un flujo de 1 Wb.

- Por la *fórmula 6.37*: el henrio es la inductancia de un circuito que al ser recorrido por una corriente variable de 1 A/s produce una fem de autoinducción de 1 V.

El hecho de que la inductancia L de un circuito sólo dependa de su geometría y del medio magnético, es análogo al de la capacidad de un condensador, *sección 2.3,* que sólo depende de su geometría y del dieléctrico.

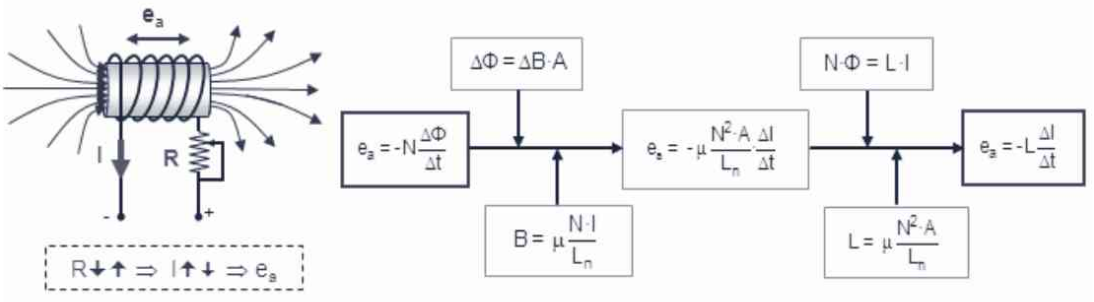


Figura 6.20. Autoinducción. Coeficiente de autoinducción L

El sentido de esta fem autoinducida e_a, conforme a la ley de Lenz, "es tal que con sus efectos se opone a la causa que la produce", de esta manera:

- Mientras aumenta la corriente I en el circuito, *figura 6.21 izquierda*, la fem autoinducida e_a tiene sentido contrario a la corriente (polaridad contraria a la de la corriente). La bobina funciona como *receptor* y la e_a tiene carácter de fuerza contraelectromotriz.

- Mientras disminuye la corriente I en el circuito, *figura 6.21 derecha*, la fem autoinducida e_a tiene el mismo sentido que la corriente (la misma polaridad que la corriente). La bobina funciona como *generador* y la e_a tiene carácter de fuerza electromotriz.

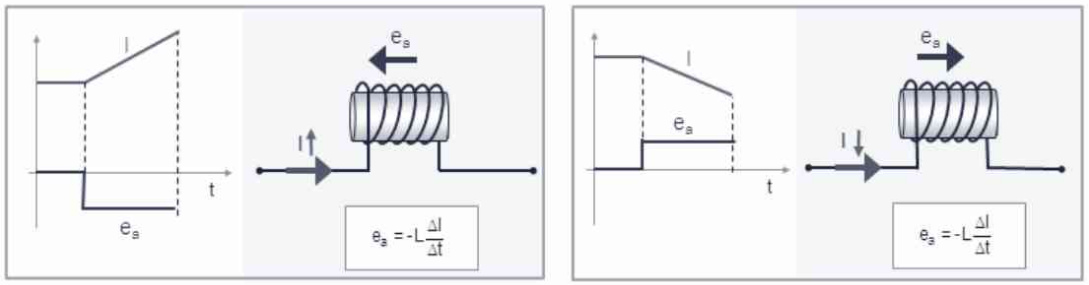


Figura 6.21. Sentido de la fem autoinducida e_a al aumentar la corriente (izquierda) y al disminuir la corriente (derecha)

Observa:

Nótese que si el núcleo es de aire μ es constante, por lo que L *es* independiente de la corriente I. Pero, si el núcleo es férrico, μ es función de H y éste de la corriente I (*apartado 5.21*), por lo que L depende I.

La *fórmula [6.35]* en forma diferencial es:

$$e_a = -L\frac{di}{dt} \qquad [6.38]$$

6.9 ENERGÍA DE UN CAMPO MAGNÉTICO

En el *apartado 4.17* se estudió el circuito, formado por la conexión en serie de una resistencia R y una bobina de coeficiente de autoinducción L, conectado a una fuente de fem E. *La ecuación [4.39]* relaciona las magnitudes eléctricas de dicho circuito, es decir:

$$E = R \cdot I + L \frac{\Delta I}{\Delta t} \qquad [6.39]$$

Si se multiplican los dos miembros de la igualdad anterior por $I \cdot \Delta t$, se tiene:

$$E \cdot I \cdot \Delta t = R \cdot I^2 \cdot \Delta t + L \cdot I \cdot \Delta I \qquad [6.40]$$

El primer miembro, $E \cdot I \cdot \Delta t$, representa la energía suministrada por la fuente en un tiempo Δt, la cual se transforma, una parte en producir calor en el circuito, $I^2 \cdot R \cdot \Delta t$, y otra parte, $L \cdot I \cdot \Delta I$, corresponde a una energía que, se almacena de forma magnética en la bobina, si la corriente está en su fase de aumento, y se entrega al circuito si la corriente está en su fase de disminución.

Si la corriente en el circuito varía de cero a un valor final I, en todo momento se tiene que, $N \cdot \Phi_t = L \cdot I_t$. A partir de un flujo Φ_t, una pequeña variación de corriente ΔI_t (que permita considerar Φ_t constante) implica una variación de energía ΔW, *figura 6.22*:

$$\Delta W = L \cdot I_t \cdot \Delta I_t = N \cdot \Phi_t \cdot \Delta I_t \qquad [6.41]$$

Al final, cuando la corriente llegue al valor I (OA), el flujo magnético tendrá el valor Φ (AB), de tal manera que la energía total W comunicada a la bobina es el resultado de la suma de todas las áreas ΔW, comprendidas entre los puntos O y A, es decir, el área del triángulo OAB, con lo que se tiene:

$$W = \frac{1}{2} L \cdot I^2 \qquad [6.42]$$

Expresándose W en J (julios), L en H (henrios) e I en A (amperios).

Esta energía eléctrica almacenada en forma magnética en la bobina es devuelta al circuito cuando el mismo se abre y se extingue el campo magnético, de forma tal que, la fem de autoinducción correspondiente e_a ($e_a = -L \cdot \Delta I / \Delta t$) prolonga el paso de la corriente un cierto tiempo después de haberse abierto el circuito (*apartado 4.17*) y la energía necesaria para esto proviene del citado campo magnético.

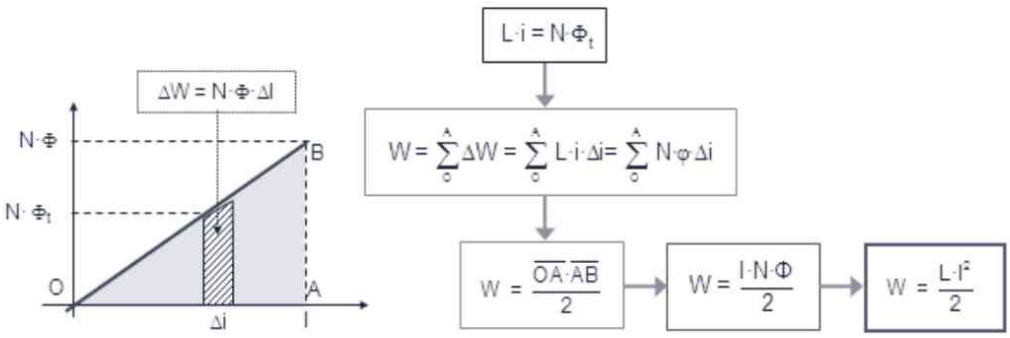


Figura 6.22. Energía almacenada en una bobina

Supóngase que la bobina del circuito es un toro magnético. Sustituyendo en la fórmula anterior el valor de L dado por la *fórmula [6.36], y* teniendo en cuenta que, $B = \mu \cdot N \cdot I/L_n$, y, $H = N \cdot I/L_n$:

$$W = \frac{1}{2}L\cdot I^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu\cdot N^2\cdot A}{L_n}\cdot I^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu\cdot N\cdot I}{L_n}\cdot N\cdot I\cdot A = \frac{1}{2}B\cdot H\cdot L_n\cdot A = \frac{1}{2}B\cdot H\cdot \nu = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}\cdot \nu \qquad [6.43]$$

Como, $\nu = L_n \cdot A$ es el volumen del núcleo, la energía total almacenada por unidad de volumen w es:

$$w = \frac{1}{2}L\cdot I^2\frac{1}{\nu} = \frac{1}{2}B\cdot H = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} \qquad [6.44]$$

Expresándose w en julios/m^3, B en T (teslas) y H en A/m (amperios/metro).

Esta fórmula es independiente de las características del toro magnético y por tanto se puede generalizar para todo campo magnético.

Véase la similitud con la *ecuación [2.25]* para obtener la energía almacenada en un campo eléctrico ($w = D \cdot E/2$, siendo D el desplazamiento *y* E el campo eléctrico). Si en el espacio existe un campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ además de un campo magnético $\boldsymbol{B}$, la energía almacenada por unidad de volumen asociada a ambos campos es:

$$w = \frac{1}{2}D\cdot E + \frac{1}{2}B\cdot H \qquad [6.45]$$

En este análisis se considera que el circuito que conforma la inductancia L es indeformable por la acción de la corriente. En el *apartado 6.21* se hace el mismo análisis pero considerando que el circuito L es deformable.

Observa:

El fenómeno de la autoinducción es la causa por la que salta una chispa (circulación de electrones a través del aire) en los bornes de un interruptor al abrir un circuito, siendo la chispa tanto más grande cuanto mayor sea la intensidad I de la corriente que se interrumpe, pues mayor es la fem de autoinducción e_a ($e_a = -L \cdot \Delta I/\Delta t$) que la hace saltar. Obsérvese que e_a también se produce en el cierre del circuito, pero una vez esté cerrado, por lo que no hay producción de chispa.

Para hallar la energía almacenada en la bobina anterior, si la corriente varía de cero a un valor final *I* se tiene mediante el cálculo integral:

$$W = \int_0^I L \cdot I \cdot dI = \frac{1}{2} L \cdot I^2 \qquad [6.46]$$

6.10 ENERGÍA PERDIDA POR HISTÉRESIS

Considérese una bobina toroidal con el núcleo previamente imanado, punto "*a*" de la *figura 6.23.a* correspondiente a la curva *Bf(H)* del núcleo. Una variación de corriente ΔI implica una variación de energía magnética ΔW dada por la *fórmula [6.41],* y teniendo en cuenta que, $B = \mu \cdot N \cdot I/L_n$, $\Phi = B \cdot A$, $H = N \cdot I/L_n$ y $\nu = L_n \cdot A$, dicha fórmula se puede poner en la forma:

$$\Delta W = L \cdot I \cdot \Delta I = N \cdot I \cdot \Delta \Phi = N \cdot I \cdot \Delta B \cdot A = \Delta B \cdot H \cdot L_n \cdot A = H \cdot \Delta B \cdot \nu \qquad [6.47]$$

Siendo la variación de energía almacenada por unidad de volumen Δw:

$$\Delta w = \frac{W}{\nu} = H \cdot \Delta B \qquad [6.48]$$

Al aumentar la corriente, *figura 6.23.a*, desde cero, punto "*a*" un valor máximo I_M, punto "*b*", la energía magnética ($w = \Sigma H \cdot \Delta B$) corresponde al área rayada "*abca*" (área positiva, pues $H > 0$ y $\Delta B > 0$, esto es energía almacenada).

Cuando la corriente disminuye, *figura 6.23.b*, desde el valor máximo I_M, punto "*b*", a cero, punto "*d*", la energía magnética ($w = \Sigma H \cdot \Delta B$) corresponde al área rayada "*dbcd*" (área negativa, pues $H > 0$ y $\Delta B < 0$, esto es energía restituida).

En definitiva, cuando la corriente ha variado de cero a I_M y de I_M a cero, *figura 6.23.c*, existe una cantidad de energía suministrada y que no es restituida, que corresponde al área rayada *"abda"* (diferencia de las áreas anteriores) y que representa la energía perdida por histéresis en medio ciclo.

Si se recorre el ciclo de histéresis completo, *figura 6.23.d*, la energía perdida por histéresis está representada por el área rayada *"abdea",* y se manifiesta en los núcleos magnéticos en forma de calor.

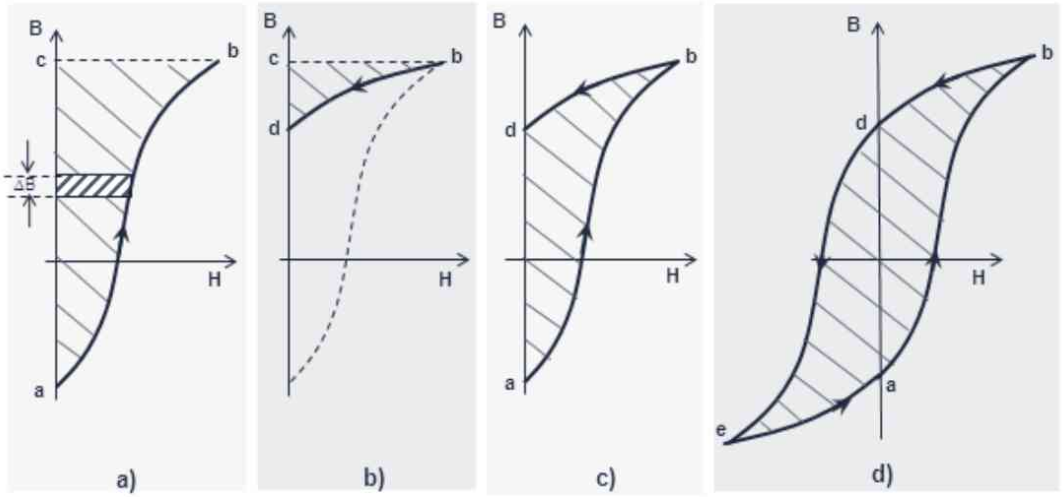


Figura 6.23. Energía perdida por histéresis

Resumiendo, la energía perdida por histéresis es proporcional al volumen del núcleo (*volumen del hierro*) y al área del ciclo. El ingeniero alemán C. P. Steinmetz (1865-1923) propuso una fórmula empírica para el cálculo de las pérdidas por histéresis por unidad de peso P_H, que es:

$$P_H = \eta \cdot f \cdot B_m^n \qquad [6.49]$$

donde:

P_H: pérdidas por histéresis por unidad de peso (W/kg).

η: coeficiente característico para cada material.

f: frecuencia en Hz.

B_m: inducción máxima (T, teslas).

n: si $B < 1$ T $\Rightarrow n = 1{,}6$. Si $B > 1$ T $\Rightarrow n = 2$.

6.11 PÉRDIDAS MAGNÉTICAS TOTALES: PÉRDIDAS EN EL HIERRO

La suma de las pérdidas en un circuito magnético debidas a las corrientes de Foucault P_F, *fórmula [6.34]*, y a las pérdidas por histéresis P_H, *fórmula [6.49],* se denominan *pérdidas en el núcleo*, *o en el hierro*, P_{Fe}, se determinan experimentalmente y en la práctica suelen darse en forma de tabla o gráfico, como el de la *figura 6.24,* para diferentes espesores *a* de chapa

$$P_{Fe} = P_F + P_H \qquad [6.50]$$

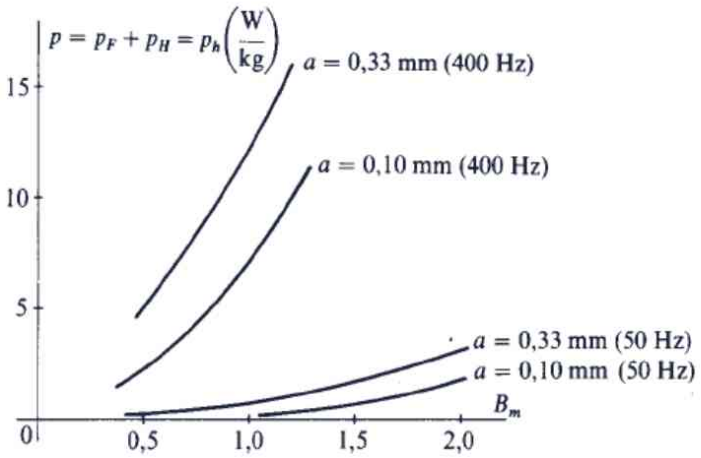


Figura 6.24. Pérdidas en el hierro

Observa:

Si se tiene un **transformador** que no esté suministrando potencia, *transformador en vacío*, se observa que está caliente. El calor es debido a las pérdidas por efecto Joule, que son pequeñas (puesto que el transformador no está en carga, suministrando potencia, no existe corriente en el secundario y en el primario, en consecuencia, es muy pequeña) y, principalmente, a las pérdidas en el hierro.

El **ruido** que producen los transformadores está relacionado, también, con los cambios del campo magnético en el núcleo, y se debe a las deformaciones producidas en el material magnético que forma el núcleo debidas a las variaciones del campo magnético. Este fenómeno se denomina **magnetostricción**.

6.12 ACOPLAMIENTO MAGNÉTICO. INDUCTANCIA MUTUA

Cuando dos circuitos eléctricos se afectan mutuamente por medio del campo magnético generado por uno de ellos se dice que existe un *acoplamiento magnético*. Este acoplamiento puede ser perjudicial, por ejemplo entre líneas eléctricas y telefónicas, o útil, por ejemplo en los transformadores.

Cuando dos bobinas, en general dos circuitos, están próximas entre sí, el flujo magnético que atraviesa cada uno de los circuitos se debe no sólo al flujo creado por la propia corriente del circuito, sino también a parte del flujo creado por la bobina que está

próxima, la cual produce una fem inducida en el otro circuito. Este fenómeno se conoce con el nombre de *inductancia mutua.*

Considérense dos bobinas próximas, *figura 6.25.a*. Por la bobina de la izquierda (bobina 1) circula una intensidad I_1 que da lugar a un flujo magnético Φ_1, *una parte* Φ_{11} enlaza sólo a la bobina de la izquierda (bobina 1) y otra parte Φ_{12} enlaza a ambas bobinas (bobina 1 y bobina 2).

Una variación de corriente ΔI_1 en la bobina 1 produce:

a) En la bobina 1, una variación de flujo Φ_1 que, conforme a la ley de Faraday, genera una fem autoinducida e_1:

$$e_1 = -N_1 \frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} = -L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} \qquad [6.51]$$

b) En la bobina *2* una variación de flujo Φ_{12} que, conforme a la ley de Faraday, genera una fem inducida e_2 ($e_2 = -N_2 \cdot \Delta\Phi_{12}/\Delta t$). Por otra parte, el flujo $N_2 \cdot \Phi_{12}$ es directamente proporcional a la corriente I_1 que lo produce, cumpliéndose que:

$$N_2 \cdot \Phi_{12} = M_{12} \cdot I_1 \qquad [6.52]$$

Siendo M_{12} un coeficiente, en el vacío y en el aire es constante, denominado *coeficiente de inducción mutua* de la bobina 1 respecto a la bobina 2, que depende de la configuración geométrica y la permeabilidad magnética correspondiente al flujo Φ_{12}. Este coeficiente tiene las mismas dimensiones que la inductancia *L, fórmula [6.35],* su unidad es por tanto el henrio (H).

Se tiene, pues, una fem inducida en la bobina 2 de valor:

$$e_2 = -N_2 \frac{\Delta\Phi_{12}}{\Delta t} = -M_{12} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} \qquad [6.53]$$

Considérese ahora, *figura 6.25.b*, tal que por la bobina de la izquierda (bobina 1) no circula corriente y que por la bobina de la derecha (bobina 2) circula una intensidad I_2 que da lugar a un flujo magnético Φ_2, *una parte* Φ_{22} enlaza sólo a la bobina de la derecha (bobina 2) y otra parte Φ_{21} enlaza a ambas bobinas (bobina 1 y bobina 2).

De forma análoga al caso anterior, una variación de corriente ΔI_2 en la bobina 2 produce:

a) En la bobina 2, una variación de flujo Φ_2 que, conforme a la ley de Faraday, genera una fem autoinducida e_2:

$$e_2 = -N_2 \frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t} = -L_2 \frac{\Delta I_2}{\Delta t} \qquad [6.54]$$

b) En la bobina 1 una variación de flujo Φ_{21} que, conforme a la ley de Faraday, genera una fem inducida e_1 ($e_1 = -N_1 \cdot \Delta\Phi_{21}/\Delta t$). Por otra parte, el flujo $N_1 \cdot \Phi_{21}$ es directamente proporcional a la corriente I_2 que lo produce, cumpliéndose que:

$$N_1 \cdot \Phi_{21} = M_{21} \cdot I_2 \qquad [6.55]$$

Siendo M_{21} un coeficiente denominado *coeficiente de inducción mutua* de la bobina 2 respecto a la bobina 1, con las mismas características que las del caso anterior.

Se tiene entonces una fem inducida en la bobina 1 de valor:

$$e_1 = -N_1 \frac{\Delta\Phi_{21}}{\Delta t} = -M_{21} \frac{\Delta I_2}{\Delta t} \qquad [6.56]$$

Como se demuestra al final de este apartado, los dos coeficientes de inducción mutua, M_{12} y M_{21}, son iguales:

$$M_{11} = M_{21} = M \qquad [6.57]$$

En definitiva, hay inductancia mutua entre dos circuitos si una corriente variable en el tiempo en un circuito induce una tensión en el otro circuito.

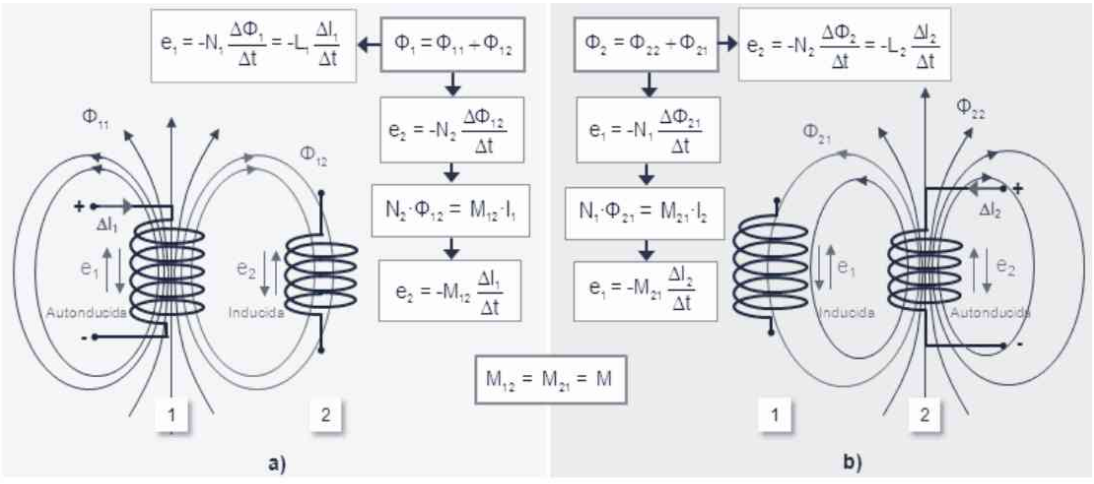


Figura 6.25. Inductancia L e inductancia mutua M

Se tienen ahora las dos bobinas circulando por cada una de ellas las corrientes I_1 e I_2, *figura 6.26.*

El flujo total Φ_T enlazado por la bobina 1 es la suma de su propio flujo Φ_1 (suma del que enlaza sólo con ella Φ_{11} y el que enlaza con la bobina 2, Φ_{12}) y el flujo Φ_{21} debido a la bobina 2 que enlaza con la bobina 1. Este flujo Φ_{21} puede contribuir aumentando (signo positivo) o disminuyendo (signo negativo) el flujo total Φ_T, pues depende del sentido de los devanados de las bobinas entre ellas. La fem autoinducida e inducida en la bobina 1, aplicando la ley de Faraday, es:

$$e_1 = -N_1 \frac{\Delta\Phi_{T1}}{\Delta t} = -N_1 \frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} \pm N_1 \frac{\Phi_{21}}{\Delta t} \qquad [6.58]$$

Como, $N_1 \cdot \Phi_1 = L_1 \cdot I_1$, $N_1 \cdot \Phi_{21} = M_{21} \cdot I_2$ y $M_{21} = M_{12} = M$, sustituyendo en la fórmula anterior, se tiene:

$$e_1 = -N_1 \frac{\Delta\Phi_{T1}}{\Delta t} = -L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} \pm M \frac{\Delta I_2}{\Delta t} \qquad [6.59]$$

Análogamente para la bobina 2, el flujo total Φ_T enlazado es la suma de su propio flujo Φ_2 (suma del que enlaza sólo con ella Φ_{22} y el que enlaza con la bobina, Φ_{21}) y el flujo Φ_{12} debido a la bobina 1 que enlaza con la bobina 2, por tanto, la fem autoinducida e inducida, aplicando la ley de Faraday, en la bobina 2 es:

$$e_2 = -N_2 \frac{\Delta\Phi_{T2}}{\Delta t} = -N_2 \frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t} \pm N_2 \frac{\Phi_{12}}{\Delta t} \qquad [6.60]$$

Como, $N_2 \cdot \Phi_2 = L_2 \cdot I_2$, $N_2 \cdot \Phi_{12} = M_{12} \cdot I_1$ y, $M_{12} = M_{21} = M$, sustituyendo en la fórmula anterior, se tiene:

$$e_2 = -N_2 \frac{\Delta\Phi_{T2}}{\Delta t} = -L_2 \frac{\Delta I_2}{\Delta t} \pm M \frac{\Delta I_1}{\Delta t} \qquad [6.61]$$

Aunque la inductancia mutua M es una cantidad positiva, la tensión inducida ($e = M \cdot \Delta I/\Delta t$) puede ser positiva o negativa, al igual que la tensión autoinducida ($e = L \cdot \Delta I/\Delta t$). Sin embargo, a diferencia de la tensión autoinducida, para hallar la polaridad de la tensión inducida es preciso tener en cuenta la forma que ambas bobinas estén devanadas, como se verá en los próximos párrafos.

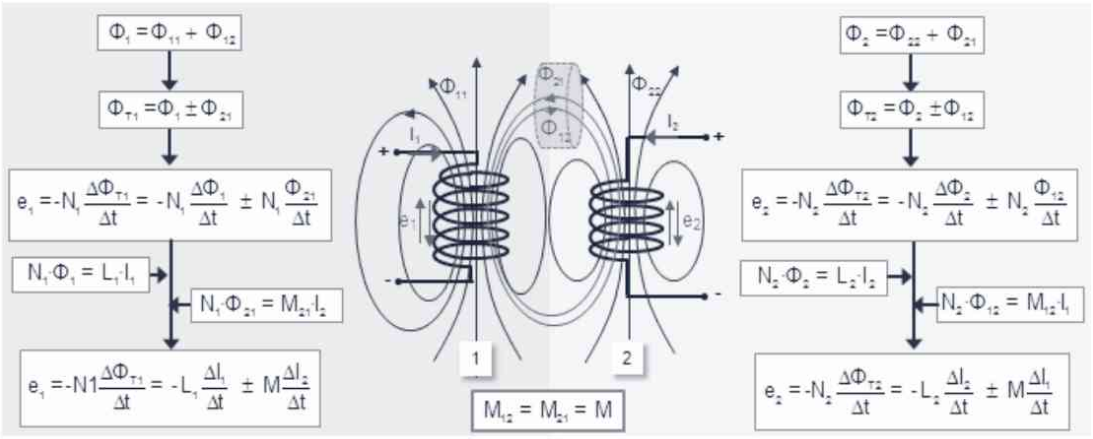


Figura 6.26. Magnitud de las fem inducidas y autoinducidas

La polaridad de las tensiones inducidas, $M \cdot \Delta I_2/\Delta t$ y $M \cdot \Delta I_1/\Delta t$, en las *fórmulas [6.59]* y *[6.61]* del circuito de la *figura 6.26*, depende de la forma en que ambas bobinas estén devanadas y se determina de la siguiente manera:

Se aplica la regla de la mano derecha a cada una de las bobinas, tal que los dedos envuelvan a la bobina en el sentido supuesto para la corriente, indicando entonces el pulgar el sentido del flujo. Entonces, tal como se demostrará en el *apartado 6.14,* si:

- Los flujos tienen sentido contrario (*figura 6.27*) las tensiones de inducción mutua y las tensiones de autoinducción tienen signo contrario.

- Ambos flujos tienen el mismo sentido (*figura 6.29*) los signos de las tensiones de inducción mutua son iguales a los de las tensiones de autoinducción.

En la *figura 6.27* se oponen mutuamente, luego el sistema de ecuaciones con los signos correspondientes es:

$$v_1 = -e_1 = N_1 \frac{\Delta\Phi_{T1}}{\Delta t} = L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} - M \frac{\Delta I_2}{\Delta t} \qquad [6.62]$$

$$v_2 = -e_2 = N_2 \frac{\Delta\Phi_{T2}}{\Delta t} = L_2 \frac{\Delta I_2}{\Delta t} - M \frac{\Delta I_1}{\Delta t} \qquad [6.63]$$

Por otra parte, como no es práctico mostrar los detalles del devanado de las bobinas en los diagramas de los circuitos, se aplica la convención de las *marcas de polaridad, figura 6.27,* como se explicará en el *apartado 6.13.*

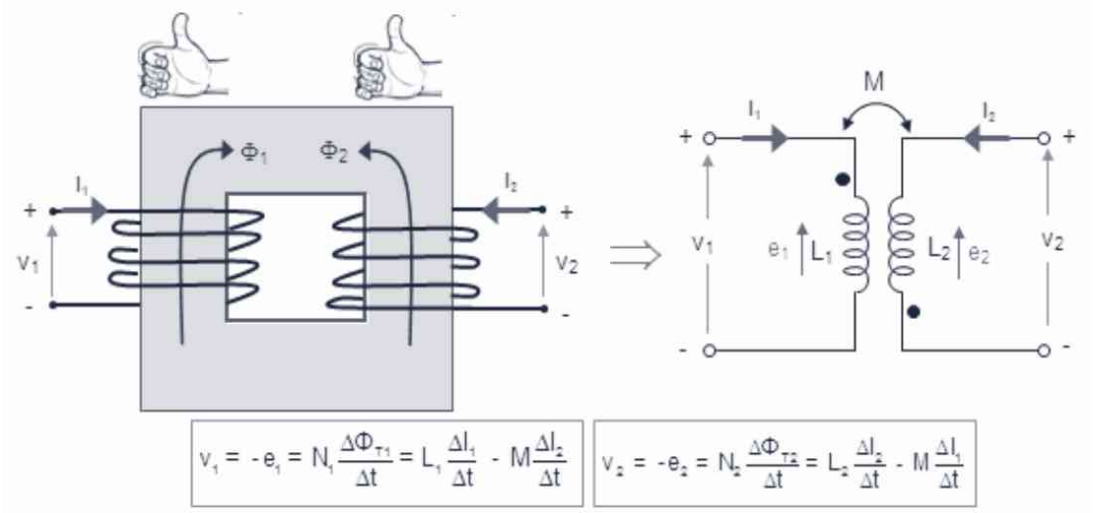


Figura 6.27. Bobinas con flujo sustractivo: signo de las fem inducidas y auntoinducidas

Como se ha dicho en un párrafo anterior de este apartado, el coeficiente de inducción mutua para dos circuito acoplados magnéticamente es igual, $M_{12} = M_{21} = M$. En la *figura 6.28* se demuestra esta igualdad para dos solenoides coaxiales suficientemente largos, de igual longitud, ($l = l_1 = l_2$) y diámetros próximos, por lo que todo el flujo magnético se canaliza a través del solenoide interior (de sección transversal A_1). Los flujos de inducción mutua son $\Phi_{12} = B_1 \cdot A_1$ y $\Phi_{21} = B_2 \cdot A_1$ (nótese que para Φ_{21} la superficie es A_1 y no A_2, pues entre ambos solenoides no existe campo magnético). Teniendo en cuenta las relaciones *[6.52]* y *[6.55]* se concluye que $M_{12} = M_{21} = M$. Se puede demostrar que esta igualdad es general para los circuitos acoplados magnéticamente.

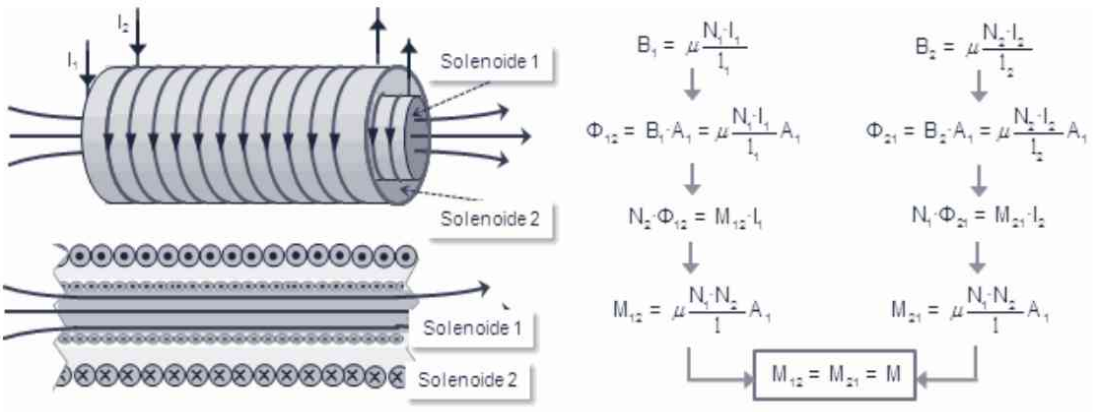


Figura 6.28. Coeficiente de inducción mutua M entre dos solenoides

En el apartado siguiente se demuestra la igualdad $M_{12} = M_{21} = M$ para cualquier acoplamiento magnético.

Observa:

Los **transformadores** son unas máquinas eléctricas basadas en el fenómeno de la inducción electromagnética, que permiten aumentar o disminuir la tensión en un circuito eléctrico de corriente alterna. En su forma más simple están constituidos, por dos bobinas devanadas sobre un núcleo cerrado de hierro que facilita el acoplamiento magnético entre ambas, *figura 6.29,* cumpliéndose la relación de magnitudes que aparece en la figura. Las bobinas se denominan *primaria* y *secundaria* según correspondan a la entrada o salida del sistema, respectivamente. Los transformadores frecuentemente usados son, transformadores monofásicos, normalmente de pequeñas potencias, si para su funcionamiento utilizan un sistema de CA monofásico y transformadores trifásicos utilizados en los sistemas de CA trifásicos.

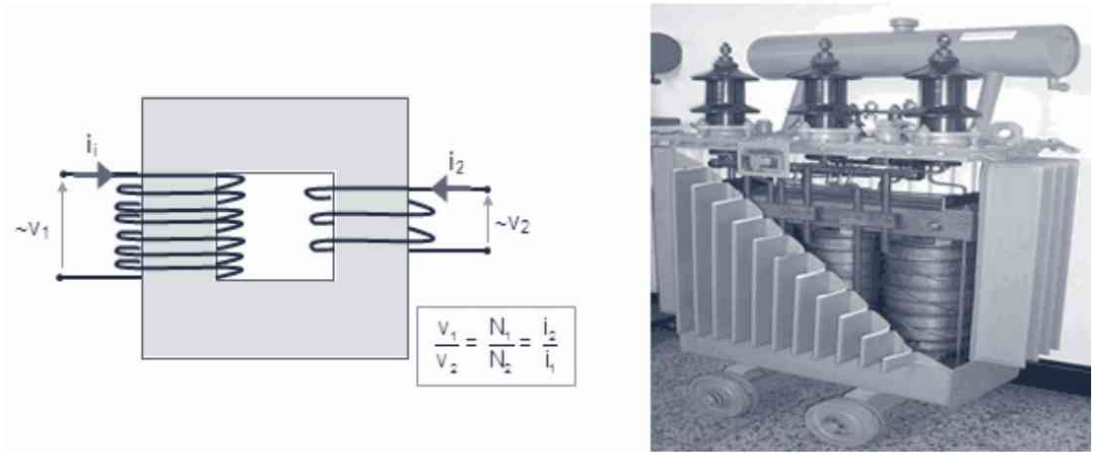


Figura 6.29. Esquema de un transformador monofásico (izquierda).Transformador trifásico (derecha)

6.13 ENERGÍA ALMACENADA EN UN ACOPLAMIENTO MAGNÉTICO

Considérese el circuito de la *figura 6,30*, aplicando la regla de la mano derecha, el sistema de ecuaciones correspondiente al circuito es:

$$v_1 = -e_1 = N_1 \frac{\Delta \Phi_{T1}}{\Delta t} = L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} + M \frac{\Delta I_2}{\Delta t} \qquad [6.64]$$

$$v_2 = -e_2 = N_2 \frac{\Delta \Phi_{T2}}{\Delta t} = L_1 \frac{\Delta I_2}{\Delta t} + M \frac{\Delta I_1}{\Delta t} \qquad [6.65]$$

Como se demuestra al final de este apartado, la energía que es preciso comunicar al sistema para que la corriente pase de ser nula a tener los valores I_1 e I_2, en cada una de las bobinas, y que éstas almacenan de forma magnética, es:

$$W = \frac{1}{2} L_1 \cdot I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 \cdot I_2^2 + M \cdot I_1 \cdot I_2 \qquad [6.66]$$

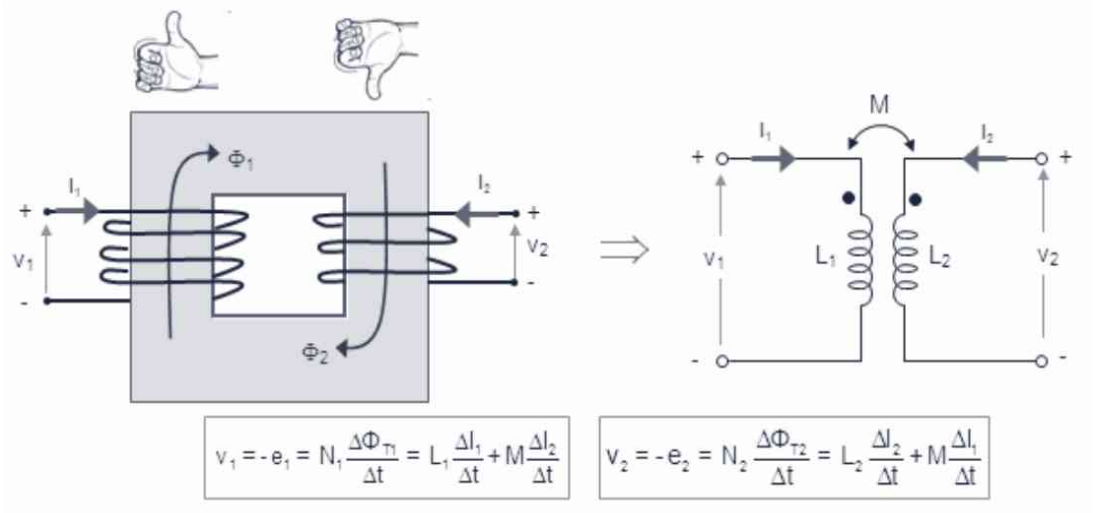


Figura 6.30. Bobinas con flujo aditivo: signo de las fem inducidas y auntoinducidas

Para el circuito de la *figura 6.27*, se obtiene la energía almacenada por la expresión:

$$W = \frac{1}{2} L_1 \cdot I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 \cdot I_2^2 - M \cdot I_1 \cdot I_2 \qquad [6.67]$$

Nótese que los signos que preceden al coeficiente de inducción mutua *M* en las dos fórmulas anteriores son diferentes.

Para demostrar la *fórmula 6.66*, correspondiente al circuito de la *figura 6.27*, considérese que se pone en circuito abierto los terminales de la derecha ($i_2 = 0$) y se hace crecer la corriente i_1, correspondiente a la bobina izquierda, desde 0 hasta un valor final constante I_1 en un tiempo $t = t_1$, la energía almacenada hasta ese instante como $v_1 = L_1 \cdot di_1/dt$ y $dW_1 = v_1 \cdot i_1 \cdot dt$, es:

$$W_1 = \int_0^{t_1} v_1 \cdot i_1 \cdot dt = \int_0^{I_1} L \cdot i_1 \cdot di_1 = \frac{1}{2} L \cdot I_1^2 \qquad [6.68]$$

Si, ahora, manteniendo constante I_1, se aumenta i_2 desde 0 hasta un valor constante I_2, desde el tiempo $t = t_1$ a un tiempo $t = t_2$, como $M \cdot di_1 = 0$, $v_2 = L_2 \cdot di_2/dt$, $dW_2 = v_2 \cdot i_2 \cdot dt$ y $dW_{21} = v_1 \cdot i_1 \cdot dt$, se entrega:

- A la bobina del lado derecho una energía:

$$W_2 = \int_{t_1}^{t_2} v_2 \cdot i_2 \cdot dt = \int_0^{I_2} L_2 \cdot i_2 \cdot di_2 = \frac{1}{2} L_2 \cdot I_2^2 \qquad [6.69]$$

- A la bobina del lado izquierdo, debido a la inductancia mutua M, una energía:

$$W_{21} = \int_{t_1}^{t_2} v_1 \cdot i_1 \cdot dt = \int_0^{I_2} M_{21} \cdot I_1 \cdot di_2 = M_{21} \cdot I_1 \cdot I_2 \qquad [6.70]$$

Por tanto, la energía almacenada por el circuito para un tiempo $t > t_2$ es:

$$W = W_1 + W_2 + W_{21} = \frac{1}{2} L_1 \cdot I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 \cdot I_2^2 + M_{21} \cdot I_1 \cdot I_2 \qquad [6.71]$$

Si se hace el proceso exactamente igual, pero comenzando por el lado derecho se obtiene:

$$W = W_1 + W_2 + W_{21} = \frac{1}{2} L_1 \cdot I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 \cdot I_2^2 + M_{12} \cdot I_1 \cdot I_2 \qquad [6.72]$$

De las ecuaciones *[6.71] y [6.72]* se deduce que los términos M_{12} y M_{21} han de ser iguales:

$$M_{12} = M_{21} = M \qquad [6.73]$$

Por tanto, la energía almacenada por el circuito de la *figura 6.29* se obtiene por la mencionada *fórmula [6.66]*.

Si el mismo planteamiento se hace para el circuito de la *figura 6.27,* se obtiene para la energía almacenada la *ecuación [6.67]*.

La expresión de la energía puede generalizarse para cualquier instante t en el que las corrientes tengan los valores i_1 e i_2:

$$w = \frac{1}{2} L_1 \cdot i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 \cdot i_2^2 \pm M \cdot i_1 \cdot i_2 \qquad [6.74]$$

6.14 REGLA DE LOS PUNTOS PARA BOBINAS CON ACOPLAMIENTO MAGNÉTICO

Como se ha visto en el apartado anterior, la polaridad relativa de las tensiones de inducción mutua de dos bobinas acopladas magnéticamente se puede determinar conociendo los sentidos de los devanados de ambas bobinas, pero, en la práctica, para evitar el dibujo de los devanados y simplificar los esquemas eléctricos de estos circuitos, se señalan los terminales con puntos, obteniéndose los **bornes homólogos** (dos con puntos y dos sin puntos).

Para asignar los puntos, *figura 6.31.a*, se elige un sentido para la corriente I_1 en una de las bobinas y se coloca un punto en el terminal por el que la corriente entra en ella (terminal "*a*"), determinándose por la regla de la mano derecha el sentido del flujo Φ_1 debido a esa corriente. A continuación, en la otra bobina, se determina por dónde ha de entrar la corriente I_2 para producir un flujo Φ_2 en el mismo sentido que el anterior, poniéndose un punto en dicho terminal (terminal "*c*"). Los bornes homólogos son el "*a*" y el "*c*", o también el "*b*" y el "*d*".

Razonando de la misma manera se asignan los puntos al circuito de la *figura 6.31.b*. Se obtiene como bornes homólogos el "*a*" y el "*d*", o también el "*b*" y el "*c*" (como se han marcado en el esquema sin núcleo).

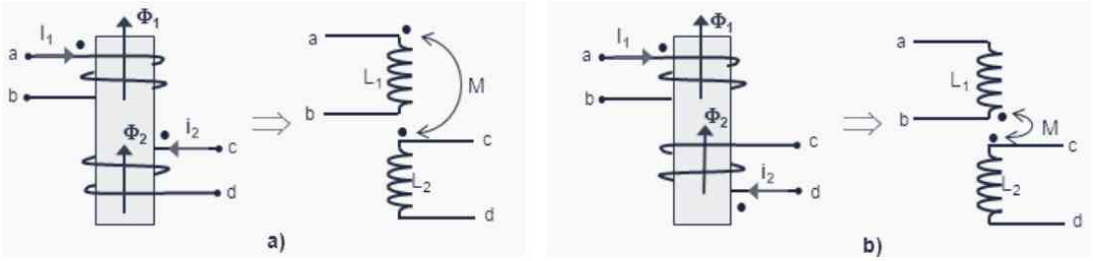


Figura 6.31. Terminales homólogos

Para determinar el signo de las tensiones inducidas, $M \cdot \Delta I_2/\Delta t$ y $M \cdot \Delta I_1/\Delta t$, de las ecuaciones *[6.59]* y *[6.61]* se utiliza la siguiente *regla de los puntos:*

1. Si las corrientes entran o salen a la vez por los terminales con puntos, *figura 6.31.a*, la fem inducida debida a la inductancia mutua M tiene el mismo signo que la fem de autoinducción L.

   En efecto, en la bobina 2, una variación de i_2 en el tiempo ($\Delta i_2/\Delta t$), ocasionará en la bobina 1 una fem inducida del mismo sentido que la fem autoinducida debida a una variación análoga de I_1. En efecto:

- Si i_2 aumenta, aumenta el flujo Φ_2, en la bobina 1 se creará una fem inducida ($M \cdot \Delta I_2/\Delta t$) que produciría una corriente que tienda a oponerse al aumento de dicho flujo, es decir, de *polaridad contraria* a I_1.

- Si i_1 aumenta, aumenta el flujo Φ_1, en la bobina 1 se creará una fem autoinducida ($L \cdot \Delta I_1/\Delta t$) que tiende a oponerse al aumento de dicha corriente, es decir, de *polaridad contraria* a I_1.

- Si en lugar de considerar un aumento de i_2, se considera una disminución, razonando de forma semejante se llega a la misma conclusión: la fem inducida debida a la inductancia mutua ($M \cdot \Delta I_2/\Delta t$) tiene el mismo signo que la fem de autoinducción ($L \cdot \Delta I_1/\Delta t$).

2. Si una corriente entra por un terminal con punto y la otra sale por el otro terminal con punto, *figura 6.27*, la fem inducida debida a la inductancia mutua M tiene signo contrario a la fem de autoinducción L.

   En efecto, en la bobina 2, una variación de i_2 en el tiempo ($\Delta i_2/\Delta t$), ocasionará en la bobina 1 una fem inducida de sentido contrario que una variación análoga de I_1. En efecto:

   - Si i_2 aumenta, aumenta el flujo Φ_2, en la bobina 1 se creará una fem inducida ($M \cdot \Delta I_2/\Delta t$) que produciría una corriente que tiende a oponerse al aumento de dicho flujo, es decir, de la *misma polaridad* que I_1.

   - Si i_1 aumenta, aumenta el flujo Φ_1, en la bobina 1 se creará una fem autoinducida ($L \cdot \Delta I_1/\Delta t$) que tiende a oponerse al aumento de dicha corriente, es decir, de *polaridad contraria* a I_1.

   - Si en lugar de considerar un aumento de i_2, se considera una disminución, razonando de forma semejante se llega a la misma conclusión: la fem inducida debida a la inductancia mutua ($M \cdot \Delta I_2/\Delta t$) tiene sentido contrario que la fem de autoinducción ($L \cdot \Delta I_1/\Delta t$).

Conforme a lo anterior, en el ejemplo de la *figura 6.27*, una vez determinados los bornes homólogos (con puntos), como la corriente entra por un terminal con punto (bobina izquierda) y sale por un terminal con punto (bobina derecha), en las ecuaciones *[6.62]* y *[6.63]* el signo de la fem de autoinducción L y la fem de inducción mutua M son opuestos.

En la *figura 6.32* se tienen diferentes circuitos acoplados magnéticamente, siendo en los de la izquierda los signos de los coeficientes de autoinducción L y de inductancia mutua M iguales, y en los circuitos de la derecha dichos signos son diferentes.

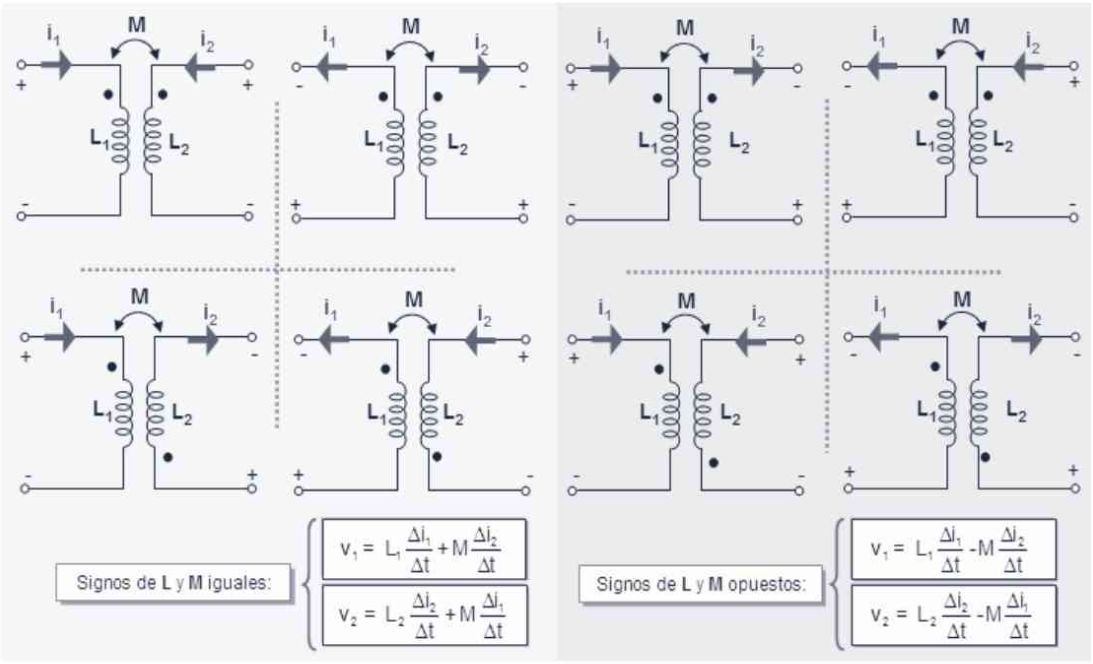


Figura 6.32. Signos de L y M en diferentes acoplamientos

6.15 RELACIÓN ENTRE EL COEFICIENTE DE INDUCCIÓN *L* Y EL COEFICIENTE DE INDUCTANCIA MUTUA *M*

En el acoplamiento magnético de dos bobinas, *figura 6.25*, *apartado 6.12*, se ha visto que sólo una parte del flujo debido a la bobina izquierda concatena con la bobina derecha, flujo Φ_{12}. De la misma manera, sólo el flujo Φ_{21}, debido a la bobina derecha, concatena con la bobina izquierda.

Se puede definir qué proporción del flujo producido en cada bobina afecta a la otra mediante los coeficientes:

$$k_1 = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_1} \qquad \text{y} \qquad k_2 = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_2} \qquad [6.75]$$

Suponiendo circuitos magnéticos lineales, tanto k_1 como k_2 son constantes y se ldenominan *coeficientes de acoplamiento.*

Con objeto de simplificar el estudio de los circuitos se supone que las características magnéticas de las dos bobinas son iguales y por tanto la proporción de flujo propio respecto del producido es el mismo en ambas bobinas, es decir:

$$k = k_1 = k_2 = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_1} = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_2} \qquad [6.76]$$

El coeficiente de acoplamiento *k* depende de las características geométricas y magnéticas del acoplamiento inductivo. Las líneas de flujo propio se cierran alrededor de cada bobina, en parte por el aire, mientras que las concatenadas lo hacen en su mayor parte por el circuito magnético, de mayor permeabilidad. Si todo el flujo producido en una bobina afecta a la otra $K = 1$, si no hay ninguna vinculación inductiva entre las bobinas $K = 0$.

Para el acoplamiento magnético de las dos bobinas, *figura 6.33*, teniendo en cuenta las ecuaciones, *[6.52], [6.55]* y *[6.57]* se tiene:

$$M = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2} \qquad [6.77]$$

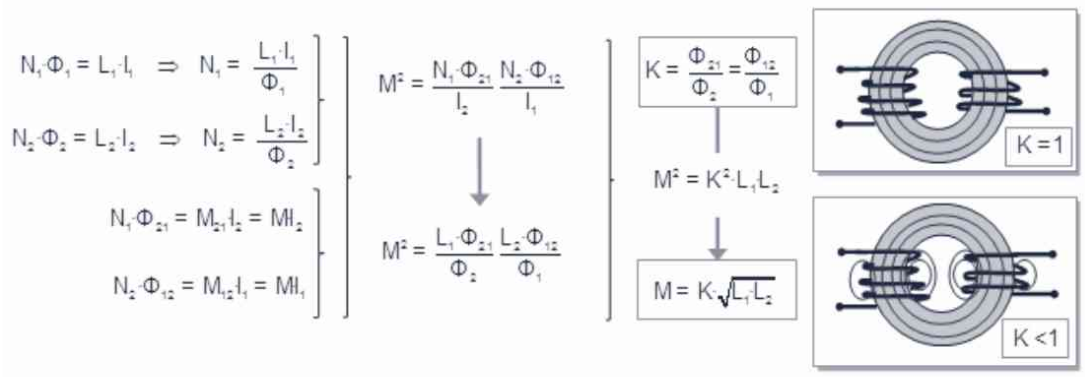


Figura 6.33. Acoplamiento magnético de dos bobinas. Coeficiente de acoplamiento

El acoplamiento inductivo puede realizarse entre más de dos circuitos, siendo válido todo lo dicho, para las distintas interacciones.

6.16 INDUCTANCIAS EN SERIE

Se pueden presentar dos casos, sin, o con, influencia mutua.

Inductancias en serie sin inducción mutua

Se tiene dos bobinas de coeficiente de autoinducción L_1 y L_2 conectadas en serie, *figura 6.33*, con una distancia entre ellas lo suficientemente grande para que no exista influencia magnética mutua. El paso de una corriente *I de magnitud constante* por ellas no supone fem autoinducida e_a. Sin embargo, si se produce una variación de la corriente *I,* entonces, conforme a la ley de Faraday-Lenz se produce fem autoinducida, tal que, un

aumento de la corriente ΔI, común para las dos bobinas al estar en serie, supone una e_a negativa ($e_a = - L_i \cdot \Delta I/\Delta t$) y una disminución de la corriente ΔI, supone una e_a positiva ($e_a = L_i \cdot \Delta I/\Delta t$), ambas de magnitud diferente en cada una de las bobinas pero con el mismo signo.

En la *figura 6.34* se demuestra, razonando de forma análoga a como se hizo para las resistencias conectadas en serie (*apartado 3.11*), que el coeficiente de autoinducción equivalente L a un conjunto de inductancias L_i conectadas en serie es igual a la suma de todas ellas:

$$L = \sum_{1}^{n} L_i \qquad [6.78]$$

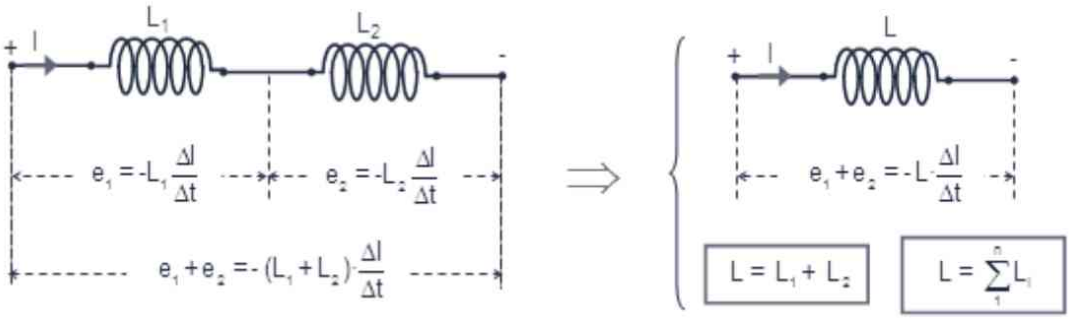


Figura 6.34. Inductancias en serie sin acoplamiento mutuo

Inductancias en serie con inducción mutua

Si existe inducción mutua entre las bobinas, se ha de considerar los sentidos de los arrollamientos en las bobinas, tal como se ha explicado en los apartados anteriores. En la *figura 6.34* se tienen dos bobinas acopladas en serie, en un caso con flujo aditivo y en el otro caso con flujo sustractivo. A partir de las ecuaciones de cada uno de los dos circuitos, se tiene para los coeficientes de autoinducción equivalente:

- Para la conexión de dos bobinas con flujo aditivo:

$$L_A = L_1 + L_2 + 2 \cdot M \qquad [6.79]$$

- Para la conexión de dos bobinas con flujo sustractivo:

$$L_S = L_1 + L_2 - 2 \cdot M \qquad [6.80]$$

Obsérvese que las dos ecuaciones anteriores, si $M << L_1$ y $M << L_2$, se convierten en $L = L_1 + L_2$, que es la inductancia correspondiente a dos bobinas en serie sin inducción mutua.

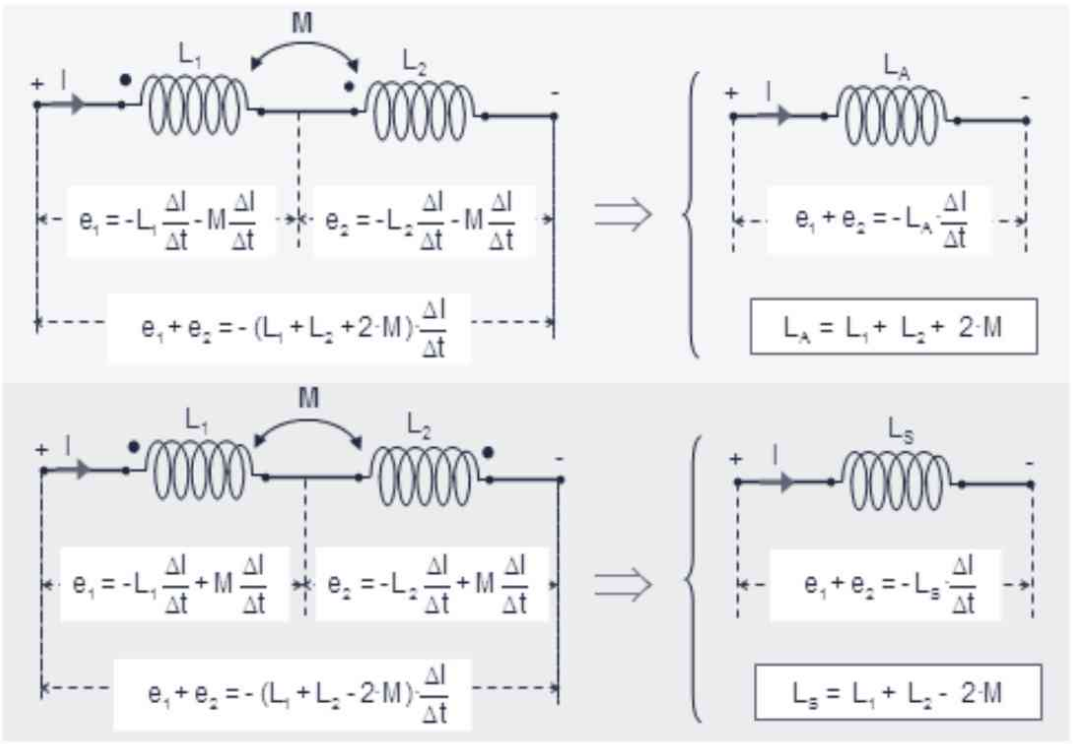


Figura 6.35. Inductancias en serie con acoplamiento mutuo

Observa:

Un método experimental para determinar el coeficiente de inducción mutua M entre dos bobinas consiste en conectarlas en serie de las dos formas anteriores, es decir, con flujo aditivo y sustractivo. En efecto, determinando las autoinducciones equivalentes L_A y L_S (se hace fácilmente mediante la conexión del circuito a corriente alterna, como se verá en el *capítulo 7*), si se restan las expresiones *[6.79]* y *[6.80]* se obtiene el valor de M:

$$M = \frac{1}{4}(L_A - L_S) \qquad [6.81]$$

6.17 INDUCTANCIAS EN PARALELO

Se pueden presentar dos casos, sin, o con, influencia mutua.

Inductancias en paralelo sin inducción mutua

Se tiene dos bobinas de coeficiente de autoinducción L_1 y L_2 conectadas en paralelo, *figura 6.36*, sin influencia magnética mutua. La circulación de las corrientes, de

magnitud constante, I_1 e I_2 por cada una de ellas no supone fem autoinducida e_a. Sin embargo, si se produce una variación de la corriente I, entonces, conforme a la ley de Faraday-Lenz se produce una fem autoinducida en cada una de ellas, $e_a = - L_i \cdot \Delta I_i / \Delta t$. Ahora la magnitud común a amabas bobinas es la tensión v, siendo la corriente total I igual a la suma de las corrientes por cada bobina, $I = I_1 + I_2$.

En la *figura 6.36* se demuestra, razonando de forma análoga a como se hizo para las resistencias conectadas en paralelo (*apartado 3.12*), que el coeficiente de autoinducción equivalente L a un conjunto de inductancias L_i conectadas en paralelo es:

$$\frac{1}{L} = \sum_{1}^{n} \frac{1}{L_i} \qquad [6.82]$$

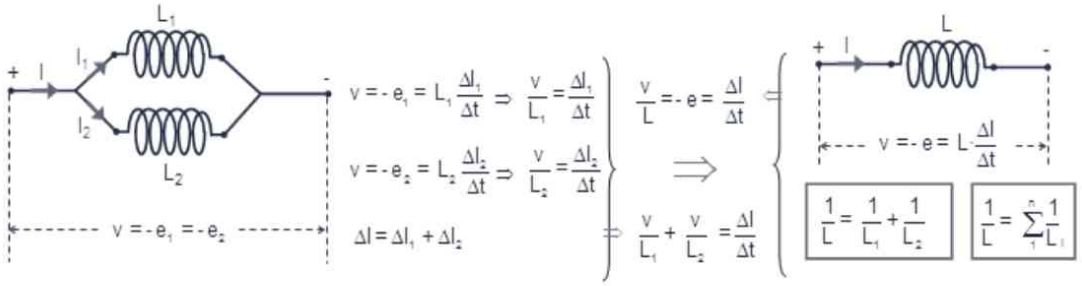


Figura 6.36. Inductancias en paralelo sin acoplamiento mutuo

Inductancias en paralelo con inducción mutua

Si existe inducción mutua entre las bobinas, se ha de considerar los sentidos de los arrollamientos en las bobinas, tal como se ha explicado en los apartados anteriores. En la *figura 6.37* se tienen dos bobinas acopladas en paralelo, en un caso con flujo aditivo y en el otro caso con flujo sustractivo. A partir de las ecuaciones de cada uno de los dos circuitos, y teniendo en cuenta las relaciones *[6.52]*, $N_1 \cdot \Phi_{21} = M_{21} \cdot I_2$, *[6.55]*, $N_2 \cdot \Phi_{12} = M_{12} \cdot I_1$ y *[6.57]*, $M_{11} = M_{21} = M$, se tiene para los coeficientes de autoinducción equivalente:

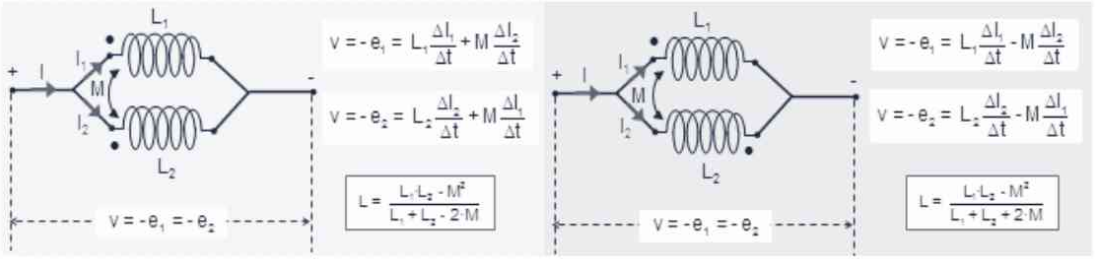


Figura 6.37. Inductancias en paralelo con acoplamiento mutuo

Para dos bobinas en paralelo con flujo aditivo:

$$L = \frac{L_1 \cdot L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2 \cdot M} \qquad [6.83]$$

Para dos bobinas en paralelo con flujo sustractivo:

$$L = \frac{L_1 \cdot L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2 \cdot M} \qquad [6.84]$$

Las dos ecuaciones anteriores si, $M << L_1$ y $M << L_2$, se convierten en, $L = L_1 \cdot L_2/(L_1 + L_2)$, que es la inductancia correspondiente a dos bobinas en paralelo sin inducción mutua.

También, como con resistencias, se pueden presentar bobinas en asociaciones mixtas serie-paralelo, en las que, a partir de las ecuaciones de tensiones e intensidades correspondientes, se puede obtener la inductancia equivalente.

6.18 FUERZA DE UN ELECTROIMÁN

Un electroimán es un dispositivo formado por un núcleo de hierro dulce en el que se ha arrollado, en forma de bobina, un hilo conductor recubierto de un material aislante que, al circular por él una corriente, se comporta como un imán, cesando el magnetismo al cesar dicha corriente.

Los electroimanes, *figura 6.38*, se suelen construir con diversas formas, dependiendo de la aplicación a que estén destinados, siendo frecuente su uso en grúas de elevación para hierro y acero, frenos electromagnéticos, timbres eléctricos, cerraduras eléctricas, etc.

Para hallar la fuerza atractiva de un electroimán considérese la energía acumulada entre los polos N y S de un imán, *figura 6.37*. Se considera que los polos se encuentran muy próximos tal que se pueda considerar la inducción magnética $\boldsymbol{B}$ constante entre ellos. Como la *fórmula [6.43]* permite conocer la energía magnética de un volumen, teniendo en cuenta que en el aire $B = \mu_0 \cdot H$, un desplazamiento Δl de uno de los polos, de sección A perpendicular al flujo, supone una variación de su energía $\Delta W = 1/2B \cdot H \cdot A \cdot \Delta l$, igual al trabajo ΔW desarrollado por la fuerza F con que es atraído el polo, $\Delta W = F \cdot \Delta l$. Igualando ambas expresiones, se tiene para la fuerza F:

$$F = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} A \qquad [6.85]$$

Expresándose, la fuerza F en N (newton), la inducción B en T (teslas) y la superficie A en m^2.

El sentido de la fuerza F es tal que tiende a disminuir el espacio, entrehierro, existente entre el núcleo y el metal atraído ("principio de flujo máximo", *apartado 5.16*).

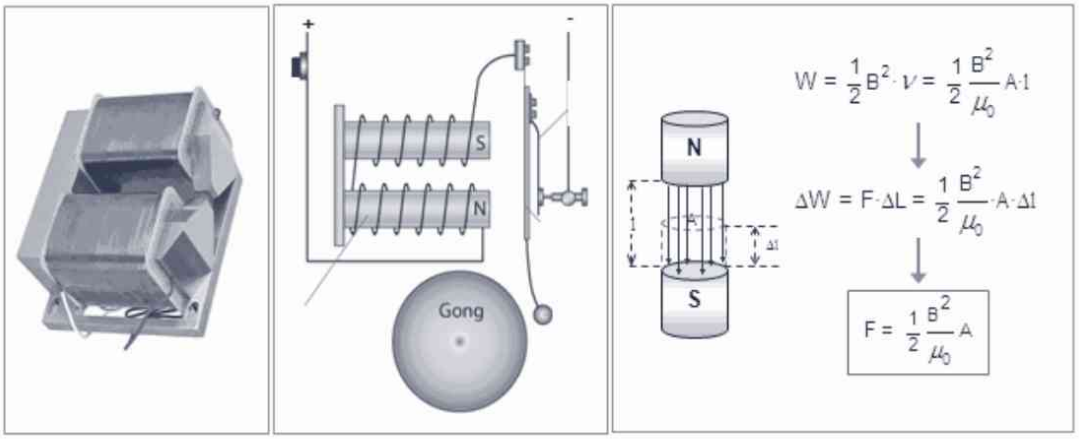


Figura 6.38. Electroimanes. Fuerza de un electroimán

6.19 CIRCUITO MAGNÉTICO. LEY DE HOPKINSON

La disposición física de los materiales y conductores que confinan un flujo magnético en una geometría determinada recibe el nombre de circuito magnético.

En el *apartado 5.12* se hace un estudio del campo magnético debido a una bobina toroidal. Considérese, ahora, la bobina toroidal de la *figura 6.38*, sustituyendo el valor de la inducción magnética B en el núcleo toroidal ($B = \mu \cdot N \cdot I/l_n$), en *la fórmula [5.1]* para obtener el flujo magnético Φ, ($\Phi = B \cdot A$), se obtiene:

$$\Phi = \frac{N \cdot I}{\frac{l_n}{\mu \cdot A}} \qquad [6.86]$$

Llamando *fuerza magnetomotriz F* a la expresión:

$$F = N \cdot I \qquad [6.87]$$

Se recuerda que, N es el número de espiras de la bobina, I la intensidad que la atraviesa y l_n la longitud media del núcleo.

Llamando *reluctancia R* a la expresión:

$$R = \frac{l_n}{\mu \cdot A} \qquad [6.88]$$

Se concluye:

$$\Phi = \frac{F}{R} \qquad [6.89]$$

La fórmula anterior que relaciona las tres magnitudes fundamentales de un circuito magnético recibe el nombre de Ley de Hopkinson, en honor del ingeniero inglés J. Hopkinson (1849-1898).

La unidad de la fuerza magnetomotriz F es el *amperio-vuelta* $(A \cdot v)$, pero, puesto que N no tiene dimensiones, es preferible denominarla *amperio* (A).

La unidad de la reluctancia R ($R = F/\Phi$) es A/Wb. Teniendo en cuenta la *fórmula [6.35]*, $\Phi = L \cdot I$, sustituyendo Φ en *[6.89]*, se tiene $R = N \cdot I/L_n \cdot I = N/L_n$, y como N no tiene dimensiones, la unidad de R es, también, el H^{-1}, llamada *henrio inverso*. Así pues, 1 A/Wb = 1 H^{-1}.

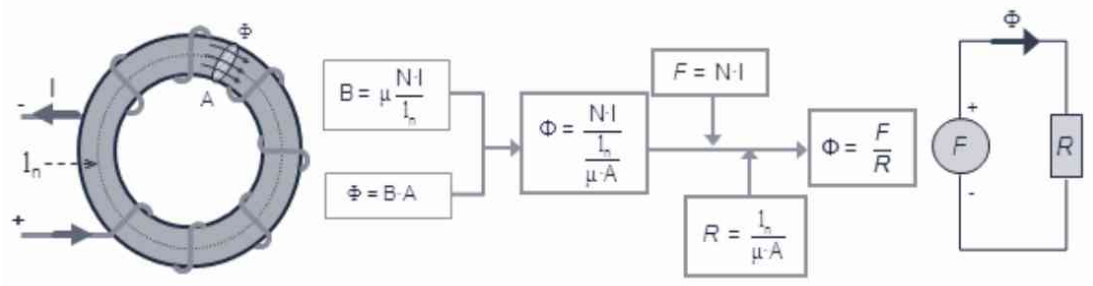


Figura 6.39. Circuito magnético

Si se tiene una fuente de energía eléctrica de corriente continua de fem E conectada a una resistencia externa R, la intensidad que circula, *fórmula [3.34]*, es:

$$I = \frac{E}{R} \qquad [6.90]$$

Por otra parte, la resistencia de un conductor para una temperatura determinada, *fórmula [3.24],* se obtiene por la expresión:

$$R = \frac{\rho \cdot l}{S} = \frac{1}{\gamma \cdot S} \qquad [6.91]$$

Es evidente la correspondencia formal entre las *fórmulas [6.89] y [6.88]* con las *fórmulas [6.90] y [6.91].* Esta correspondencia ha llevado a introducir el concepto de *circuito magnético*, *figura 6.39*, en relación al circuito de corriente continua. Así se tienen las siguientes analogías:

Analogías	
Circuito magnético	**Circuito eléctrico**
Fuerza magnetomotriz fmm F	Fuerza electromotriz fem E
Flujo Φ	Corriente I
Reluctancia R	Resistencia R
Permeancia λ	Conductancia G
Densidad de flujo B	Densidad de corriente J
Permeabilidad μ	Conductividad γ
Resistividad magnética $\rho_m = 1/\mu$	Resistividad $\rho = 1/\gamma$
Excitación magnética H	Campo eléctrico E
Ley de Hopkinson	Ley de Ohm
Ley de Kirchhoff en un nudo: $\Sigma\Phi_I = 0$	Ley de Kirchhoff en un nudo: $\Sigma I_I = 0$
Ley de Kirchhoff en una malla: $\Sigma F_I = 0$	Ley de Kirchhoff en una malla: $\Sigma V_I = 0$
El Φ variable produce pérdidas en el Fe	La I produce siempre pérdidas en el Cu

Tabla 6.1. Analogía circuito magnético y circuito eléctrico

Hay una diferencia fundamental entre los circuitos eléctricos y magnéticos y es que en los eléctricos los parámetros permanecen constantes y en los magnéticos, si se utilizan núcleos ferromagnéticos, no. La permeabilidad μ depende de $\boldsymbol{B}$, por tanto la reluctancia R y el flujo Φ.

En efecto, los materiales ferromagnéticos son los normalmente utilizados en los núcleos de los circuitos magnéticos, por tanto, se ha de tener en cuenta que la permeabilidad magnética del medio μ no es constante, sino que depende de H, por tanto la *fórmula [5.65]* que relaciona la inducción magnética B y la excitación magnética H, ($B = \mu \cdot H$), no es lineal, se necesitan las curvas de imantación $B = f(H)$ para su determinación. En consecuencia, estos circuitos, en general, serán no lineales y por tanto no son aplicables los métodos de análisis basados en el principio de superposición, *apartado 4.6*.

Como consecuencia de la no linealidad de los circuitos magnéticos, para la resolución de un circuito como el de la *figura 6.39*, se tienen dos maneras de proceder:

a) **Determinar la fuerza magnetomotriz *F* para producir un flujo *Φ*.** Dado un flujo *Φ*, se determina la inducción *B (B = Φ/A),* y mediante el gráfico *B = f(H)* se determina el valor de *H* y por tanto μ ($\mu = B/H$). La reluctancia *R* se obtiene a través de la configuración física del circuito magnético ($R = l_n/\mu \cdot A$). La ley de Hopkinson, *fórmula [6.89],* permite determinar la fuerza magnetomotriz ($F = \Phi \cdot R$) necesaria para producir el flujo de partida.

b) **Determinar el flujo *Φ* para una fuerza magnetomotriz *F*.** Dada una fuerza magnetomotriz *F*, la determinación del flujo *Φ* requiere un cálculo por aproximaciones, es decir, se supone un valor para el flujo *Φ*, a partir del cual, como en el caso anterior, se determinan, la inducción *B,* la permeabilidad μ y la reluctancia *R.* Después con el valor de la fuerza magnetomotriz resultante se verifica el valor del flujo supuesto y, si es necesario, se corrige dicho valor. El proceso se repite cuantas veces sean necesarias hasta lograr la convergencia.

6.20 CIRCUITO MAGNÉTICO CON ENTREHIERRO

En una bobina toroidal cuando el núcleo es de material ferromagnético, su alta permeabilidad hace que el flujo siga esencialmente confinado al volumen del toroide aunque las espiras de la bobina estén concentradas en un sector del núcleo.

Considérese ahora una bobina toroidal con un pequeño corte radial (entrehierro) desprovisto de núcleo ferromagnético, *figura 6.40*. El flujo magnético continúa confinado en el volumen del toro excepto en la región próxima al entrehierro, donde se abomba, *figura 6.44.* Para simplificar el problema y considerando un entrehierro de longitud suficientemente pequeña, se puede asumir que las líneas de campo magnético siguen siendo circunferencias, o lo que es lo mismo que, el flujo *Φ* y la sección transversal *A,* son iguales en el núcleo ferromagnético que en el aire, por lo que, la inducción magnética en el núcleo ferromagnético B_{Fe} es la misma que la inducción en el aire B_0. Como consecuencia se deduce que las intensidades de campo magnético *H* en los respectivos medios, si μ y μ_0 son las permeabilidades magnéticas del hierro y el aire, guardan la relación:

$$B_{Fe} = B_0 \quad \Rightarrow \quad \mu \cdot H_{Fe} = \mu_0 \cdot H_0 \qquad [6.92]$$

Aplicando el Teorema de Ampère para el vector ***H***, *fórmula [5.77]*, a lo largo de la circunferencia central del toroide, se tiene:

$$C_L = \sum_0^c \overline{H} \cdot \overline{\Delta l} = \sum_1^n I_i \quad \Rightarrow \quad H_{Fe} \cdot l_{Fe} + H_0 \cdot l_0 = N \cdot I \qquad [6.93]$$

De las *ecuaciones [6.92]* y *[6.93]* anteriores, *figura 6.38*, se obtiene:

$$\Phi = \frac{N \cdot I}{\frac{l_{Fe}}{\mu \cdot A} + \frac{l_0}{\mu_0 \cdot A}} \qquad [6.94]$$

En la ecuación anterior, el numerador es la fuerza magnetomotriz F y el denominador representa la reluctancia R del circuito magnético:

$$R = \frac{l_{Fe}}{\mu \cdot A} + \frac{l_0}{\mu_0 \cdot A} \qquad [6.95]$$

El flujo del circuito es pues:

$$\Phi = \frac{F}{R} \qquad [6.96]$$

El coeficiente de autoinducción L de la bobina no es ahora el mismo que cuando el núcleo no tiene entrehierro ($L = \mu \cdot N^2 \cdot S/l_n$), *fórmula [6.36]*, sino que, teniendo en cuenta que, $N \cdot \Phi = L \cdot I$, *fórmula [6.35]*, su valor con entrehierro es:

$$L = \frac{N^2}{\frac{l_{Fe}}{\mu \cdot A} + \frac{l_0}{\mu_0 \cdot A}} = \frac{N^2}{R} \qquad [6.97]$$

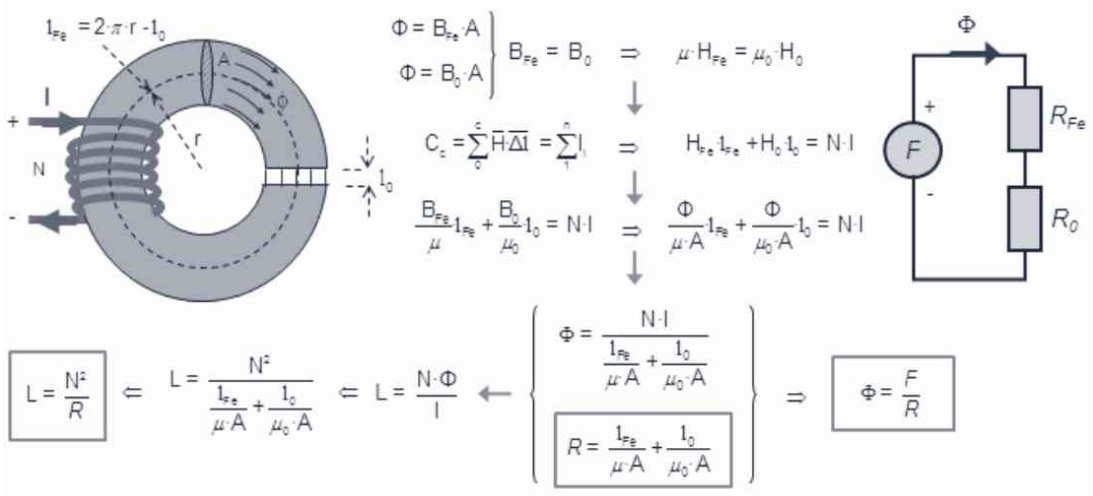


Figura 6.40. Circuito magnético con entrehierro

Como $\mu >> \mu_0$, se tiene que, $\mu_0 \cdot l_{Fe}/\mu << l_0$, por lo que la *fórmula 6.97* se puede poner en la forma:

$$L = \frac{N^2}{\frac{l_{Fe}}{\mu \cdot A} + \frac{l_0}{\mu_0 \cdot A}} = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot A}{\frac{\mu_0}{\mu} l_{Fe} + l_0} \approx \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot A}{l_0} \qquad [6.98]$$

Lo que significa que la inductancia no depende de las propiedades magnéticas del material que forma el núcleo. Por esta razón, en los circuitos magnéticos en los que se quiere garantizar el valor de la inductancia L ante variaciones de las propiedades magnéticas del núcleo o variaciones de flujo, se intercala un entrehierro, aún a costa de disminuir la inductancia del conjunto.

Para la resolución de un circuito como el de la *figura 6.39*, se procede de una de las siguientes maneras:

a) **Determinar la fuerza magnetomotriz F para producir un flujo Φ.** Dado un flujo Φ, se determina la inducción B_{Fe} ($B = \Phi/A$), y mediante el gráfico $B = f(H)$ correspondiente al núcleo ferromagnético se determina el valor de H_{Fe}. Como se supone que el flujo es el mismo en la sección A del entrehierro, $B_0 = B_{Fe}$, por lo que $H_0 = B_{Fe}/\mu_0$. Se termina calculando la fuerza magnetomotriz, $F = N \cdot I = H_{Fe} \cdot l_{Fe} + H_0 \cdot l_0$.

b) **Determinar el flujo Φ para una fuerza magnetomotriz F.** Dada una fuerza magnetomotriz F, la determinación del flujo Φ requiere un cálculo por aproximaciones, es decir, se supone un valor para el flujo Φ, a partir del cual se calcula la F necesaria para producirlo. Después con el valor de la fuerza magnetomotriz F resultante se verifica el valor del flujo supuesto y, si los dos valores no coinciden (dentro de un margen de error razonable) se modifica el valor dado al flujo y se repite el procedimiento. El proceso se repite cuantas veces sean necesarias hasta lograr la convergencia.

Por otra parte:

Como, $\mu_{Fe} >> \mu_0 \Rightarrow R \approx R_0 \Rightarrow N \cdot I = \Phi \cdot R_0 \Rightarrow N \cdot I = \Phi \cdot R_0 \Rightarrow N \cdot I = B \cdot S_0 \cdot L_0/\mu_0 \cdot S_0 = H_0 \cdot L_0 \Rightarrow H_{Fe} = 0$

Teniendo en cuenta la energía magnética almacenada en un volumen ν, *fórmula [6.43]*, la energía almacenada por el circuito de la *figura 6.40* es:

$$W = \frac{1}{2}\frac{B \cdot H}{\mu} \cdot \nu = W_{Fe} + W_0 = \frac{1}{2}\frac{B_{Fe} \cdot H_{Fe}}{\mu_{Fe}} \cdot \nu_{Fe} + \frac{1}{2}\frac{B_0 \cdot H_0}{\mu_0} \cdot \nu_0 = \frac{1}{2}\frac{B_0 \cdot H_0}{\mu_0} \cdot \nu_0 = W_0 \qquad [6.99]$$

Se llega a la interesante conclusión de que la energía del circuito magnético se almacena fundamentalmente en el aire. Esta conclusión tiene similitud con el proceso de almacenamiento de energía eléctrica en un condensador, *apartado 2.11,* la cual está localizada en el dieléctrico.

6.21 RELUCTANCIAS EN SERIE

Su estudio se hace de forma análoga a la asociación de resistencias en serie, *apartado 3.11,* resultando para la reluctancia equivalente R de una serie de reluctancias R_i dispuestas en serie, *figura 6.41*:

$$R = \sum_{1}^{n} R_i \qquad [6.100]$$

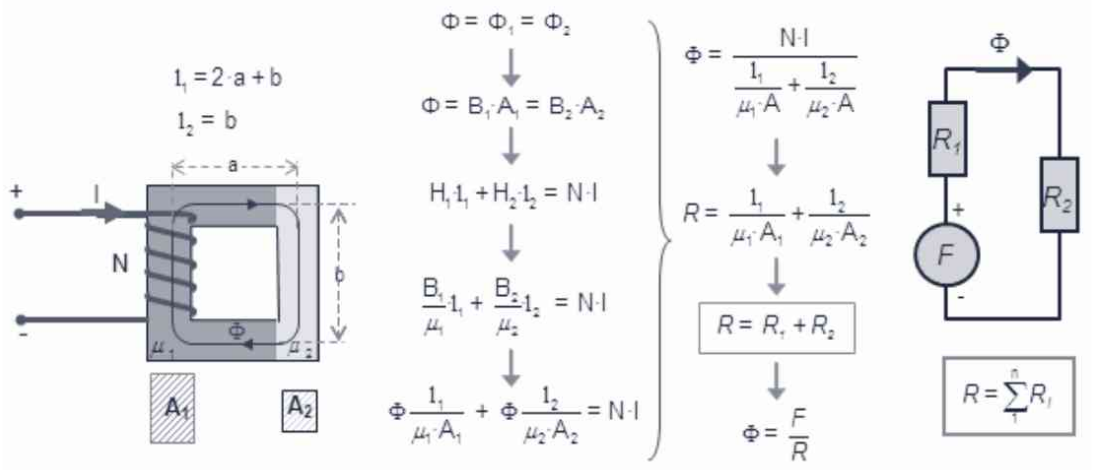


Figura 6.41. Reluctancias en serie

6.22 RELUCTANCIAS EN PARALELO

Su estudio se hace de forma análoga a la asociación de resistencias en paralelo, *apartado 3.12,* resultando para la reluctancia equivalente R de una serie de reluctancias R_i dispuestas en paralelo, *figura 6.42*:

$$\frac{1}{R} = \sum_{1}^{n} \frac{1}{R_i} \qquad [6.101]$$

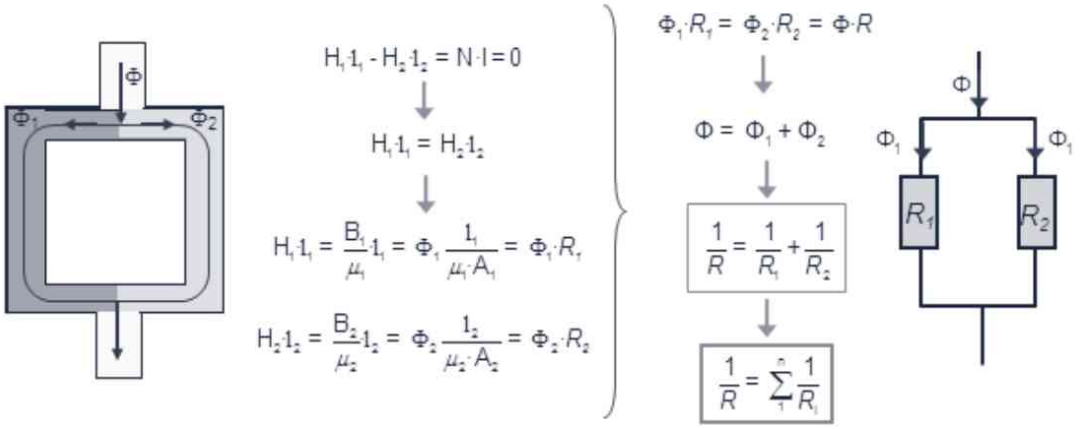


Figura 6.42. Reluctancias en paralelo

6.23 RELUCTANCIAS EN SERIE Y PARALELO

Su estudio se hace de forma análoga a la asociación mixta de resistencias, *apartado 3.13.*

En la *figura 6.43* se representa un circuito magnético con su analogía eléctrica. El circuito está constituido por tres partes, una central con reluctancia R_0 y dos laterales con reluctancia R_1 y R_2. Como R_1 y R_2 están en paralelo, y la equivalente de ambas está en serie con R_0, La reluctancia equivalente R del conjunto es:

$$R = R_0 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \qquad [6.102]$$

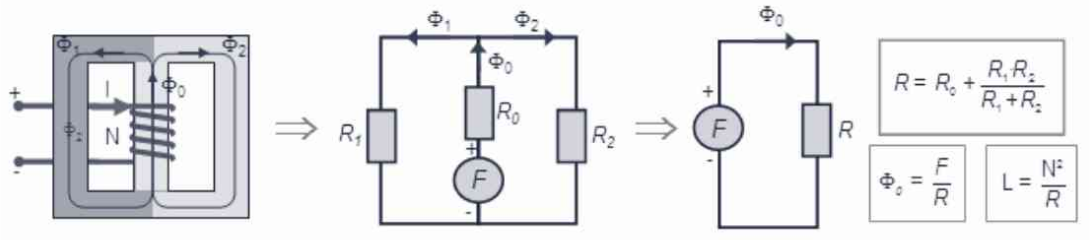


Figura 6.43. Reluctancias en serie-paralelo

6.24 CIRCUITO CON PARTE MÓVIL. CONVERSIÓN ELECTROMECÁNICA DE ENERGÍA

Considérese el circuito magnético de la *figura 6.44*, formado por un electroimán con la bobina en la culata y la armadura móvil. Al circular una corriente I por la bobina el campo magnético creado por ésta producirá el desplazamiento de la armadura móvil hacia

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

la izquierda. Supóngase ahora que, en principio, durante el paso de la corriente I, se impide el desplazamiento de la armadura (mediante una fuerza $\boldsymbol{F'}$ de igual módulo y dirección pero de sentido contrario a $\boldsymbol{F}$). La energía eléctrica almacenada en la bobina, *fórmula 6.43*, es $W = L \cdot I^2/2$. A continuación, manteniendo constante la corriente I (frente a las fem autoinducidas e_a que se van a generar), se permite el desplazamiento de la armadura móvil, la cual, atraída por el núcleo de la bobina, se desplaza hacia la izquierda Δx, realizando un trabajo $W_F = F \cdot \Delta x$, (el desplazamiento Δx se supone lo suficientemente pequeño para considerar F = constante), e incrementando su energía eléctrica almacenada en $\Delta W = \Delta L \cdot I^2/2$, que, como I permanece constante, y $N \cdot \Phi = L \cdot I$, se puede poner en la forma, $\Delta W = I \cdot N \cdot \Delta\Phi/2$.

El desplazamiento de la armadura supone una variación del flujo magnético $\Delta\Phi$, que lleva asociado, una fem de autoinducción e_a (con módulo, $|e_a| = N \cdot \Delta\Phi/\Delta t$, *fórmula 6.4*), una potencia eléctrica $P = e_a \cdot I$ y un trabajo eléctrico $T = P \cdot \Delta t = N \cdot I \cdot \Delta\Phi$. El principio de conservación de la energía aplicado al sistema supone:

Energía suministrada por la fuente T = Incremento de energía almacenada ΔW + Trabajo W_F producido por $\boldsymbol{F}$

$$N \cdot I \cdot \Delta\Phi = \frac{1}{2} N \cdot I \cdot \Delta\Phi + F \cdot \Delta x \qquad [6.103]$$

De donde se obtiene:

$$F = \frac{1}{2} I^2 \cdot \frac{\Delta L}{\Delta x} \qquad [6.104]$$

Es decir, que toda variación de la geometría de la inductancia L del circuito lleva aparejada la existencia de una fuerza $\boldsymbol{F}$.

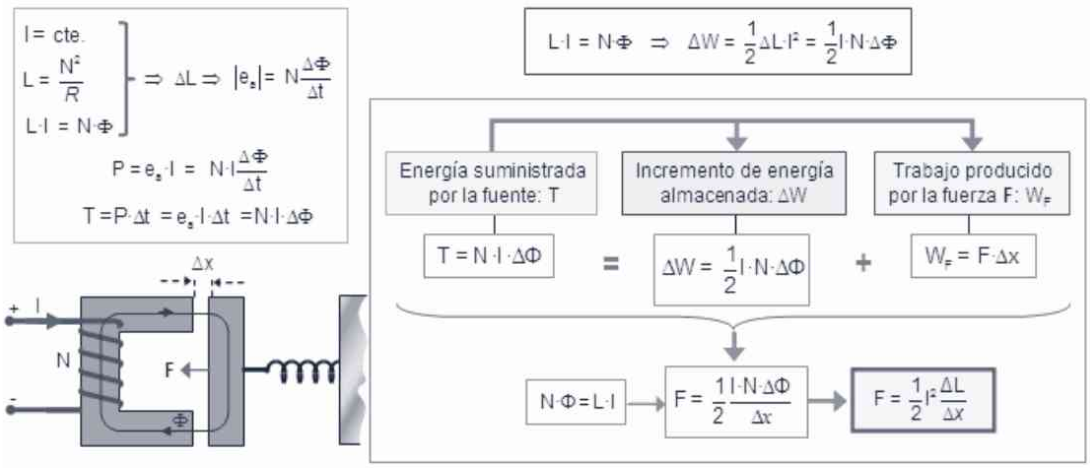


Figura 6.44. Conversión electromagnética de energía

Conforme a la *fórmula [6.104]* anterior, un aumento de la inductancia L, supone una fuerza positiva, la energía eléctrica se convierte en mecánica. Una disminución de la inductancia L, supone una fuerza negativa, la energía mecánica se convierte en energía eléctrica. En efecto:

El desplazamiento de la armadura móvil hacia la izquierda, debido a la fuerza $\boldsymbol{F}$ (acción motora), da lugar a una disminución de la reluctancia R, *fórmula 6.97*, lo que implica un aumento de la inductancia L ($L = N^2/R$, *fórmula 6.97*). Al disminuir la reluctancia R, como la fuerza magnetomotriz $F = N \cdot I$, permanece constante, aumenta el flujo Φ ($\Phi = F/R$, *fórmula 6.96*), la fem autoinducida e_a (contraria al aumento de Φ) tiene polaridad contraria a I, la potencia eléctrica correspondiente es $P = e_a \cdot I$. El sistema eléctrico realiza el trabajo (acción motora).

Desde la posición de contacto, el desplazamiento de la armadura móvil hacia la derecha mediante una fuerza $\boldsymbol{F'}$ contraria a $\boldsymbol{F}$ (acción generadora), da lugar a un aumento de la reluctancia R, lo que implica una disminución de la inductancia L ($L = N^2/R$, *fórmula 6.97*). Al aumentar la reluctancia R, como la fuerza magnetomotriz, $F = N \cdot I$, permanece constante, disminuye el flujo Φ ($\Phi = F/R$, *fórmula 6.96*), la fem autoinducida e_a (contraria a la disminución de Φ) tiene la misma polaridad que I, la potencia eléctrica correspondiente es, $P = -e_a \cdot I$, de sentido contrario a la anterior.

6.25 FUGAS MAGNÉTICAS. COEFICIENTE DE HOPKINSON

En los cálculos de los circuitos magnéticos realizados hasta ahora, con o sin entrehierro, se ha considerado que todo el flujo magnético que atraviesa el devanado pasa a través del volumen definido por el núcleo. Sin embargo, *figura 6.45*, en realidad aparece un flujo lateral Φ_l, llamado flujo de fuga o dispersión, cuyo recorrido es en parte por fuera del núcleo. Además, la existencia de un entrehierro hace que el flujo a través del mismo Φ_u, por el aire, incluya un "abombamiento" que amplía la sección efectiva del flujo en esa zona. Ambos efectos incrementan el valor calculado para la inductancia en el supuesto de que todo el flujo esté confinado en el núcleo y que el núcleo en el entrehierro es perpendicular a las superficies que lo limitan.

En efecto, si se compara el circuito magnético de la *figura 6.40*, en el que se ha considerado que el flujo Φ que atraviesa la bobina es el mismo que atraviesa el entrehierro, con el circuito de la *figura 6.45*, en el que, del flujo Φ que atraviesa la bobina, una parte, el flujo útil Φ_u, atraviesa el entrehierro y otra parte se cierra a través del aire, constituyendo el flujo de dispersión o lateral Φ_l, se denomina *coeficiente de Hopkinson* ν del circuito magnético a la relación:

$$\nu = \frac{\Phi}{\Phi_u} = \frac{\Phi_u + \Phi_l}{\Phi_u} > 1 \qquad [6.105]$$

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

En la *figura 6.40* también se representa el circuito equivalente. Las reluctancias en serie, R_{Fe} y R_0, tienen ahora una reluctancia en paralelo R_l correspondiente al flujo de dispersión Φ_l. La reluctancia equivalente R del circuito es:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_l} + \frac{1}{R_{Fe} + R_0} \qquad [6.106]$$

Teniendo en cuenta, *apartado 6.19*, que $\Phi = F/R$, $F = N \cdot I$ y $N \cdot \Phi = L \cdot I$, se tiene:

$$L = \frac{N^2}{R} = N^2 \left(\frac{1}{R_l} + \frac{1}{R_{Fe} + R_0} \right) \qquad [6.107]$$

Se deduce que el coeficiente de autoinducción L de la bobina es ahora mayor que cuando no se consideró el flujo de fuga, *fórmula [6.97]:*

$$N^2 \left(\frac{1}{R_l} + \frac{1}{R_{Fe} + R_0} \right) > \frac{N^2}{R_{Fe} + R_0} \qquad [6.108]$$

La importancia de esta modificación depende de las magnitudes relativas del núcleo y del entrehierro.

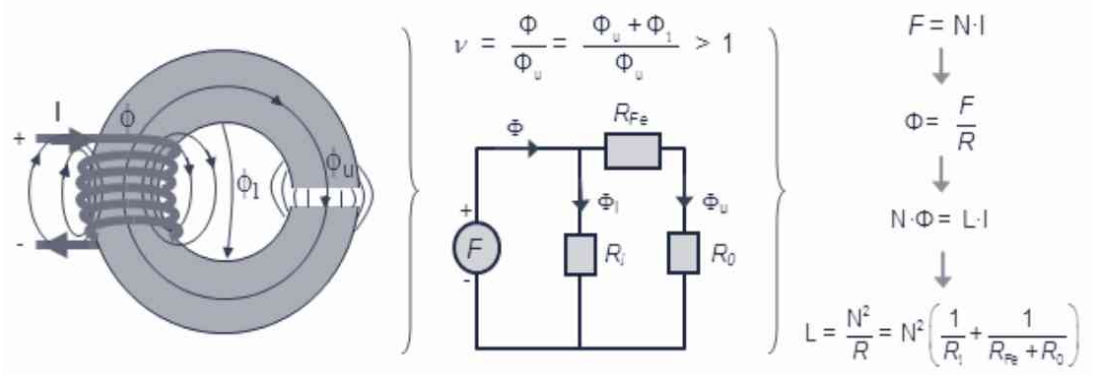


Figura 6.45. Coeficiente de Hopkinson. Circuito magnético con entrehierro

6.26 FUERZA ELECTROMOTRIZ INDUCIDA EN UNA ESPIRA GIRATORIA: GENERADOR ELEMENTAL

Sea una espira rectangular que movida por un par de fuerzas exteriores T_M gira a una velocidad angular constante ω en un campo magnético de inducción uniforme $\boldsymbol{B}$, tal como se indica en *la figura 6.46*. Los lados de la espira *bc* y *da*, paralelos a las líneas de

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

inducción magnética ***B***, en su movimiento, no cortan a estas líneas y por tanto no generan fem inducida. Los lados de la espira *ab* y *cd*, en su movimiento, sí cortan las líneas de inducción ***B*** y por tanto generan fem inducida.

Puesto que, durante el giro de la espira, la dirección que forman la inducción ***B*** con la velocidad ***V*** de los lados *ab* y *cd* se modifica constantemente, la fem inducida *e* es variable ($e = B \cdot L \cdot V \cdot \text{sen } \alpha$), *fórmula 6.12*, variando sinusoidalmente, siendo su valor máximo ($e = E_0$) para $\alpha = 90^\circ$ *y* su valor mínimo ($e = 0$) para $\alpha = 0^\circ$.

Aplicando la regla de la mano derecha a cada uno de los conductores referidos, se tiene que, el sentido de la fem e_{ab} en el conductor superior es positivo hacia dentro del plano del papel, y la fem e_{cd} en el conductor inferior es positivo hacia fuera del plano del papel, es decir están en serie, y ambas tienen el mismo módulo, por lo que, la fem total inducida en la espira es la suma de ambas:

$$e = e_{ab} + e_{bc} = 2 \cdot B \cdot L \cdot V \cdot \text{sen } \alpha = E_0 \cdot \text{sen } \alpha \qquad [6.109]$$

El producto $E_0 = 2 \cdot B \cdot L \cdot V$ es constante y representa la fem máxima que se produce en la espira.

Esta fem *e* puede producir una corriente *I* en una carga eléctrica unida a la espira y, como consecuencia, se produce una potencia eléctrica, $P = e \cdot I$. Como se tiene que:

La velocidad lineal ***V*** de los conductores que, girando con un radio *r*, cortan las líneas de inducción ***B***, y la velocidad angular ω de la espira, están relacionadas por, $V = \omega \cdot r$. El momento magnético *M* de una espira es, $M = I \cdot A$ (*fórmula 5.58*). La superficie de la espira, $A = 2 \cdot r \cdot L$. Se tiene para la potencia eléctrica *P* generada por la espira:

$$P = M \cdot B \cdot \omega \cdot \text{sen } \omega \cdot t \qquad [6.110]$$

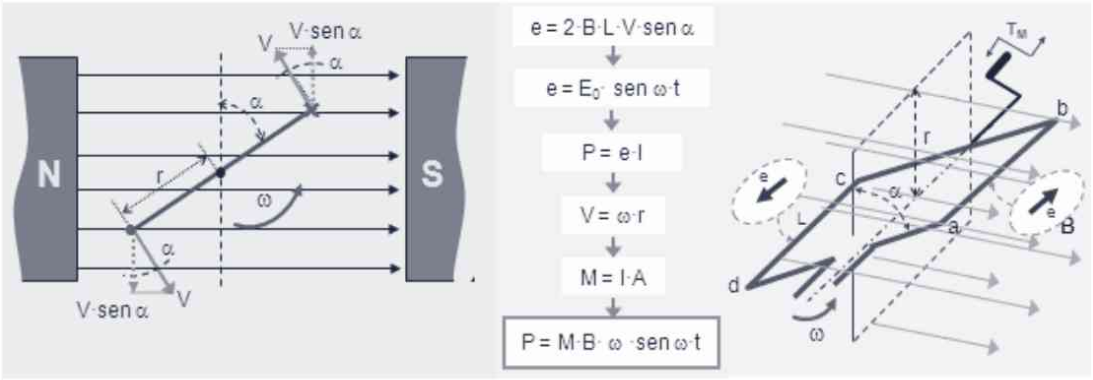


Figura 6.46. Generador elemental: fem inducida e y potencia eléctrica generada P

Como se ha dicho, la fem inducida *e* puede producir en una carga eléctrica exterior a la espira una corriente *I*, si se hace que el lado *ad,* abierto, termina en los extremos de la

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

carga. Para ello se utilizan unos anillos, de tal manera que, dependiendo de la forma que tenga dichos anillos, la tensión en la carga puede ser alterna, *figura 6.47 izquierda,* o unidireccional, *figura 6.47 derecha.*

- **Generación de una fem alterna** (*figura 6.47 izquierda*). El lado lateral de la espira termina en dos *anillos colectores*, con centro en el eje, que giran solidarios con la espira. El conductor del lado derecho de la espira corta las líneas de inducción $\boldsymbol{B}$ en el mismo sentido en todo su recorrido a la derecha del plano *P,* por lo que la fem inducida *e* ($e = B \cdot L \cdot V \cdot \text{sen } \alpha$), tiene también el mismo sentido en dicho recorrido, siendo su valor máximo ($E_0 = B \cdot L \cdot V$) en el punto medio del recorrido (donde $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{V}$ son perpendiculares) y su valor mínimo ($e = 0$) en los puntos en los que el conductor está contenido en el plano *P* (parte inferior y superior de *P*, donde $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{V}$ son paralelos). La fem inducida en el conductor del lado izquierdo inferior se deduce de forma análoga al conductor del lado derecho.

  El sentido de la fem inducida en cada conductor se obtiene aplicando la regla de la mano derecha a cada uno de ellos obteniéndose, para el conductor derecho en el recorrido a la derecha del plano *P* el sentido de entrada indicado en la figura, y para el conductor izquierdo en el recorrido a la izquierda del plano *P* el sentido de salida indicado en la misma figura. Al pasar el conductor derecho a la parte izquierda del plano *P,* el sentido de la fem *e* en dicho conductor se invierte, al igual que ocurre en el conductor izquierdo al pasar a la parte derecha del plano *P.* De esta manera, la fem del conjunto de la espira es la suma de la producida por cada espira, es decir, $2 \cdot e$, cambiando su sentido cada vez que la espira atraviesa el plano *P*. A través de unos contactos fijos, llamados *escobillas* que rozan con los anillos, es posible conectar una carga exterior a la espira, estableciéndose una corriente a través de la caga de carácter también sinusoidal.

- **Generación de una fem unidireccional** (*figura 6.47 derecha*). En este caso, el principio de funcionamiento es el mismo, pero, ahora, la espira termina en dos medios anillos, llamados *delgas*, aislado uno de otro, constituyendo el conjunto el denominado *colector*, que hace contacto con las escobillas que permanecen fijas.

  El colector realiza la función de mantener la polaridad de la tensión en la carga. Así, el conductor derecho durante su recorrido por el lado derecho del plano P, genera una fem inducida que produce una corriente en la carga con el sentido indicado en la figura. En su recorrido por el lado izquierdo del plano P, cambia el sentido de la fem e, pero, como también ha cambiado su delga correspondiente de escobilla, la tensión en éstas permanece con la misma polaridad y también la corriente en la carga.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

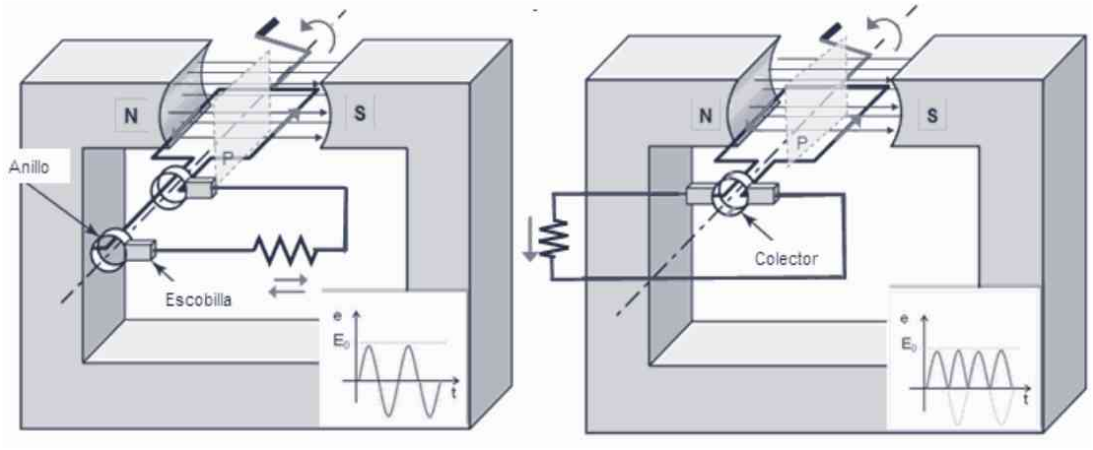


Figura 6.47. Generador de corriente alterna (izquierda) y corriente unidireccional (derecha)

Si en lugar de una espira se tuviesen varias iguales, con sus correspondientes delgas, espaciadas regularmente a lo largo de la circunferencia que las circunscribe, se obtendría una fem inducida con menor oscilación, de tal manera que, con un número suficiente de delgas, se podría tener una fem prácticamente constante. En la *figura 6.48* se tiene la fem resultante con dos espiras, y cuatro delgas, desplazadas un ángulo de 90º.

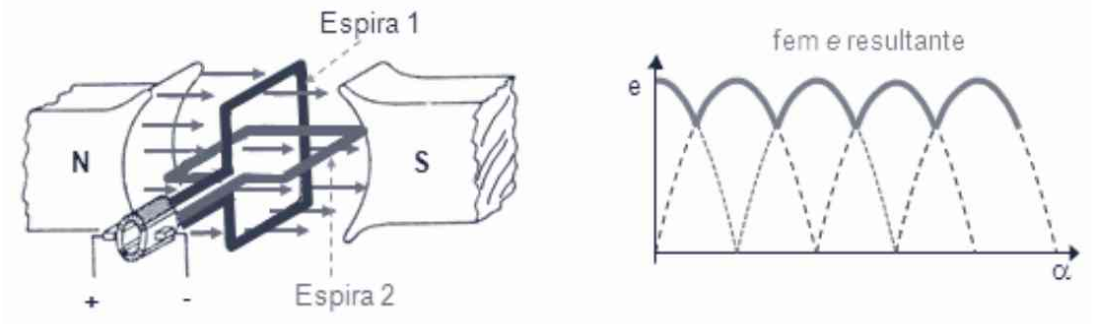


Figura 6.48. Generador de corriente unidireccional con dos espiras desplazadas un ángulo de 90º

En los dos casos anteriores, cuando por la espira circula una corriente *I*, como aquélla está girando a una velocidad angular ω en un campo magnético de inducción ***B***, surge una fuerza ***F***, *fórmula [5.47],* contraria al sentido del giro, en cada uno de los conductores (a*b* y *cd*) que cortan las líneas de inducción magnética, de módulo $F = I \cdot L \cdot B \cdot \text{sen } \alpha$, *figura 6.49.* Esta fuerza produce un par electromagnético, $T = F \cdot L' \cdot \text{sen } \alpha$, de oposición al par motor T_M que produce el giro de la espira y que desarrolla una potencia, $P_M = T_M \cdot \omega$. Si la velocidad de la espira permanece constante, el par motor T_M y el par electromagnético *T*, par resistente, han de ser iguales, $T_M = T$. Se deduce, *figura 6.49*, que la potencia mecánica que se ha de suministrar a la espira es:

$$P_M = M \cdot B \cdot \omega \cdot \text{sen } \omega \cdot t \qquad [6.111]$$

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Que, como era de esperar conforme al *principio de conservación de la energía*, coincide con la potencia eléctrica *P*, *fórmula [6.110]*, suministrada por dicha espira. Es decir, se ha producido una transformación de energía mecánica en energía eléctrica:

$$P_M = P = M \cdot B \cdot \omega \cdot \text{sen}\,\omega \cdot t \qquad [6.112]$$

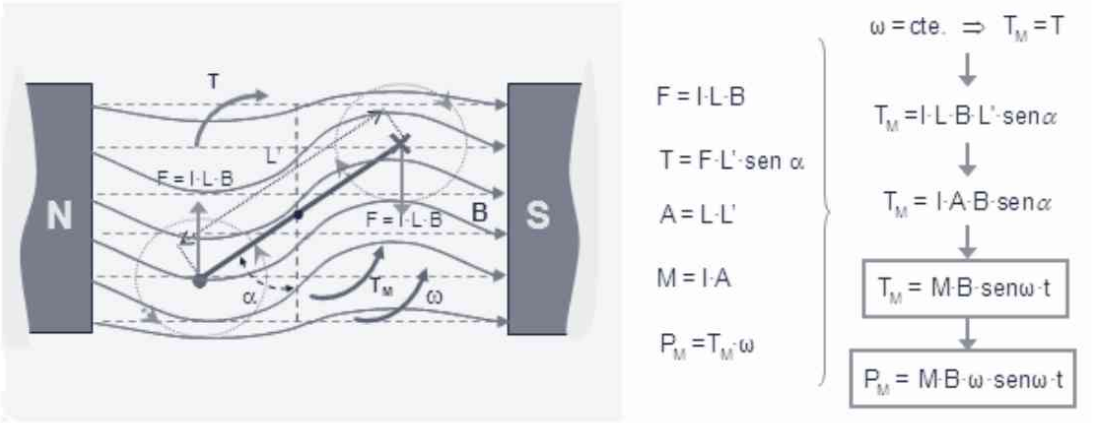


Figura 6.49. Generador elemental: par motor T_M y par resistente T

6.27 FUERZA CONTRAELECTROMOTRIZ INDUCIDA EN UNA ESPIRA GIRATORIA: MOTOR ELEMENTAL

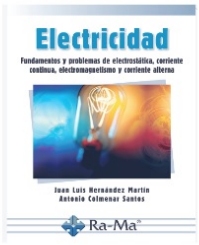
En el *apartado 5.16* se hace un estudio del par de fuerzas electromagnético $\boldsymbol{T}$ ($T = M \cdot B \cdot \text{sen}\,\alpha$) que actúa sobre una espira de superficie *A*, situada en un campo magnético de inducción $\boldsymbol{B}$, al circular por ella una corriente *I*. Este par actúa como un par motor $\boldsymbol{T_M}$ ($\boldsymbol{T_M = T}$) haciendo girar la espira. Supóngase que al giro de la espira se le opone un par resistente $\boldsymbol{T_R}$ que hace que la espira gire a una velocidad angular constante ω, (entonces, $T_M = T_R$). Durante el giro, *figura 6.50*, los conductores laterales *ab* y *cd* cortan las líneas de inducción magnética, produciendo cada uno de ellos una fem inducida ($e_{ab} = e_{cd}$), con polaridad opuesta al sentido de la corriente *I* (la regla de la mano derecha) y al estar en serie se suman, resultando una fem *e* ($e = 2 \cdot B \cdot L \cdot V \cdot \text{sen}\,\alpha$) que por tener polaridad contraria al sentido de la corriente se le denomina *fuerza contraelectromotriz e'*. En estas circunstancias la espira:

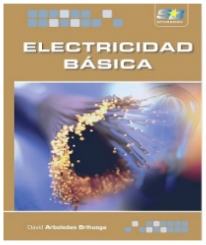
- Toma una potencia eléctrica *P*:

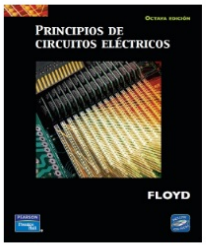
$$P = e' \cdot I = 2 \cdot B \cdot L \cdot V \cdot I \cdot \text{sen}\,\alpha = 2 \cdot B \cdot L \cdot \omega \cdot \frac{L'}{2} \cdot I \cdot \text{sen}\,\alpha = B \cdot L \cdot L' \cdot \omega \cdot I \cdot \text{sen}\,\omega t = B \cdot A \cdot I \cdot \omega\,\text{sen}\,\omega t = M \cdot B \cdot \omega\,\text{sen}\,\omega t \qquad [6.113]$$

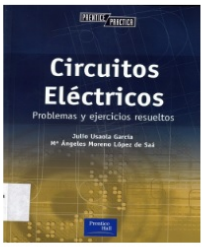
https://yolibrospdf.com/electricidad.html

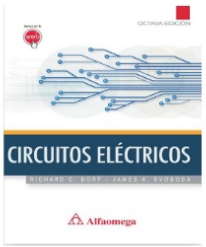
https://yolibrospdf.com/electricidad.html





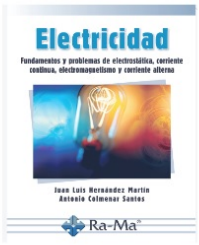


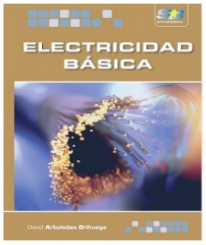


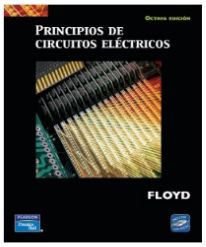


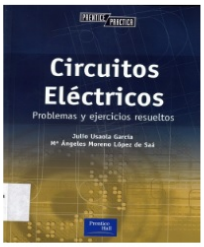
https://yolibrospdf.com/electricidad.html

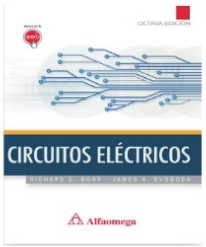
https://yolibrospdf.com/electricidad.html





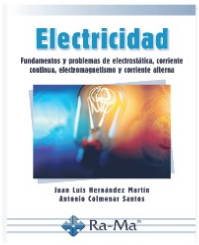


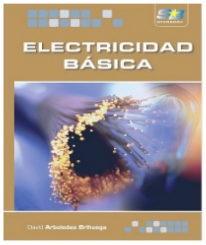


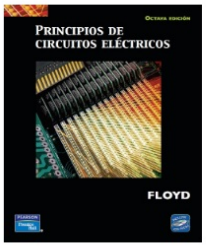


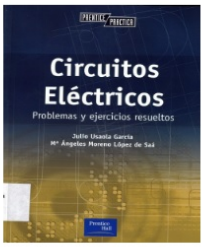
https://yolibrospdf.com/electricidad.html

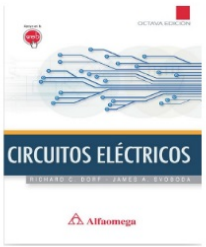
https://yolibrospdf.com/electricidad.html





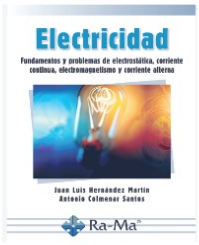


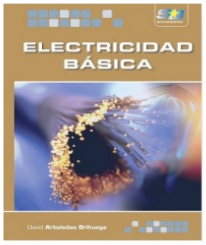


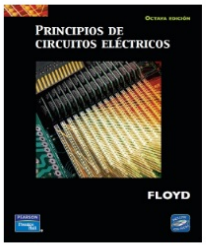


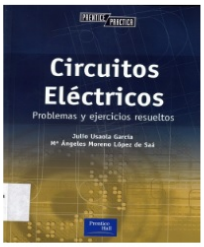
https://yolibrospdf.com/electricidad.html

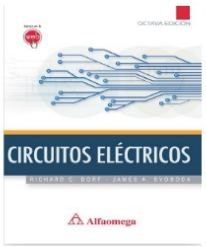
https://yolibrospdf.com/electricidad.html





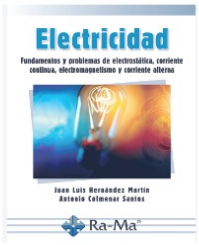


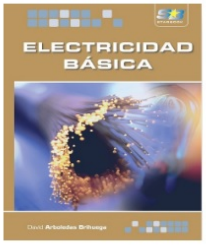


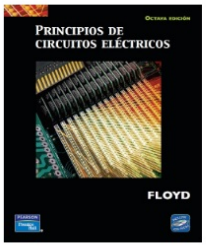


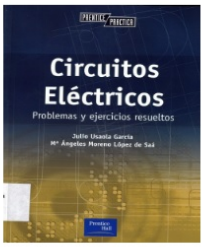
https://yolibrospdf.com/electricidad.html

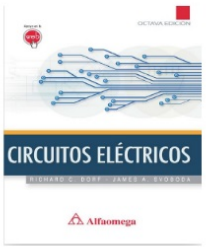
https://yolibrospdf.com/electricidad.html





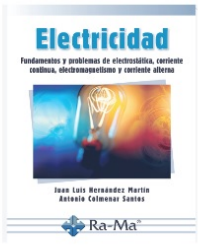


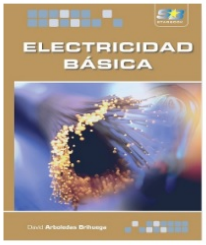


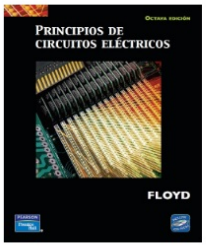


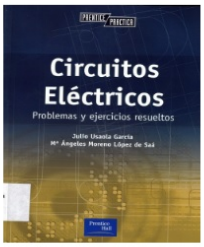
https://yolibrospdf.com/electricidad.html

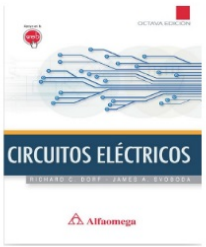
https://yolibrospdf.com/electricidad.html





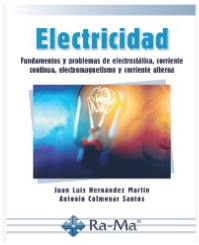


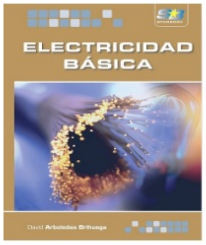


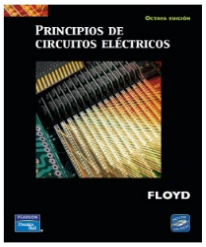


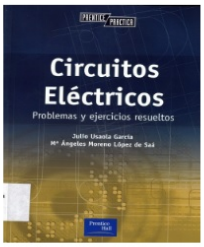
https://yolibrospdf.com/electricidad.html

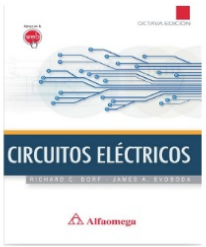
https://yolibrospdf.com/electricidad.html





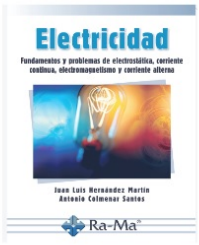


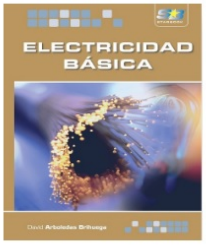


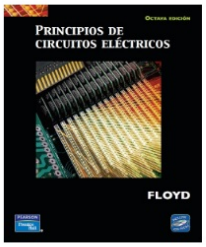


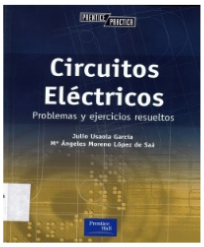
https://yolibrospdf.com/electricidad.html

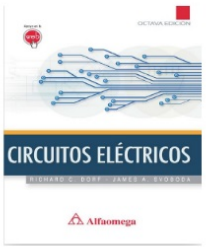
https://yolibrospdf.com/electricidad.html





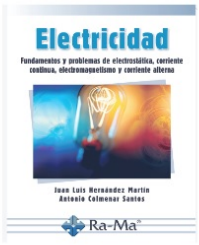


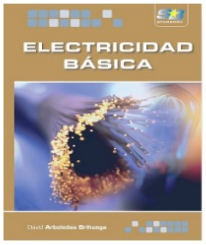


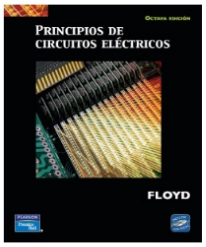


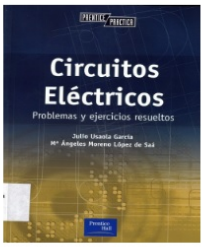
https://yolibrospdf.com/electricidad.html

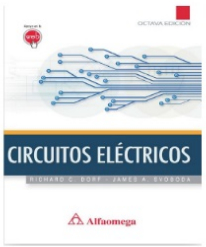
https://yolibrospdf.com/electricidad.html





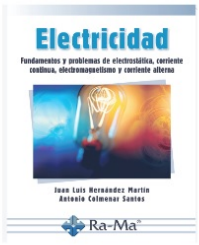


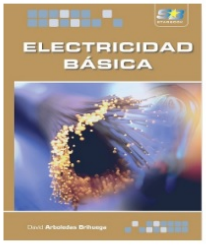


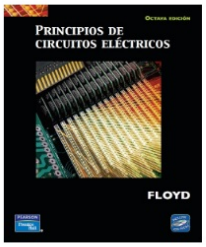


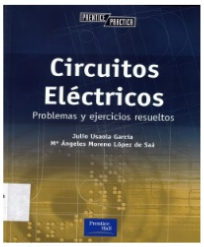
https://yolibrospdf.com/electricidad.html

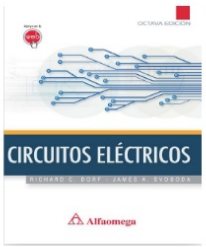
https://yolibrospdf.com/electricidad.html











https://yolibrospdf.com/electricidad.html

- Suministra una potencia mecánica P_M:

$$P_M = T_R \cdot \omega = T \cdot \omega = M \cdot B \cdot \omega \cdot \operatorname{sen} \alpha \qquad [6.114]$$

Que coincide con la potencia eléctrica P, *fórmula [6.113]*, tomada por dicha espira. Es decir se ha producido una transformación de energía eléctrica en energía mecánica:

$$P = P_M = M \cdot B \cdot \omega \cdot \operatorname{sen} \omega \cdot t \qquad [6.115]$$

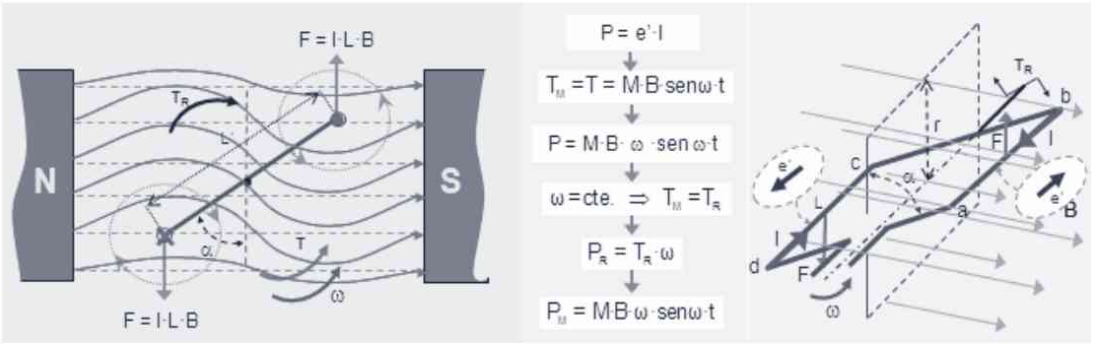


Figura 6.50. Motor elemental: fcem e', par motor $T_M = T$ y par resistente T_R

6.28 ECUACIONES DE MAXWELL

El conjunto de ecuaciones que se resumen a continuación, estudiadas en este y en anteriores capítulos, constituyen las fórmulas básicas del electromagnetismo y son la base a partir de la cual Maxwell sentó sus bases y predijo la existencia de las ondas electromagnéticas.

1. Ley de Gauss de los campos eléctricos, *fórmula [1.23]:*

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \qquad [6.116]$$

2. Ley de Gauss de los campos magnéticos, *fórmula [5.7]:*

$$\Sigma \Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = 0 \qquad [6.117]$$

En el espacio vacío, donde no hay cargas eléctricas, $q = 0$, nótese la similitud de las dos fórmulas anteriores.

3. Ley de Ampère-Maxwell, *fórmula [6.29]:*

$$\sum_{0}^{c} \bar{B}\cdot\overline{\Delta L} = \mu_0\cdot(I + I_d) = \mu_0\cdot I + \mu_0\cdot\varepsilon\frac{\Delta\Phi_E}{\Delta t} \qquad [6.118]$$

4. Ley de inducción de Faraday, *fórmula [6.2] y [6.21]:*

$$e = \bar{E}\cdot\overline{\Delta L} = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = -\frac{\Delta\bar{B}\cdot\bar{A}}{\Delta t} \qquad [6.119]$$

En el espacio vacío, donde no hay corrientes de conducción, $I = 0$, nótese la similitud de las dos fórmulas anteriores.

Maxwell sentó las bases del Electromagnetismo al elaborar un trabajo de síntesis reuniendo las cuatro leyes enunciadas arriba en forma independiente y, hasta ese momento, aparentemente inconexas entre sí, lo que le llevó, además, a predecir la existencia de las ondas electromagnéticas.

Las ecuaciones de Maxwell se componen de un conjunto de cuatro ecuaciones, que son:

$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad [6.120]$$

$$\oint \bar{B}\cdot d\bar{A} = 0 \qquad [6.121]$$

$$\oint \bar{B}\cdot d\bar{L} = \mu_0\cdot I + \frac{\mu_0\cdot\varepsilon}{dt}\oint \bar{E}\cdot d\bar{A} \qquad [6.122]$$

$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{L} = -\frac{1}{dt}\oint \bar{B}\cdot d\bar{A} \qquad [6.123]$$

6.29 RESUMEN DE CONCEPTOS Y FÓRMULAS DE ESTE CAPÍTULO

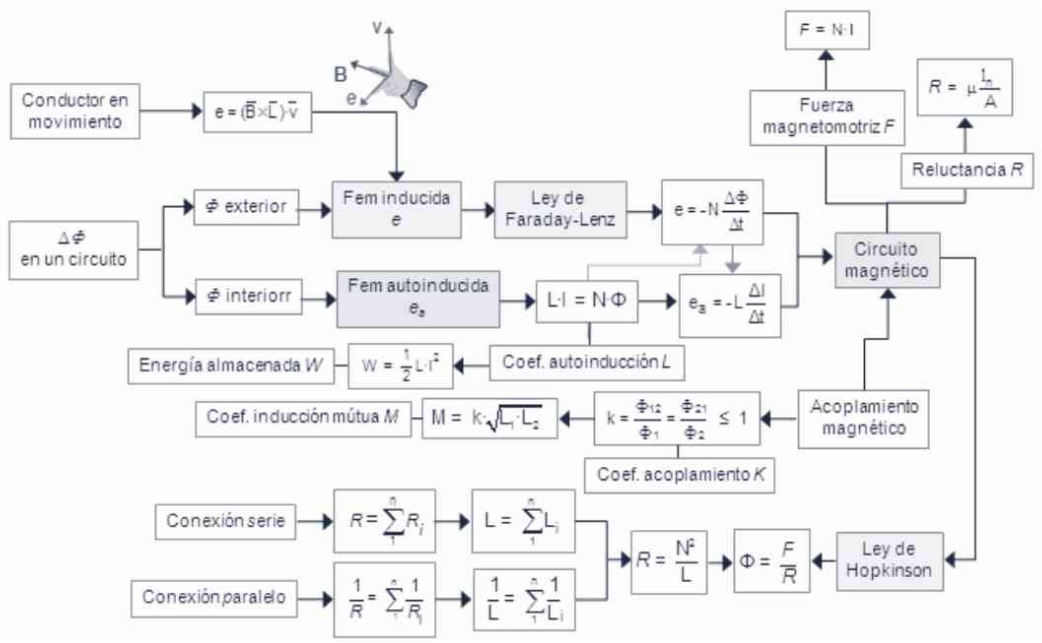


Figura 6.51. Resumen de conceptos de este capítulo

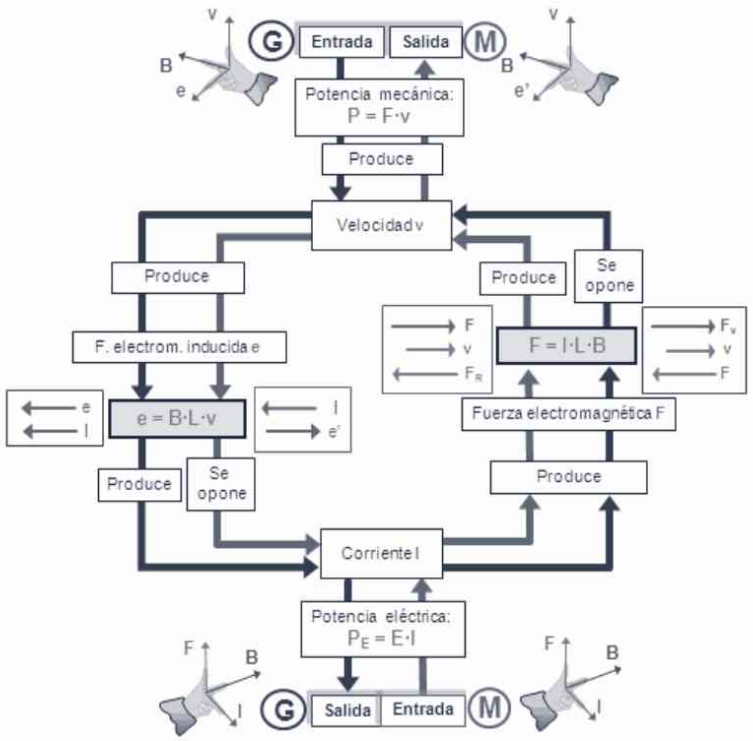


Figura 6.52. Resumen de conceptos de este capítulo

Símbolo	Magnitud	Fórmula
e	Fuerza electromotriz inducida	$e = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$
		$e = (\bar{v} \times \bar{B})\bar{L}$
E_0	Fuerza electromotriz inducida máxima E_0	$E_0 = B \cdot L \cdot v$
P_F	Pérdidas de Foucault	$P_F = \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{e^2 \cdot B_M^2 \cdot f^2}{\rho}$
P_H	Pérdidas por histéresis	$P_H = \eta \cdot f \cdot B_m^n$
P_{Fe}	Pérdidas en el hierro	$P_{Fe} = P_F + P_H$
e_a	Fuerza electromotriz autoinducida	$e_a = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$
L	Coeficiente de autoinducción de un solenoide largo	$L = \frac{\mu \cdot N^2 \cdot S}{L_n}$
W	Energía almacenada en un campo magnético	$W = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} \cdot v$
W	Energía almacenada en una bobina	$W = \frac{1}{2} L \cdot I^2$
M	Coeficiente de inducción mutua	$M = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2}$
k	Coeficiente de acoplamiento	$k = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_1} = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_2} \leq 1$
F	Fuerza magnetomotriz	$F = N \cdot I$
R	Reluctancia	$R = \mu\frac{l_n}{A}$
	Ley de Ampère-Maxwell	$\sum_0^c \bar{B} \cdot \overline{\Delta L} = \mu_0 \cdot (I + I_d) = \mu_0 \cdot I + \mu_0 \cdot \varepsilon \frac{\Delta \Phi_E}{\Delta t}$
	Proporcionalidad de L y Φ	$N \cdot \Phi = L \cdot I$
	Inductancias en serie	$L = \sum_1^n L_i$

	Inductancias en paralelo	$\frac{1}{L} = \sum_{1}^{n} \frac{1}{L_i}$
	Ley de Hopkinson	$\Phi = \frac{F}{R}$
	Reluctancias en serie	$R = \sum_{1}^{n} R_i$
	Reluctancias en paralelo	$\frac{1}{R} = \sum_{1}^{n} \frac{1}{R_i}$
	Relación de R, L y N	$L = \frac{N^2}{R}$
	Coeficiente de Hopkinson	$\nu = \frac{\Phi}{\Phi_u} = \frac{\Phi_u + \Phi_f}{\Phi_u} > 1$

Tabla 6.2. Resumen de fórmulas de este capítulo

Electroestática	**Electrocinética**	**Electromagnetismo**
ddp: V	fem: e	fmm: $F = N \cdot I$
Campo eléctrico: $\boldsymbol{E}$	Campo eléctrico: $\boldsymbol{E}$	Intensidad de campo magnético: $\boldsymbol{H}$
Desplazamiento: **D**	Densidad de corriente: **J**	Inducción magnética: **B**
Resistencia dieléctrica: $R_d = \frac{L}{\varepsilon \cdot S}$	Resistencia: $R = \frac{L}{\gamma \cdot S}$	Reluctancia: $R = \frac{L}{\mu \cdot S}$
Flujo eléctrico: $\Phi_E = \frac{V}{R_d}$ $\Phi_E = C \cdot V$	Intensidad: $I = \frac{E}{R}$ $I = G \cdot e$	Flujo magnético: $\Phi_B = \frac{F}{R}$ $\Phi_B = L \cdot I$
Inducción eléctrica: $\mathbf{D} = \varepsilon \cdot \mathbf{E}$	Densidad de corriente: $\mathbf{J} = \gamma \cdot \mathbf{E}$	Inducción magnética: $\mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{H}$

Tabla 6.3. Resumen comparativo entre electrostática, electrocinética y electromagnetismo

6.30 EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Ejercicio 6.30.1

Un conductor de 80 cm de longitud se mueve con una velocidad uniforme de 1,5 m/s en el interior de un campo magnético uniforme de inducción 1,2 T. Calcular la magnitud de la fem inducida si el conductor se mueve:

a) Perpendicular a las líneas de inducción magnéticas.

b) La dirección del movimiento forma un ángulo de 70º respecto de las líneas de inducción.

c) La dirección del movimiento es paralela a las líneas de inducción.

d) Perpendicular a las líneas de inducción magnéticas, pero la dirección de la velocidad y la dirección del conductor forman un ángulo de 30º.

Solución:

Ver la *figura 6.53*.

a) Aplicando la *fórmula [6.10]*:

$$e = B \cdot L \cdot v = 0{,}8 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}5 = 1{,}44 \text{ V}$$

b) Aplicando la *fórmula [6.12]*:

$$e = B \cdot L \cdot v \cdot \operatorname{sen}\alpha = 0{,}8 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}5 \cdot \operatorname{sen} 70^\circ = 1{,}35 \text{ V}$$

c) Aplicando la *fórmula [6.12]*:

$$e = B \cdot L \cdot v \cdot \operatorname{sen}\alpha = 0{,}8 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}5 \cdot \operatorname{sen} 0^\circ = 0 \text{ V}$$

d) Se ha de tener en cuenta la componente del conductor que "corta" las líneas de inducción ***B***, que, con la dirección del conductor, forma un ángulo, $\alpha = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Aplicando la *fórmula [6.11]*:

$$e = B \cdot L \cdot v \cdot \cos\alpha = 0{,}8 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}5 \cdot \cos 60^\circ = 0.72 \text{ V}$$

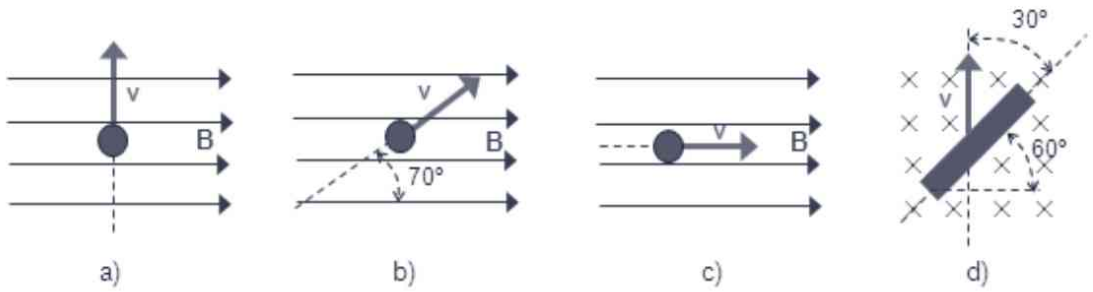


Figura 6.53. Solución del ejercicio 6.30.1

Ejercicio 6.30.2

Un conductor rectilíneo de 40 cm está montado en la periferia del inducido de una máquina de CC del que forma parte. El inducido gira a una velocidad de n = 1.500 rpm y el radio de giro del conductor es, r = 20 cm. La inducción magnética debida al inductor es B = 1,1 T y, debido al material magnético del inducido, las líneas de inducción son perpendiculares, en todo momento, a la dirección del desplazamiento del conductor, *figura 6.53*. Calcular la fem inducida en el conductor.

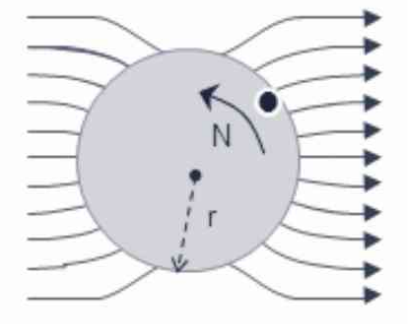


Figura 6.54. Ejercicio 6.30.2

Solución:

Velocidad lineal del conductor:

$$v = \omega \cdot r = \frac{2 \cdot \pi \cdot N}{60} r = \frac{2 \cdot \pi \cdot 1500}{60} 0{,}2 = 31{,}4 \text{ m/s}$$

Aplicando la *fórmula [6.10]*:

$$e = B \cdot L \cdot v = 1{,}1 \cdot 40 \cdot 10^{-2} \cdot 31{,}4 = 13{,}8 \text{ V}$$

Ejercicio 6.30.3

Por una bobina de 150 espiras circula una corriente que produce un flujo de 0,5 mWb. Si la corriente cambia de sentido en un tiempo de 0,1 s, adquiriendo el mismo valor anterior, ¿cuál es el valor de la fem inducida en la bobina?

Solución:

Previo al cambio del sentido de la corriente, el flujo tiene un valor de Φ_1 = 0,5 mWb, en un sentido. Al cambiar el sentido de la corriente, el flujo también cambia, adquiriendo un sentido contrario al anterior, es decir, Φ_2 = -0,5 mWb. Aplicando la *fórmula [6.4]:*

$$e = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -N\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta t} = -150\frac{(-0,5-0,5)\cdot 10^{-3}}{0,1} = 1,5\ V$$

Puesto que esta fem se debe a la variación del propio flujo del circuito se trata de una fem de autoinducción.

Ejercicio 6.30.4

Una espira circular de 20 cm de diámetro gira en un campo magnético uniforme de 1,5 T de intensidad a razón de 1.200 vueltas por minuto. Determinar:

a) El flujo magnético que atraviesa la espira cuando su plano es perpendicular al campo.

b) El flujo magnético que atraviesa la espira cuando su plano forma un ángulo de 60° con la dirección del campo magnético.

c) El valor de la fem media inducida en la espira cuando pasa de la primera a la segunda posición.

Solución:

a) Teniendo en cuenta que el área del círculo $A = \pi \cdot r^2$, se aplica la *fórmula [5.1],* para líneas de inducción y superficie inducida perpendiculares:

$$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (0,2/2)^2 = 0,031\ m^2$$

$$\Phi = B \cdot A = 1,5 \cdot 0,031 = 0,0465\ Wb$$

b) Aplicando la *fórmula [5.3]*, teniendo en cuenta que en dicha fórmula el ángulo α es el que forma el plano de la espira, 30º, con el plano perpendicular a las líneas de inducción, 90º:

$$\alpha = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\Phi = B \cdot A \cdot \cos\alpha = 1{,}5 \cdot 0{,}031 \cdot \cos 30^\circ = 0{,}0402 \text{ Wb}$$

c) Se determina el tiempo que tarda en pasar la espira de la posición *a* a la posición *b*. A continuación se aplica la *fórmula [6.1]:*

Velocidad angular de la espira: $\omega = \dfrac{2\cdot\pi\cdot N}{60} = \dfrac{2\cdot\pi\cdot 1200}{60} = 40\cdot\pi$ rad/s

Pasar grados sexagesimales a radianes: $30^\circ = \dfrac{30\cdot 2\cdot\pi}{360} = \dfrac{\pi}{6}$ rad

Tiempo entre posiciones *a* y *b*:

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\alpha}{\omega} = \frac{\frac{\pi}{6}}{40\cdot\pi} = \frac{1}{240} = 4{,}16\cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$e = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -1\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta t} = -1\frac{(0{,}0402 - 0{,}0465)}{4{,}16\cdot 10^{-3}} = 1{,}5 \text{ V}$$

La fem inducida *e* obtenida es de signo positivo. En efecto, al pasar la espira a una posición donde le penetra menor flujo, conforme a la ley de Lenz, se origina una fem inducida que tiende a que no se produzca esa disminución, creando una fem *e* que propicie una corriente que produzca un flujo del mismo sentido que el existente.

Ejercicio 6.30.5

El interior de una bobina de 400 espiras es atravesada por un flujo de 15 mWb cuando por ella circula una corriente de 20 A. Uniformemente, en un tiempo de 0,1 s, la corriente se reduce a 0 A. Calcular:

a) Coeficiente de autoinducción de la bobina.

b) La fem de autoinducción producida durante la anulación de la corriente.

Solución:

a) Aplicando la *fórmula [6.35]*:

$$N\cdot\Phi = L\cdot I \;\Rightarrow\; L = \frac{N\cdot\Phi}{I} = \frac{400\cdot 15\cdot 10^{-3}}{20} = 0{,}3\,H$$

b) Aplicando la *[6.37]*:

$$e_a = -L\frac{\Delta I}{\Delta t} = -L\frac{I_2 - I_1}{\Delta t} = -0{,}3\frac{0-20}{0{,}1} = 60\,V$$

La fem autoinducida e_a obtenida es de signo positivo. En efecto, de forma similar a lo que ocurre en el ejercicio anterior, al disminuir la corriente en la bobina, y en consecuencia el flujo, conforme a la ley de Lenz, se origina una fem inducida que tiende a que no se produzca esa disminución, creando una fem *e* que propicie una corriente del mismo sentido que la existente.

Ejercicio 6.30.6

Una espira rectangular de dimensiones *a* y *b*, se mueve a una velocidad constante *v* con la dirección y sentido indicado en la *figura 6.53*, entrando y, después, saliendo de un campo magnético uniforme ***B*** de longitud *c*, *figura 6.55*. Hacer un gráfico de:

a) Flujo magnético a través de la espira en función de su posición, $\Phi(x)$.

b) Fuerza electromotriz inducida en espira en función de su posición, $e(x)$.

c) Fuerza que, debido al campo magnético, se ha de aplicar en la espira para mantener el movimiento a *v* constante, $F(x)$.

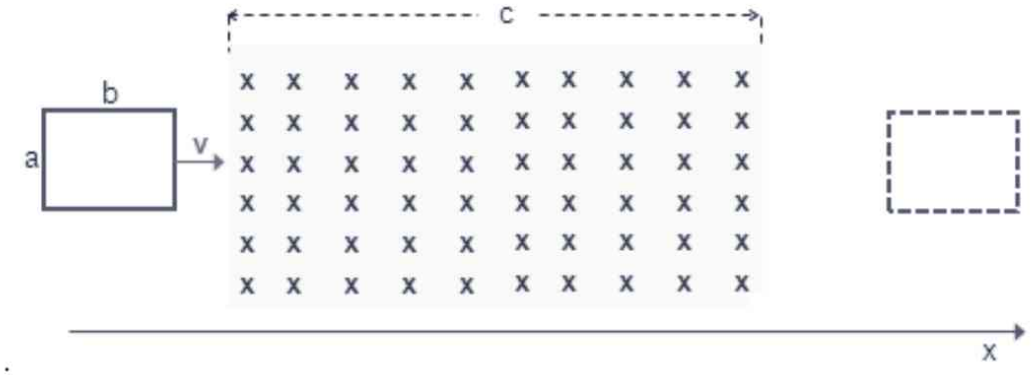


Figura 6.55. Ejercicio 6.30.6

Solución:

En la *figura 6.56* se presentan varias posiciones de la espira en su movimiento a las que se hacen referencia en los párrafos siguientes.

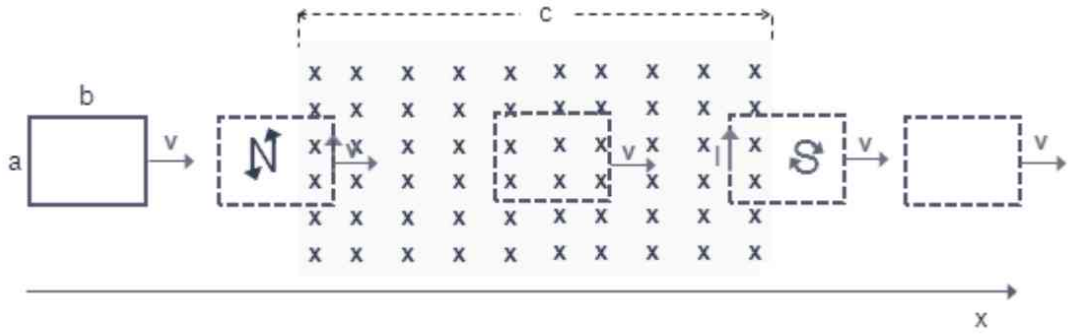


Figura 6.56. Solución del ejercicio 6.30.6

a) Cuando la espira se encuentra en su totalidad fuera del campo magnético $\Phi = 0$.

A medida que la espira entra, o sale, en dicho campo, el flujo varía conforme a la *fórmula [5.1]*:

$$\Delta\Phi = B\cdot\Delta A = B\cdot\Delta a\cdot x = B\cdot a\Delta x$$

Cuando la espira entra en el campo magnético Φ aumenta de $\Phi = 0$ *a* $\Phi = B \cdot a \cdot b$. Una vez se encuentre la espira, en su totalidad, en el interior del campo magnético, el flujo permanece constante, $\Phi = B \cdot a \cdot b$. Cuando sale del campo magnético, Φ disminuye de $\Phi = B \cdot a \cdot b$ a $\Phi = 0$. En la *figura 6.56* se representa $\Phi(x)$.

b) Para hallar la fem inducida *e* se aplica la ley de Faraday-Lenz, *fórmula [6.2]*. Existe fem *e* ($e = -\Delta\Phi/\Delta t$), cuando la espira entra y sale del campo magnético, que es cuando se produce variación de flujo en la espira. Como la velocidad del desplazamiento de la espira es constante, la fem inducida *e* también lo es ($e = -\Delta\Phi/\Delta t = -B \cdot a \cdot \Delta x/\Delta t = B \cdot a \cdot v$ = cte.). En la entrada de la espira en el campo, la fem inducida *e* es de signo negativo, tiende a crear una corriente que se oponga al aumento del flujo que se está produciendo. En la salida de la espira, la fem inducida *e* es de signo positivo, tiende a crear una corriente que se oponga a la disminución del flujo que se está produciendo. En la *figura 6.57* se representa *e(x)*.

Nótese que los dos lados de longitud *a* de la espira, siguen "cortando" las líneas de inducción magnética cuando la espira está totalmente introducida en el campo magnético, consecuentemente, en cada uno de ellos se sigue generando

una fem e ($e = B \cdot a \cdot v$). Sin embargo, al estar la espira cerrada, dichas fem están en oposición y, por tanto, la fem resultante es 0.

c) La fem inducida e que se genera, al entrar y salir la espira del campo magnético, produce una corriente I en la misma ($I = e/R$, siendo R la resistencia de la espira). Como consecuencia, sobre el conductor de longitud a que penetra en el campo actúa, *fórmula [5.48]*, una fuerza electromagnética $\boldsymbol{F_a}$ constante ($F_a = I \cdot a \cdot B = e \cdot a \cdot B/R$ = cte.), que se opone al sentido del movimiento, en la entrada y en la salida de la espira del campo magnético. Si se quiere mantener la velocidad constante, sobre la espira ha de actuar una fuerza $\boldsymbol{F}$ del mismo módulo, $F = F_a$, pero de sentido contrario a la fuerza electromagnética, es decir, $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F_a}$, por tanto, con el mismo sentido que el del movimiento de la espira. En la *figura 6.57* se representa *F(x)*.

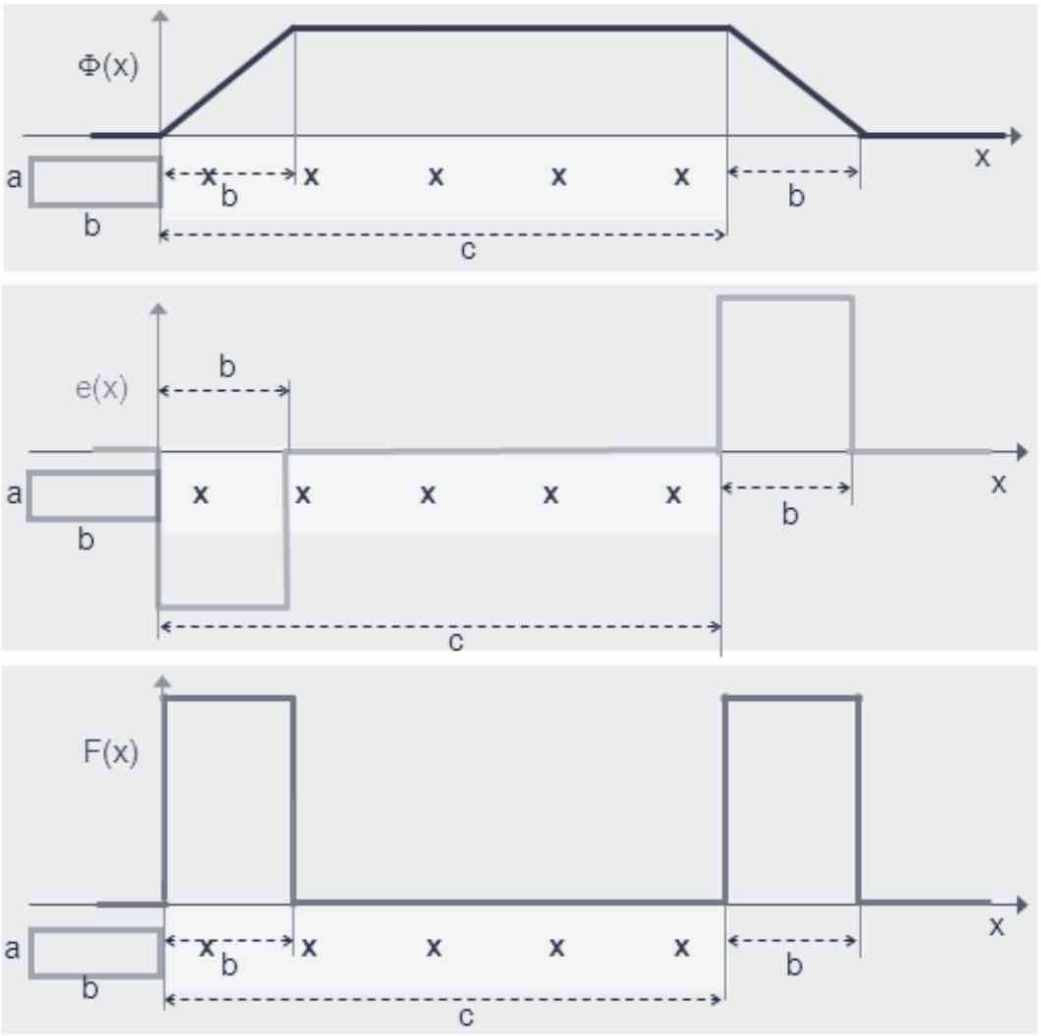


Figura 6.57. Solución del ejercicio 6.30.6

Ejercicio 6.30.7

Un solenoide de 300 vueltas y diámetro 5 cm se coloca coaxialmente en el centro de un solenoide de 40 cm de longitud y 1.200 vueltas por el que circula una corriente de 4 A, *figura 6.58*. Calcular el coeficiente de inductancia mutua *M* entre los dos solenoides.

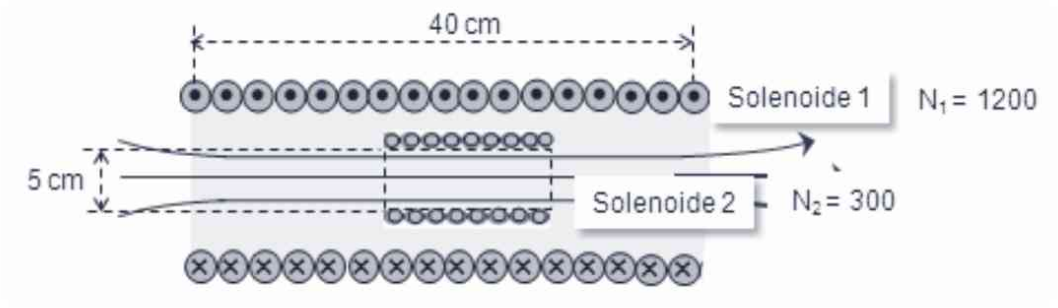


Figura 6.58. Ejercicio 6.30.7

Solución:

Inducción magnética en el área central de los solenoides:

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1 \cdot I_1}{l_1} = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{1200 \cdot 4}{0,4} = 15 \cdot 10^{-3}\ T$$

Flujo debido al solenoide 1 que enlaza con el solenoide 2:

$$\Phi_{12} = B_1 \cdot A_2 = 15 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \left(\frac{5 \cdot 10^{-2}}{2} \right)^2 = 117,8 \cdot 10^{-5}\ Wb$$

A partir de las *fórmulas [6.52] y [6.57],* se tiene para el coeficiente de inducción mutua *M* de los dos solenoides:

$$N_2 \cdot \Phi_{12} = M \cdot I_1$$

$$M = \frac{N_2 \cdot \Phi_{12}}{I_1} = \frac{300 \cdot 117,8 \cdot 10^{-5}}{4} = 88,3 \cdot 10^{-3}\ H = 88,3 \cdot mH$$

Ejercicio 6.30.8

Mediante un núcleo magnético toroidal se acoplan magnéticamente dos bobinas *A* y *B*, con $N_A = 500$ espiras y $N_B = 1.200$ espiras, respectivamente. Cuando por la bobina *A*

circula una corriente de 8 *A*, el flujo debido a la bobina *A* que no enlaza con la bobina *B* es, $\Phi_{AA} = 2 \cdot 10^{-4}$ *Wb,* y el flujo de la bobina *A* que enlaza con la *B* es $\Phi_{AB} = 4 \cdot 10^{-4}$ Wb. Se pide, el coeficiente de autoinducción *L* de cada bobina, el coeficiente de acoplamiento *K* y el coeficiente de inducción mutua *M.*

Solución:

Flujo total Φ_A, *figura 6.59*, debido a la bobina *A:*

$$\Phi_A = \Phi_{AA} + \Phi_{AB} = (2+4)\cdot 10^{-4} = 6\cdot 10^{-4}\ \text{Wb}$$

Coeficiente de autoinducción L_A de la bobina *A*, *fórmula [6.35]:*

$$N_A\cdot\Phi_A = L_A\cdot I_A \quad\Rightarrow\quad L_A = \frac{N_A\cdot\Phi_A}{I_A} = \frac{500\cdot 6\cdot 10^{-4}}{8} = 375\cdot 10^{-4}\ \text{H} = 37{,}5\cdot\text{mH}$$

Coeficiente de inducción mutua *M*:

$$N_B\cdot\Phi_{AB} = M\cdot I_A \quad\Rightarrow\quad M = \frac{N_B\cdot\Phi_{AB}}{I_A} = \frac{1200\cdot 4\cdot 10^{-4}}{8} = 600\cdot 10^{-4}\ \text{H} = 60\cdot\text{mH}$$

Coeficiente de acoplamiento *K, fórmula [6.76]:*

$$K = \frac{\Phi_{AB}}{\Phi_{AA}} = \frac{4\cdot 10^{-4}}{6\cdot 10^{-4}} = 0{,}666$$

Coeficiente de autoinducción L_B de la bobina *B,* a partir de la *fórmula [6.77]:*

$$M = k\sqrt{L_A L_B} \quad\Rightarrow\quad L_B = \frac{M^2}{K^2\cdot L_A} = \frac{(600\cdot 10^{-4})^2}{0{,}66^2\cdot 375\cdot 10^{-4}} = 0{,}22\ \text{H} = 220\ \text{mH}$$

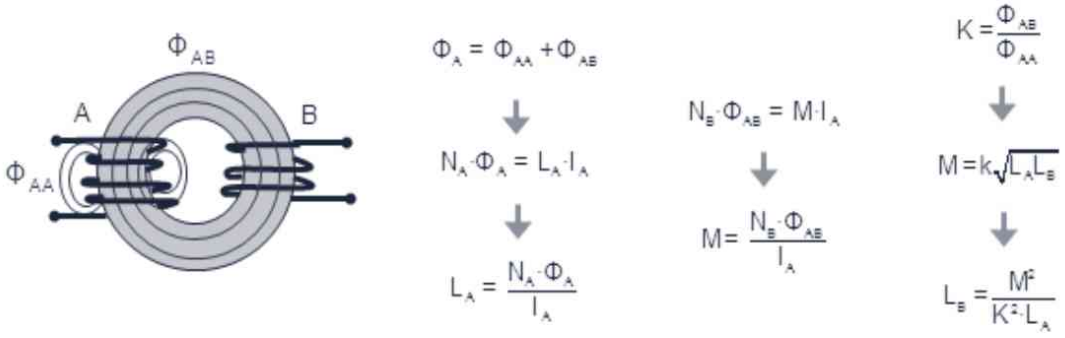


Figura 6.59. Solución del ejercicio 6.30.8

Ejercicio 6.30.9

Dos bobinas están conectadas en serie con un coeficiente de acoplamiento, $k = 0{,}5$. Si el acoplamiento se hace aditivo, el coeficiente de autoinducción equivalente es, $L_A = 1{,}5$ H. Si el acoplamiento se hace sustractivo, el coeficiente de autoinducción equivalente es, $L_B = 0{,}8$ H. Se pide:

a) El coeficiente de inducción mutua M y el coeficiente de autoinducción L de cada bobina.

b) Si por el circuito circula una corriente de 5 A, calcular la energía del campo magnético en cada uno de los dos acoplamientos.

Solución:

a) Las conexiones de las bobinas son las correspondientes a la *figura 6.34*. Aplicando las *fórmulas [6.79] y [6.80], s*egún el tipo de conexión:

Acoplamiento aditivo: $L_A = L_1 + L_2 + 2\cdot M \Rightarrow 1{,}5 = L_1 + L_2 + 2\cdot M$

Acoplamiento sustractivo: $L_S = L_1 + L_2 - 2\cdot M \Rightarrow 0{,}8 = L_1 + L_2 - 2\cdot M$

Restando las ecuaciones anteriores: $1{,}5 - 0{,}8 = 4\cdot M \Rightarrow M = 0{,}175\,\text{H}$

La *fórmula [6.77]* relaciona los diferentes coeficientes:

$$M = k\cdot\sqrt{L_1\cdot L_2} \Rightarrow M = 0{,}5\cdot\sqrt{L_1\cdot L_2} \Rightarrow 0{,}175^2 = 0{,}5^2\cdot L_1\cdot L_2 \Rightarrow L_2 = \frac{0{,}1225}{L_1}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$1{,}5 = L_1 + \frac{0{,}1225}{L_1} + 2\cdot 0{,}175 \Rightarrow L_1^2 - 1{,}15\cdot L_1 + 0{,}1225 = 0$$

Resolviendo la ecuación se obtienen dos resultados posibles: $L_1 = 1$ H y $L_1 = 0{,}1225$ H, a los que les corresponden, respectivamente, $L_2 = 0{,}1225$ H y $L_2 = 1$ H.

b) La energía del campo magnético se obtiene mediante la *fórmula [6.42]*, en este caso L representa el coeficiente de autoinducción equivalente en cada acoplamiento, L_A y L_S.

Acoplamiento aditivo: $W_A = \frac{1}{2} L_A \cdot I^2 = \frac{1}{2} 1{,}5 \cdot 5^2 = 18{,}75\ \text{J}$

Acoplamiento sustractivo: $W_S = \frac{1}{2} L_s \cdot I^2 = \frac{1}{2} 0{,}8 \cdot 5^2 = 10\ \text{J}$

Ejercicio 6.30.10

Se tiene un anillo toroidal, como el de la *figura 6.39*, de diámetro medio 10 cm, con el núcleo de acero de 1 cm de diámetro y permeabilidad, $\mu_r = 850$, un entrehierro de 2 mm de ancho y una bobina de 500 vueltas por la que circula una corriente de 3 A. Determinar:

a) La fmm *F*.

b) La reluctancia *R*.

c) El flujo magnético Φ.

d) La inducción magnética *B*.

e) Si en estas circunstancias se estima un coeficiente de Hopkinson $\nu = 1{,}2$, determinar la fmm necesaria para producir el mismo flujo útil en el entrehierro, considerando que μ_r permanece constante.

Solución:

a) La fmm *F* se determina por la *fórmula [6.87]:*

$$F = N \cdot I = 500 \cdot 3 = 1500\ \text{A}$$

b) La reluctancia *R, fórmula [6.88]*, corresponde a dos reluctancias en serie, *fórmula [6.100],* la del núcleo de acero R_{Fe} y la del entrehierro R_0.

Sección transversal del toroide: $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{0{,}01}{2}\right)^2 = 7{,}85 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^2$

Longitud media del núcleo de acero: $l_{Fe} = \pi \cdot d_T - l_0 = \pi \cdot 0{,}1 - 0{,}002 = 0{,}312\ \text{m}$

$$R = R_{Fe} + R_0 = \frac{l_{Fe}}{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot A} + \frac{l_0}{\mu_0 \cdot A} = \frac{0{,}312}{850 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 7{,}85 \cdot 10^{-5}} + \frac{0{,}002}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 7{,}85 \cdot 10^{-5}}$$

$$R = R_{Fe} + R_0 = 3720970 + 20274515 = 23995485\ \text{H}^{-1}$$

c) El flujo magnético Φ, *fórmula [6.96]:*

$$\Phi = \frac{F}{R} = \frac{1500}{23995485} = 6{,}25\,10^{-5}\ \text{Wb}$$

d) La inducción magnética *B, fórmula [5.1]:*

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{6{,}25\cdot 10^{-5}}{7{,}85\cdot 10^{-5}} = 0{,}8\ \text{Wb/m}^2 = 0{,}8\ \text{T}$$

e) La fmm con dispersión de flujo, a partir de la *fórmula [6.105]:*

$$\nu = \frac{\Phi}{\Phi_u} = \frac{\Phi_u + \Phi_l}{\Phi_u} = 1{,}2 \ \Rightarrow\ \Phi = \nu \cdot \Phi_u = 1{,}2\cdot 6{,}25\cdot 10^{-5} = 7{,}5\cdot 10^{-5}\,\text{Wb}$$

$$F = \Phi \cdot R = 7{,}5\,10^{-5}\cdot 23995485 = 1780\ \text{A}$$

Ejercicio 6.30.11

El circuito magnético de la *figura 6.60*, todas las distancias en cm, tiene en la columna central la bobina de excitación formada por 1.400 espiras. Se desea que la densidad de flujo en los entrehierros sea de 1 Wb/m^2, estimándose un coeficiente de Hopkinson ν = 1,2. Para ello, determinar la corriente de excitación necesaria, asumiendo que la permeabilidad relativa de acero permanece constante e igual a μ_r = 700.

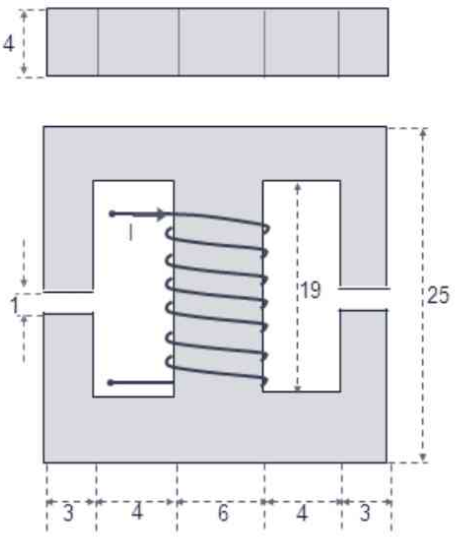


Figura 6.60. Ejercicio 6.30.11

Solución:

Área de los entrehierros: $A_0 = 3 \cdot 4 = 12\ cm^2 = 12 \cdot 10^{-4}\ m^2$

Flujo útil en los entrehierros, *fórmula [5.1]*:

$$\Phi_u = B \cdot A_0 = 1 \cdot 12 \cdot 10^{-4} = 12 \cdot 10^{-4}\ Wb$$

Flujo Φ_{LC} por cada columna lateral, los lados son iguales, $\Phi_{LC} = \Phi_1 = \Phi_2$, *fórmula [6.105]*:

$$\nu = \frac{\Phi_{LC}}{\Phi_u} = 1,2 \quad \Rightarrow \quad \Phi_{LC} = \nu \cdot \Phi_u = 1,2 \cdot 12 \cdot 10^{-4} = 14,4 \cdot 10^{-4}\ Wb$$

Flujo Φ en el núcleo central, *Figura 6.41*:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 2 \cdot \Phi_{LC} = 2 \cdot 14,4 \cdot 10^{-4} = 28,8 \cdot 10^{-4}\ Wb$$

Reluctancia central R_C, *fórmula [6.88]*:

Área central: $A_C = 6 \cdot 4 = 24\ cm^2 = 24 \cdot 10^{-4}\ m^2$

Longitud central:

$$l_C = 19 + \frac{1}{2} \cdot \frac{25 - 19}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{25 - 19}{2} = 19 + 1,5 + 1,5 = 22\ cm = 22 \cdot 10^{-2}\ m$$

$$R_C = \frac{l_C}{\mu \cdot A_C} = \frac{22 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 700 \cdot 24 \cdot 10^{-4}} = 104.208\ H^{-1}$$

Reluctancia lateral, sin entrehierro, $R_{LC} = R_1 = R_2$:

Área lateral: $A_{LC} = 3 \cdot 4 = 12\ cm^2 = 12 \cdot 10^{-4}\ m^2$

Longitud columna lateral: $l_{CL} = 2 \cdot (3 + 4 + 1,5 + 1,5 + 9) = 38\ cm = 38 \cdot 10^{-2}\ m$

$$R_{LC} = \frac{l_{LC}}{\mu \cdot A_{LC}} = \frac{38 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 700 \cdot 12 \cdot 10^{-4}} = 359.993\ H^{-1}$$

Reluctancia del entrehierro R_0:

$$R_0 = \frac{l_0}{\mu_0 \cdot A_0} = \frac{1 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 12 \cdot 10^{-4}} = 6.631.456\ H^{-1}$$

Reluctancia del lado izquierdo: $R_1 = R_{LC} + R_0 = 359.993 + 104.208 = 464201\ H^{-1}$

Reluctancia del lado derecho: $R_2 = R_{LC} + R_0 = 359.993 + 1042.08 = 464201\ H^{-1}$

Las reluctancias R_1 y R_2 están en paralelo, y el conjunto en serie con R_C:

$$R = R_C + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 104.208 + \frac{464.201 \cdot 464.201}{464.201 + 464.201} = 336.308\ H^{-1}$$

La fuerza magnetomotriz F a partir de la *fórmula [6.96]:*

$$F = \Phi \cdot R = 28,8 \cdot 10^{-4} \cdot 336308 = 969\ Av$$

A partir de la *fórmula [6.87] se* determina por la corriente de excitación:

$$F = N \cdot I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{F}{N} = \frac{969}{1.400} = 0,5\ A$$

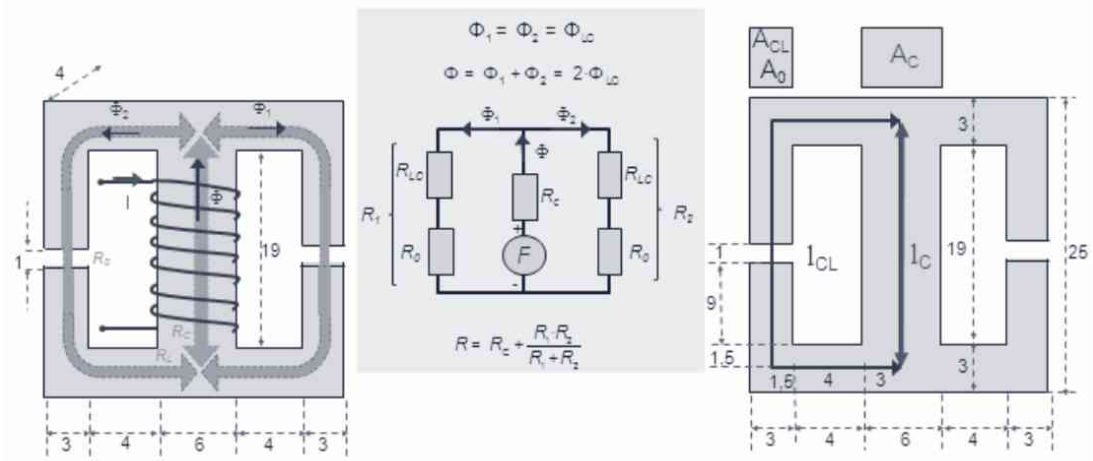


Figura 6.61. Solución del ejercicio 6.30.11

Ejercicio 6.30.12

El circuito magnético de la *figura 6.62* está formado por un núcleo toroidal férrico, de longitud media 60 cm y sección recta de 8 cm^2, un entrehierro de longitud 2 mm, y una

bobina de excitación de 400 vueltas. Determinar la corriente de excitación para producir un flujo en el entrehierro de 1 mWb.

En la Tabla 6.4 se tiene la inducción *B* correspondiente para diferentes intensidades de campo *H* correspondientes a la curva de magnetización de material férrico del núcleo.

***B* (T)**	0,9	1,25	1,35	1,45	1,55
***H* (A/m)**	250	500	1000	2000	4000

Tabla 6.4. Ejercicio 6.30.12

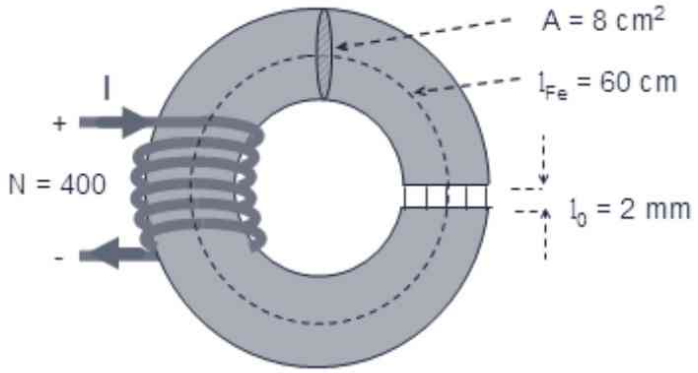


Figura 6.62. Ejercicio 6.30.12

Solución:

Inducción magnética *B* necesaria en el núcleo férrico, *fórmula [5.1]:*

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^{-4}} = 1{,}25\ \text{T}$$

Fuerza magnetomotriz *F* necesaria, que debe generar la bobina, *fórmula [6.93]:*

$$H_{Fe} \cdot l_{Fe} + H_0 \cdot l_0 = N \cdot I \quad \Rightarrow \quad F_{Fe} + F_0 = N \cdot I$$

Para la F_{Fe} se elige en la tabla la *H* correspondiente a la inducción *B* = 1,25 T:

$$B = 1{,}25 \ \Rightarrow \ H = 500\ \text{A/m}$$

$$F_{Fe} = H_{Fe} \cdot l_{Fe} = 500 \cdot 60 \cdot 10^{-2} = 300\ \text{A} \cdot \text{v}$$

Para la F_0, como el flujo en el entrehierro es el mismo que en el hierro, y no se considera dispersión del mismo en el entrehierro, la inducción es igual en ambos, por la *fórmula [5.64]*:

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{1,25}{4\cdot\pi\cdot 10^{-7}} = 994.719 \text{ A/m}$$

$$F_0 = H_0 \cdot l_0 = 994719 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 1.989 \text{ A}\cdot\text{v}$$

Fuerza magnetomotriz necesaria total:

$$F = F_{Fe} + F_0 = 300 + 1989 = 2289 \text{ A}\cdot\text{v}$$

Corriente de excitación:

$$F = F_{Fe} + F_0 = N\cdot I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{F}{N} = \frac{2289}{400} = 5,75 \text{ A}$$

Capítulo 7

CORRIENTE ALTERNA MONOFÁSICA

Objetivos:

- Identificar las características de una señal sinusoidal.
- Reconocer los valores característicos de la CA.
- Describir y relacionar las magnitudes y unidades fundamentales de los circuitos de CA.
- Describir el comportamiento de los elementos pasivos en CA.
- Conocer las formas de conexión de los aparatos de medida de uso más frecuente en CA.
- Conocer las principales leyes, teoremas y principios que permiten resolver circuitos de CA.
- Describir la CA con características no sinusoidales.
- Conocer las magnitudes fundamentales de la CA con características no sinusoidales.
- Exponer situaciones observables que ayuden a entender los contenidos del capítulo.
- Resolver ejercicios y problemas con contenidos propios de este capítulo.

7.1 GENERACIÓN DE UNA FEM SINUSOIDAL

En el *apartado 6.26* se ha visto cómo en una espira rectangular, de largo L y ancho $2 \cdot r$, girando a una velocidad angular ω en el interior de un campo magnético de inducción uniforme $\boldsymbol{B}$ se produce una fem sinusoidal e de valor:

$$e = E_0 \cdot \operatorname{sen} \omega \cdot t = E_0 \cdot \operatorname{sen} \alpha \qquad [7.1]$$

Donde la fem E_0 es constante ($E_0 = 2 \cdot B \cdot L \cdot \omega \cdot r$) y representa la fem máxima que se produce en la espira, *figura 7.1,* correspondiente al ángulo $\alpha = 90^\circ = \pi/2$ rad, justo donde los conductores activos de la espira cortan perpendicularmente a las líneas de inducción magnética.

El flujo Φ que atraviesa la espira de área A es, *[fórmula 5.3]*:

$$\Phi = B \cdot A \cdot \cos \alpha = \Phi_0 \cdot \cos \alpha = \Phi_0 \cdot \operatorname{sen}(\alpha + 90^\circ) = \Phi_0 \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \pi/2) \qquad [7.2]$$

Siendo, $A = 2 \cdot r \cdot L$, y el flujo máximo Φ_0 el flujo correspondiente al ángulo, $\alpha = 0^\circ = 0$ rad, es decir, $\Phi_0 = B \cdot A$.

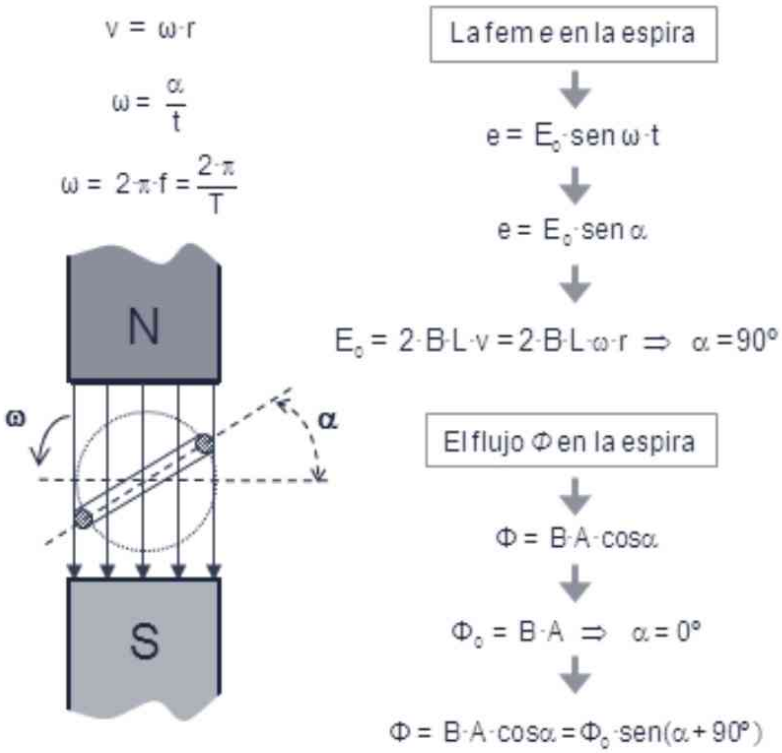


Figura 7.1. La fem e y el flujo Φ en una espira en el interior de un campo magnético B

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

De las fórmulas *[7.1] y [7.2]* se deduce que la fem *e* y el flujo Φ presentan sus valores máximos con una diferencia angular de 90º, *figura 7.2.* Se dice que el flujo Φ está adelantado 90º respecto a la fem *e*, o lo que es lo mismo, que la fem *e* está atrasada 90º respecto del flujo Φ que la produce.

La representación gráfica de las ecuaciones *[7.1] y [7.2]* se tiene en la *figura 7.2.*

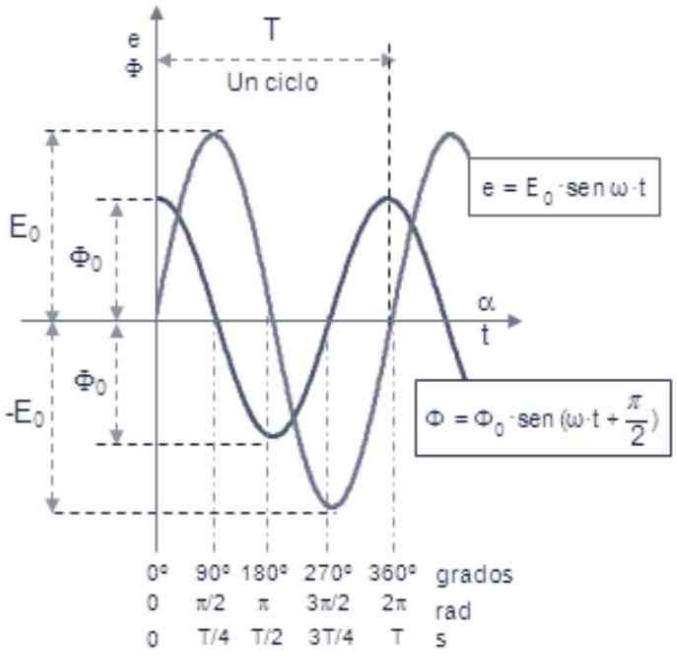


Figura 7.2. Desfase entre la fem e y el flujo Φ en la espira de la figura 7.1

7.2 MAGNITUDES Y VALORES FUNDAMENTALES DE UNA SEÑAL SINUSOIDAL

Los valores característicos de las magnitudes sinusoidales (fem, flujo, tensión, intensidad, etc.) son:

- **Ciclo:** intervalo en que la onda vuelve a tomar el mismo valor y comienza otro trazado repetitivo del primero.
- **Periodo *T*:** tiempo (s) de duración de un ciclo.
- **Frecuencia *f*:** número de ciclos que se produce en una unidad de tiempo (ciclos/segundo = Hertz = Hz). La frecuencia *f* es la inversa del periodo *T*. Si en producirse 1 ciclo se tarda *T* segundos, en 1 segundo se producirán *f* ciclos, es decir:

$$f = \frac{1}{T} \qquad [7.3]$$

- **Pulsación ω:** número de radianes por segundo (rad/s). Como, $\omega = \alpha/t$, se tiene que la espira gira un ángulo de $2 \cdot \pi$ rad (360º) en un tiempo T (T = tiempo en producirse un ciclo y $T = 1/f$), entonces, $\omega = \alpha/t = 2 \cdot \pi/T = 2 \cdot \pi \cdot f$.

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot f \qquad [7.4]$$

- **Fase:** ángulo con respecto a un punto de referencia. Expresa también tiempos en función de la frecuencia angular. Por ejemplo, para medir el desplazamiento entre dos señales o entre dos eventos de una misma señal.

  Por ejemplo, en la espira de la *figura 7.2* se observa que para, $t = 0$, la fem es nula, $e = 0$, y el flujo Φ es máximo. El valor máximo de la fem e se produce pasado $T/4$, o lo que es lo mismo, un ángulo de 360º/4 = 90 º, es decir, que existe un **desfase** de 90º ($\pi/2$ rad) entre la fem e y el flujo Φ.

- **Valor instantáneo:** valor que toma la señal en un instante determinado, es función del tiempo. Por ejemplo, para la espira de la *figura 7.1*, la fem y el flujo, sus valores instantáneos se obtienen por las *fórmulas 7.1 y 7.2* respectivamente. Los valores instantáneos de las diferentes magnitudes se expresan con las letras correspondientes en minúsculas (*e, v, i, p*).

- **Valor máximo o de pico:** es el mayor valor que adquiere la señal durante un ciclo. En el ejemplo del párrafo anterior, los valores máximos para la fem y el flujo son E_0 y Φ_0, respectivamente. Los valores máximos de las diferentes magnitudes se expresan con la letras correspondientes en mayúsculas con subíndice 0 (E_0, V_0, I_0).

- **Valor medio:** en un intervalo considerado es la media aritmética de los valores instantáneos de la señal en dicho intervalo. El valor medio de un ciclo completo para cualquier magnitud sinusoidal es 0, puesto que los valores correspondientes del semiciclo positivo y del semiciclo negativo son iguales pero de signo opuesto.

Para un **semiciclo**, el valor medio de forma gráfica, por ejemplo para la intensidad, *figura 7.3*, se obtendría dividiendo la señal en un gran número de intervalos iguales *n,* obteniéndose el valor medio por la fórmula:

$$I_{med} = \frac{I_1 + I_2 + \ldots + I_n}{n} \qquad [7.5]$$

Es evidente que cuanto mayor sea el número *n* de intervalos más exacto es el valor de I_{med}. Éste es un método gráfico que, sin embargo, para CA sinusoidal no se suele utilizar.

Como se demuestra al final de este apartado, la relación existente entre el valor medio I_{med} y el valor máximo I_0 de la intensidad, para un **semiciclo**, es:

$$I_{med} = \frac{2 \cdot I_0}{\pi} = 0{,}637 \cdot I_0 \qquad [7.6]$$

De la misma manera, para la tensión:

$$V_{med} = \frac{2 \cdot V_0}{\pi} = 0{,}637 \cdot V_0 \qquad [7.7]$$

Los valores medios de las diferentes magnitudes se expresan con las letras correspondientes en mayúsculas con subíndice *med* (E_{med}, V_{med}, I_{med}).

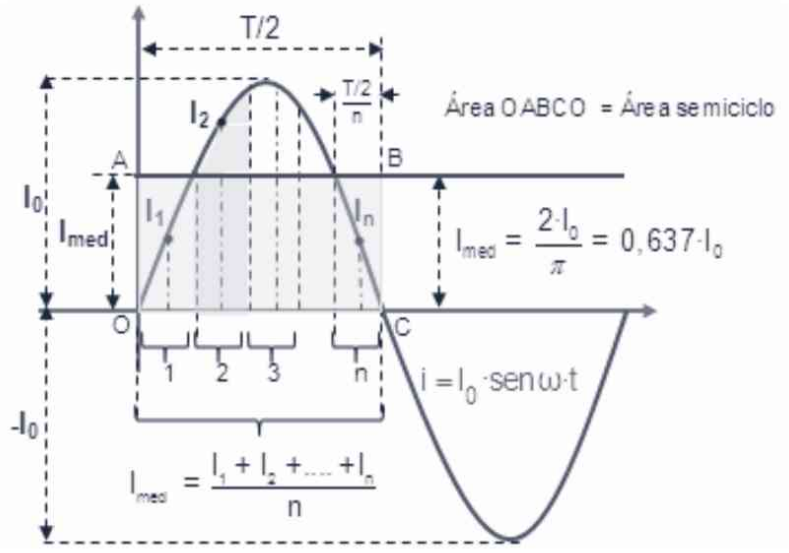


Figura 7.3. Valor medio I_{med} de una corriente sinusoidal

- **Valor eficaz de tensiones y corrientes:** puesto que una señal alterna varía en el tiempo, no entrega la misma energía que una corriente continua con el mismo valor que el máximo de la alterna. Se dice que V es el valor eficaz de una tensión alterna ($v = V_0 \cdot \text{sen } \omega \cdot t$), o I es el valor eficaz de una corriente alterna ($i = I_0 \cdot \text{sen } \omega \cdot t$), si al conectar dicha tensión, o hacer pasar dicha corriente, por una resistencia R produce los mismos efectos caloríficos que si se conecta la misma resistencia R, a una tensión continua V o se hace pasar una corriente continua I. Los valores eficaces de las diferentes magnitudes se expresan con la letras correspondientes en mayúsculas (E, V, I).

Sea una resistencia *R* por la que circula una CA de intensidad:

$$i = I_0 \cdot \operatorname{sen} \omega t \qquad [7.8]$$

Puesto que el calor producido en la resistencia *R* no depende del sentido de la corriente, el calor producido durante el tiempo correspondiente al semiciclo positivo es igual al producido durante el correspondiente al semiciclo negativo. Para hallar el calor producido por la semionda positiva, *figura 7.4,* se divide la señal en un gran número de intervalos iguales *n.* El calor producido en cada intervalo, considerando para la intensidad de cada intervalo el valor central de la misma, es:

$$Q_i = I_i^2 \cdot R \cdot \frac{T/2}{n} \qquad [7.9]$$

El calor producido en el tiempo (*T*/2) correspondiente al semiperiodo positivo es:

$$Q_{CA} = \sum_1^n Q_i = I_1^2 \cdot R \cdot \frac{T/2}{n} + I_2^2 \cdot R \cdot \frac{T/2}{n} + ... + I_n^2 \cdot R \cdot \frac{T/2}{n} = R \cdot \frac{T/2}{n} \left(I_1^2 + I_2^2 + ... + I_n^2 \right) \qquad [7.10]$$

En el mismo tiempo (*T*/2), una corriente continua *I* produce, en la misma resistencia *R*, el calor:

$$Q_{CC} = I^2 \cdot R \cdot \frac{T}{2} \qquad [7.11]$$

Para que la corriente *I* sea el valor eficaz de la CA, se ha de cumplir que el calor producido en ambos casos sea igual, es decir:

$$Q_{CC} = Q_{CA} \quad \Rightarrow \quad I^2 \cdot R \cdot \frac{T}{2} = R \cdot \frac{T/2}{n} \left(I_1^2 + I_2^2 + ... + I_n^2 \right)$$

Operando, se obtiene:

$$I = \sqrt{\frac{I_1^2 + I_2^2 + ... + I_n^2}{n}} \qquad [7.12]$$

Es evidente que cuanto mayor sea el número *n* de intervalos más exacto es el valor de *I*. Este es un método gráfico, pero que no se utiliza para el cálculo del valor eficaz de la onda sinusoidal.

El calor producido por la CA *i* en el tiempo *T*/2, teniendo en cuenta que la onda i^2 es simétrica respecto a la ordenada $\frac{I_0^2}{2}$, siendo entonces éste su valor medio, también se puede poner en la forma:

$$Q_{CA} = I^2 \cdot R \cdot \frac{T}{2} = I_0^2 \cdot \text{sen}^2(\omega t) \cdot R \cdot \frac{T}{2} = \frac{I_0^2}{2} R \cdot \frac{T}{2} = \frac{I_0^2 \cdot R \cdot T}{4} \qquad [7.13]$$

Igualando al calor producido por la CC equivalente, *fórmula [7.11]*:

$$Q_{CA} = \frac{I_0^2 \cdot R \cdot T}{4} = Q_{CC} = I^2 \cdot R \cdot \frac{T}{2} \qquad [7.14]$$

Despejando se obtiene el valor eficaz *I* que se busca:

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 0{,}7 \cdot I_0 \qquad [7.15]$$

Teniendo en cuenta la ecuación anterior, la *fórmula [7.8]* se puede poner en la forma:

$$i = \sqrt{2} \cdot I \cdot \text{sen}\,\omega t \qquad [7.16]$$

A veces, a la intensidad eficaz *I* se le designa con el subíndice *RMS*, I_{RMS}, que se corresponde con las siglas de la expresión inglesa "*root mean square*" (valor medio cuadrático).

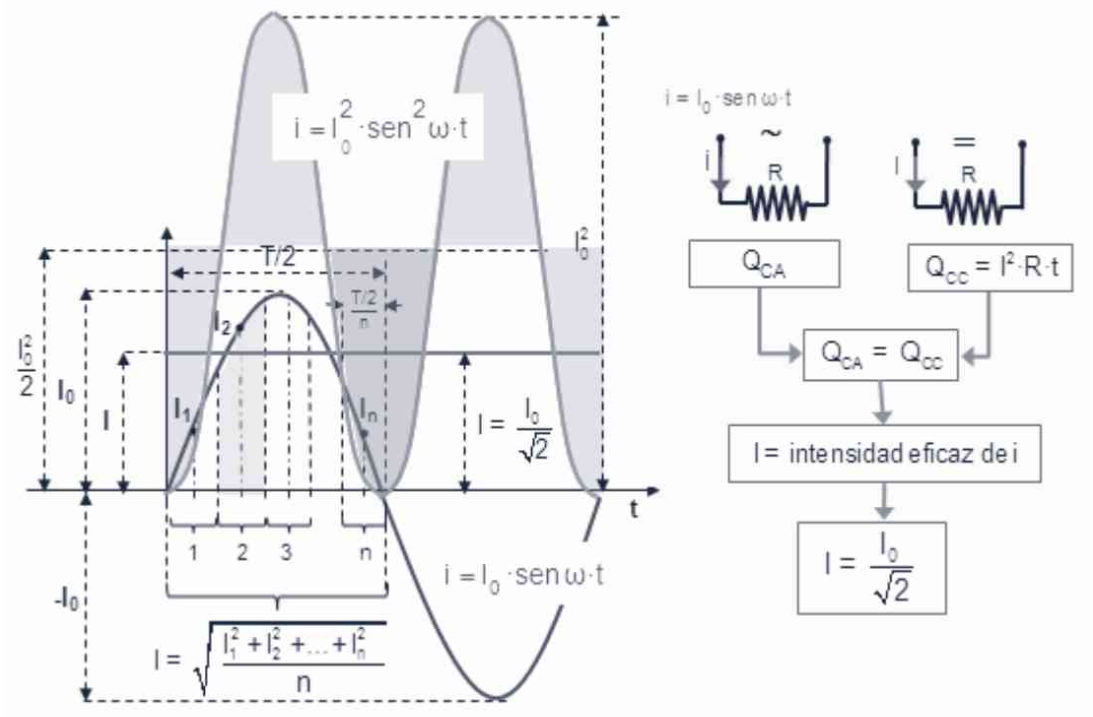


Figura 7.4. Intensidad eficaz I de una corriente sinusoidal

Si se multiplica por la resistencia R los dos miembros de la *fórmula [7.8]*, correspondiente a la intensidad, se obtiene la tensión v en los extremos de la resistencia:

$$v = i \cdot R = \sqrt{2} \cdot I \cdot R \cdot \operatorname{sen} \omega t = V_0 \cdot \operatorname{sen} \omega t \qquad [7.17]$$

Siendo V_0 el valor máximo de la tensión ($V_0 = \sqrt{2} \cdot I \cdot R$), y el valor ($I \cdot R$) correspondiente a la intensidad eficaz es el valor eficaz V de la tensión, ($V = I \cdot R$), teniéndose entonces:

$$V = \frac{V_0}{\sqrt{2}} = 0{,}7 \cdot V_0 \qquad [7.18]$$

En la *tabla 7.1* se tienen diferentes magnitudes con sus letras correspondientes según los diferentes valores.

- **Factor de amplitud**: cociente entre el valor máximo de una onda senoidal y su correspondiente valor eficaz. Por ejemplo, para una tensión senoidal:

$$\xi_a = \frac{V_0}{V} = \sqrt{2} \qquad [7.19]$$

- **Factor de forma**: cociente entre el valor eficaz de una onda senoidal y su valor medio en un semiperiodo. Por ejemplo, para una tensión senoidal:

$$\xi_f = \frac{V}{V_{med}} = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}} = 1{,}11 \qquad [7.20]$$

Observa:

En CA se utiliza constantemente las funciones trigonométricas, expresándose los ángulos, unas veces en grados sexagesimales (º) y otras en radianes (rad). En la calculadora se debe prestar atención en elegir adecuadamente la unidad angular con la que se trabaja: DEG (grados sexagesimales) o RAD (radianes).

Para demostrar la relación entre el valor máximo I_0 y el valor medio I_{med} de un semiciclo de una corriente alterna, *fórmula [7.6]*, se tiene, *figura 7.3:*

$$\text{Área OABC} = \text{Área semiciclo} \Rightarrow I_{med} \cdot \frac{T}{2} = \int_0^{T/2} i \cdot dt = \int_0^{T/2} I_0 \cdot \operatorname{sen} \omega t \cdot dt = \frac{I_0 \cdot T}{\pi} \Rightarrow I_{med} = \frac{2 \cdot I_0}{\pi} \qquad [7.21]$$

Como se quería demostrar.

Para demostrar la relación entre el valor máximo I_0 y el valor eficaz I de una corriente alterna, *fórmula [7.15],* se tiene que el calor producido por una corriente, $i = I_0 \cdot \text{sen } \omega \cdot t$, a su paso por una resistencia R en un tiempo dt, es:

$$dQ_{CA} = i^2 \cdot r \cdot dt \qquad [7.22]$$

En el tiempo (T) correspondiente a un periodo, el calor producido será:

$$Q_{CA} = \int_0^T i^2 \cdot R \cdot dt = R \cdot \int_0^T I_0^2 \cdot \text{sen}^2 \omega t \cdot dt = \frac{R \cdot I_0^2 \cdot T}{2} \qquad [7.23]$$

En el mismo tiempo (T), una corriente continua I produce en la misma resistencia R, el calor:

$$Q_{CC} = I^2 \cdot R \cdot T \qquad [7.24]$$

Conforme a la definición dada para la intensidad eficaz, si se cumple que $Q_{CA} = Q_{CC}$, entonces I es el valor eficaz de la corriente, $i = I_0 \cdot \text{sen } \omega \cdot t$, es decir:

$$\frac{R \cdot I_0^2 \cdot T}{2} = I^2 \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \qquad [7.25]$$

Como se quería demostrar.

Magnitud	Valor instantáneo	Valor máximo	Valor eficaz	Valor medio
Fem	e	E_0	E	E_{med}
Tensión	v	V_0	V	V_{med}
Intensidad	i	I_0	I	I_{med}
Potencia	p	-	-	P

Tabla 7.1. Diferentes valores de las magnitudes en CA

7.3 FRECUENCIA Y PARES DE POLOS EN LOS GENERADORES DE CA

Los generadores reales de fem sinusoidal, alternadores, aprovechan mejor los materiales y el espacio teniendo una configuración multipolar, *figura 7.4*. Así, en un generador de dos polos, *figura 7.1*, un giro de 360º *geométricos* de la espira (1 revolución)

generará un ciclo (360º *eléctricos*) de fem *e*. Pero, en un generador de *4* polos, *figura 7.5,* es suficiente media vuelta (180º geométrico*s*) para generar el ciclo de fem *e* (360º eléctricos), generándose en una vuelta completa (360º geométrico*s*) *2* ciclos de fem *e (*720º eléctricos).

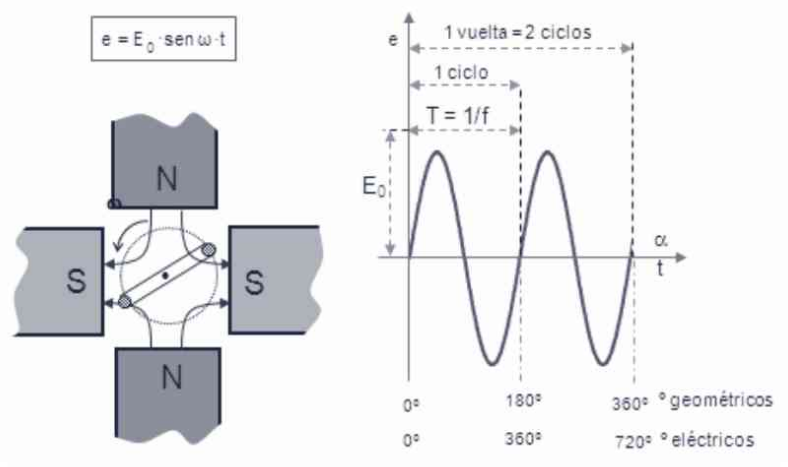


Figura 7.5. Generador de CA multipolar, p = 2

Se tiene, pues, que para igual *N* (rpm), los generadores de mayor número de pares de polos *p* generan más de un ciclo en cada vuelta, es decir tienen mayor frecuencia *f*. Así:

$$p = 1 \Rightarrow N\,(rpm) \Rightarrow f = \frac{N}{60}\,(ciclos/s = Hz)$$

$$p = 2 \Rightarrow N\,(rpm) \Rightarrow f = \frac{2 \cdot N}{60}\,(ciclos/s = Hz)$$

En definitiva, si se tienen varios pares de polos *p*, la frecuencia *f* (Hz) de la fem generada *e* está relacionada con la velocidad de rotación *N* (rpm), por la fórmula:

$$f = \frac{p \cdot N}{60} \qquad [7.26]$$

7.4 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE MAGNITUDES SINUSOIDALES. REPRESENTACIÓN CARTESIANA Y FASORIAL

Una magnitud sinusoidal es una magnitud periódica cuyo ciclo se repite cada cierto tiempo. Considérese una magnitud *y*:

$$y = y(t) = Y_0 \cdot \operatorname{sen} \omega t \qquad [7.27]$$

Esta es la ecuación de una función sinusoidal que tiene asociado un periodo *T*, relacionado con la pulsación ω por la *fórmula [7.4]*, $\omega = 2 \cdot \pi/T$. Si en la *fórmula [7.27]* se remplaza *t* por $t + T$, se tiene:

$$y(t+T) = Y_0 \cdot \operatorname{sen}\omega(t+T) = Y_0 \cdot \operatorname{sen}\omega\left(t+\frac{2\cdot\pi}{\omega}\right) = Y_0 \cdot \operatorname{sen}\omega(t+2\cdot\pi) = Y_0 \cdot \operatorname{sen}\omega t = y(t) = y \qquad [7.28]$$

En consecuencia:

$$y(t) = y(t+T) \qquad [7.29]$$

Esto quiere decir que *y* tiene el mismo valor en *t* y que en $t + T$, como se quería demostrar.

En el estudio de la CA se tienen ondas senoidales y ondas cosenoidales, pero es conveniente trabajar con un solo tipo de ondas, senoidales o bien cosenoidales, pasándose de un tipo de onda a la otra de acuerdo con las identidades trigonométricas:

$$\cos\alpha = \operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) \qquad [7.30]$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) \qquad [7.31]$$

De esta manera, la *función [7.27]* se puede poner en la forma:

$$y = y(t) = Y_0 \cdot \cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right) \qquad [7.32]$$

Para la representación gráfica de las magnitudes senoidales se usan dos métodos:

1. **Representación cartesiana.** Consiste en llevar en el *eje x* los tiempos *t*, o los ángulos α, y en el *eje y* los valores instantáneos de la magnitud considerada, obteniéndose una gráfica llamada sinusoide, siendo el *ángulo de fase* el que corresponde a la onda para el tiempo $t = 0$. De esta manera se ha representado las magnitudes que aparecen en las *figuras 7.2 a 7.5.*

   En la *figura 7.6* se ha representado una magnitud sinusoidal, como puede ser la tensión *v* o la intensidad *i* de una CA.

   Si se toma como referencia el *eje y* la ecuación de la función es:

$$y = Y_0 \cdot \operatorname{sen}\omega t \qquad [7.33]$$

El ángulo de fase es 0 rad.

Si se toma como referencia el *eje* y_φ la ecuación de la función es:

$$y_\varphi = Y_0 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi) \qquad [7.34]$$

El ángulo de fase es φ rad.

Si se toma como referencia el *eje* $y_{\pi/2}$ la ecuación de la función es:

$$y_{\frac{\pi}{2}} = Y_0 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}) = Y_0 \cdot \cos\omega \cdot t \qquad [7.35]$$

El ángulo de fase es $\pi/2$ rad.

Nótese que, en las fórmulas anteriores, como ω se expresa en rad/s y t en segundos, el producto $\omega \cdot t$ se obtiene en rad, por lo que el ángulo φ se debe expresar en rad. No obstante, es frecuente en la práctica expresar dicho ángulo en grados (sexagesimales), pero se ha de tener presente lo dicho.

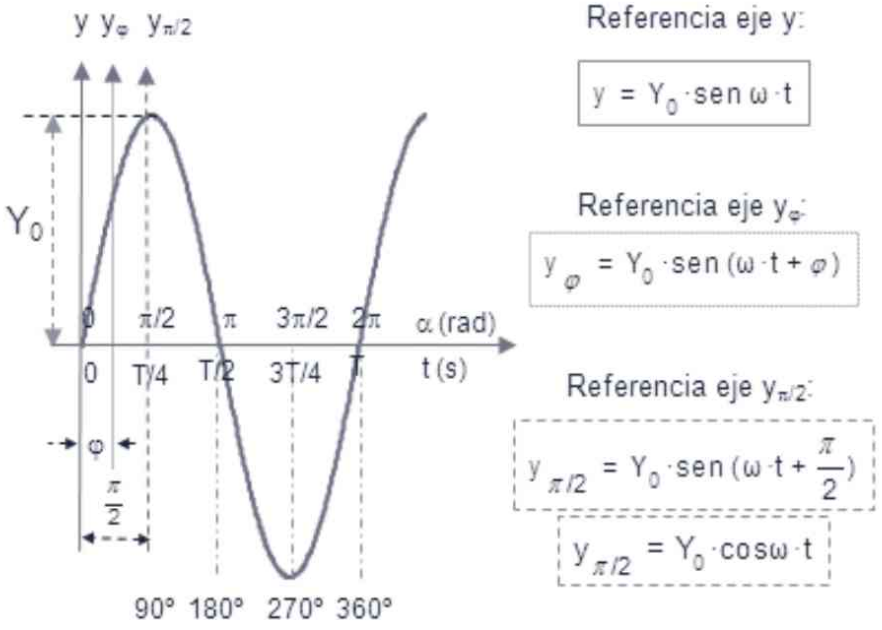


Figura 7.6. Representación cartesiana de una función sinusoidal

En la figura *7.7* se tienen la representación gráfica de tres señales: y = sen $\omega \cdot t$, $v = \text{sen}(\omega \cdot t - \varphi_v)$, $i = \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_i)$.

La fase de cada onda es el ángulo que forma la función para $t = 0$. Para determinar dicho ángulo se toma el punto en que la función, en su primer semiciclo ascendente, corta al *eje x*. Si el punto está a la izquierda del *eje oy* el ángulo es positivo y si está a la derecha el ángulo es negativo. De esta manera se determina el ángulo de fase de cada una de las funciones anteriores, siendo, 0 rad, $-\varphi_v$ rad y φ_i rad, respectivamente.

Según sea el desfase entre dos ondas, se dice que están en *fase* si el desfase es 0º, *cuadratura* si el desfase es ± 90º y *oposición* si el desfase es de 180º.

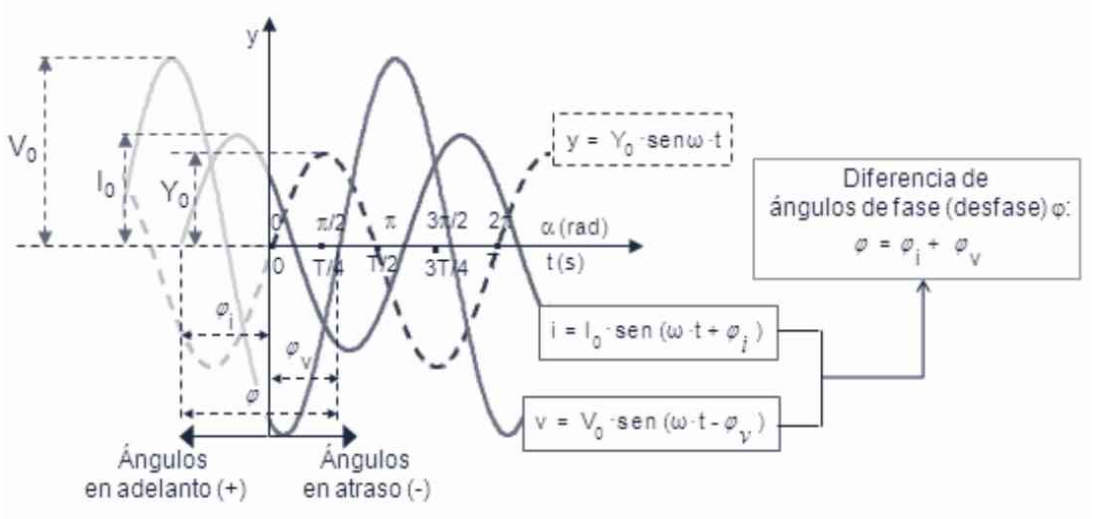


Figura 7.7. Diferencia de fases

2. **Representación de Fresnel o fasorial**. Una variación sinusoidal *y*:

$$y = \sqrt{2} \cdot Y \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi) \qquad [7.36]$$

Puede ser representada[1], *figura 7.8*, como l*a proyección sobre el eje vertical (Im)* de un vector $\boldsymbol{Y_0}$ que gira a una velocidad angular ω alrededor del origen en el plano de Gauss (eje real *Re* y eje imaginario *Im*) en sentido contrario a las agujas de un reloj, y teniendo por módulo el valor máximo de la función *y*, es decir, $|\boldsymbol{Y_0}| = Y_0$. A este vector se le denomina de Fresnel o **fasor**, y su expresión es:

$$\overline{Y}_0 = Y_{0\angle\varphi} \qquad [7.37]$$

Siendo, Y_0 el valor máximo de la función que representa y φ el ángulo de fase.

Teniendo en cuenta la relación entre el valor máximo y el valor eficaz, *fórmula 7.15*, el fasor también se puede expresar en la forma:

$$\overline{Y}_0 = \sqrt{2} \cdot Y_{\angle\varphi} \qquad [7.38]$$

Otras formas de representar un fasor, son:

$$\overline{Y}_0 = \mathbf{Y_0} \qquad [7.39]$$

$$\overline{Y}_0 = \sqrt{2} \cdot Y_{\varphi} \qquad [7.40]$$

Es decir, con la letra en negrita o con el subíndice del ángulo solamente sin el símbolo $\angle$.

La posición del vector giratorio $\boldsymbol{Y_0}$, viene dada en cualquier momento por:

$$\overline{Y}_0 = \sqrt{2} \cdot Y \cdot \cos(\omega t + \varphi) + j \cdot \sqrt{2} \cdot Y \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \qquad [7.41]$$

Es decir, que la función sinusoidal de la *ecuación [7.35]* está representada por la proyección en el eje *Im* del vector giratorio $\boldsymbol{Y_0}$. Esto se expresa:

$$y = \operatorname{Im}\left[\overline{Y}_0\right] = \sqrt{2} \cdot Y \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \qquad [7.42]$$

Se verán a continuación diferentes valores de la función, $y = \sqrt{2} \cdot Y \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi)$, representada por el vector giratorio $\boldsymbol{Y_{0\varphi}}$ en la *figura 7.8.*

El vector $\boldsymbol{Y_{0\varphi}}$ en el instante inicial $t = 0$ tiene la dirección $\boldsymbol{OP_1}$ (ángulo φ), su proyección sobre el eje *Im* es $Y_0 \cdot \operatorname{sen} \varphi$, que coincide con el valor de la función en el instante inicial ($y = \sqrt{2} \cdot Y \cdot \operatorname{sen} \varphi$).

Transcurrido un tiempo t_2 tal que $(\omega \cdot t_2 + \varphi) = \pi/2$), el vector $\boldsymbol{Y_{0\varphi}}$, en su movimiento circular, se encontrará en la dirección correspondiente al ángulo de, $\pi/2$ rad (90º), dirección $\boldsymbol{OP_2}$, su proyección sobre el eje *Im* tendrá el valor Y_0, que coincide con el valor de la función para ese ángulo ($y = \sqrt{2} \cdot Y \cdot \operatorname{sen} \pi/2 = \sqrt{2} \cdot Y = Y_0$).

Transcurrido un tiempo mayor t_3 tal que $(\omega \cdot t_3 + \varphi) = (\theta + \varphi)$, el vector $\boldsymbol{Y_{0\varphi}}$ se encontrará en la posición correspondiente a la dirección $\boldsymbol{OP_3}$, su proyección sobre el eje *Im* tendrá ahora el valor $Y_0 \cdot \operatorname{sen}[\pi - (\varphi + \theta)] = Y_0 \cdot \operatorname{sen}(\varphi + \theta)$, que coincide con el valor de la función para ese ángulo, $y = Y_0 \cdot \operatorname{sen}(\varphi + \theta)$.

Se pueden seguir eligiendo diferentes direcciones a lo largo de la circunferencia y se verificará siempre lo dicho, para un determinado ángulo del fasor (con su correspondiente tiempo, ω = *ángulo/tiempo*), la proyección del fasor sobre el eje vertical *Im* es igual al valor que tiene la función sinusoidal que representa.

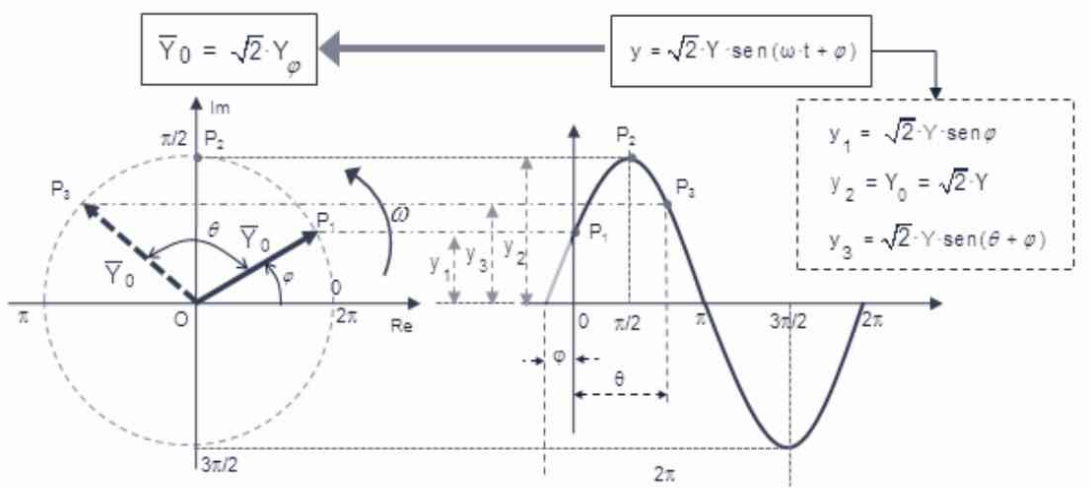


Figura 7.8. Representación fasorial ($\mathbf{Y_0}$) y cartesiana (y)

Ahora considérese que en plano de Gauss se tienen dos vectores giratorios $\mathbf{Y_{01}}$ e $\mathbf{Y_{02}}$ con idéntica pulsación ω, *figura 7.9.a.* Sus posiciones relativas permanecerán constantes en el transcurso de su giro alrededor del centro *o*, y por tanto, las sinusoides correspondientes [$y_{01} = Y_{01} \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_1)$ e $y_{02} = Y_{02} \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_2]$ quedan caracterizadas por los valores máximos (Y_{01} e Y_{02}) y por sus ángulos de fases iniciales, o simplemente ángulos de fases, respectivos (φ_1 *y* φ_2). Por esta razón, en las expresiones de los fasores, *ecuaciones [7.37] a [7.40]* no aparece el factor tiempo, pero se ha de tener presente el carácter temporal de los fasores, por lo que es conveniente poner la indicación ω en su representación, aunque en la práctica se sobreentiende y se suele omitir dicha indicación.

Como consecuencia de lo anterior, cuando se hacen cálculos con las magnitudes en la forma sinusoidal, $y = Y_0 \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_1)$, se dice que se hace en el *dominio del tiempo,* si se hacen con las magnitudes en la forma fasorial, $\mathbf{Y_0} = Y_{0\varphi}$, se dice que se hace en el *dominio de la frecuencia* (también llamado *dominio fasorial*).

En la práctica es preferible, como se verá en los próximos apartados, hacer uso de fasores con valores eficaces Y ($Y = Y_0/\sqrt{2}$), en lugar de fasores con los valores máximos Y_0, *figura 7.9.b*, procediéndose de idéntica manera a como se ha hecho con los fasores correspondientes a valores máximos.

Nótese que los dos vectores giratorios deben tener la misma pulsación ω para que las posiciones relativas de los mismos se mantengan. Si tienen diferente

pulsación, dichas posiciones no se mantienen y el método de los fasores no se aplica.

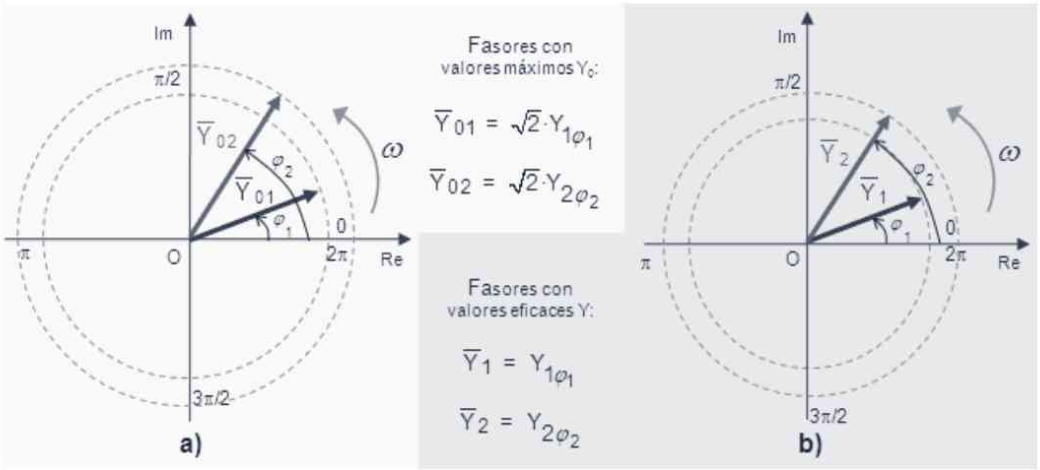


Figura 7.9. Fasores con valores máximos Y_0 y con valores eficaces Y

Se puede decir que un fasor es un número complejo rotatorio. Por tanto, como los números complejos, el fasor, *figura 7.10,* cuya *forma polar* es la de la *fórmula [7.37],* se pueden expresar:

En *forma trigonométrica*:

$$\overline{Y}_0 = Y_0 \cdot \cos\varphi + j \cdot Y_0 \cdot \operatorname{sen}\varphi \qquad [7.43]$$

En *forma binómica:*

$$\overline{Y}_0 = Y_x + j \cdot Y_y \qquad [7.44]$$

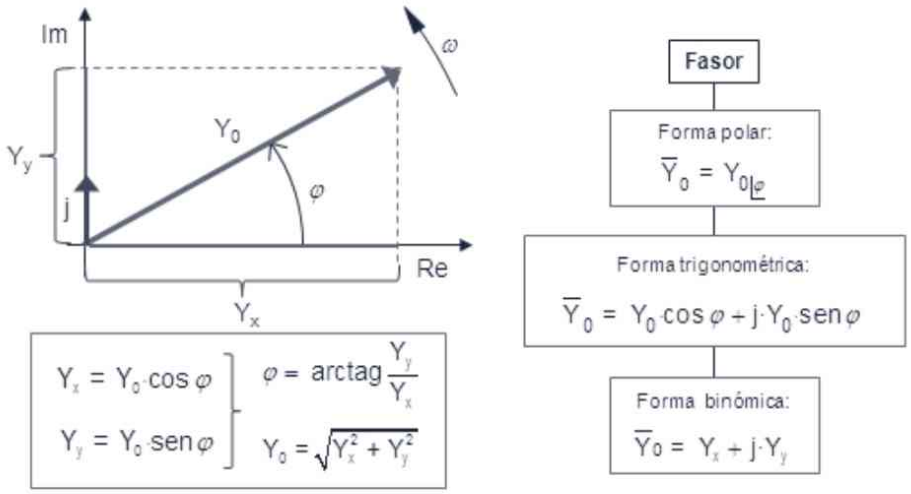


Figura 7.10. Fasor en forma polar, trigonométrica y binómica

La utilidad de los fasores radica en que su uso permite el estudio de los circuitos de CA de forma sencilla, evitando el estudio de los mismos en el *dominio del tiempo* [en la forma $y = Y_0 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi)$], y haciéndose en el *dominio fasorial* (en la forma, $\overline{Y}_0 = Y_{0\angle\varphi}$).

La utilización de fasores para el estudio de las magnitudes senoidales se debe al físico francés A. Fresnel (1788-1827), pero su aplicación al estudio de la CA es debida al ingeniero alemán C. P. Steinmetz (1865-1923).

Teniendo en cuenta la fórmula de Euler, matemático y físico suizo L. P. Euler (1707-1783):

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j \cdot \text{sen}\,\varphi \qquad [7.45]$$

Sustituyendo en la forma trigonométrica del fasor *[7.41]:*

$$\overline{Y}_0 = Y_0 \cdot \cos\varphi + j \cdot Y_0 \,\text{sen}\,\varphi = Y_0 \,(\cos\varphi + j\,\text{sen}\,\varphi) \qquad [7.46]$$

Se obtiene la forma *exponencial del fasor*:

$$\overline{Y}_0 = Y_0 \cdot e^{j\varphi} \qquad [7.47]$$

Hay textos en los que los autores toman para los valores instantáneos la proyección sobre el eje real *Re* del plano de Gauss. En este caso los valores instantáneos de la *función [7.35]* vienen dados por la parte real de la *ecuación [7.40].*

7.5 OPERACIONES BÁSICAS CON NÚMEROS COMPLEJOS

En matemáticas es usual designar la unidad imaginaria, $\sqrt{-1}$, por la letra "*i*". En electrotecnia, con objeto de evitar confusiones con la intensidad, es más frecuente el uso de la letra "*j*".

A continuación, a modo de recordatorio, se hace un resumen de las operaciones básicas con números complejos. Para una explicación más detallada ver el *Anexo IV*.

Un número complejo, como los fasores, se designa mediante una letra con guión encima o mediante una letra en negrita, teniendo las mismas formas de representación. Así un número complejo z:

$$\bar{z} = \mathbf{z} = x + j \cdot y = z_{\underline{|\varphi}} \qquad [7.48]$$

Tiene por módulo $|z|$, también designado con la letra z sin negrita:

$$|\bar{z}| = |\mathbf{z}| = z = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad [7.49]$$

Su argumento φ es:

$$\varphi = \text{arctag}\frac{y}{x} = \text{arcsen}\frac{y}{Z} = = \text{arccos}\frac{x}{Z} = \qquad [7.50]$$

Dados dos números complejos:

$$\mathbf{z}_1 = x_1 + j \cdot y_1 = z_{1\underline{|\varphi_1}} \qquad [7.51]$$

$$\mathbf{z}_2 = x_2 + j \cdot y_2 = z_{2\underline{|\varphi_2}} \qquad [7.52]$$

Las operaciones básicas son:

- **Suma y resta.** Se hace de forma más sencilla poniendo los números en forma binómico:

$$\mathbf{z}_1 \pm \mathbf{z}_2 = (x_1 \pm x_2) + j \cdot (y_1 \pm y_2) \qquad [7.53]$$

- **Multiplicación.** Se hace de forma más sencilla poniendo los números en forma polar:

$$\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2 = Z_1 \cdot Z_{2\underline{|\varphi_1 + \varphi_2}} \qquad [7.54]$$

Obsérvese, *figura 7.11*, cómo el multiplicar un fasor ***Y*** por la unidad imaginaria ***j***, positiva o negativa, supone en dicho fasor un giro de 90º positivos o negativos, respectivamente.

- **División.** Se hace de forma más sencilla poniendo los números en forma polar:

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{Z_1}{Z_{2\underline{|\varphi_1 - \varphi_2}}} \qquad [7.55]$$

- **Raíz cuadrada.** Del número *[7.48]* se hace poniendo el número en forma polar:

$$\sqrt{\mathbf{z}} = \sqrt{z}_{\underline{|\varphi/2}} \qquad [7.56]$$

- **Conjugado.** Del número *[7.48]:*

$$\overline{\mathbf{z}}^{*} = \mathbf{z}^{*} = x - j\cdot y = z_{\underline{|-\varphi}} \qquad [7.57]$$

- **Inverso.** Del número *[7.48]:*

$$\frac{1}{\mathbf{z}} = \frac{1}{z}\Big|_{\underline{-\varphi}} \qquad [7.58]$$

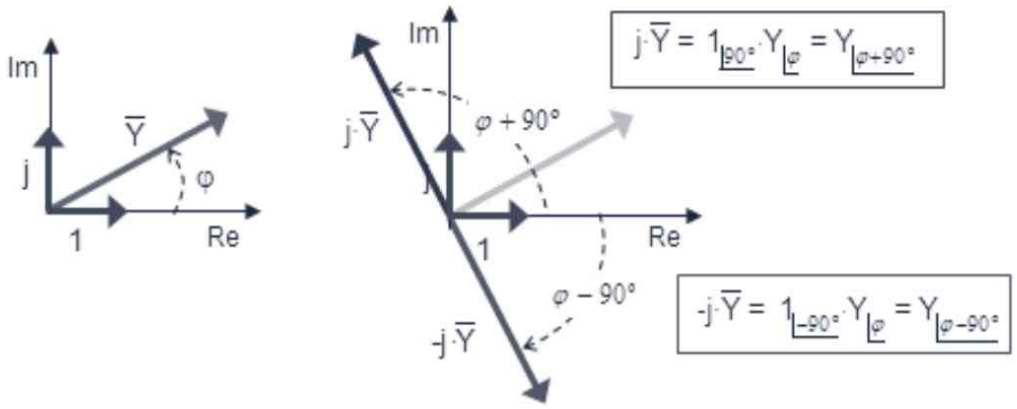


*Figura 7.11. Fasor **Y** multiplicado por "**j**" y por "**–j**"*

Derivando la *ecuación [7.36]* respecto del tiempo, se tiene:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\left[Y_0\cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)\right]}{dt} = Y_0\cdot\omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi + \pi/2) \qquad [7.59]$$

Es decir, se obtiene un fasor adelantado del anterior 90º y por módulo $\omega \cdot Y_0$:

$$y \;\Rightarrow\; \overline{Y}_0 = Y_{0\underline{|\varphi}} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dt} \;\Rightarrow\; \omega\cdot Y_{0\underline{|\varphi+\pi/2}} = j\cdot\omega\cdot\overline{Y}_0 \qquad [7.60]$$

Integrando la *ecuación [7.36]* se tiene:

$$\int y\cdot dt = \int Y_0\cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)\, dt = \frac{Y_0}{\omega}\cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi - \pi/2) \qquad [7.61]$$

Es decir, se obtiene un fasor retrasado del anterior 90º y por módulo Y_0/ω:

$$y \Rightarrow \overline{Y}_0 = Y_{0\underline{|\varphi}} \Rightarrow \int y \cdot dt \Rightarrow \frac{Y_0}{\omega}\underline{|\varphi - \pi/2} = -j\frac{1}{\omega}\overline{Y}_0 \qquad [7.62]$$

7.6 CIRCUITO EN CORRIENTE ALTERNA: IMPEDANCIA

Cuando los extremos de un circuito eléctrico se conectan a una tensión alterna *v*:

$$v = \sqrt{2}\cdot V \cdot \operatorname{sen}\omega t \qquad [7.63]$$

Se producen dos regímenes de funcionamiento, de forma similar a como ocurría en CC, *apartado 4.15.* Un primer periodo, *figura 7.12,* de tiempo muy corto, generalmente fracciones de segundos, denominado de *régimen transitorio*, en el que la intensidad *i* no tiene forma sinusoidal (de mucha importancia para determinar los efectos de sobreintensidades y sobretensiones que se producen en el momento de apertura y cierre de los circuitos, especialmente en cortocircuitos), y un segundo periodo, denominado de *régimen permanente,* en el que la intensidad, como se verá en los próximos apartados, frecuentemente, toma la forma sinusoidal *i*:

$$i = \sqrt{2}\cdot I \cdot \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) \qquad [7.64]$$

En la ecuación anterior el ángulo φ depende de las características eléctricas del circuito conectado, *figura 7.13.*

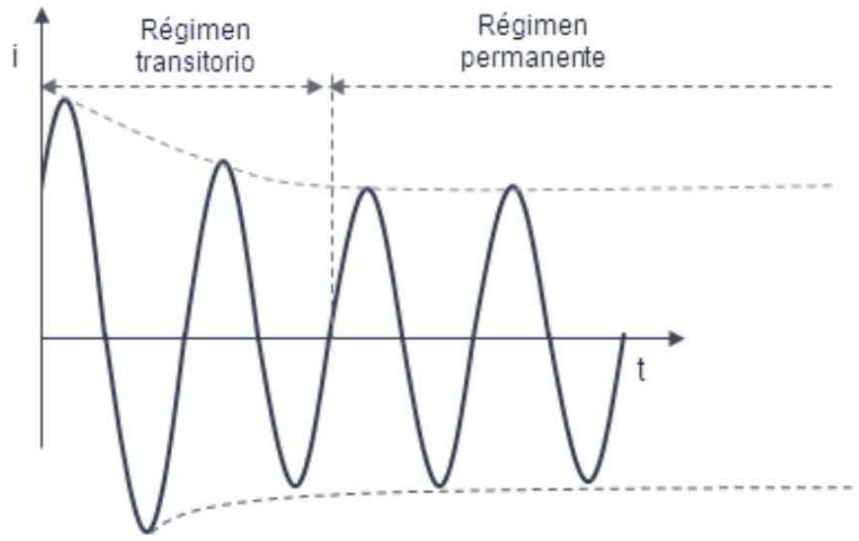


Figura 7.12. Ejemplo de un régimen transitorio y régimen permanente

Como se demostrará en el *apartado 7.16*, existe proporcionalidad entre el valor eficaz V de la tensión a la que se conecta la carga y la intensidad eficaz I que circula por ella, tal que:

$$Z = \frac{V}{I} \qquad [7.65]$$

Siendo Z una constante (para una frecuencia determinada) y que se denomina **impedancia** del circuito. Su unidad es el ohmio (Ω), (voltios/amperios = ohmio).

Las ecuaciones en el dominio temporal y fasorial de las tensiones e intensidades son:

$$v = V_0 \cdot \operatorname{sen} \omega t \quad \Rightarrow \quad \overline{V} = V_{0\angle 0} \qquad [7.66]$$

$$i = I_0 \cdot \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) \quad \Rightarrow \quad \overline{I} = I_{0\angle -\varphi} \qquad [7.67]$$

siendo:

$$V_0 = \sqrt{2} \cdot V \qquad [7.68]$$

$$I_0 = \sqrt{2} \cdot I = \sqrt{2} \frac{V}{Z} \qquad [7.69]$$

Como se analizará en los próximos apartados, el ángulo φ que forman el fasor tensión $\boldsymbol{V}$ y el fasor intensidad $\boldsymbol{I}$, depende de las características de la impedancia Z, siendo, de esta manera, la impedancia un número complejo $\boldsymbol{Z}$, caracterizado por su módulo Z y su argumento φ:

$$\overline{Z} = \mathbf{Z} = Z_{\angle \varphi} = \frac{V_{\angle 0}}{I_{\angle -\varphi}} \qquad [7.70]$$

En forma binómica, *[figura 7.13]*, a la componente en el eje real *Re,* se le llama *resistencia* y se designa por la letra R y a la componente en el eje imaginario *Im* se le llama *reactancia* y se designa por la letra X. Ambas magnitudes se miden en ohmios (Ω):

$$Z_{\angle \varphi} = R + j \cdot X \qquad [7.71]$$

En la *tabla 7.2* se reflejan las posibles características que puede presentar $\boldsymbol{Z}$ en función del signo del ángulo φ, y que se estudiarán con detalle a lo largo de este capítulo.

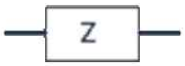
Ángulo φ	Impedancia: forma polar	Impedancia: forma binómica	Característica	Símbolo
$\varphi > 0$	$Z_{\underline{\varphi}}$	$\bar{Z} = R + j \cdot X$	Resistivo-inductiva (R-L)	
$\varphi < 0$	$Z_{\underline{-\varphi}}$	$\bar{Z} = R - j \cdot X$	Resistivo-capacitiva (R-C)	
$\varphi = 0$	$Z_{\underline{0}}$	$\bar{Z} = R$	Resistiva (R)	
$\varphi = 90^\circ$	$Z_{\underline{\pi/2}}$	$\bar{Z} = j \cdot X$	Inductiva (L)	
$\varphi = -90^\circ$	$Z_{\underline{-\pi/2}}$	$\bar{Z} = - j \cdot X$	Capacitiva (C)	

Tabla 7.2. Características de la impedancia Z en función del ángulo φ

A partir del triángulo formado por ***Z***, ***R*** y ***X***, llamado *triángulo de impedancias*, se tiene para el módulo Z de la impedancia:

$$\left|\bar{Z}\right| = |\mathbf{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + X^2} \qquad [7.72]$$

El argumento φ:

$$\varphi = \operatorname{arctag}\frac{X}{R} \qquad [7.73]$$

A partir de las consideraciones anteriores, la *ecuación [7.63]* se puede poner en forma fasorial de valores eficaces, en la forma:

$$I_{\underline{-\varphi}} = \frac{V_{\underline{0}}}{Z_{\underline{\varphi}}} \qquad [7.74]$$

Siendo ésta la fórmula de la ley de Ohm para circuitos de CA, "la intensidad de corriente I que circula por un circuito de CA es directamente proporcional a la tensión V aplicada, e inversamente proporcional a la impedancia Z del circuito, produciéndose un **desfase** φ de la corriente respecto de la tensión, pudiendo ser dicho ángulo positivo, negativo o cero" .

En la *fórmula [7.74]*, se ha tomado el fasor ***V*** como referencia, en general si ***V*** tiene un ángulo α ($\boldsymbol{V} = V_\alpha$), la *fórmula [7.73]* tiene la forma:

$$I_{\underline{\alpha-\varphi}} = \frac{V_{\underline{\alpha}}}{Z_{\underline{\varphi}}} \qquad [7.75]$$

Es importante destacar que la impedancia $\boldsymbol{Z}$ es un número complejo pero **no es un fasor**, no se puede transformar al dominio del tiempo, como sí ocurre con los fasores de la tensión y la intensidad.

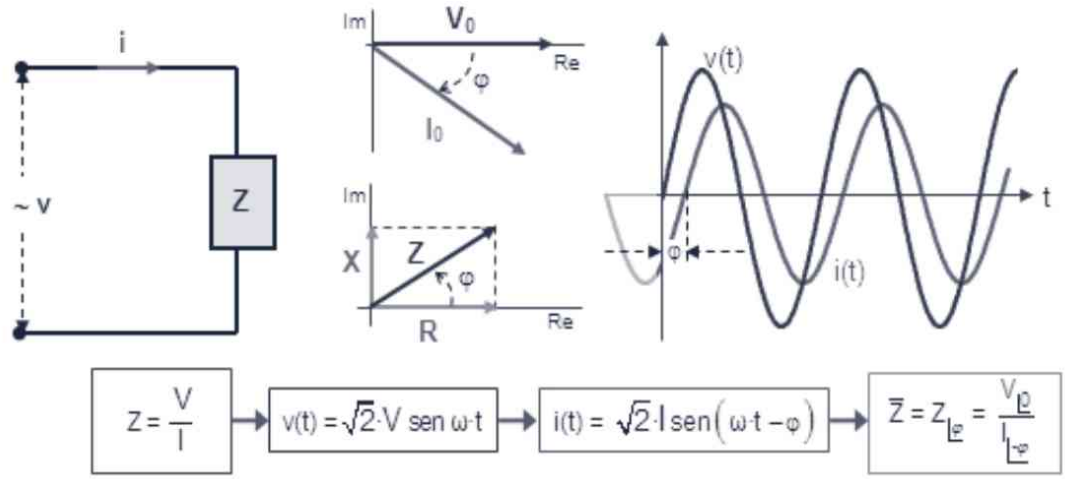


Figura 7.13. Circuito en CA. Impedancia Z

La inversa de la impedancia se denomina **admitancia** *Y*, cumpliéndose:

$$\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}} = G + j \cdot B \qquad [7.76]$$

A la parte real de la admitancia se le denomina **conductancia** *G*, y a la parte imaginaria **susceptancia** *B*.

7.7 ASOCIACIÓN DE IMPEDANCIAS EN CA: EN SERIE, EN PARALELO, MIXTAS

Tal como se ha hecho en CC para las resistencias, *apartado 3.10*, se puede hacer en CA para las impedancias, sin más que sustituir la resistencia *R*, tensión *V* e intensidad *I* de CC, por impedancia $\boldsymbol{Z}$, tensión $\boldsymbol{V}$ e intensidad $\boldsymbol{I}$, en sus formas complejas y fasoriales.

- **Impedancias en serie.** Si se tienen $\boldsymbol{Z_i}$ impedancias acopladas en serie, *figura 7.14*, razonando de forma semejante a como se hizo para CC, se obtiene que la impedancia equivalente $\boldsymbol{Z}$ es:

$$\overline{Z} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \ldots + \overline{Z}_n = \sum \overline{Z}_n \qquad [7.77]$$

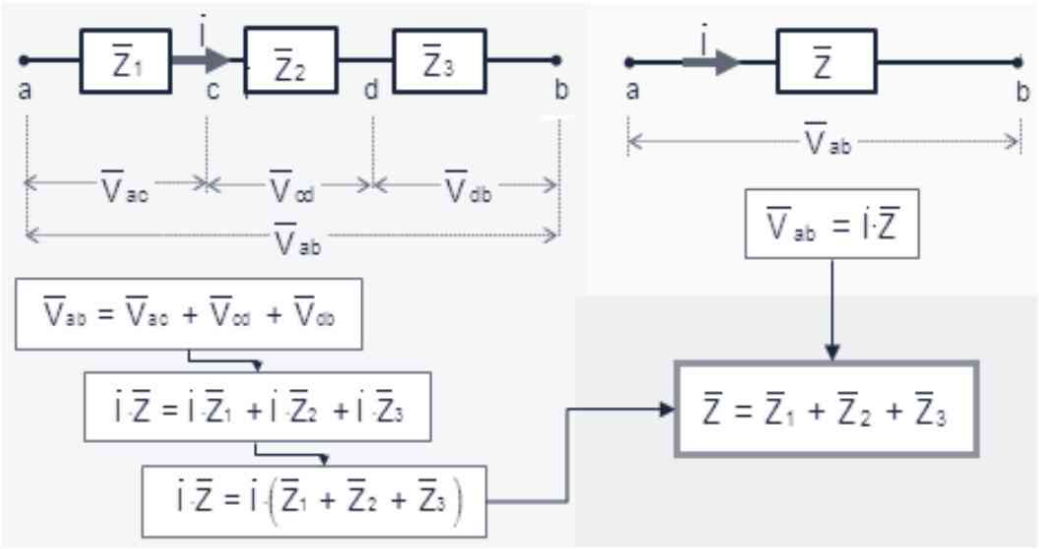


Figura 7.14. Asociación de impedancias en serie

En la *figura 7.15* se tiene un posible diagrama fasorial correspondiente al circuito de la *figura 7.14.* En los circuitos en serie es frecuente, como se ha hecho en este caso, tomar como origen de fases el fasor intensidad ***I***, que es una magnitud común a todas las impedancias. La impedancia equivalente ***Z*** tiene un ángulo φ que corresponde al desfase entre la intensidad ***I*** y la tensión ***V***. Dependiendo del signo de dicho ángulo, *tabla 7.3*, la impedancia tiene características diferentes.

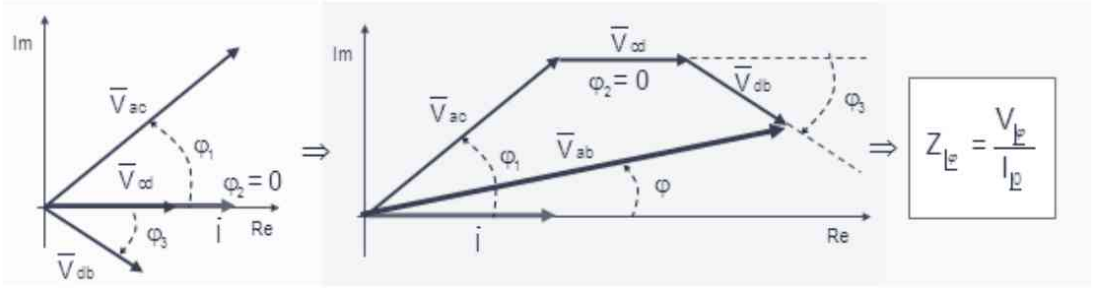


Figura 7.15. Asociación de impedancias en serie: posible diagrama fasorial

De forma análoga a como se ha hecho con las impedancias se demuestra que, la inversa de la **admitancia equivalente** de varios elementos conectados en serie es igual a la suma de las admitancias inversas de cada uno de ellos.

- **Impedancias en paralelo.** Si se tienen $\boldsymbol{Z_i}$ impedancias acopladas en paralelo, *figura 7.16,* razonando de forma semejante a como se hizo para CC, se obtiene que la impedancia equivalente ***Z*** es:

$$\frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \ldots + \frac{1}{\bar{Z}_n} = \sum \frac{1}{\bar{Z}_n} \qquad [7.78]$$

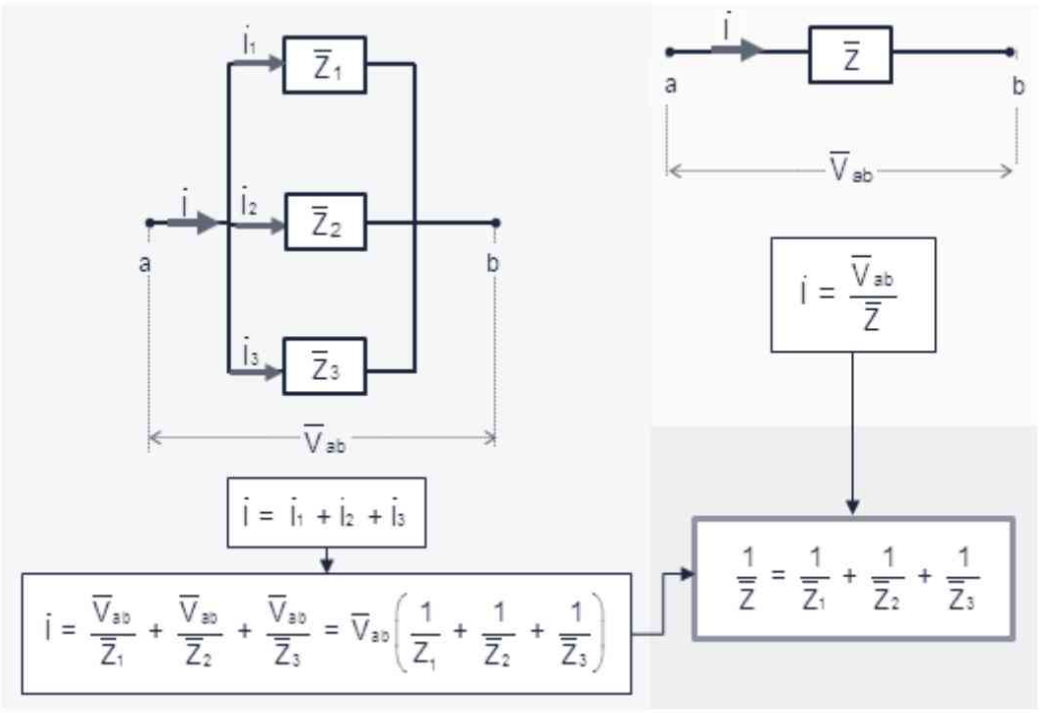


Figura 7.16. Asociación de impedancias en paralelo

En la *figura 7.17* se tiene un posible diagrama fasorial correspondiente al circuito de la *figura 7.16.* En los circuitos en paralelo es frecuente, como se ha hecho en este caso, tomar como origen de fases el fasor tensión ***V***, que es una magnitud común a todas las impedancias. De la misma manera que en el circuito en serie, la impedancia equivalente ***Z*** tiene un ángulo φ que corresponde al desfase entre la intensidad ***I*** y la tensión ***V***. Dependiendo del signo de dicho ángulo, *tabla 7.2*, la impedancia tiene características diferentes.

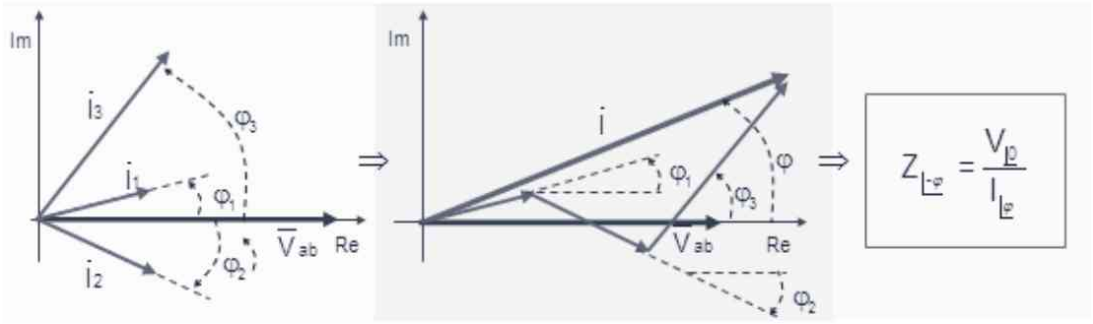


Figura 7.17. Asociación de impedancias en paralelo: posible diagrama fasorial

De forma análoga a como se ha hecho con las impedancias se demuestra que, la **admitancia equivalente** de varios elementos conectados en paralelo es la suma de las admitancias de cada uno de ellos.

- **Impedancias en asociación mixta.** En un circuito con asociación mixta de impedancias, unas están asociadas en paralelo y otras en serie. El circuito se resuelve, al igual que en CC, identificando las asociaciones en serie o paralelo e ir reduciendo el circuito, hasta conseguir una única impedancia final $\boldsymbol{Z}$ que será la equivalente que se busca.

7.8 LEYES DE KIRCHHOFF EN CA

Las Leyes de Kirchhoff vistas en el *apartado 4.2* para CC, se cumplen de igual manera par CA expresando las ecuaciones en valores instantáneos y, por tanto, también, si se expresan en forma fasorial, teniendo las siguientes formas:

- **Ley de Kirchhoff** también llamada **ley de los nudos o de las corrientes** (KCL: Kirchhoff's Current Law) dice:

  "*En un nudo, la suma de las corrientes que entran es igual a la suma de las que salen, dicho de otra manera, la suma fasorial de corrientes en un nudo es nula*".

$$\sum \overline{I}_n = 0 \qquad [7.79]$$

  Así, en el montaje en paralelo de la *figura 7.16* se cumple:

$$\sum \overline{I}_n = 0 \Rightarrow \dot{I} - \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0 \qquad [7.80]$$

- **Ley de Kirchhoff** también llamada **ley de las mallas o de las tensiones** (KVL: Kirchhoff's Voltage Law):

  "*En una malla de un circuito eléctrico la suma fasorial de todas las tensiones es cero*".

$$\sum \overline{V}_n = \sum \overline{Z}_n \cdot \overline{I}_n = 0 \qquad [7.81]$$

  Así, en el montaje en serie de la *figura 7.14* se cumple:

$$\sum \overline{V}_n = 0 \Rightarrow \overline{V}_{ac} + \overline{V}_{cd} + \overline{V}_{db} - \overline{V}_{ab} = 0 \qquad [7.82]$$

7.9 GENERALIZACIÓN DE LAS FÓRMULAS Y TEOREMAS DE LAS REDES DE CC A REDES DE CA

Todas las fórmulas y teoremas de redes de CC, analizadas en el *capítulo 4*, son aplicables a las redes de CA, reemplazando las magnitudes en CC por las magnitudes en CA en forma fasorial o compleja, *tabla 7.3*.

Magnitud	CC	CA		
Fem	E	$\overline{\mathrm{E}}$	$\boldsymbol{E}$	E_α
Tensión	V	$\overline{\mathrm{V}}$	$\boldsymbol{V}$	V_β
Intensidad	I	$\overline{\mathrm{I}}$	$\boldsymbol{I}$	I_θ
Resistencia R Impedancia $\boldsymbol{Z}$	R	$\overline{\mathrm{Z}}$	$\boldsymbol{Z}$	Z_φ

Tabla 7.3. Magnitudes en CC y en CA para cálculos de redes eléctricas

Ver los ejercicios 7.25.3, 7.25.5, 7.25.9 y 7.25.10.

7.10 CIRCUITO DE CA SINUSOIDAL CON RESISTENCIA *R*: TENSIÓN E INTENSIDAD

En la *figura 7.18* se tiene el esquema de un circuito de *CA* con un solo elemento constituido por una resistencia *R*, conectada a una tensión sinusoidal *v*:

$$v = \sqrt{2}\cdot V\cdot \operatorname{sen}\omega t \qquad [7.83]$$

Se sabe que la relación entre tensión e intensidad es:

$$i = \frac{v}{R} = \frac{\sqrt{2}\cdot V}{R}\operatorname{sen}\omega t = \sqrt{2}\cdot I\cdot \operatorname{sen}\omega t \qquad [7.84]$$

De la ecuación anterior se deduce que la tensión *v* y la intensidad *i* están en fase, **desfase $\varphi = 0$**, esto es, alcanzan valores de cero y valores máximos al mismo tiempo, siendo el valor eficaz *I* de la corriente:

$$I = \frac{V}{R} \qquad [7.85]$$

La ecuación anterior, y en forma fasorial, se puede poner como:

$$\bar{V} = R \cdot \bar{I} \qquad [7.86]$$

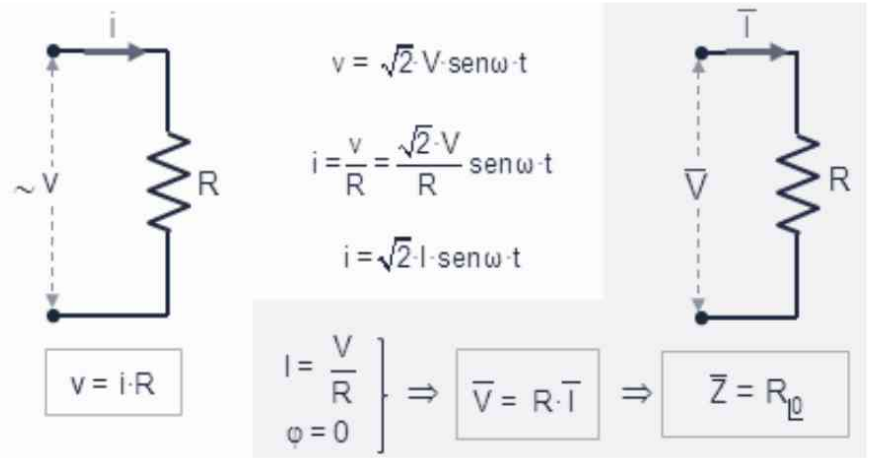


Figura 7.18. Circuito con resistencia R

Como el desfase $\varphi = 0$, conforme a las *fórmulas [7.72]* y *[7.73],* se tiene:

$$\bar{Z} = \frac{V_{\angle 0}}{I_{\angle 0}} = Z_{\angle 0} \Rightarrow \bar{Z} = R \qquad [7.87]$$

La impedancia $\boldsymbol{Z}$ de una resistencia tiene por módulo el de la resistencia y por argumento 0 rad.

En la *figura 7.19* se tiene la representación cartesiana y fasorial de la tensión y la intensidad.

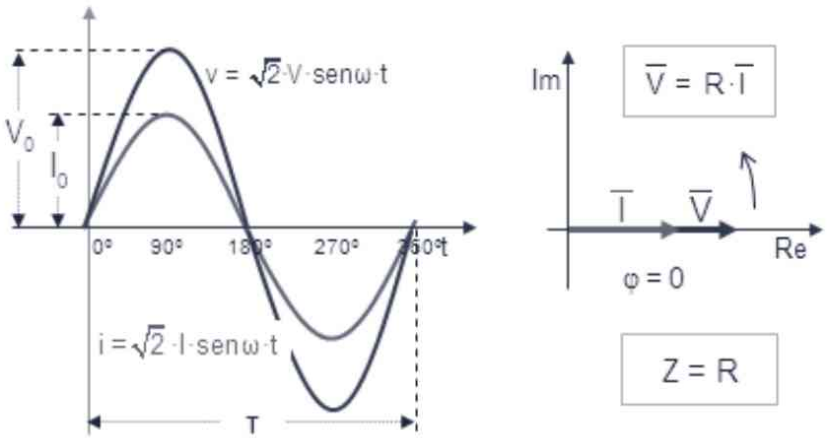


Figura 7.19. Circuito con resistencia R: representación cartesiana y fasorial (valores eficaces)

El vector giratorio $\boldsymbol{I_0}$, *ecuación [7.41]*, correspondiente a la intensidad de valor máximo I_0, valor eficaz I, y valor instantáneo i, en el circuito R es:

$$\overline{I}_0 = \sqrt{2}\frac{V}{R}\cos\omega t + j\cdot\sqrt{2}\frac{V}{R}\operatorname{sen}\omega t \qquad [7.88]$$

La función sinusoidal i, *ecuación [7.84]*, está representada por la proyección en el eje *Im* del vector giratorio $\boldsymbol{I_0}$, esto es:

$$i = \operatorname{Im}\left[\overline{I}_0\right] = \sqrt{2}\frac{V}{R}\cdot\operatorname{sen}\omega t \qquad [7.89]$$

7.11 CIRCUITO DE CA SINUSOIDAL CON RESISTENCIA *R*: POTENCIA ACTIVA *P*

La potencia instantánea de un circuito eléctrico, sea en CC o en CA, se obtiene multiplicando la tensión v por la intensidad i en el instante considerado:

$$p = v\cdot i \qquad [7.90]$$

En el circuito R del apartado anterior, la potencia instantánea, *figura 7.20*, es pues:

$$p = v\cdot i = (\sqrt{2}\cdot V\cdot\operatorname{sen}\omega t)\cdot(\sqrt{2}\cdot I\cdot\operatorname{sen}\omega t) = 2\cdot V\cdot I\cdot\operatorname{sen}^2\omega t \qquad [7.91]$$

Recordando las dos identidades trigonométricas siguientes:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta \quad \Rightarrow \quad \alpha=\beta \quad \Rightarrow \cos 2\cdot\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Operando, se obtiene:

$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \cos^2\alpha\right)$$

Por tanto, la *ecuación [7.91]* de la potencia p se puede poner en la forma:

$$p = v\cdot i = V\cdot I - V\cdot I\cdot\cos 2\cdot\omega t \qquad [7.92]$$

Esta ecuación permite las siguientes conclusiones:

1. La potencia no es constante, es unidireccional y siempre positiva (obsérvese que la potencia no es alterna).

2. La potencia instantánea p tiene dos componentes. Una componente constante e independiente del tiempo ($V \cdot I$) y otra componente senoidal ($V \cdot I \cdot \cos 2 \cdot \omega \cdot t$), función del tiempo y con una frecuencia doble ($2 \cdot \omega$) que la tensión v o la corriente i.

3. Puesto que el valor medio de la componente senoidal ($V \cdot I \cdot \cos 2 \cdot \omega \cdot t$) es cero, el valor medio P, de potencia instantánea p (tómese un ciclo de p) es igual a la componente constante ($V \cdot I$):

$$P = V \cdot I \qquad [7.93]$$

Gráficamente, *figura 7.20*, la energía correspondiente a la potencia p en el tiempo de un ciclo de p, corresponde al área limitada por la curva p y el *eje ox* en un ciclo (energía $= p \cdot t$). Obsérvese que esta área es igual al área limitada por la potencia media, $P = V \cdot I$, y el *eje ox* en el mismo ciclo (las dos semiáreas de la parte superior de la curva, en el primer ciclo de p, rellenan las áreas que faltan en el rectángulo correspondiente a dicho ciclo).

Como $V = I \cdot R$, *[fórmula 7.85]*, la ecuación anterior se puede poner en la forma:

$$P = V \cdot I = I^2 \cdot R \qquad [7.94]$$

Para diferenciar la potencia P de una resistencia R, de la potencia de una inductancia L o de una capacidad C, que tienen comportamientos diferentes como se verá en los próximos apartados, a dicha potencia se le conoce como **potencia activa *P***. Su unidad es el vatio (W).

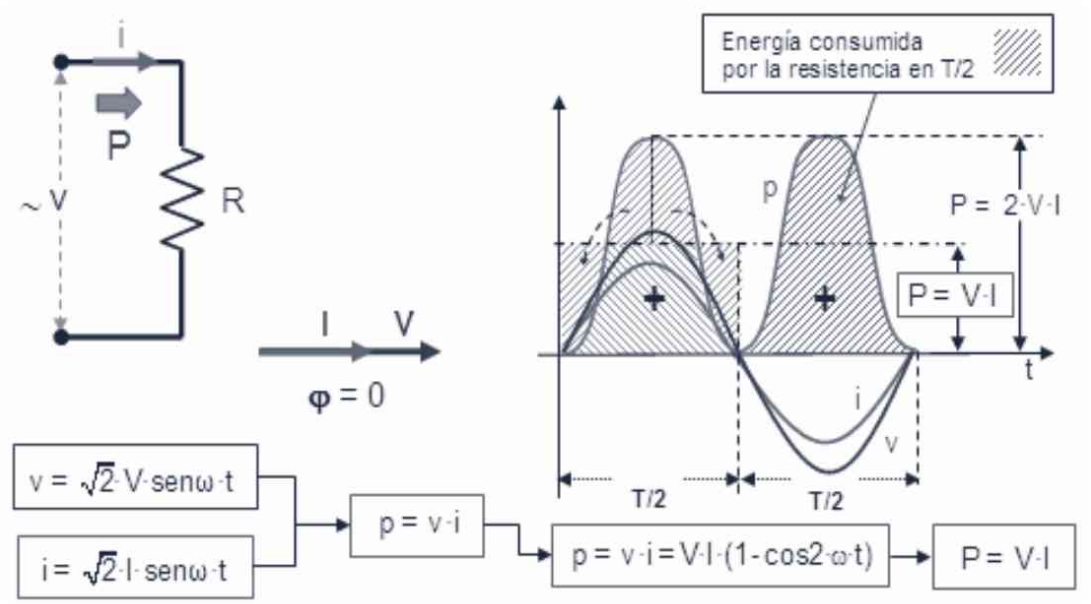


Figura 7.20. Circuito con resistencia R: potencia activa P

Observa:

Además de las resistencias, los motores que transforman la energía eléctrica en energía mecánica tienen potencia activa. Cada vez que en un circuito eléctrico exista una transformación de energía eléctrica en energía mecánica o calor, existe potencia activa.

El valor medio de la potencia *p* se puede obtener integrando la *ecuación [7.88]* a lo largo de medio ciclo de *p*:

$$P = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} p\cdot t\cdot dt = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} V\cdot I\cdot(1-\cos 2\cdot\omega\cdot t)\cdot t\cdot dt = V\cdot I \qquad [7.95]$$

7.12 CIRCUITO DE CA SINUSOIDAL CON INDUCTANCIA *L*: TENSIÓN, INTENSIDAD, REACTANCIA INDUCTIVA X_L

En la *figura 7.21* se tiene el esquema de un circuito de CA con un solo elemento constituido por una inductancia *L,* conectado a una tensión sinusoidal *v* que hace circular una corriente de intensidad *i*:

$$i = \sqrt{2}\cdot I\cdot \operatorname{sen}\omega t \qquad [7.96]$$

En todo momento esta intensidad origina una fem de autoinducción en la bobina, *fórmula [6.37],* tal que:

$$e_a = -L\frac{\Delta i}{\Delta t} \qquad [7.97]$$

Conforme a la 2.ª Ley de Kirchhoff, se tiene:

$$v + e_a = 0 \quad \Rightarrow \quad v = L\frac{\Delta i}{\Delta t} = \sqrt{2}\cdot I\cdot L\frac{\Delta \operatorname{sen}\omega t}{\Delta t} \qquad [7.98]$$

Al final de este apartado se demuestra la solución matemática para la ecuación anterior, obteniéndose entonces para la tensión *v* en los extremos de la inductancia:

$$v = \sqrt{2}\cdot\omega L\cdot I\cdot \operatorname{sen}(\omega t + \pi/2) = \sqrt{2}\cdot V\cdot \operatorname{sen}(\omega t + \pi/2) \qquad [7.99]$$

Esta ecuación indica que la tensión *v está desfasada en adelanto* un ángulo de $\pi/2$ rad (90º), **desfase $\varphi = \pi/2$**, respecto de la intensidad *i*, esto es, la tensión alcanza su valor máximo cuando la intensidad es nula y viceversa, *figura 7.22*. De la ecuación anterior se deduce que:

$$V = \omega \cdot L \cdot I = X_L \cdot I \qquad [7.100]$$

Al producto, $X_L = \omega \cdot L$, se le denomina *reactancia inductiva* y su unidad es el ohmio (Ω).

En forma fasorial la ecuación *[7.100]* se puede poner como:

$$\overline{V} = j \cdot \omega \cdot L \cdot \overline{I} = j \cdot X_L \cdot \overline{I} \qquad [7.101]$$

La reactancia inductiva tiene las siguientes formas, binómica y polar:

$$\overline{X}_L = j \cdot \omega \cdot L \quad \Rightarrow \quad \overline{X}_L = \omega \cdot L_{\underline{/\pi/2}} \qquad [7.102]$$

Como el desfase $\varphi = \pi/2$, conforme a las *fórmulas [7.74]* y *[7.75],* se tiene para la impedancia de una inductancia:

$$\overline{Z} = \frac{V_{\underline{/\pi/2}}}{I_{\underline{/0}}} = Z_{\underline{/\pi/2}} \quad \Rightarrow \quad \overline{Z} = j \cdot X_L \qquad [7.103]$$

La impedancia ***Z*** de una inductancia tiene por módulo y argumento los correspondientes a su reactancia inductiva.

Por otra parte, las variaciones que se producen entre 0º y 90º tienen signo positivo ($i_2 - i_1 > 0$), las que se producen entre 90º y 180º tienen signo negativo ($i_2 - i_1 < 0$), las que se producen entre 180º y 270º tienen signo negativo ($i_2 - i_1 < 0$), y las que se producen entre 270º y 360º, vuelven a tener signo positivo ($i_2 - i_1 > 0$).

Se puede entender de forma gráfica el desplazamiento de la tensión *v* respecto de la intensidad *i*. En la *figura 7.23* se puede observar que en la sinusoide correspondiente a la intensidad *i*, para un mismo tiempo Δt, las variaciones $\Delta i/\Delta t$ son mayores en los puntos de la sinusoide que están más próximos al *eje x* que en aquellos que están más alejados. Así, $(i_2 - i_1)/\Delta t$ de tramos próximos a *eje x* > $(i_2 - i_1)/\Delta t$ de tramos alejados del *eje x*, luego esas variaciones producen mayor fem e_a y en consecuencia la *v* correspondiente también es mayor. También se tiene que a medida que los puntos se acercan a los valores máximos (positivo y negativo), la relación $\Delta i/\Delta t$ disminuye acentuadamente (menor pendiente), siendo cero (pendiente nula) en los puntos correspondientes a los valores máximos.

Las consideraciones de los dos párrafos anteriores permiten concluir que la sinusoide correspondiente a la tensión *v* en bornes de la bobina tiene su valor máximo positivo en 0º, su valor máximo negativo en 180º, y cambia de signo en los 90º y 270º. Esto permite dibujar la sinusoide correspondiente a la tensión *v* adelantada 90º respecto de la intensidad *i*, *figura 7.23*.

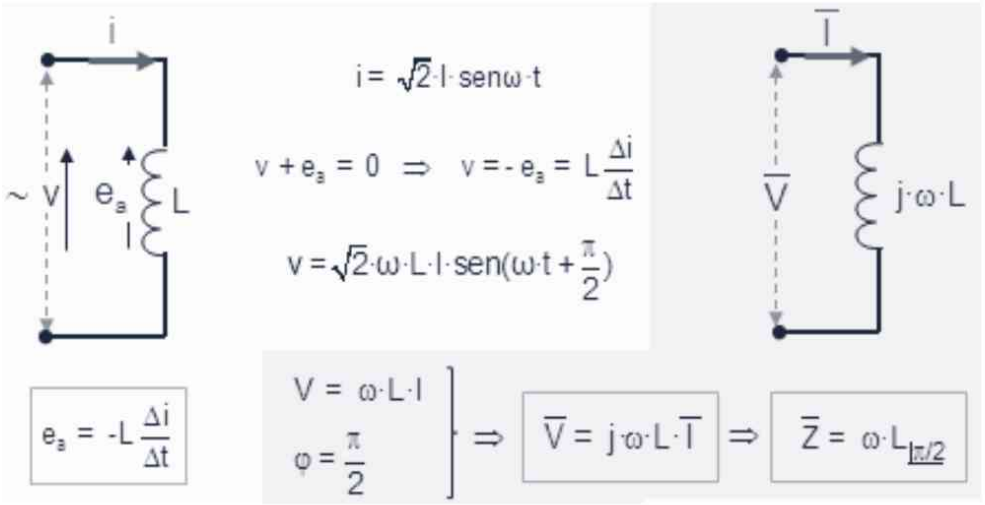


Figura 7.21. Circuito con inductancia L

En la *figura 7.22* se tiene una representación cartesiana de *v* e *i* y una representación fasorial de los valores eficaces ***V*** e ***I***.

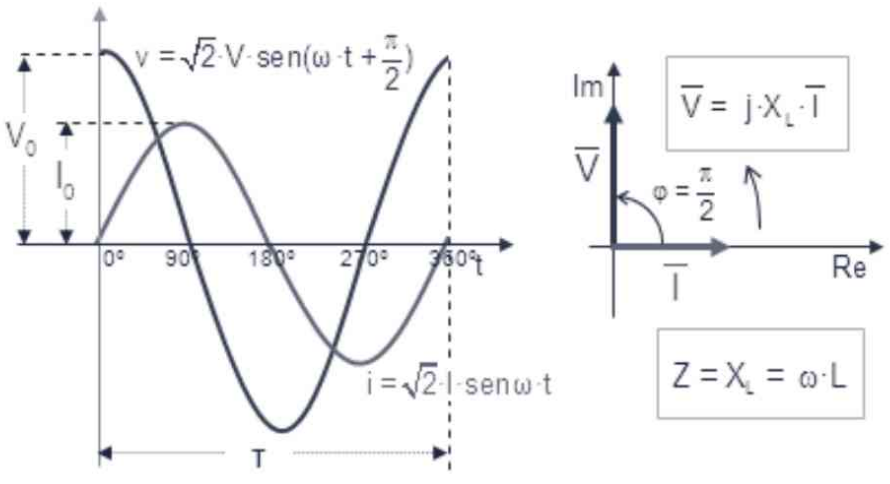


Figura 7.22. Circuito con inductancia L: representación cartesiana y fasorial (valores eficaces)

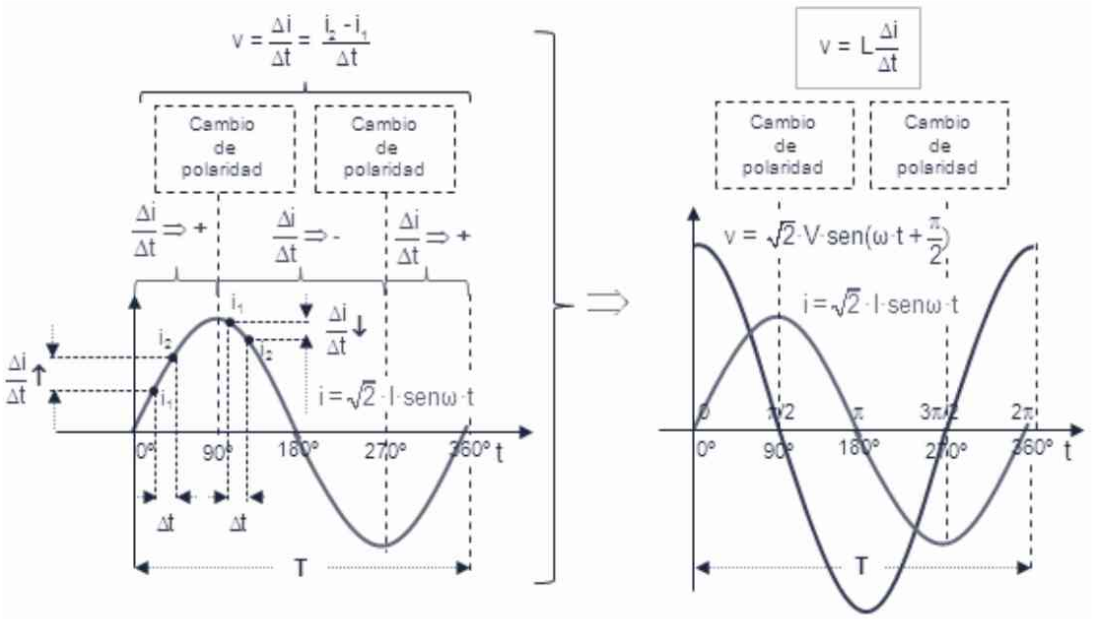


Figura 7.23. Circuito con inductancia L: explicación del desfase entre tensión v y corriente i

El vector giratorio $\boldsymbol{V_0}$, *ecuación [7.41]*, correspondiente a la tensión de valor máximo V_0, valor eficaz V, y valor instantáneo v, para el circuito L es:

$$\overline{V}_0 = \sqrt{2}\cdot\omega L\cdot I\cdot\cos(\omega t+\pi/2) + j\cdot\sqrt{2}\cdot\omega L\cdot I\cdot\operatorname{sen}(\omega t+\pi/2) \qquad [7.104]$$

La función sinusoidal v, *ecuación [7.99]*, está representada por la proyección en el eje *Im* del vector giratorio $\boldsymbol{V_0}$, esto es:

$$v = \operatorname{Im}\left[\overline{V}_0\right] = \sqrt{2}\cdot\omega L\cdot I\cdot\operatorname{sen}(\omega t+\pi/2) \qquad [7.105]$$

Si se tienen inductancias en serie o paralelo, las inductancias equivalentes se obtienen de la forma explicada en los *apartados [6.17]* y *[6.18]*.

A partir de la *ecuación [7.97]* en forma diferencial se obtiene la tensión v en los extremos de la inductancia L:

$$v = L\frac{di}{dt} = \sqrt{2}\cdot I\cdot L\frac{d}{dt}\operatorname{sen}\omega t = \sqrt{2}\cdot I\cdot L\cdot\omega\cos\omega t = \sqrt{2}\cdot\omega L\cdot I\cdot\operatorname{sen}(\omega t+\pi/2) \qquad [7.106]$$

También, teniendo en cuenta la relación entre un fasor y su derivada, *ecuación [7.60]*:

$$\text{intensidad } i \Rightarrow \text{fasor } \overline{I} = I_{\underline{0}} \Rightarrow \frac{di}{dt} \Rightarrow \omega \cdot I_{\underline{\pi/2}} = j \cdot \omega \cdot I \qquad [7.107]$$

$$v = L\frac{di}{dt} \Rightarrow \overline{V} = L \cdot \omega \cdot I_{\underline{\pi/2}} = j \cdot \omega \cdot L \cdot I \qquad [7.108]$$

7.13 CIRCUITO DE CA SINUSOIDAL CON INDUCTANCIA *L*: POTENCIA REACTIVA INDUCTIVA Q_L

En el circuito *L* del apartado anterior, la potencia instantánea, *figura 7.24*, es:

$$p = v \cdot i = \left[\sqrt{2} \cdot V \cdot \text{sen}\,(\omega t + \pi/2)\right] \cdot \left[\sqrt{2} \cdot I \cdot \text{sen}\,\omega t\right] = 2 \cdot V \cdot I \cdot \cos\omega t \cdot \text{sen}\,\omega t \qquad [7.109]$$

Recordando la identidad trigonométrica:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\,\beta \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2} \cdot \text{sen}2 \cdot \alpha$$

Por tanto, la *ecuación [7.109]* de la potencia *p* se puede poner en la forma:

$$p = v \cdot i = V \cdot I \cdot \text{sen}\,2 \cdot \omega t \qquad [7.110]$$

Esta ecuación permite las siguientes conclusiones:

1. La potencia no es constante, es alterna, con una frecuencia doble ($2 \cdot \omega$) que la tensión *v* o la corriente *i*.

2. Puesto que el valor medio de una señal sinusoidal, ($V \cdot I \cdot \text{sen}\ 2 \cdot \omega \cdot t$) es cero, el valor medio *P*, de la potencia instantánea *p* (tómese un ciclo de *p*) es 0.

$$P = 0 \qquad [7.111]$$

Gráficamente, la energía correspondiente a la potencia p en el tiempo de un ciclo de p, corresponde al área limitada por la curva p y el *eje ox* en un ciclo (energía $= p \cdot t$). Obsérvese que, en un ciclo de la potencia p, medio ciclo corresponde a una energía positiva, y el medio ciclo siguiente, la energía, de la misma magnitud que la anterior, tiene signo negativo, es decir, el balance energético en el ciclo es cero, luego la potencia media P correspondiente ha de ser nula también.

Ahora bien, aunque la potencia media P es nula, existe un intercambio energético. La inductancia, durante un medio ciclo de la potencia (1/4 de ciclo de la tensión) almacena energía en el circuito en forma electromagnética, y después la devuelve a la fuente en el medio ciclo siguiente. Por tanto, existe un trasiego de energía entre la fuente y la inductancia.

Al producto Q_L, de los valores eficaces de la tensión V por la intensidad I, por similitud con la *fórmula [7.94]*, de la potencia de una resistencia, se le denomina **potencia reactiva inductiva**, y como, $V = X_L \cdot I$, se tiene:

$$Q_L = V \cdot I = \frac{V^2}{\omega L} = I^2 \cdot X_L = I^2 \cdot \omega L \qquad [7.112]$$

La unidad de la potencia reactiva inductiva es el voltio-amperio reactivo (VAr). El aparato para su medida se llama *varímetro* y se conecta de la misma forma que un vatímetro.

Obsérvese que la potencia reactiva coincide con la amplitud, $V \cdot I$, de las oscilaciones que presenta la potencia instantánea p.

Como se ha visto, esta potencia no supone un gasto energético, pero en las instalaciones eléctricas, como se verá en los próximos apartados, es preciso tenerla en cuenta, pues su existencia aumenta la intensidad de las líneas, lo que supone aumento de las pérdidas por efecto Joule o un sobredimensionamiento de conductores, aparamenta, transformadores y alternadores. Por esta razón, las compañías suministradoras de energía eléctrica colocan en los consumidores contadores de "energía reactiva".

En el próximo apartado se analiza la potencia de un condensador C, al cual le corresponde una potencia reactiva pero de sentido contrario a la de la inductancia. Se suele tomar la potencia reactiva inductiva con signo positivo (carga de energía reactiva, o lo que es lo mismo, consumo de energía reactiva), y a la potencia reactiva capacitiva con signo negativo (fuente de energía reactiva, o lo que es lo mismo, generación de energía reactiva).

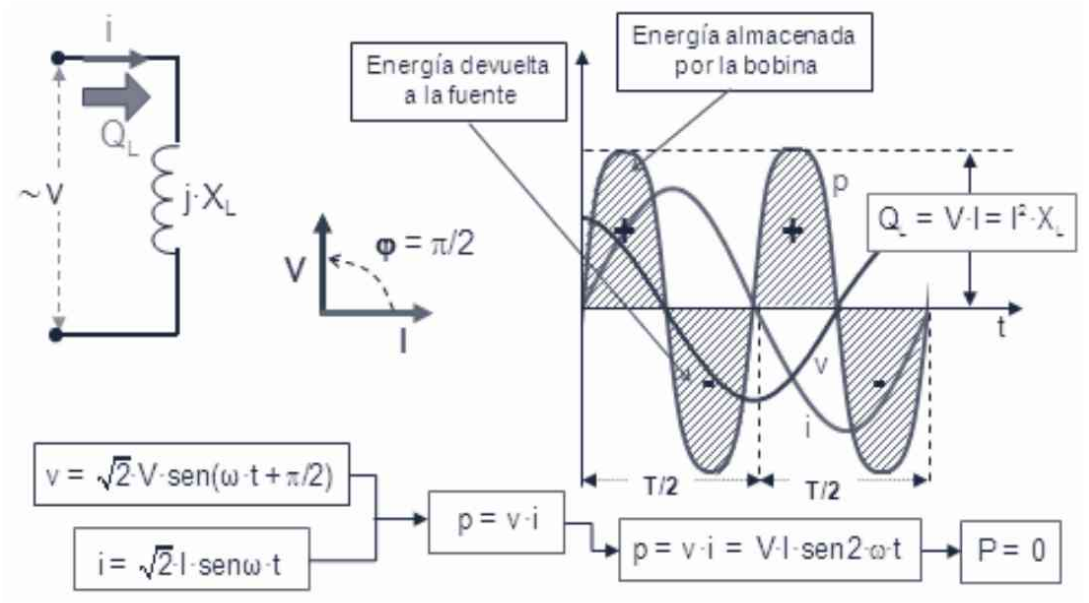


Figura 7.24. Circuito con inductancia L: potencia reactiva inductiva Q_L

A la potencia reactiva inductiva también se le llama *potencia magnetizante,* por corresponder a la creación de los campos *magnéticos en las bobinas.*

Se debe tener en cuenta que, en ciertos casos, las cargas eléctricas son consumidoras de energía reactiva aunque no existan bobinas en las mismas. Esto se produce, por ejemplo, en los circuitos electrónicos que se utilizan para la regulación y control de las máquinas eléctricas, en los que se produce un retraso de la intensidad respecto de la tensión, que da lugar a una potencia reactiva.

Observa:

La potencia activa P supone un *consumo energético* por parte de una instalación eléctrica receptora, la potencia reactiva inductiva Q_L, supone un *intercambio energético* entre la instalación receptora y la red de suministro de la energía eléctrica.

Como símil, considérese un hombre que llena un depósito de agua situado a una altura h respecto de otro depósito que contiene el agua que se quiere trasvasar. Para ello se sirve de una escalera y un balde de masa m. Cada vez que el hombre sube un balde de agua, le comunica al agua que eleva (de masa M) una energía, $E_M = M \cdot g \cdot h$, además, el balde también recibe una energía, $E_m = m \cdot g \cdot h$. De esta manera, cada vez que el hombre sube un balde de agua, ha de aportar una energía total, $E_T = E_M + E_m$. Al descender de la altura h, para subir otro balde de agua, la energía que se le suministró a la masa del balde, $E_m = m \cdot g \cdot h$, es devuelta, es una energía fluctuante, y la energía útil es la correspondiente a la masa de agua que se elevó, $E_M = M \cdot g \cdot h$, la potencia activa P, energía aportada en la unidad de tiempo, corresponde a la energía E_M (aportada a la masa de agua). La potencia reactiva Q, corresponde a la energía E_m (aportada a la masa del balde).

Observa:

Una bobina tiene siempre una resistencia debida al conductor con la que está hecha, por lo que, aunque puede ser muy pequeña, le corresponde una potencia activa, $P = I^2 \cdot R$. Además, si tiene núcleo de hierro la potencia P es superior a dicho producto, debido a las pérdidas en el hierro (histéresis y corrientes de Foucault), y al efecto pelicular (*apartados 6.7 y 6.11)*.

Teniendo en cuenta la *fórmula [6.46]* para hallar la energía almacenada en una bobina, se tiene que el valor máximo de la energía almacenada por el campo magnético es:

$$W_{max.mag.} = \frac{1}{2} L \cdot I_{max}^2 = \frac{1}{2} L \cdot \left(\sqrt{2} \cdot I\right)^2 = L \cdot I^2 \qquad [7.113]$$

Por lo que la *ecuación [7.110]* se puede poner:

$$Q_L = I^2 \cdot \omega \cdot L = \omega \cdot W_{max.mag.} \qquad [7.114]$$

La potencia reactiva de una inductancia equivale al producto de la pulsación ω por el valor máximo de la energía almacenada en su campo magnético.

7.14 CIRCUITO DE CA SINUSOIDAL CON CAPACIDAD *C*: TENSIÓN, INTENSIDAD, REACTANCIA CAPACITIVA X_C

En la *figura 7.25* se tiene el esquema de un circuito de CA con un solo elemento constituido por una capacidad *C,* conectado a una tensión sinusoidal *v* que hace circular una corriente de intensidad *i*:

$$i = \sqrt{2} \cdot I \cdot \operatorname{sen} \omega t \qquad [7.115]$$

En todo momento esta intensidad *i* y la tensión *v* que la produce, conforme a las *fórmulas [2.1] y [3.2]*, cumplen la relación:

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\Delta C \cdot V}{\Delta t} = C \frac{\Delta V}{\Delta t} \qquad [7.116]$$

Igualando las dos ecuaciones anteriores:

$$i = C\frac{\Delta V}{\Delta t} = \sqrt{2}\cdot I\cdot \operatorname{sen}\omega t \;\Rightarrow\; \Delta\cdot V = \frac{1}{C}\sqrt{2}\cdot I\cdot \operatorname{sen}\omega t\cdot \Delta t \qquad [7.117]$$

Al final de este apartado se demuestra la solución matemática para la ecuación anterior, obteniéndose para la tensión *v* en los extremos del condensador:

$$v = \sqrt{2}\,\frac{1}{\omega C}\cdot I\cdot \operatorname{sen}(\omega t - \pi/2) \qquad [7.118]$$

Esta ecuación indica que la tensión *v está desfasada en atraso* un ángulo de $\pi/2$ rad (90º), **desfase $\varphi = -\pi/2$**, respecto de la intensidad *i*, esto es, la tensión alcanza su valor máximo cuando la intensidad es nula y viceversa, *figura 7.26*. De la ecuación anterior se deduce que:

$$V = \frac{1}{\omega C} I = X_C \cdot I \qquad [7.119]$$

Al producto, $X_C = 1/\omega \cdot C$, se le denomina *reactancia capacitiva* y su unidad es el ohmio (Ω).

En forma fasorial la ecuación *[7.117]* se puede poner como:

$$\overline{V} = -j\frac{1}{\omega C}\,\overline{I} = -j\cdot X_C\cdot \overline{I} \qquad [7.120]$$

La reactancia capacitiva tiene las siguientes formas, binómica y polar:

$$\overline{X}_C = -j\frac{1}{\omega C} \;\Rightarrow\; \overline{X}_C = \left(\frac{1}{\omega C}\right)_{\underline{|-\pi/2}} \qquad [7.121]$$

Como el desfase $\varphi = -\pi/2$, conforme a las *fórmulas [7.74]* y *[7.75]*, se tiene:

$$\overline{Z} = \frac{V_{\underline{|-\pi/2}}}{I_{\underline{|0}}} = Z_{\underline{|-\pi/2}} \;\Rightarrow\; \overline{Z} = -jX_C \qquad [7.122]$$

La impedancia ***Z*** de un condensador tiene por módulo y argumento los correspondientes a su reactancia capacitiva.

Por otra parte, las variaciones que se producen entre 0º y 90º tienen signo positivo ($v_2 - v_1 > 0$), las que se producente entre 90º y 180º tienen signo negativo ($v_2 - v_1 < 0$), las que se producente entre 180º y 270º tienen signo negativo ($v_2 - v_1 < 0$), y las que se producen entre 270º y 360º, vuelven a tener signo positivo ($v_2 - v_1 > 0$).

De forma análoga a como se ha visto para la inductancia, se puede entender de forma gráfica el desplazamiento de la tensión *v* respecto de la intensidad *i*. En la *figura 7.27* se puede observar que en la sinusoide correspondiente a la tensión *v* en los extremos del condensador, para un mismo tiempo Δt, las variaciones $\Delta v/\Delta t$ son mayores en los puntos de la sinusoide que están más próximos al *eje x* que en aquellos que están más alejados. Así, $(v_2 - v_1)/\Delta t$ de tramos próximos al *eje x* > $(v_2 - v_1)/\Delta t$ de tramos alejados del *eje x,* luego durante esas variaciones la *i* correspondiente, $i = C \cdot \Delta v/\Delta t$, también es mayor. También se tiene que a medida que los puntos se acercan a los valores máximos (positivo y negativo), la relación $\Delta v/\Delta t$ disminuye acentuadamente (menor pendiente), siendo cero (pendiente nula) en los puntos correspondientes a los valores máximos.

Las consideraciones de los dos párrafos anteriores permiten concluir que la sinusoide correspondiente a la intensidad *i* que circula por el condensador, tiene su valor máximo positivo en 90º, su valor máximo negativo en 270º, y cambia de signo en los 0º y 180º. Esto permite dibujar la sinusoide correspondiente a la intensidad *i* adelantada 90º respecto de la tensión *v*, *figura 7.27*.

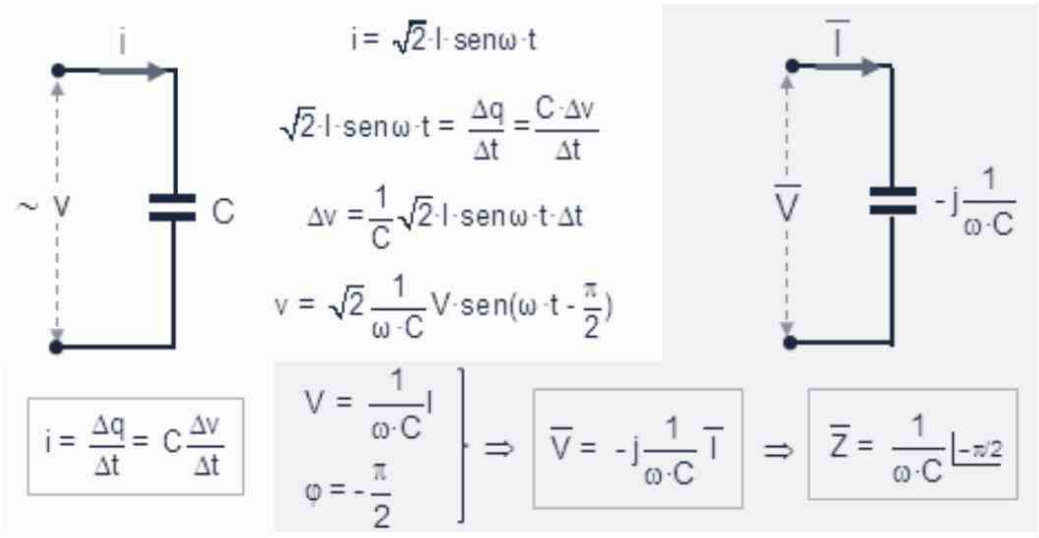


Figura 7.25. Circuito con capacidad C

En la *figura 7.26* se tiene una representación cartesiana de *v* e *i* y una representación fasorial de los valores eficaces ***V*** e ***I***.

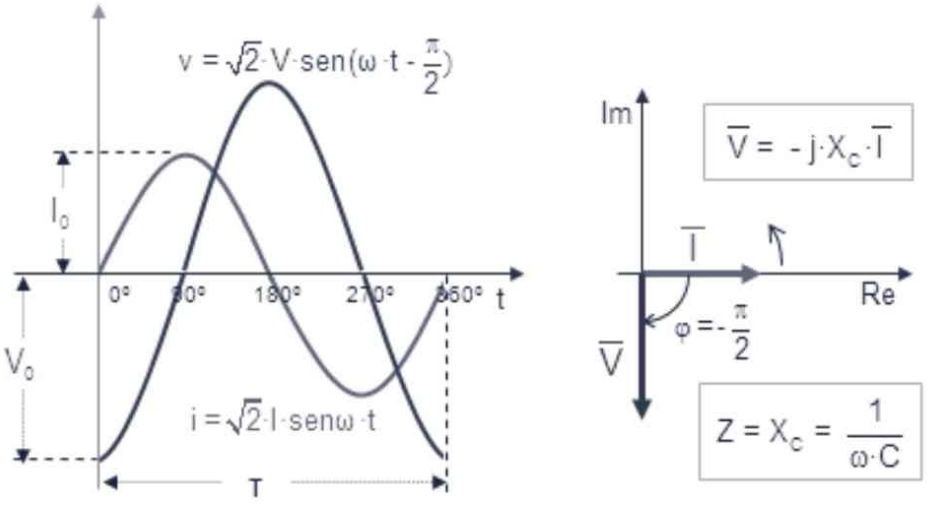


Figura 7.26. Circuito con capacidad C: representación cartesiana y fasorial (valores eficaces)

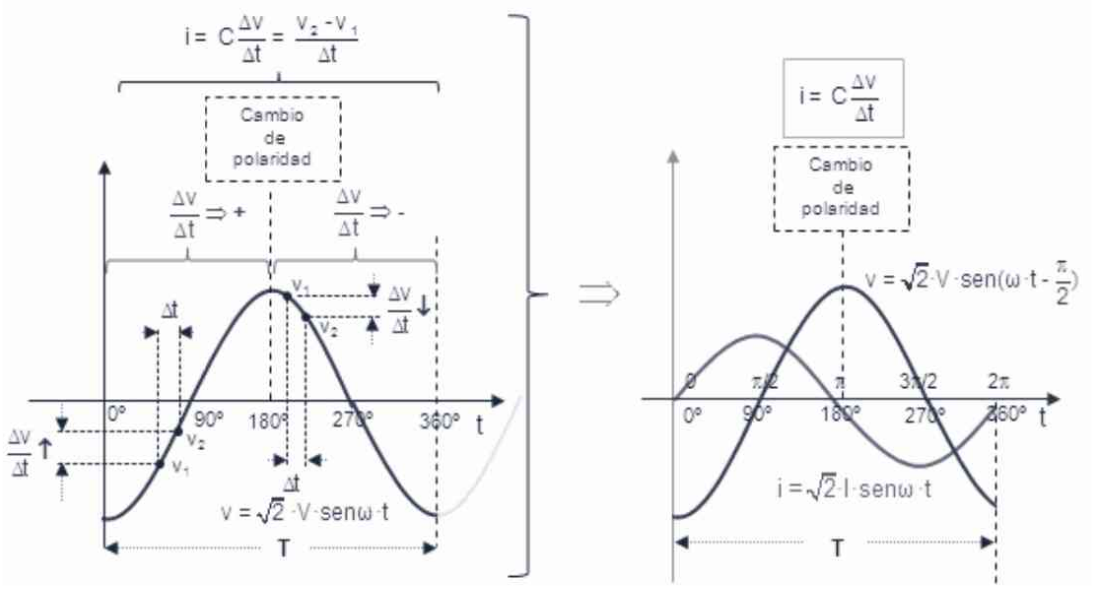


Figura 7.27. Circuito con capacidad C: explicación del desfase entre tensión v y corriente i

El vector giratorio $\boldsymbol{V_0}$, *ecuación [7.41]*, correspondiente a la tensión de valor máximo V_0, valor eficaz V, y valor instantáneo v, para el circuito C es:

$$\overline{V}_0 = \sqrt{2}\,\frac{1}{\omega C}\cdot I\cdot\cos(\omega t - \pi/2) + j\cdot\sqrt{2}\,\frac{1}{\omega C}\,I\cdot\mathrm{sen}(\omega t - \pi/2) \qquad [7.123]$$

La función sinusoidal *v*, *ecuación [7.116],* está representada por la proyección en el eje *Im* del vector giratorio $\boldsymbol{V_0}$, esto es:

$$v = \mathrm{Im}\left[\overline{V}_0\right] = \sqrt{2}\,\frac{1}{\omega C} I \cdot \mathrm{sen}(\omega t - \pi/2) \qquad [7.124]$$

Si se tienen condensadores en serie o paralelo, las capacidades equivalentes se obtienen por las *fórmulas [2.27]* y *[2.28]* respectivamente.

A partir de la *ecuación [7.117]* en forma diferencial se obtiene la tensión *v* en los extremos de la capacidad *C*:

$$v = \frac{1}{C}\sqrt{2}\cdot I \cdot \int \mathrm{sen}\,\omega t \cdot dt = \frac{1}{\omega C}\sqrt{2}\cdot I \cdot \mathrm{sen}(\omega t - \pi/2) \qquad [7.125]$$

También, teniendo en cuenta la relación entre un fasor y su integración, *ecuación [7.62]*:

$$\text{intensidad } i \;\Rightarrow\; \text{fasor } \overline{I} = I_{\underline{0}} \;\Rightarrow\; \int i \cdot dt \;\Rightarrow\; \frac{I}{\omega}\underline{|-\pi/2} = -j\frac{1}{\omega} I \qquad [7.126]$$

$$v = \frac{1}{C}\int i \cdot dt \;\Rightarrow\; \overline{V} = \left(\frac{1}{C}\frac{I}{\omega}\right)_{\underline{|0-\pi/2}} = -j\frac{I}{\omega \cdot C} \qquad [7.127]$$

7.15 CIRCUITO DE CA SINUSOIDAL CON CAPACIDAD C: POTENCIA REACTIVA CAPACITIVA QC

En el circuito *C* del apartado anterior, la potencia instantánea, *figura 7.28*, es:

$$p = v \cdot i = \left[\sqrt{2}\cdot V \cdot \mathrm{sen}\,(\omega t - \pi/2)\right]\left[\sqrt{2}\cdot I \cdot \mathrm{sen}\,\omega t\right] \qquad [7.128]$$

Realizando operaciones se obtiene:

$$p = v \cdot i = -V \cdot I \cdot \mathrm{sen}2 \cdot \omega t \qquad [7.129]$$

Esta ecuación permite las siguientes conclusiones análogas a las obtenidas para la inductancia:

1. La potencia no es constante, es alterna, con una frecuencia doble ($2 \cdot \omega$) que la tensión v o la corriente i.

2. Puesto que el valor medio de una señal sinusoidal, ($V \cdot I \cdot \text{sen } 2 \cdot \omega \cdot t$) es cero, el valor medio P, de la potencia instantánea p (tómese un ciclo de p) es 0.

$$P = 0 \qquad [7.130]$$

3. Comparando las potencias instantáneas de la inductancia y el condensador se observa que tienen las mismas características pero polaridad contraria, por lo que también la tienen las potencias reactivas correspondientes. Se considera positiva la potencia reactiva inductiva y negativa la potencia reactiva capacitiva. De acuerdo con esto, se dice que, una inductancia consume potencia reactiva y un condensador suministra potencia reactiva.

Gráficamente, la energía correspondiente a la potencia p en el tiempo de un ciclo de p, corresponde al área limitada por la curva p y el *eje ox* en un ciclo (energía $= p \cdot t$). Obsérvese que, en un ciclo de la potencia p, medio ciclo corresponde a una energía positiva, y el medio ciclo siguiente, la energía, de la misma magnitud que la anterior, tiene signo negativo, es decir, el balance energético en el ciclo es cero, luego la potencia media P correspondiente ha de ser nula también.

De la misma manera que en la inductancia, aunque la potencia media P es nula, existe un intercambio energético. El condensador, durante un medio ciclo de la potencia (1/4 de ciclo de la tensión) almacena energía en el circuito en forma de campo eléctrico, y después la devuelve a la fuente en el medio ciclo siguiente. Por tanto, existe un trasiego de energía entre la fuente y el condensador.

Al producto Q_C de los valores eficaces de la tensión V por la intensidad I, por similitud con la *fórmula [7.94]*, de la potencia de una resistencia, se le denomina **potencia reactiva capacitiva**, como, $V = X_C \cdot I$, teniendo en cuenta el convenio de signos para las potencias reactivas, se tiene:

$$Q_C = -V \cdot I = -\frac{V^2}{X_C} = -V^2 \cdot \omega C = -I^2 \cdot X_C = -I^2 \frac{1}{\omega C} \qquad [7.131]$$

La unidad de la potencia reactiva capacitiva es el voltio-amperio reactivo (VAr).

Obsérvese que la potencia reactiva coincide con la amplitud, $V \cdot I$, de las oscilaciones que presenta la potencia instantánea p.

Como las instalaciones eléctricas en general suelen tener un exceso de potencia reactiva inductiva, se utilizan los condensadores (ver *apartado 7.18*), para disminuir dichas potencias y evitar los perjuicios debido a ellas, comentados en el *apartado 7.13.*

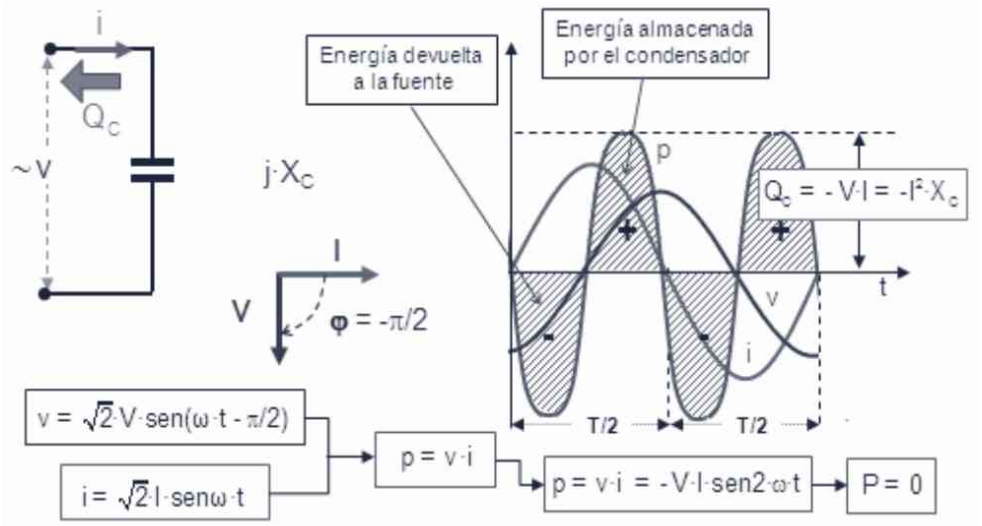


Figura 7.28. Circuito con capacidad C: potencia reactiva capacitiva Q_C

Observa:

La potencia activa *P* supone un *consumo energético* por parte de una instalación eléctrica receptora, la potencia reactiva capacitiva Q_C, de forma similar a la inductiva, supone un *intercambio energético* entre la instalación receptora y la red de suministro de la energía eléctrica.

Observa:

Un condensador tiene siempre una pequeña cantidad de potencia activa *P*, debido a que el dieléctrico no tiene una resistencia infinita, aunque de magnitud muy elevada existe una resistencia de fugas. Además, los cambios de polaridad en el dieléctrico, debido a la tensión alterna, producen en los dipolos del dieléctrico un fenómeno análogo a la histéresis magnética, denominado histéresis dieléctrica, a la que le corresponde una disipación de energía y por tanto, también, una potencia activa P.

Teniendo en cuenta la *fórmula [2.23]* para hallar la energía almacenada en un condensador, se tiene que el valor máximo de la energía almacenada por el campo eléctrico es:

$$W_{max.\,elec.} = \frac{1}{2} C \cdot V_{max}^2 = \frac{1}{2} C \cdot \left(\sqrt{2} \cdot V\right)^2 = C \cdot V^2 \qquad [7.132]$$

Teniendo en cuenta las *ecuaciones [7.127]* y *[7.117]*:

$$Q_C = I^2 \cdot X_C = \frac{V^2}{X_C} = \omega \cdot C \cdot V^2 = \omega \cdot W_{max.\,elec.} \qquad [7.133]$$

La potencia reactiva de una capacidad equivale al producto de la pulsación ω por el valor máximo de la energía almacenada en su campo eléctrico.

7.16 CIRCUITO DE RLC EN SERIE: DIAGRAMA DE TENSIONES Y DIAGRAMA DE IMPEDANCIAS

Se tiene un circuito con los tres elementos anteriores en serie, una resistencia ***R***, un condensador ***C*** y una inductancia *L*, *figura 7.29*. Las tensiones en los extremos de cada elemento se representan por: letras mayúsculas los valores eficaces (V_R, V_L, V_C, V), letras mayúsculas con subíndice "0" los valores máximos (V_{R0}, V_{L0}, V_{C0}, V_{L0}), letras minúsculas los valores instantáneos (v_R, v_L, v_C, v). A continuación se hace un estudio fasorial del circuito.

Las tensiones en cada uno de los elementos cumplen las relaciones descritas en los apartados anteriores.

Por comodidad, se toma como origen de fases la intensidad ***I***, común para todos los elementos del circuito, con un ángulo de fase de 0º, ($\boldsymbol{I} = I_0$). Así pues, se cumple que, $\boldsymbol{V_R}$ estará en fase con la intensidad, $\boldsymbol{V_L}$ adelantará a la intensidad en 90º y $\boldsymbol{V_C}$ estará retrasada con relación a la intensidad en 90º. Así mismo, conforme a la 2.ª Ley de Kirchhoff, se ha de cumplir que la tensión ***V*** en los extremos del conjunto ha de ser igual a la suma vectorial de los tres elementos:

$$\overline{V} = \overline{V}_R + \overline{V}_L + \overline{V}_C \qquad [7.134]$$

De esta manera se obtiene el triángulo de tensiones, *figura 7.29*.

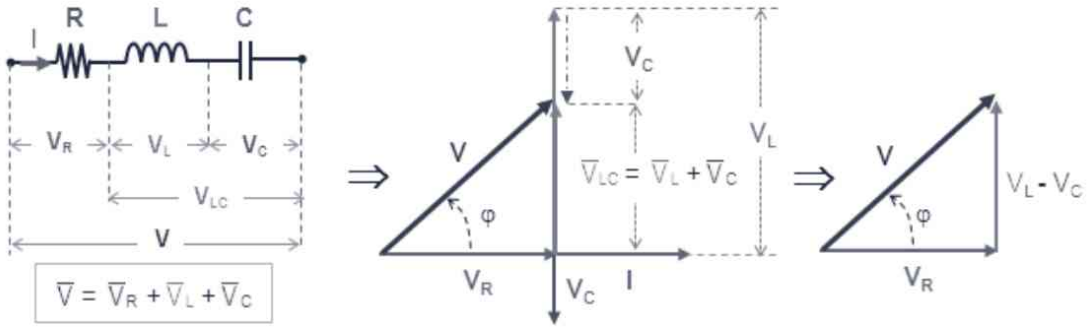


Figura 7.29. Circuito RLC, diagrama fasorial de tensiones, triángulo de tensiones

En la *figura 7.30* se tiene un diagrama fasorial de los valores máximos de tensiones (a otra escala que la de valores eficaces de la *figura 7.29*) y un diagrama cartesiano de los valores instantáneos de las tensiones y la intensidad.

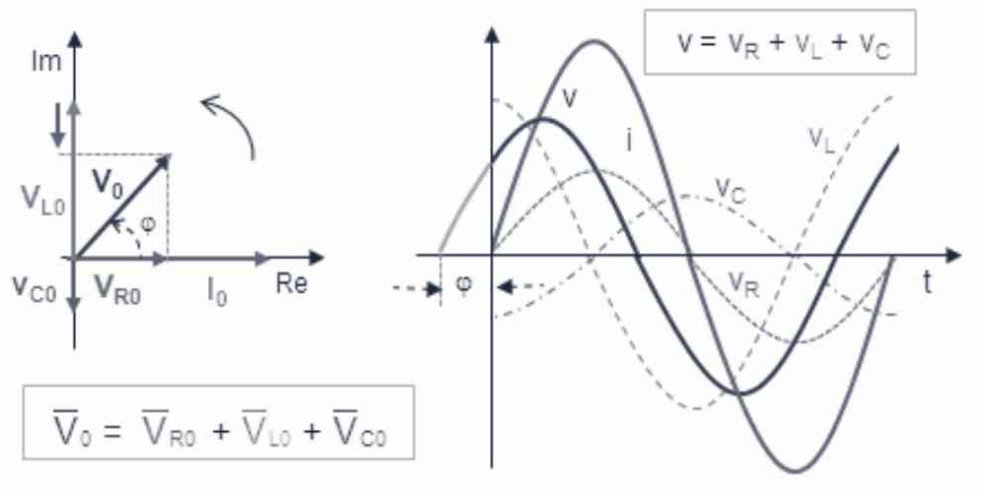


Figura 7.30. Circuito RLC: diagramas de tensiones, fasorial y cartesiano

Nótese que, como las diferentes tensiones no están en fase, alcanzan su valor máximo en tiempos diferentes, por lo que la tensión eficaz V (o máxima V_0) en los extremos del circuito es igual a la **suma fasorial** de las tensiones parciales en cada uno de los elementos, pero no es igual a la suma aritmética de dichas tensiones.

A partir del triángulo de tensiones, *figura 7.29*, y de la magnitud de cada una de las tensiones parciales, analizadas en los apartados anteriores:

$$\underline{V_{R|0^\circ}} = \underline{I_{|0^\circ}} \cdot \underline{R_{|0^\circ}} \qquad \underline{V_{L|90^\circ}} = \underline{I_{|0^\circ}} \cdot \underline{X_{L|90^\circ}} \qquad \underline{V_{C|-90^\circ}} = \underline{I_{|0^\circ}} \cdot \underline{X_{C|-90^\circ}} \qquad [7.135]$$

Se puede determinar la tensión V en los extremos del circuito:

$$V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} = \sqrt{(I \cdot R)^2 + (I \cdot X_L - I \cdot X_C)^2} = I \cdot \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = I \cdot Z \qquad [7.136]$$

Siendo Z el módulo de la impedancia $\boldsymbol{Z}$ del circuito, definida en el *apartado 7.6.*

Sustituyendo en la *ecuación [7.136]* las reactancias por sus respectivos módulos, $X_L = \omega \cdot L$ y $X_C = 1/\omega \cdot C$, se tiene para el módulo de la impedancia $\boldsymbol{Z}$:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} \qquad [7.137]$$

La fórmula anterior permite realizar el *triángulo de impedancias, figura 7.31.* Este triángulo también se obtiene dividiendo cada uno de los lados del *triángulo de tensiones* por la intensidad *I.*

Como los dos triángulos obtenidos son semejantes, el ángulo φ que forman la tensión $\boldsymbol{V}$ y la intensidad $\boldsymbol{I}$, es también el argumento de la impedancia $\boldsymbol{Z}$, cumpliéndose:

$$\varphi = \operatorname{arctag}\frac{X}{R} = \operatorname{arcsen}\frac{X}{Z} = \arccos\frac{R}{Z} \qquad [7.138]$$

Entonces la *fórmula [7.132]* en forma fasorial es:

$$\underline{V}_{\underline{\varphi}} = \underline{I}_{\underline{0}} \cdot \underline{Z}_{\underline{\varphi}} \qquad [7.139]$$

Si en lugar de conocerse la intensidad I y la impedancia $\boldsymbol{Z}$ del circuito, se conociese la tensión en los extremos V y la impedancia $\boldsymbol{Z}$, a partir de la *fórmula [7.136]*, y tomando como origen de fases la tensión V con argumento 0 ($\boldsymbol{V_0}$), se obtiene la intensidad $\boldsymbol{I}$:

$$\underline{I}_{-\varphi} = \frac{\underline{V}_{\underline{0}}}{\underline{Z}_{\underline{\varphi}}} \qquad [7.140]$$

Tal como se había definido en el *apartado 7.6*, *fórmula [7.75].*

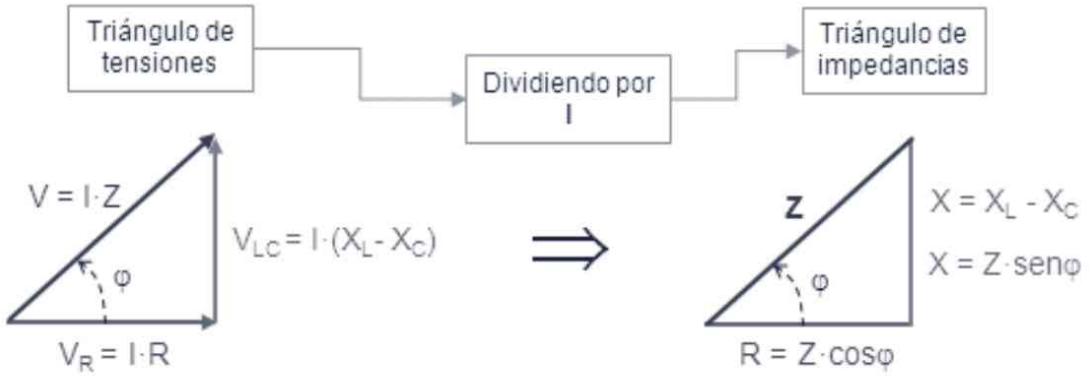


Figura 7.31. Circuito RLC: triángulo de tensiones y triángulo de impedancias

El vector giratorio $\boldsymbol{V_0}$, *ecuación [7.41]*, correspondiente a la tensión de valor máximo V_0, valor eficaz V, y valor instantáneo v, para el circuito *RLC* es:

$$\overline{V}_0 = \sqrt{2}\cdot I\cdot Z\cdot\cos(\omega t + \varphi) + j\cdot\sqrt{2}\cdot I\cdot Z\cdot\operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \qquad [7.141]$$

La función sinusoidal *v*, valor instantáneo de la tensión, está representada por la proyección en el eje *Im* del vector giratorio $\boldsymbol{V_0}$, esto es:

$$v = \mathrm{Im}\left[\overline{V}_0\right] = \sqrt{2}\cdot I \cdot Z \cdot \mathrm{sen}(\omega t + \varphi) \qquad [7.142]$$

La función sinusoidal *i*, valor instantáneo de la intensidad, que se ha tomado como origen de fases, es:

$$i = \sqrt{2}\cdot I \cdot \mathrm{sen}\,\omega t \qquad [7.143]$$

Respecto de la intensidad *i*, las tensiones, v_R, v_L y v_C están en fase adelantada 90º y atrasada 90º, tal como se ha explicado en los apartados correspondientes a cada una de ellas.

7.17 POTENCIAS EN CIRCUITOS RLC: POTENCIA ACTIVA, REACTIVA Y APARENTE

Si los lados del triángulo de tensiones del circuito *RLC*, *figura 7.29,* se multiplican por la intensidad *I* del circuito se obtiene un triángulo semejante, *figura 7.32*, cuyos lados tienen los siguientes valores:

El cateto adyacente, $I^2 \cdot R$, corresponde a la potencia de la resistencia *R* del circuito, por tanto, corresponde a una **potencia activa *P***:

$$P = I^2 \cdot R \qquad [7.144]$$

La potencia activa es la que se convierte en potencia de otro tipo, como por ejemplo, térmica o mecánica, y da lugar a una energía consumida (por un receptor), o generada (por un generador).

El cateto opuesto, $I^2 \cdot (X_L - X_C)$, corresponde a la potencia de la inductancia y el condensador, por tanto, corresponde a una **potencia reactiva *Q***:

$$Q = I^2 \cdot (X_L - X_C) \qquad [7.145]$$

La potencia reactiva supone un intercambio de energía por segundo entre el receptor (bobina y/o condensador) y la red o el generador.

La hipotenusa, $V \cdot I$, no tiene significado físico, como lo tiene la potencia activa o la potencia reactiva. Sin embargo es útil, en muchos casos, el valor de $V \cdot I$ que, por

similitud con la expresión de la CC se le llama **potencia aparente *S***, indicando, pues, el calificativo de aparente que no tiene el mismo significado físico que se le da en CC.

$$S = V \cdot I \qquad [7.146]$$

Cuando el ángulo $\varphi = 0$, la potencia aparente y la potencia activa son iguales, por lo que la potencia aparente es la máxima potencia activa que puede tener un receptor o un generador.

La unidad de la potencia aparente es el voltio-amperio (VA). Es de uso más frecuente los múltiplos kVA y MVA, que se suelen pronunciar "cavea" y "megavea" respectivamente.

El uso de tres unidades diferentes para las potencias *P* (W), *Q* (kVAr) y *S* (kVA), a pesar de tener las mismas dimensiones, hacen más rápido su identificación y ayudan a diferenciar las características de cada una de ellas.

Cualquier circuito de CA, sea en serie, paralelo o mixto, se puede reducir a un circuito *RLC*, por lo que los conceptos anteriores son generalizables a cualquier circuito de CA.

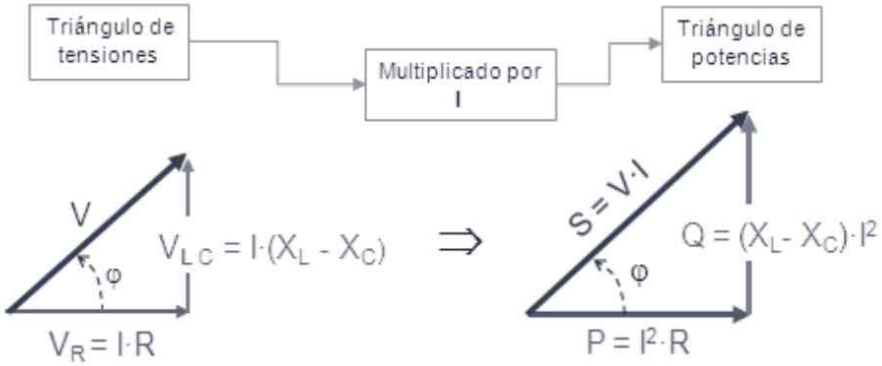


Figura 7.32. Triángulo de tensiones y triángulo de potencias

Del triángulo de potencias de la *figura 7.32*, se deducen otras formas, de uso más frecuente, para expresar la potencia activa y reactiva:

$$P = V \cdot I \cdot \cos\varphi \qquad [7.147]$$

$$Q = V \cdot I \cdot \operatorname{sen}\varphi \qquad [7.148]$$

En el plano complejo, *figura 7.33*, la expresión de la potencia es:

$$\bar{S} = P + j \cdot Q = V \cdot I \cdot \cos\varphi + j \cdot V \cdot I \cdot \operatorname{sen}\varphi \qquad [7.149]$$

A esta potencia se le denomina potencia compleja ***S***.

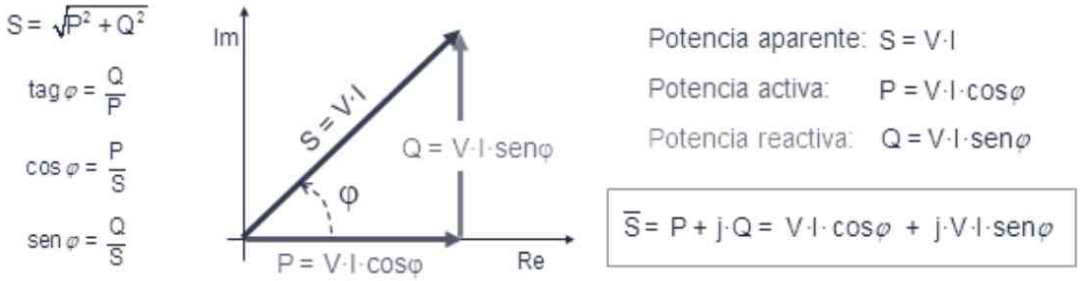


Figura 7.33. Triángulo de potencias

Como se demuestra en la *figura 7.34*, para obtener la potencia compleja se multiplica el fasor tensión ***V*** por el fasor **conjugado de la intensidad *I****, siendo éste último un fasor que tiene el módulo de ***I*** pero el argumento invertido (en forma binómica, la componente imaginaria cambiada de signo):

$$\overline{S} = \overline{V}\cdot\overline{I}^{*} = P + j\cdot Q \qquad [7.150]$$

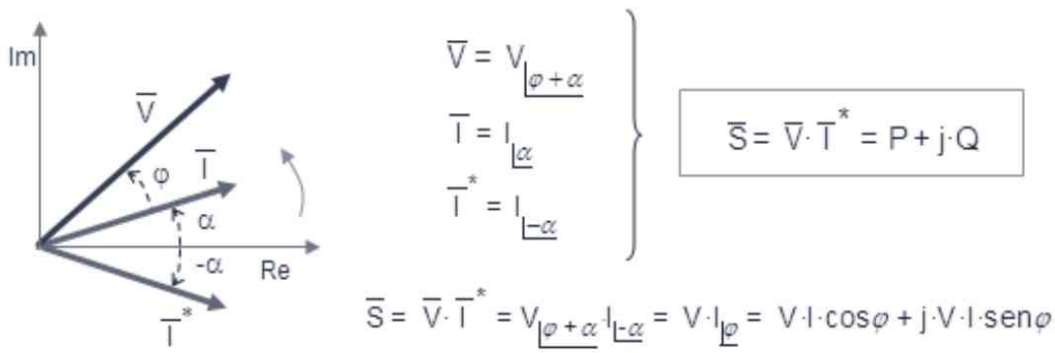


Figura 7.34. Potencia compleja ***S***

Observa:

Ampliando el símil del *apartado 7.13*, en el que un hombre llena un depósito de agua situado a una altura *h* respecto de otro depósito que contiene el agua que se quiere trasvasar. Para ello se sirve de una escalera y un balde de masa *m*. Cada vez que el hombre sube un balde de agua, le comunica al agua que eleva (de masa *M*) una energía, $E_M = M \cdot g \cdot h$, además, el balde también recibe una energía, $E_m = m \cdot g \cdot h$. De esta manera, cada vez que el hombre sube un balde de agua, ha de aportar una energía total, $E_T = E_M + E_m$. Al descender la altura *h*, para subir otro balde de agua, la energía que se le suministró a la masa del balde, $E_m = m \cdot g \cdot h$ es devuelta, es una energía fluctuante, y la energía útil es la correspondiente a la masa de agua que se elevó, $E_M = M \cdot g \cdot h$.

La potencia activa P, energía aportada en la unidad de tiempo, corresponde a la energía E_M (aportada a la masa de agua), la potencia reactiva Q corresponde a la energía E_m (aportada a la masa del balde) y la potencia aparente S corresponde a la energía total E_T.

Como la fuerza que tiene que realizar el hombre es, $F = M \cdot g + m \cdot g$, es evidente que interesa que la masa del balde m sea lo menor posible, lo que implica:

- Menor energía fluctuante E_m, por tanto potencia reactiva Q menor.
- Energía útil E_M constante, por tanto la potencia activa P permanece constante.
- Menor energía total E_T, potencia aparente S menor, que ha de aportar el hombre.

Conclusión, disminuyendo la masa del balde, que determina la potencia reactiva Q, se necesita un hombre con menor fuerza, que determina la potencia aparente S, para obtener el mismo beneficio, elevación del agua, que determina la potencia activa P.

Disminuir la masa del balde equivale, en el circuito eléctrico, a mejorar el cos φ.

Un circuito eléctrico, o un elemento, puede ser una carga o una fuente de potencia activa y/o una carga o una fuente de potencia reactiva. Para establecer el tipo de carga en un circuito, se asigna una polaridad arbitraria a la tensión V y un sentido también arbitrario a la intensidad I. De acuerdo con esto se cumple:

- Un circuito constituye una *carga de potencia activa* cuando la tensión V y la intensidad I están en fase y, además, la corriente I entra por el terminal a mayor tensión (terminal "a" en la *figura 7.35 izquierda*). De aquí se deriva:
  - Un circuito constituye una *fuente de potencia activa* cuando la tensión V y la intensidad I están en fase y, además, la corriente I sale por el terminal a mayor tensión (terminal "a" en la *figura 7.35 derecha*).
  - Un circuito constituye una *fuente de potencia activa* cuando la tensión V y la intensidad I están desfasadas 180º y, además, la corriente I entra por el terminal a mayor tensión (terminal "a" en la *figura 7.35 izquierda*).
  - Un circuito constituye una *carga de potencia activa* cuando la tensión V y la intensidad I están desfasadas 180º y, además, la corriente I sale por el terminal a mayor tensión (terminal "a" en la *figura 7.35 derecha*).
- Un circuito constituye una *carga de potencia reactiva* cuando la tensión V adelanta 90º a la intensidad I y, además, la corriente I entra por el terminal a mayor tensión (terminal "a" en la *figura 7.35 izquierda*). De aquí se deriva:

- Un circuito constituye una *fuente de potencia reactiva* cuando la tensión V adelanta 90º a la intensidad I y, además, la corriente I sale por el terminal a mayor tensión (terminal "a" en la *figura 7.35 derecha*).

- Un circuito constituye una *fuente de potencia reactiva* cuando la tensión V atrasa 90º a la intensidad I y, además, la corriente I entra por el terminal a mayor tensión (terminal "a" en la *figura 7.35 izquierda*).

- Un circuito constituye una *carga de potencia reactiva* cuando la tensión V atrasa 90º a la intensidad I y, además, la corriente I sale por el terminal a mayor tensión (terminal "a" en la *figura 7.35 derecha*).

Para ángulos diferentes de los expuestos, los resultados son combinaciones de las cargas o fuentes anteriores, *figura 7.35.*

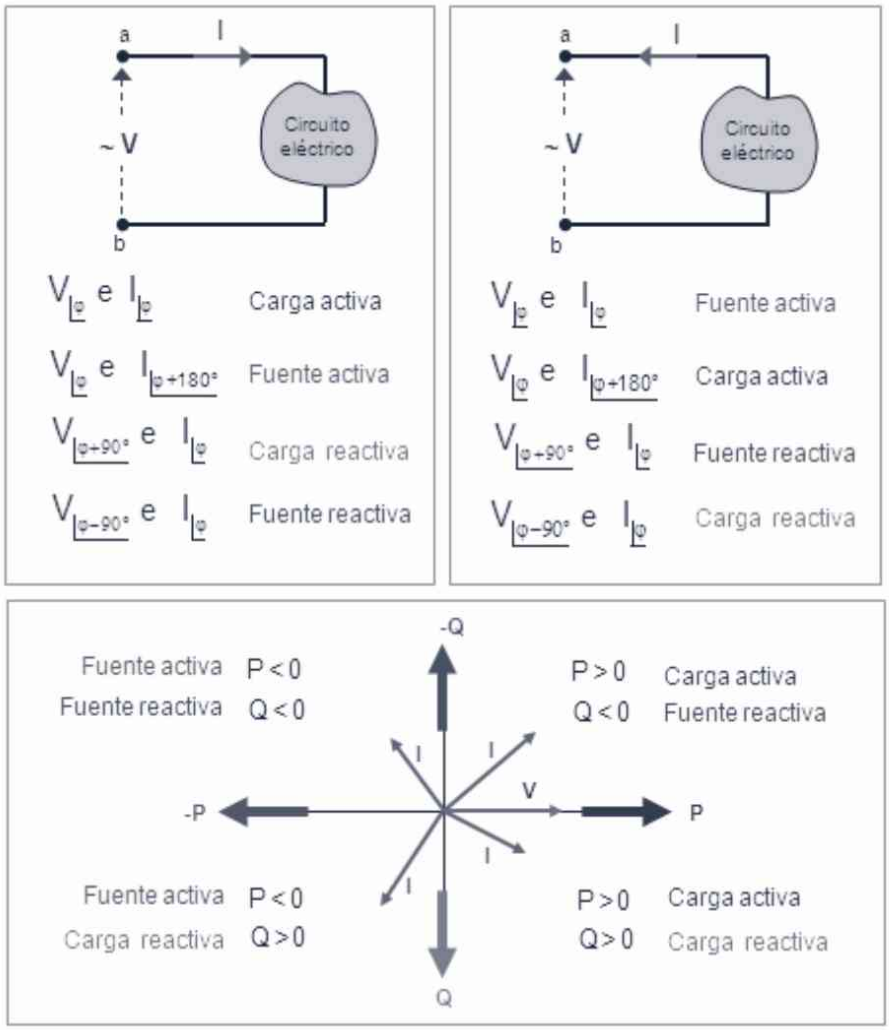


Figura 7.35. Circuito eléctrico como carga y como fuente

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

La **potencia instantánea** *p* del circuito *RLC, figura 7.29,* se obtiene multiplicando la tensión *v* por la intensidad *i, figura 7.36*:

$$v = \sqrt{2}\cdot V\cdot \text{sen}(\omega\cdot t + \varphi) \qquad [7.151]$$

$$i = \sqrt{2}\cdot I\cdot \text{sen}\omega\cdot t \qquad [7.152]$$

$$p = v\cdot i = \sqrt{2}\cdot V\cdot \text{sen}(\omega\cdot t + \varphi)\cdot\sqrt{2}\cdot I\cdot \text{sen}\omega\cdot t = 2\cdot V\cdot I\cdot \text{sen}(\omega\cdot t)\cdot\text{sen}(\omega\cdot t + \varphi) \qquad [7.153]$$

Teniendo en cuenta la relación trigonométrica:

$$\text{sen } a\cdot \text{sen } b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)] \qquad [7.154]$$

Se tiene para la potencia instantánea *p*:

$$p = V\cdot I\cdot\cos\varphi - V\cdot I\cdot\cos(2\cdot\omega\cdot t + \varphi) \qquad [7.155]$$

Se constata que la potencia instantánea *p* consta de dos términos, uno constante, $V \cdot I \cdot \cos \varphi$, y otro variable sinusoidal de frecuencia doble que la tensión o la corriente, $V \cdot I \cdot \cos (2 \cdot \omega \cdot t + \varphi)$.

Puesto que el valor medio del término variable sinusoidal es cero, se tiene que el valor medio de la potencia instantánea es igual al término constante. Un valor medio diferente de cero supone un consumo energético, como en una resistencia, a la potencia correspondiente, como ya se ha dicho, se le llama **potencia activa *P***, es decir:

$$P = V\cdot I\cdot\cos\varphi \qquad [7.156]$$

Conforme a la *fórmula [7.155]*, la componente variable de la potencia instantánea *p*, está comprendida entre un valor máximo $V \cdot I$ y un valor mínimo $-V \cdot I$. Se puede considerar la función de la potencia instantánea *p* como la proyección en el eje *oy* de la suma de dos vectores en el plano *xy*, *figura 7.36 derecha*, siendo uno un vector giratorio de magnitud $V \cdot I$, que gira a la velocidad angular $2 \cdot \omega$ alrededor de un punto *C*, que es el extremo de otro vector fijo, de módulo $V \cdot I \cdot \cos \varphi$, con la dirección del *eje oy* y sentido positivo. De esta manera, la proyección *OM*, en el *eje oy*, del extremo del vector giratorio es:

$$\text{Proyección } OM = V\cdot I\cdot\cos\varphi + V\cdot I\cdot\cos(\pi - 2\cdot\omega\cdot t + \varphi) = V\cdot I\cdot\cos\varphi - V\cdot I\cdot\cos(2\cdot\omega\cdot t + \varphi) = p \qquad [7.157]$$

Así, por ejemplo, en el instante inicial ($t = 0$), la proyección $OM = P - V \cdot I \cdot \cos \varphi = 0$. Pasado un tiempo *t*, cuando el vector giratorio coincida con el *eje oy* y sentido positivo,

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

$OM = P + V \cdot I$. Para un tiempo t, tal que el vector giratorio coincida con el *eje oy* y sentido negativo, $OM = P - V \cdot I$.

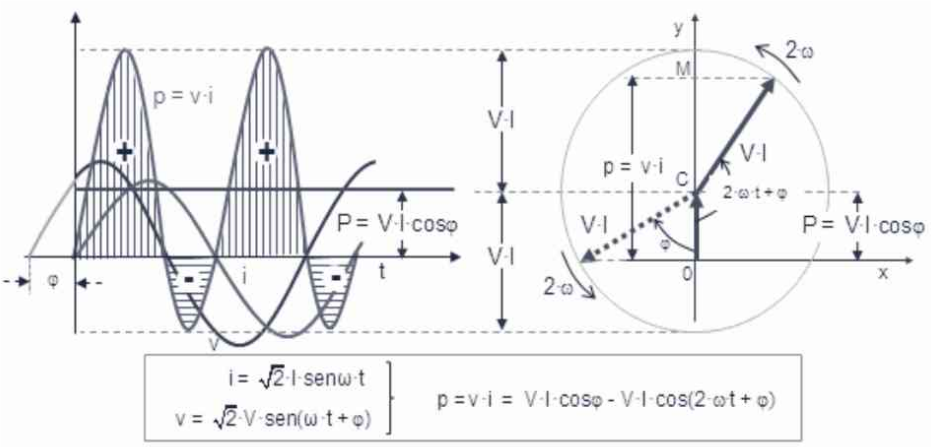


Figura 7.36. Potencia instantánea p y potencia media P

Se puede hacer un estudio más detallado de la potencia instantánea p, a partir de la *fórmula [7.155]*:

Teniendo en cuenta la relación trigonométrica:

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \qquad [7.158]$$

En la citada fórmula se puede hacer la siguiente transformación:

$$\cos(2 \cdot \omega \cdot t + \varphi) = \cos 2 \cdot \omega \cdot t \cdot \cos\varphi - \operatorname{sen}(2 \cdot \omega \cdot t) \cdot \operatorname{sen} \varphi \qquad [7.159]$$

Sustituyendo:

$$p = V \cdot I \cdot \cos\varphi - V \cdot I \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t + \varphi) = V \cdot I \cdot \cos\varphi - V \cdot I \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t) \cdot \cos\varphi + V \cdot I \cdot \operatorname{sen}(2 \cdot \omega \cdot t) \cdot \operatorname{sen}\varphi$$

Se obtiene, *figura 7.37*:

$$p = V \cdot I \cdot \cos\varphi - V \cdot I \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t) \cdot \cos\varphi + V \cdot I \cdot \operatorname{sen}(2 \cdot \omega \cdot t) \cdot \operatorname{sen}\varphi \qquad [7.160]$$

En esta expresión se distinguen dos términos:

1. Un término que existe siempre que el ángulo φ sea distinto de 90º ($\varphi \neq \pi/2$ rad), que constituye la **componente activa** p_P de la potencia instantánea p:

$$p_P = V \cdot I \cdot \cos\varphi - V \cdot I \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t) \cdot \cos\varphi \qquad [7.161]$$

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

2. Un término que existe siempre que el ángulo φ sea distinto de 0º ($\varphi \neq 0$ rad), que constituye la **componente reactiva** p_Q de la potencia instantánea *p:*

$$p_Q = V \cdot I \cdot \text{sen}(2 \cdot \omega \cdot t) \cdot \text{sen}\ \varphi \qquad [7.162]$$

Sustituyendo las dos expresiones anteriores en *[7.162]:*

$$p = p_P + p_Q \qquad [7.163]$$

Se llama potencia activa al valor medio de la componente activa, es decir:

$$P = V \cdot I \cdot \cos \varphi \qquad [7.164]$$

Se llama potencia reactiva al valor máximo de la componente reactiva, es decir:

$$Q = V \cdot I \cdot \text{sen}\ \varphi \qquad [7.165]$$

Sustituyendo estas expresiones en *[7.162]:*

$$p = P - P \cos 2 \cdot \omega \cdot t + Q \cdot \text{sen}\ 2 \cdot \omega \cdot t \qquad [7.166]$$

En la fórmula anterior, el primer término es una potencia constante. El segundo término es una potencia que varia a una frecuencia del doble de la fundamental, de carácter sinusoidal, luego su potencia media en un periodo (o múltiplos enteros de un período) es cero. El tercer término es una potencia que también varía al doble de la frecuencia fundamental y su valor medio es también cero. Se concluye que el valor medio de la potencia instantánea es precisamente la potencia activa P.

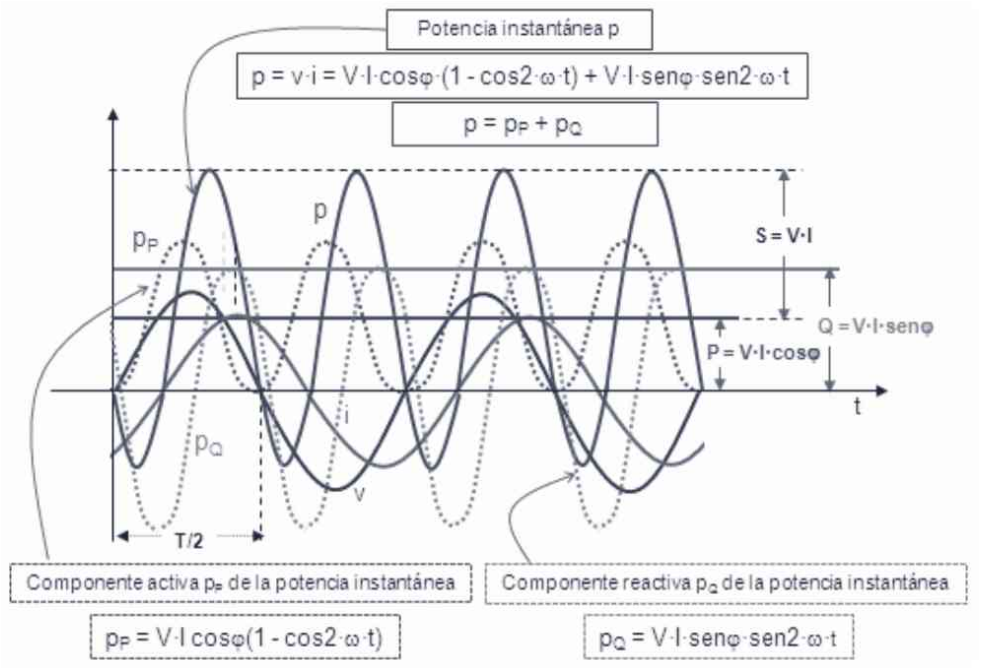


Figura 7.37. Potencias: instantánea p, activa P, reactiva Q, aparente S

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

El valor medio de la potencia instantánea en un período también se puede obtener calculando el valor medio para un periodo de potencia igual a *T*/2 períodos de la tensión o corriente:

$$P = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} p\cdot t\cdot dt = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} V\cdot I\cdot[\cos\varphi - \cos(2\cdot\omega\cdot t+\varphi)]\cdot dt = V\cdot I\cdot\cos\varphi \qquad [7.167]$$

7.18 FACTOR DE POTENCIA Y COSENO DE φ. CORRECCIÓN DEL FACTOR DE POTENCIA

Todos los dispositivos eléctricos que suministran energía ya sea en forma de luz, calor, frío, movimiento, sonido, etc., consumen una cantidad de energía eléctrica, equivalente a la entregada de la fuente de energía eléctrica a la cual están conectados. Esta energía consumida se denomina *energía activa*, y la potencia correspondiente es la *potencia activa P* del dispositivo receptor. Algunos dispositivos, como máquinas y dispositivos que tienen bobinas (motores, reactancias, etc.) o algunos dispositivos electrónicos (por ejemplo el tiristor), además de energía activa y debido a su principio de funcionamiento, toman de la fuente de energía eléctrica una cantidad de energía que en realidad no es consumida sino que es una energía fluctuante, entre la fuente y el receptor. Esta energía fluctuante se denomina *reactiva,* y la potencia correspondiente es la *potencia reactiva* ***Q*** del receptor, *figura 7.38.*

Por otra parte, los alternadores, los transformadores, la red de transporte y los aparatos de maniobra y protección, se dimensionan de acuerdo a la potencia aparente *S.*

A partir del triángulo de potencias, *figura 7.38*, se deduce que las potencias anteriores están relacionadas por la fórmula:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \qquad [7.168]$$

La potencia activa *P* no se puede modificar sin cambiar las prestaciones de los receptores, pero la potencia reactiva *Q* sí se puede minimizar, consiguiendo que ese trasiego de energía a que da lugar no se produzca entre la fuente y el receptor, sino entre la fuente y una batería de condensadores, como se estudiará en este mismo apartado. De esta manera se produce la misma potencia activa *P* pero con una potencia aparente *S* menor, con las ventajas que esto supone.

Por este motivo, las compañías de distribución toman medidas tendentes a minimizar la potencia reactiva *Q* consumida por los usuarios, induciendo a los usuarios a que corrijan sus instalaciones y facturando su consumo a partir de cierta potencia.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

La relación que existe entre la potencia activa P y la potencia aparente S se denomina **factor de potencia** (f.d.p.):

$$\text{f.d.p.} = \frac{P}{S} \qquad [7.169]$$

El f.d.p. indica la proporción de potencia aparente utilizada para realizar trabajo, constituyendo un índice de la utilización cualitativa y cuantitativa de la energía, o dicho de otra manera, del correcto aprovechamiento de la energía.

Por otra parte, del triángulo de potencias se deduce que la relación anterior también se cumple para el cos φ, por tanto:

$$\text{f.d.p.} = \cos\varphi = \frac{P}{S} \qquad [7.170]$$

Es decir, ambos valores coinciden. Esto es así en un sistema sin armónicos (ver *apartado 7.21*). En un sistema que contenga armónicos se cumple que el f.d.p. es menor que el cos φ (*apartado 7.23*).

El aparato de medida del cos φ se llama *cosímetro* y su conexión es análoga al vatímetro.

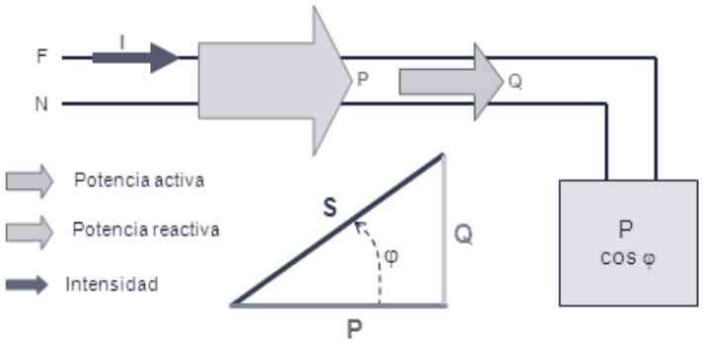


Figura 7.38. Potencias y triángulo de potencias

En definitiva, una instalación eléctrica con un f.d.p. bajo ocasiona varios perjuicios a los usuarios y a las compañías generadoras y distribuidoras de energía eléctrica.

En efecto, para una misma tensión y potencia activa la corriente es mayor a medida que el factor de potencia baja ($I = P/V \cdot \cos\varphi$). Como consecuencia:

- Aumentan las pérdidas en los conductores por efecto Joule ($P_P = I \cdot R$). Además, el aumento de la temperatura de los conductores disminuye la vida de su aislamiento.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

- Aumenta la caída de tensión en los conductores ($\Delta V = I \cdot R$), produciendo variaciones de tensión que pueden perjudicar el correcto funcionamiento de los receptores de los usuarios y de la estabilidad de la red eléctrica.

- Los aparatos de maniobra, protección y seguridad deben ser más robustos.

- Para proporcionar una determinada potencia activa, alternadores y transformadores deben tener mayor potencia aparente ($S = P/\cos \varphi$), con el consiguiente aumento en su inversión. Lo mismo ocurre con la capacidad de las líneas de transporte. Por la misma razón, para una potencia aparente definida de las máquinas y sistemas anteriores, disminuye su disponibilidad de potencia activa.

En resumen, el máximo aprovechamiento de los generadores y su sistema de distribución se lograrán con un factor de potencia elevado, idealmente igual a uno, aunque en la práctica se suele tomar entre 0,85 y 0,9.

Para corregir un factor de potencia bajo es necesario compensar la componente reactiva, y lo más frecuente es colocar condensadores en paralelo con las cargas inductivas.

Supóngase que se quiere corregir el f.d.p. de la instalación de la *figura 7.38*, que tiene un cos φ, mediante un condensador de capacidad C (o batería de condensadores) en paralelo, *figura 7.39*, de tal manera que se quiere obtener en la nueva instalación un cos $\tilde{\varphi}'$

Antes de la corrección del f.d.p. la instalación consume una intensidad I:

$$I = \frac{P}{V \cos \varphi} \qquad [7.171]$$

La potencia Q_C del condensador C a acoplar ha de ser tal que, al sumarla a la existente Q, se obtenga la potencia Q' correspondiente al nuevo cos φ':

$$Q_C = Q - Q' \qquad [7.172]$$

Por otra parte, del triángulo de potencias se deduce:

$$P \operatorname{tag} \varphi - P \operatorname{tag} \varphi' = Q - Q' \qquad [7.173]$$

La potencia de un condensador, *fórmula [7.131]*, es:

$$Q_C = I^2 \cdot X_C = \frac{V^2}{X_C} = V^2 \cdot \omega \cdot C$$

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

de donde:

$$P \cdot tag\ \varphi - P \cdot tag\ \varphi' = V^2 \cdot \omega \cdot C \qquad [7.174]$$

La capacidad del condensador ha de ser:

$$C = \frac{P \cdot tag\ \varphi - P \cdot tag\ \varphi'}{V^2 \cdot \omega} \qquad [7.175]$$

La nueva intensidad *I'* de la instalación ha disminuido (cos φ' > cos φ):

$$I' = \frac{P}{V \cdot \cos \varphi'} < I = \frac{P}{V \cdot \cos \varphi} \qquad [7.176]$$

Esto es debido a que la potencia reactiva necesaria en la carga *P* se toma ahora del condensador *C* y no de la red. Existe un trasiego de energía entre la carga *P* y el condensador *C*. Nótese que, la intensidad y el f.d.p. de la carga con potencia *P* siguen siendo *I* y cos φ, respectivamente.

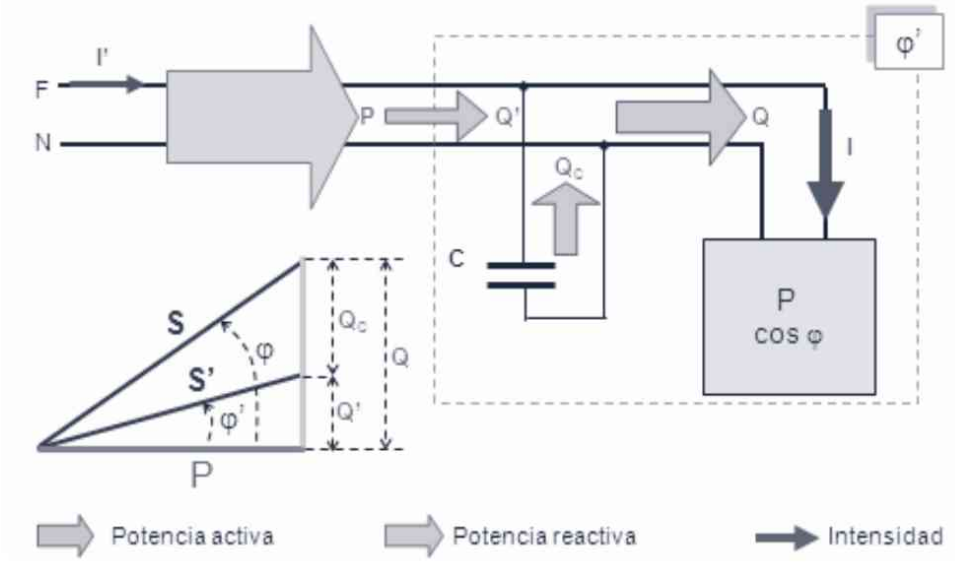


Figura 7.39. Corrección del factor de potencia

La corrección del f.d.p. se puede hacer:

- **Corrección individual.** Cada receptor inductivo tiene su propio condensador.
- **Corrección por grupos.** Un grupo de receptores están conectados a una batería de condensadores. Generalmente, esta conexión se realiza automáticamente y de forma escalonada.

- **Corrección mixta.** Es una combinación de las dos anteriores. Frecuentemente se hace por grupos al comienzo de la instalación e individual en los extremos finales de la misma.

De forma aproximada, como referencia, los motores eléctricos para un cos φ = 0,95 en carga, dependiendo de su potencia en kW, necesitan un condensador que proporcione entre el 50% y el 35% de dicha potencia en kVAr, los transformadores de distribución necesitan una potencia reactiva de compensación entre el 5% y el 10% de la potencia nominal del transformador, etc.

7.19 APARATOS DE MEDIDA Y FORMAS DE CONEXIÓN

En la *figura 7.40* se tienen diferentes aparatos de medidas en CA y en la *figura 7.41* las diferentes formas de conexión.

Polímetro | Frecuencímetros | Cosímetro | Analizador de redes

Vatímetro | Varímetro | Vatímetro y varímetro | Contador de e. activa

Figura 7.40. Aparatos de medidas de CA

En la *figura 7.41* se tienen formas de conexión de los aparatos de medida de uso más frecuente en CA.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

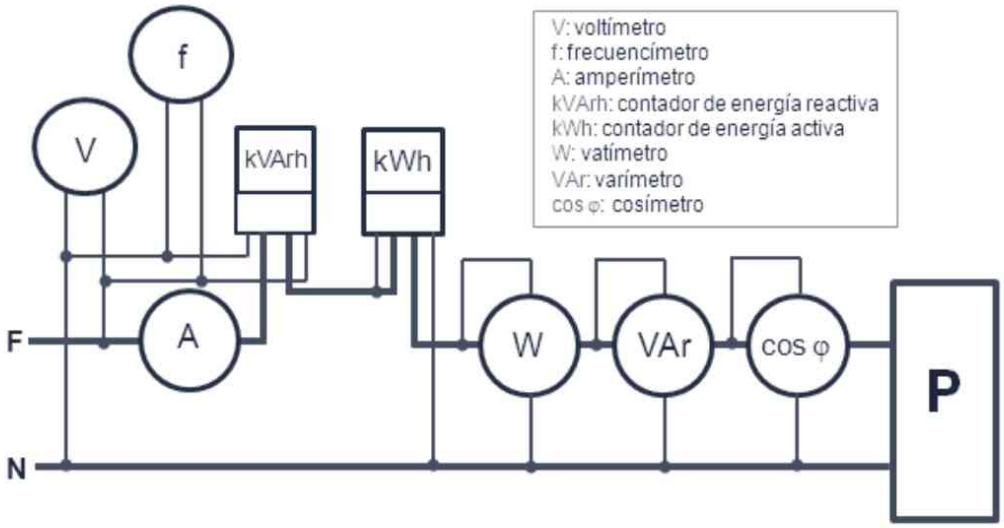


Figura 7.41. Conexión de aparatos de medida

7.20 TEOREMA DE BOUCHEROT

Este teorema, propuesto por el ingeniero francés Paul Boucherot (1869–1943), es una consecuencia del principio de conservación de la energía. Dice el teorema, *figura 7.42*, "*En un circuito eléctrico, para una frecuencia constante, la potencia activa total P_T y la potencia reactiva total Q_T del mismo, vienen dadas por la suma de las potencias activas y reactivas, respectivamente, de cada una de sus cargas*":

$$P_T = \sum P_n \qquad [7.177]$$

$$Q_T = \sum Q_n \qquad [7.178]$$

En consecuencia, la potencia aparente $\boldsymbol{S_T}$ del conjunto es:

$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} \qquad [7.179]$$

En forma compleja:

$$\overline{S}_T = \overline{S}_1 + \overline{S}_2 + \ldots + \overline{S}_n \qquad [7.180]$$

Este teorema también se puede enunciar de la forma siguiente, "*La potencia compleja suministrada por las fuentes es igual a la suma de las potencias complejas absorbidas por las cargas*". Nótese que en este caso, la suma es vectorial y no aritmética.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Para demostrar este teorema basta con observar los triángulos de potencias de las cargas que forman el circuito, independientemente de que estén conectados en serie, en paralelo o forma mixta, por ejemplo, las tres cargas representadas en la *figura 7.42*, en virtud del *principio de conservación de la energía*, se ha de verificar que las potencias de salida, activas por un lado, $\sum P_k$, y reactivas por otro, $\sum Q_k$, han de ser igual a la potencias de entrada P_T y Q_T, respectivamente.

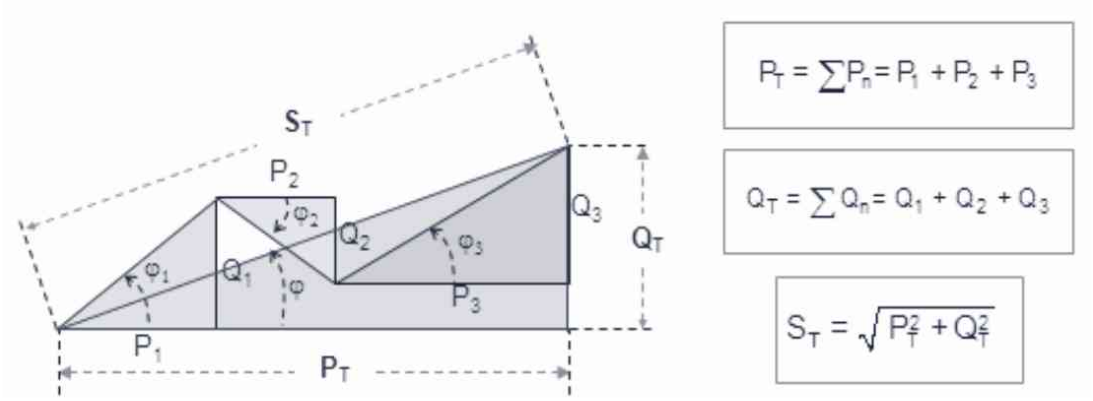


Figura 7.42. Teorema de Boucherot

También se puede demostrar el teorema, en un circuito serie, multiplicando el diagrama fasorial de tensiones (por ejemplo el de la *figura 7.15*) por el módulo de la intensidad común, obteniéndose un diagrama semejante al de la *figura 7.42* cumpliéndose el teorema, y en el caso de un circuito paralelo, multiplicando el diagrama de intensidades (por ejemplo el de la *figura 7.17*) por el módulo de la tensión común, obteniéndose, también, un diagrama semejante al de la *figura 7.42.*

7.21 RESONANCIA. RESONANCIA EN SERIE Y EN PARALELO

La impedancia de bobinas y condensadores dependen de la frecuencia, como se ha visto. La conexión en serie o en paralelo de inductancias y condensadores puede dar lugar a situaciones singulares, denominadas de resonancia, en las cuales la impedancia se hace mínima, *resonancia en serie* o máxima, *resonancia en paralelo*.

Resonancia en serie

La conexión en serie de una inductancia y un condensador produce resonancia cuando coinciden los valores de X_L y X_C. La impedancia Z a dicha frecuencia es mínima, quedando reducida a la suma de resistencias, *figura 7.43*.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

A partir de la *fórmula [7.71]* de la impedancia, se tiene:

$$\overline{Z} = R + j \cdot X \Rightarrow Z \text{ mínimo} \Rightarrow X = 0 \Rightarrow X_L = X_C \qquad [7.181]$$

La igualdad de la reactancia inductiva X_L y capacitiva X_C implica que la tensión $\boldsymbol{V}$ en los extremos de las impedancias y la intensidad $\boldsymbol{I}$ por las mismas están en fase, esto es otra característica de la resonancia. Se cumple entonces:

$$X_L = X_C \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \sqrt{L \cdot C}} \qquad [7.182]$$

La fórmula anterior permite conocer la frecuencia f_0 a la que se producirá la resonancia.

Nótese cómo las tensiones en los extremos de la bobina, V_L, y el condensador, V_C, pueden ser muy superiores a la tensión en los extremos del conjunto, V. Por esta razón, a esta resonancia se le conoce, también, con el nombre de resonancia de tensión.

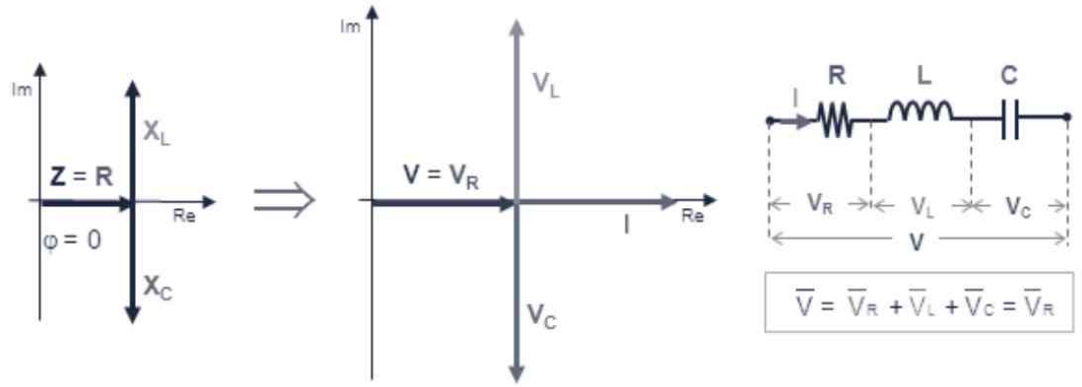


Figura 7.43. Resonancia en serie

Resonancia en paralelo

La resonancia en paralelo se produce con impedancia Z máxima, lo que implica, conforme a la *fórmula [7.76]* de la admitancia $\boldsymbol{Y}$, que esta es mínima, *figura 7.44*:

$$Z \text{ máxima} \Rightarrow \overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}} = G + j \cdot B \Rightarrow Y \text{ mínima} \Rightarrow B = 0 \qquad [7.183]$$

En este tipo de resonancia se cumple, igual que en la resonancia en serie, que la tensión $\boldsymbol{V}$ en los extremos del conjunto y la intensidad total $\boldsymbol{I}$ están en fase.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Por ejemplo, en el circuito de la *figura 7.44:*

$$\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}} = G + j \cdot B = \frac{1}{R} + \frac{1}{j \cdot X_L} + \frac{1}{-j \cdot X_C} = \frac{1}{R} + j\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right) \qquad [7.184]$$

$$\text{Resonancia} \Rightarrow B = 0 \Rightarrow \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} = 0 \Rightarrow X_L = X_C \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \sqrt{L \cdot C}} \qquad [7.185]$$

La fórmula anterior permite conocer la frecuencia a la que se producirá la resonancia. En este caso, se llega a la misma fórmula obtenida para la resonancia en serie.

Nótese cómo las intensidades por la bobina, I_L, y por el condensador, I_C, pueden ser superiores a la intensidad total, I. Por esta razón, a esta resonancia se le conoce, también, con el nombre de resonancia de corriente.

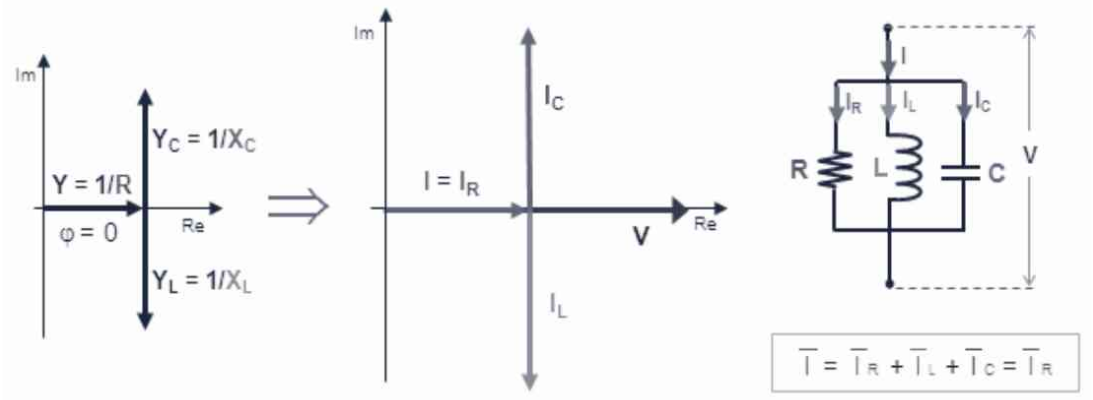


Figura 7.44. Resonancia en paralelo

En Electrónica, el fenómeno de la resonancia tiene múltiples aplicaciones, no así en Electrotecnia, en la que normalmente es un fenómeno no deseado.

Algunas aplicaciones fundamentadas en la resonancia y utilizadas frecuentemente en Electrotecnia son: filtros eléctricos utilizados en la salida de los rectificadores de CA para conseguir una tensión de CC más uniforme, filtros eléctricos para evitar entradas y/o salidas de armónicos en los receptores eléctricos, etc.

Por otra parte, en el diseño de las instalaciones eléctricas industriales se deben tener en cuenta situaciones en las que se puedan producir fenómenos resonantes no deseados que puedan producir sobretensiones o sobreintensidades elevadas, especialmente en presencia de armónicos. Por ejemplo, en una industria puede darse una resonancia en paralelo entre un transformador y una batería de condensadores, utilizada para corregir el f.d.p., ante la presencia de un armónico generado en los equipos de dicha industria, por lo que ante esta posibilidad, habría que disponer el filtro adecuado, que evite el fenómeno.

7.22 CIRCUITOS ELÉCTRICOS CON SEÑALES NO SENOIDALES: ARMÓNICOS

Las cargas que alimentan los circuitos eléctricos pueden ser de dos clases, *figura 7.45*:

- **Cargas lineales** caracterizadas por no deformar la onda de la corriente, es decir, si la tensión en bornes de estas cargas es sinusoidal, las corrientes que circulan por ellas son también sinusoidales. Son cargas de este tipo: las cargas resistivas, inductivas y capacitivas, los motores sin convertidores de frecuencia, elementos de iluminación resistivos, etc.

- **Cargas no lineales** caracterizadas por producir una deformación de la onda de corriente, y ésta, a su vez, debido a la circulación de dicha corriente a través de las impedancias de las líneas y transformadores, en la onda de tensión. Es decir, si la tensión en los bornes de estas cargas es sinusoidal, la corriente que circula por las mismas no lo es. Son cargas de este tipo: grupos rectificadores, reguladores electrónicos de velocidad, ordenadores, transformadores, elementos de iluminación con balastos, etc.

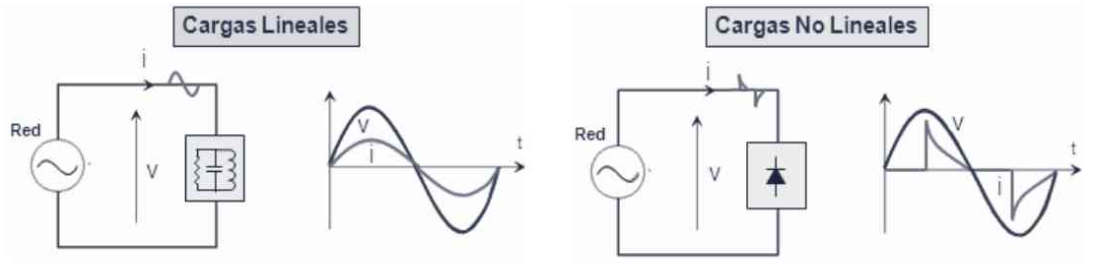


Figura 7.45. Cargas lineales y no lineales

Por otra parte, el aumento en los últimos años de cargas con componentes electrónicos ha generado un cambio importante en las características de las instalaciones eléctricas, que se ponen de manifiesto al analizar las formas de onda de tensión e intensidad en dichas instalaciones, que son cada vez más diferentes de las senoidales puras, debido a diferentes perturbaciones, entre ellas las debidas a los **armónicos**.

Los **armónicos** son un conjunto de ondas sinusoidales, de tensión y/o intensidad, de frecuencia superior a 50 Hz que, debido al uso de cargas con impedancia no lineal y en general al uso de equipos que necesiten realizar conmutaciones en su operación normal, se generan en la red eléctrica, produciendo la deformación de la onda sinusoidal de la tensión y la corriente.

El deterioro de la onda de tensión, *figura 7.46,* depende de dos factores:

a) De los armónicos de corriente consumidos por el usuario (responsabilidad del usuario).

b) De la impedancia de la red en el punto de distribución (responsabilidad de la compañía suministradora).

En la *figura 7.46* se representa gráficamente la "propagación" de los armónicos por la red. Si sólo existen cargas lineales, la tensión de los puntos de consumo (Point of Common Coupling, PCC) sería sinusoidal (A1) y las intensidades de las cargas también (A2). La existencia de cargas no lineales (B1), deforma la tensión del PCC (B2) debido a la impedancia de la red $\boldsymbol{Z_L}$ y la intensidad de la carga que antes era sinusoidal (A2) ahora no lo es (B3).

Para garantizar un suministro con unos límites de calidad de onda y con unas pérdidas aceptables, la distorsión de tensión (e intensidad) debe limitarse a ciertos valores dados por normas internacionales (IEC-EN en Europa).

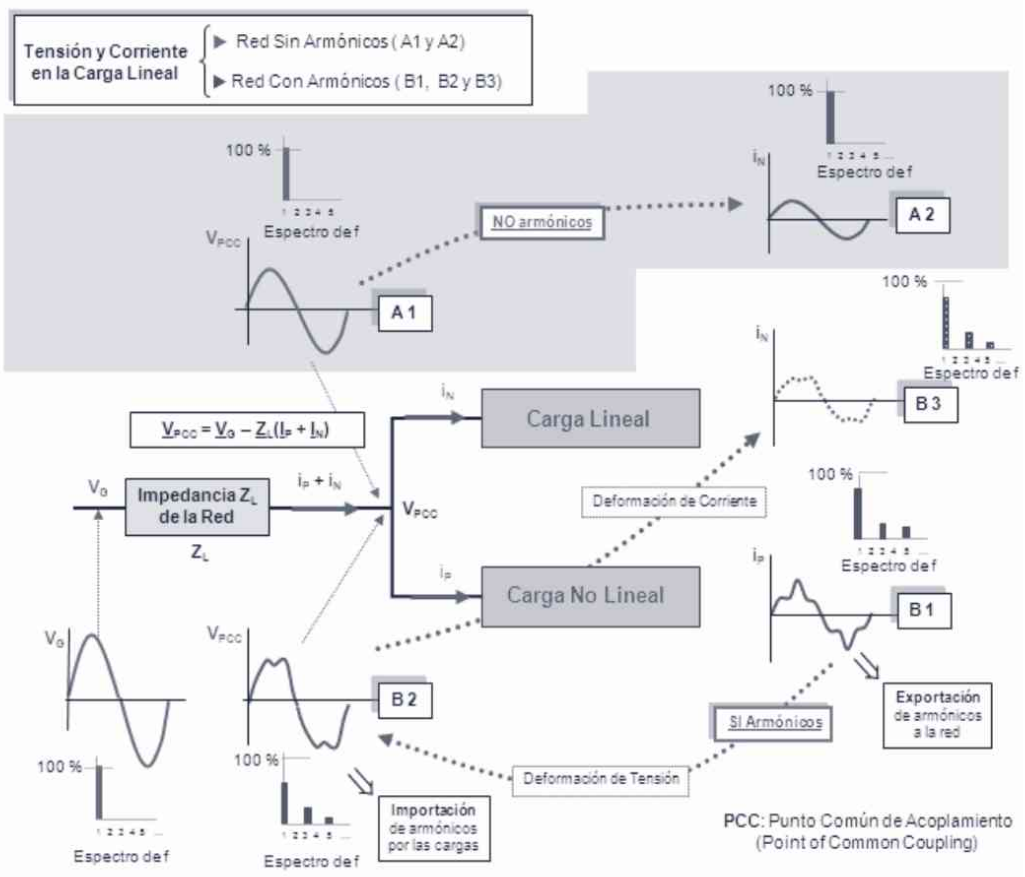


Figura 7.46. Exportación de armónicos a la red

Las cargas no lineales producen señales que no son sinusoidales pero son periódicas. El físico y matemático francés J. B. J. Fourier (1768-1830) demostró que "cualquier" señal periódica se puede descomponer en una suma de señales sinusoidales, de frecuencias múltiplos de la fundamental (esto se consigue modificando la frecuencia, la amplitud y la fase de cada una de ellas). Mediante esta teoría, el estudio de las señales no senoidales se hace de la misma forma que se hace para la CA senoidal.

Por ejemplo, la señal de la *figura 7.47* se obtiene por la suma de las funciones senoidales de frecuencia: f_1, $3 \cdot f_1$ y $5 \cdot f_1$, siendo f_1 la frecuencia fundamental. A la sinusoide de la misma frecuencia que la señal original se le denomina frecuencia fundamental, y al resto de sinusoides se les denomina armónicos, especificándose el rango h en múltiplos de la frecuencia fundamental (armónico de orden 3, orden 5, etc.). En el circuito de la *figura 7.47*, la respuesta del circuito a una tensión v no sinusoidal, con las característica indicadas, se obtiene aplicando el Teorema de Superposición, *apartado 7.9*, al conjunto de las señales armónicas que la componen.

En general, para la tensión y la intensidad se tiene:

$$v = V_0 + \sum_{h=1}^{\infty} \sqrt{2} \cdot V_h \cdot \operatorname{sen}(h \cdot \omega \cdot t + \alpha_h) \qquad [7.186.1]$$

$$i = I_0 + \sum_{h=1}^{\infty} \sqrt{2} \cdot I_h \cdot \operatorname{sen}(h \cdot \omega \cdot t + \alpha_h - \varphi_h) \qquad [7.186.2]$$

El subíndice 0 indica la componente continua y el subíndice h el orden del armónico.

En Electrotecnia, los armónicos más generalizados son los de orden 3, 5, 7, 11 y 13 y como significativos los de orden:

- 3 y 5 en edificios de oficinas.
- 5 y 7 en industrias.

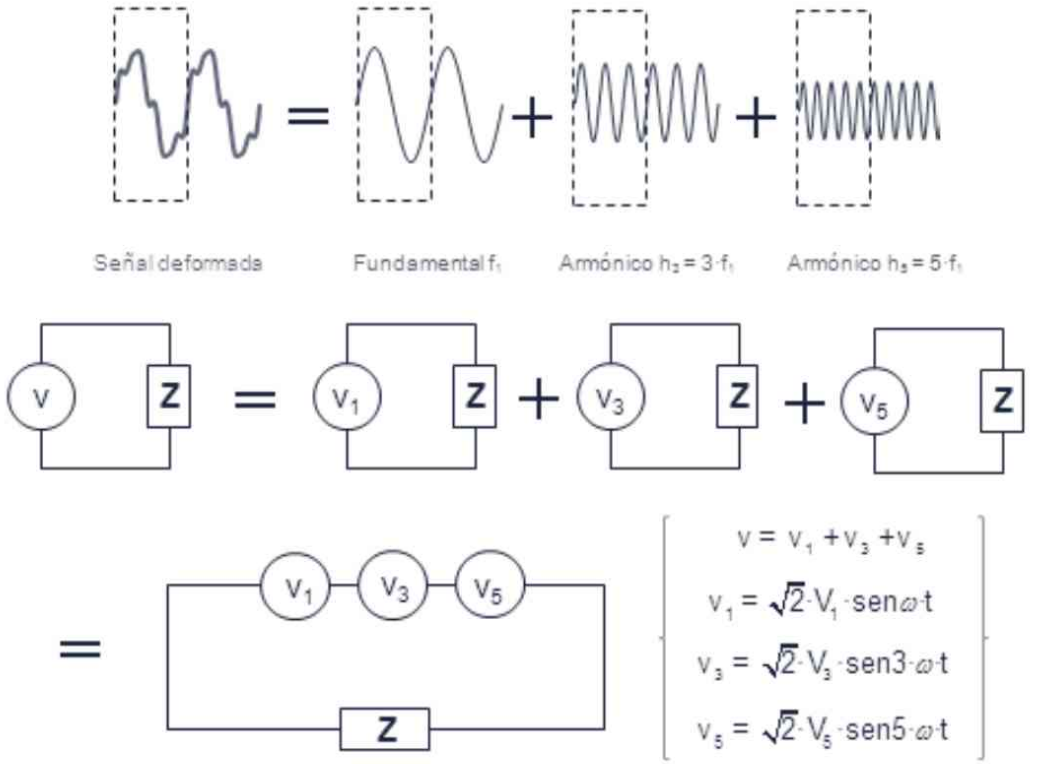


Figura 7.47. Carga no lineal: descomposición en suma de señales sinusoidales

La **amplitud** de un armónico se da en tanto por ciento con respecto a la amplitud de la onda fundamental f_1. El histograma de las **amplitudes** de los diferentes armónicos de una señal constituye el **espectro** armónico de la misma. Normalmente la amplitud de los armónicos disminuye con la frecuencia.

De forma análoga a como se demostró el valor eficaz para una onda senoidal, *apartado 7.2*, se demuestra que el valor eficaz de una función **poliarmónica** es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los valores eficaces de cada uno de los armónicos que la componen. Si además la señal tiene componente continua (subíndice 0):

Para la intensidad, se tiene:

$$I = \sqrt{I_0^2 + \sum_1^n I_h^2} \qquad [7.187.1]$$

Para la tensión, se tiene:

$$V = \sqrt{V_0^2 + \sum_1^n V_h^2} \qquad [7.187.2]$$

Se utilizan fundamentalmente dos indicadores para la medida de la distorsión armónica de una señal de tensión o de intensidad:

1. **La distorsión individual armónica (SHD).** Expresa la magnitud de un armónico X_h con respecto a la señal fundamental X_1.

$$SHD\% = \frac{X_h}{X_1}100 \qquad [7.188]$$

2. **La distorsión total armónica (THD).** Expresa la magnitud de la distorsión debida a todos los armónicos, $X_2 + X_3 + \ldots + X_n$ con respecto a la onda fundamental X_1.

$$THD\% = \frac{\sqrt{X_2^2 + X_3^2 \ldots + X_n^2}}{X_1}100 \qquad [7.189]$$

El valor máximo admisible de la THD% para la tensión, en las redes de baja tensión suele ser del 5%, pero los valores de THD% para las corrientes en las mismas redes pueden superar el 30%, sin que esto signifique que la instalación sea defectuosa:

Para la tensión:

- $TDH_V < 5\%$: se considera normal.
- $5\% < TDH_V < 8\%$: distorsión armónica significativa.
- $TDH_V > 8\%$: distorsión armónica importante.

Para la intensidad:

- $TDH_I < 10\%$: se considera normal.
- $10\% < TDH_I < 50\%$: distorsión armónica significativa.
- $TDH_I > 50\%$: distorsión armónica importante.

En la *tabla 7.4* se recogen algunas cargas frecuentes en las viviendas con sus correspondientes intensidades *I*, tasas de distorsión armónica %, THD%, factores de potencia (f.d.p) y cos φ. Nótese el alto valor de THD% para las cargas con componentes electrónicos.

Carga	I (A)	THD%	f.d.p.	cos φ
Calefactor con radiador	7,5	1,6	1	1
Ventilador	2,8	5,9	0,9	0,9
Tubo fluorescente	0,2	6,2	0,4	0.4
Lámpara de bajo consumo	0,17	123	0,5	0,9
Ordenador personal	1	124,4	0,6	0,9
Televisor	0,8	141,2	0,5	0,9
Videograbador	0,2	165	0,4	0,8

Tabla 7.4. Ejemplo de cargas y sus correspondientes THD %

Además de los armónicos, en una instalación es posible que existan tensiones o corrientes con componentes de frecuencias que no son múltiplos enteros de la onda fundamental y se les llaman **interarmónicos.**

Para las medidas de los armónicos se utilizan los analizadores de redes, *figura 7.40.*

7.23 LOS ARMÓNICOS: ORIGEN, FUENTES, EFECTOS, CONSECUENCIAS, MEDIDAS CORRECTIVAS

- **Origen de los armónicos:** los armónicos tienen dos orígenes, *figura 7.46*:
  - *Armónicos importados.* Son los inyectados desde la acometida a la instalación o red interior. Estos se manifiestan en tensiones armónicas que afectan a los receptores conectados directamente o a través de transformadores a la red pública.
  - *Armónicos exportados.* Son los inyectados a la red, desde los receptores del usuario, debidos a: máquinas eléctricas, equipos electrónicos de potencia, lámparas de descarga, sistemas de alimentación ininterrumpida (SAI), etc. Comportándose unos receptores como generadores de corrientes armónicas y otros como generadores de tensiones armónicas.
- Las principales fuentes de armónicos son:
  - Los equipos de electrónica de potencia:
    - Variadores de velocidad.
    - Puentes rectificadores de diodos, tiristores o transistores.
    - Onduladores, alimentaciones conmutadas.

- Las cargas que utilizan el arco eléctrico:
  - Soldadoras.
  - Hornos de arco.
  - Balastos de Iluminación (lámparas de descarga, tubos fluorescentes).
- Los materiales con circuitos magnéticos (inductancias saturadas):
  - Alternadores.
  - Transformadores.

- Los efectos de los armónicos se manifiestan:
  - *De forma inmediata*: aumento de la temperatura de la instalación, errores en los aparatos de medida, ruidos y vibraciones, sobretensiones, etc.
  - *A medio y largo plazo:* envejecimiento y reducción de la vida útil de la instalación y equipos debido al calentamiento y la fatiga mecánica debida a las vibraciones, etc.

- Las consecuencias de los armónicos:
  - Sobre los conductores:
    - Las intensidades armónicas provocan el aumento del valor eficaz de la corriente (I_{RMS}) originando sobrecalentamientos en los conductores.
    - El efecto pelicular, “skin”, reduce la sección efectiva de los conductores a medida que aumenta la frecuencia de los armónicos.
    - Sobre el conductor neutro: los armónicos múltiplos de 3 se suman, provocando sobrecalentamientos y caída de tensión.
  - Sobre los transformadores:
    - Aumento de las pérdidas en el hierro: por Foucault y por histéresis.
    - Aumento del calor en los devanados debido al aumento de la intensidad.
  - Sobre los motores:
    - Efectos análogos al de los transformadores.

- Creación de pares vibratorios y de frenado.

– Sobre los condensadores:

- Disminución de la impedancia del condensador, con el aumento de la frecuencia, posibilitando fenómenos de resonancia y la consiguiente amplitud de los armónicos.

– Sobre los aparatos de medida y protección:

- Disparos intempestivos de las protecciones.
- Datos incorrectos de los aparatos de medida.
- Operaciones incorrectas de controladores y relés.

– Otros:

- Incremento de ruidos e interferencias.
- Envejecimiento y reducción de la vida útil de la instalación y equipos.
- Empeoramiento del factor de potencia.
- Reducción de la eficiencia del sistema.
- Aumento de las pérdidas en el Cu en general**:** en los conductores, en los contactos de contactores e interruptores, etc.
- Aumento de las pérdidas en el Fe en general (Foucault, histéresis): todos los núcleos magnéticos de transformadores, motores, etc.

- **Medidas correctivas:** las cargas que originan armónicos de corriente se denominan cargas tipo fuente de corriente, las cargas que originan armónicos de tensión se denominan cargas tipo fuente de tensión. Según el tipo de armónicos a eliminar, se proponen diferentes esquemas de compensación, por ejemplo:

  – *Filtros pasivos.* Constituidos por elementos *RLC* que impiden el paso a las señales armónicas a la red.

  – *Filtros activos.* Detectan los armónicos e inyectan otros similares a los anteriores desfasados 180º.

  – *Transformadores de aislamiento D-Y para armónicos de 3er orden y múltiplos.* Reducen prácticamente a cero la corriente del neutro debida a estos armónicos.

- *Transformadores con secundario en zig-zag.* Permiten desviar los armónicos "triplen" (3º, 9º, 15º, 21º,..) del neutro a los conductores de fase.

- *Reactancias antiarmónicas para baterías de condensadores.* Para evitar la frecuencia de resonancia que se puede producir en los sistemas de compensación del f.d.p.

- *Transformadores tipo K.* El factor K es una constante que especifica la capacidad del transformador de soportar el calentamiento armónico. Un transformador tipo $K = 9$, significa que puede soportar 9 veces más calor asociado a estas corrientes que un transformador normal. Los factores K más frecuentes van desde 5 hasta 21.

- *Reubicar bancos de condensadores*. Muchas veces reubicar bancos de condensadores en otros sitios, alimentar rectificadores desde otros transformadores etc., puede ser una solución eficiente para problemas de amplificación armónica.

7.24 POTENCIAS EN LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS CON SEÑALES NO SENOIDALES

Cuando en un sistema monofásico o trifásico equilibrado, las señales de tensión/intensidad son sinusoidales, los conceptos de potencias (activa, reactiva y aparente) y factor de potencia no presentan problemas, y son aceptados universalmente. Cuando las señales dejan de ser senoidales (presencia de armónicos) o el sistema trifásico es desequilibrado el análisis de las potencias y factor de potencia se hace más complejo, y existen diferentes definiciones para esos términos.

El estudio preciso de potencias en un sistema eléctrico es de suma importancia, pues afecta a: la definición de las tarifas eléctricas, a la elección de la técnica de compensación del factor de potencia que se ha de emplear, al diseño de los equipos de medida, a la elección de los conductores, etc.

Desde comienzos del siglo XX se han presentado diferentes teorías para dar respuesta a lo dicho (Budeanu, Fryze Akagi, Cezarnecki, etc.), aunque hasta al momento no se haya producido unanimidad entre los autores de los diferentes estudios que se han hecho al respecto, pues dependiendo del punto de vista desde el que se aborda el estudio, medida de la energía, compensación de energía reactiva, eliminación de armónicos, etc., se obtienen diferentes fórmulas para el cálculo de las diferentes magnitudes eléctricas.

Tensión e intensidad con armónicos

La **teoría de C. Budeanu**, Rumania (1886-1959), considera un circuito como la suma de varios circuitos independientes a diferentes frecuencias. La potencia activa y

reactiva se obtienen por las sumas de las potencias activas y reactivas de todos los armónicos. Considerando que no existe componente continua, se demuestra que:

$$P = \sum_{1}^{\infty} V_h \cdot I_h \cdot \cos\varphi_h \qquad [7.190]$$

$$Q = \sum_{1}^{\infty} V_h \cdot I_h \cdot \operatorname{sen}\varphi_h \qquad [7.191]$$

El subíndice *h* indica el orden del armónico.

Nótese que la potencia activa y reactiva es debida al producto de armónicos que tienen la misma frecuencia *h*.

La potencia aparente *S* se determina por:

$$S = V \cdot I = \sqrt{\sum_{h=1}^{\infty} V_h^2} \cdot \sqrt{\sum_{h=1}^{\infty} I_h^2} \qquad [7.192]$$

En los sistemas con armónicos no se cumple que la suma de los cuadrados de las potencias activas y reactivas sea igual a la potencia aparente, *ecuación [7.168]*, sino que:

$$S > \sqrt{P^2 + Q^2} \qquad [7.193]$$

Para satisfacer la igualdad en la ecuación anterior es necesario introducir el término ***D***, llamado **potencia de distorsión armónica**, tal que:

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2 \qquad [7.194]$$

La potencia de distorsión armónica *D* se debe a los productos cruzados de los armónicos de tensión V_m y corriente I_n *de diferentes* órdenes ($m \neq n$). En estos casos, se demuestra que el promedio de potencias de dichos productos es nulo, es decir, que la potencia ***D* es de naturaleza fluctuante** (igual que la potencia reactiva).

A la potencia que no es activa se le denomina también potencia ficticia ***N***, y por tanto es también una potencia fluctuante. De la ecuación anterior, se tiene:

$$N = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{Q^2 + D^2} \qquad [7.195]$$

A partir de las fórmulas anteriores se construye en *tetraedro de potencias*, *figura 7.49.*

La potencia útil del sistema es la correspondiente a la frecuencia fundamental, es decir, $P_1 = V_1 \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_1$, el resto de la potencia activa, $\sum P_h = \sum V_h \cdot I_h \cdot \cos \varphi_h$, con, $h \neq 1$, es potencia perdida. Igualmente, con respecto a la potencia reactiva, la demandada por el sistema es $Q_1 = V_1 \cdot I_1 \cdot \text{sen } \varphi_1$, el resto de la potencia reactiva, $\sum Q_h = \sum V_h \cdot I_h \cdot \text{sen } \varphi_h$, con $h \neq 1$, es una potencia no demandada, que aunque fluctuante, sobrecarga la red. Estas dos potencias (ΣP_h y ΣQ_h) junto con la potencia de distorsión D son las "poluciones armónicas" cuyos efectos y consecuencias se han relacionado en el *apartado 7.23.*

De acuerdo con la definición del f.d.p., *fórmula [7.169]*, teniendo en cuenta las ecuaciones *[7.190]* y *[7.192],* con armónicos su valor es:

$$\text{f.d.p.} = \frac{P}{S} = \frac{\sum_{1}^{\infty} V_h \cdot I_h \cdot \cos\varphi_h}{\sqrt{\sum_{h=1}^{\infty} V_h^2} \cdot \sqrt{\sum_{h=1}^{\infty} I_h^2}} = \cos\gamma \qquad [7.196]$$

En la actualidad, existen teorías más completas y rigurosas, pero también más complejas, que la teoría de Budeanu, esquematizada en la *figura 7.48*.

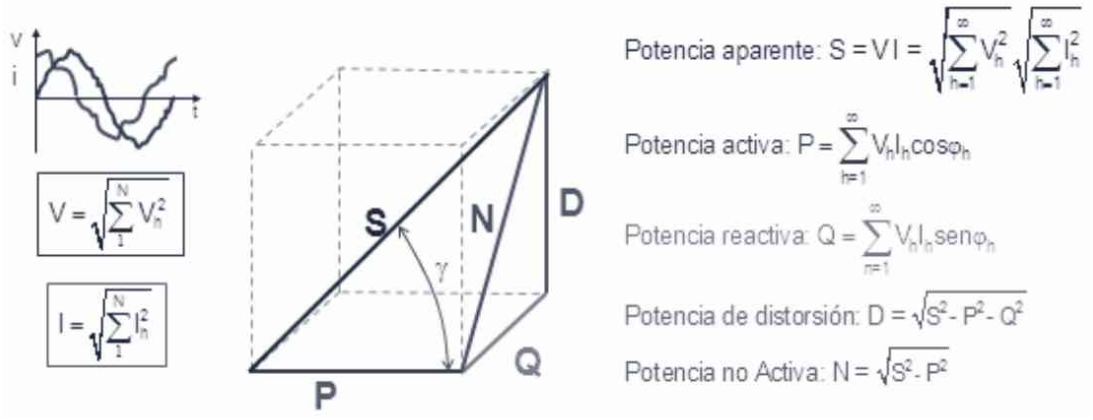


Figura 7.48. Tetraedro de potencias con armónicos de tensión e intensidad

Tensión senoidal (sin armónicos) e intensidad con armónicos

En la práctica, aunque la señal de corriente está habitualmente deformada, la de tensión no es frecuente que tenga una tasa de distorsión armónica elevada, de manera que se puede considerar que la tensión es perfectamente sinusoidal, es decir, $V = V_1$. Por otra parte, la potencia P es igual a la potencia fundamental P_1, pues los productos de V_1 por las corrientes con subíndices diferentes al 1, como se ha dicho anteriormente, no producen potencia activa. Por la misma razón la potencia reactiva resultante Q coincide con Q_1, quedando el tetraedro de potencias en la forma de la *figura 7.49*. En efecto:

La potencia aparente S del sistema es:

$$S = V_1 \cdot I = V_1 \cdot \sqrt{\sum_{h=1}^{\infty} I_h^2} \qquad [7.197]$$

Como:

$$S^2 = V_1^2 \cdot I^2 = V_1^2 \cdot \left(\sum_{1}^{\infty} I_h^2 \right) = V_1^2 \cdot \left(I_1^2 + \sum_{2}^{\infty} I_h^2 \right) = V_1^2 \cdot I_1^2 + V_1^2 \cdot \left(\sum_{2}^{\infty} I_h^2 \right) \qquad [7.198]$$

El primer sumando de la expresión anterior es la potencia aparente S_1 de la señal fundamental. Llamando *potencia de distorsión D* a:

$$D = V_1 \sqrt{\left(\sum_{2}^{\infty} I_h^2 \right)} \qquad [7.199]$$

Se concluye:

$$S^2 = S_1^2 + D^2 = P_1^2 + Q_1^2 + D^2 \qquad [7.200]$$

La potencia D se debe a los productos de la tensión V_1 con cada uno de los armónicos I_h ($h \neq 1$) siendo su valor nulo cuando no existen armónicos ($I_{h\geq 2} = 0$), como era de esperar.

En este caso, el f.d.p. es:

$$\text{f.d.p.} = \frac{P}{S} = \frac{P_1}{S} = \frac{V_1 \cdot I_1 \cdot \cos\varphi_1}{V \cdot I} = \frac{I_1 \cdot \cos\varphi_1}{I} \qquad [7.201]$$

Al coseno del ángulo φ_1, formado por la tensión $\boldsymbol{V}$, que como no hay armónicos de tensión es igual a $\boldsymbol{V_1}$, y la señal fundamental de corriente $\boldsymbol{I_1}$, se le llama *factor de desplazamiento* (es una medida del desplazamiento de la onda fundamental de tensión, fasor $\boldsymbol{V_1}$, respecto de la onda fundamental de intensidad, fasor $\boldsymbol{I_1}$):

$$\text{Factor de Desplazamiento} = \cos\varphi_1 = \frac{P_1}{S_1} \qquad [7.202]$$

Evidentemente, si tampoco existiesen armónicos de intensidad, $I = I_1$, *figura 7.50*, la potencia de distorsión D sería nula y por tanto: $\gamma = \varphi_1 = \varphi$.

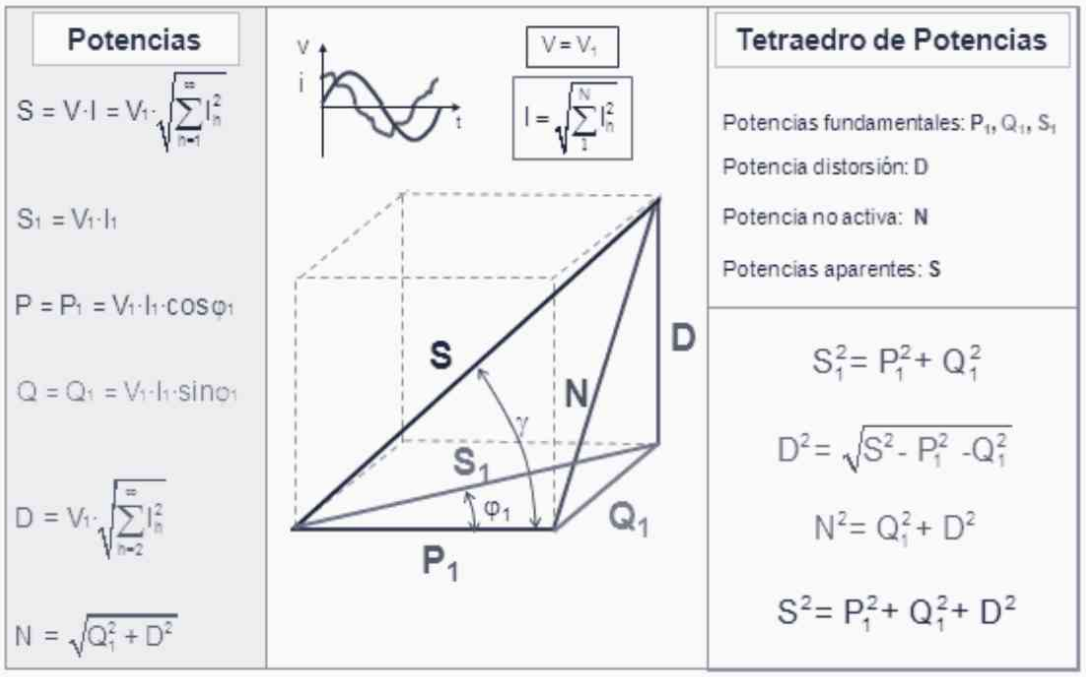


Figura 7.49. Tetraedro de potencias con armónicos sólo de intensidad

La *fórmula [7.201]* del f.d.p. teniendo en cuenta el tetraedro de potencias, *figura 7.50*, se puede poner en la forma:

$$\text{f.d.p.} = \frac{P_1}{S} = \frac{P_1}{\sqrt{P_1^2 + Q_1^2 + D^2}} = \cos\gamma \qquad [7.203]$$

Si no existen armónicos, la potencia de distorsión ***D*** es nula y el f.d.p. coincide con el cos φ. Si existen armónicos, la potencia de distorsión ***D*** no es nula, y el f.d.p. es menor que el cos φ, lo que implica que un circuito con armónicos se ha de dimensionar teniendo en cuenta una potencia aparente mayor ($S > S_1$). Usualmente se suele utilizar indistintamente ambos términos, lo que implica que se considera la tensión e intensidad sinusoides perfectas, es decir, que no existen armónicos. En la *tabla 7.4* se dan algunos valores de ambos para algunas cargas frecuentes en las viviendas.

A partir de la *fórmula [7.189]* se obtiene la tasa de distorsión armónica por unidad para la intensidad I_1. TDH_I:

$$THD_I = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 \ldots + I_n^2}}{I_1} \qquad [7.204]$$

Teniendo en cuenta la fórmula anterior y la ecuación para obtener el valor de la intensidad *I* con armónicos, *fórmula [7.187.1],* se obtiene la potencia aparente *S* del sistema:

$$S = V_1 \cdot I = V_1 \cdot \sqrt{\sum_1^n I_h^2} = V_1 \cdot \sqrt{I_1^2 + \sum_2^n I_h^2} = V_1 \cdot I_1 \sqrt{1+TDH_I^2} \qquad [7.205]$$

Sustituyendo en *[7.203],* se obtiene:

$$\text{f.d.p.} = \frac{P_1}{S} = \frac{V_1 \cdot I_1 \cdot \cos\varphi_1}{V \cdot I_1 \cdot \sqrt{1+TDH_I^2}} = \frac{\cos\varphi_1}{\sqrt{1+TDH_I^2}} \qquad [7.206]$$

Así, por ejemplo, se tiene que para una $TDH_I\%$ del 20% un f.d.p. máximo de 0,98; para una $TDH_I\%$ del 50% un f.d.p. máximo del 0,89. Aquí se comprende una de las razones para eliminar o minimizar las componentes armónicas.

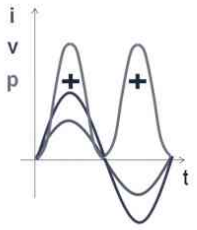
La medida del alejamiento de la forma de la señal de la intensidad *I* respecto de la forma senoidal perfecta viene dada por el *factor de distorsión*:

$$\text{Factor de Distorsión} = \frac{1}{\sqrt{1+TDH_I^2}} \qquad [7.207]$$

Se concluye con otra forma de expresar el f.d.p.:

$$\text{f.d.p.} = \text{Factor de Distorsión} \cdot \text{Factor de Desplazamiento} \qquad [7.208]$$

7.25 RESUMEN DE CONCEPTOS Y FÓRMULAS DE ESTE CAPÍTULO

Elementos pasivos en CA			
Elemento	**Magnitudes**	**Valor instantáneo**	**Fasores (Ef.)**
Resistencia	$Z = R$ $V_R = I \cdot R$ $\varphi = 0^o = 0$ rad $P = I^2 \cdot R$ $Q = 0$		

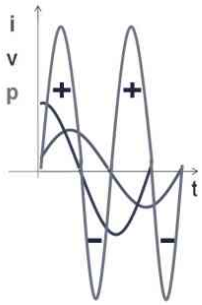
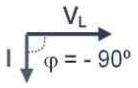
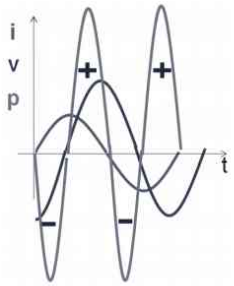
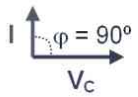
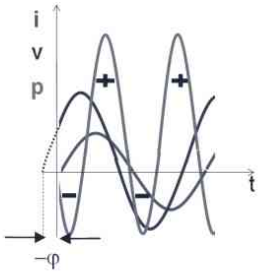
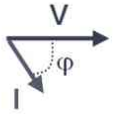
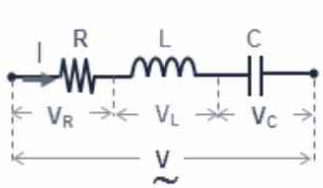
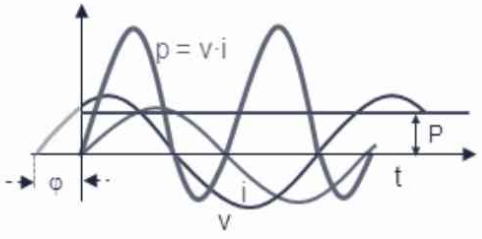
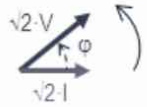
Reactancia inductiva	$Z = X_L = \omega \cdot L$ $V_R = I \cdot \omega \cdot L$ $\varphi = 90^o = \pi/2$ rad $P = 0$ $Q_L = I^2 \cdot X_L$		
Reactancia capacitiva	$Z = X_C = 1/(\omega \cdot C)$ $V_C = I/(\omega \cdot C)$ $\varphi = -90^o = -\pi/2$ rad $P = 0$ $Q_C = -I^2 \cdot X_C$		
Impedancia **RLC** en serie	$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ $V = I \cdot Z$ $\varphi = \text{arc tag } X/R$ $\varphi = \text{arc cos } R/Z$ $P = V \cdot I \cdot \cos \varphi$ $Q = V \cdot I \cdot \text{sen } \varphi$		**Z** inductiva:  **Z** capacitiva:

Tabla 7.5. Elementos pasivos en CA

Circuito RLC







Magnitud	Valor instantáneo	Forma polar	Forma binómica	Módulo
Intensidad	$i = \sqrt{2} \cdot I \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \beta)$	$\mathbf{I}_\beta$	$\mathbf{I} = I_a + j \cdot I_r$	$I = \sqrt{I_a^2 + I_r^2}$

Tensión	$v = \sqrt{2} \cdot V \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \alpha)$	$\mathbf{V}_\alpha$	$\mathbf{V} = V_a + j \cdot V_r$	$V = \sqrt{V_a^2 + V_r^2}$
Resistencia		$\mathbf{R}_0$	R	R
Reactancia inductiva		$\mathbf{X}_{L\pi/2}$	$j \cdot X_L$	$X_L = \omega \cdot L$
Reactancia capacitiva		$\mathbf{X}_{C-\pi/2}$	$-j \cdot X_C$	$X_C = 1/(\omega \cdot C)$
Impedancia		$\mathbf{Z}_\varphi = \mathbf{R}_0 + \mathbf{X}_{L\pi/2} + \mathbf{X}_{C-\pi/2}$	$\mathbf{Z} = R + j \cdot (X_L - X_C)$ $R = Z \cdot \cos\varphi$ $X_L - X_C = Z \cdot \text{sen}\,\varphi$	$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$
Ley de Ohm	$v = i \cdot R + L \cdot di/dt + 1/C \int i \cdot dt$	$\mathbf{V}_\alpha = \mathbf{I}_\beta \cdot \mathbf{Z}_\varphi$	$\mathbf{V} = V_a + j \cdot V_r$	$V = I \cdot Z$
Potencias	$p = v \cdot i$	$\mathbf{S} = V_\alpha \cdot I_\beta^*$	$\mathbf{S} = P + j \cdot Q$	$S = V \cdot I$ $P = V \cdot I \cdot \cos$ $Q = V \cdot I \cdot \text{sen}$
Factor de potencia		f.d.p.= P/S = cos φ = R/Z		
Nota: $\mathbf{I}_\beta^* = \text{Conjugado de } \mathbf{I}_\beta$				

Tabla 7.6. Circuito RLC

Circuitos eléctricos			
Impedancias en serie	$\overline{Z} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + .. + \overline{Z}_n = \sum \overline{Z}_n$ $\frac{1}{\overline{Y}} = \frac{1}{\overline{Y}_1} + \frac{1}{\overline{Y}_2} + ... + \frac{1}{\overline{Y}_n} = \sum \frac{1}{\overline{Y}_n}$	$\overline{V} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 + ... + \overline{V}_n = \sum \overline{V}_i$	$\overline{I} = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}} = \frac{\overline{V}_n}{\overline{Z}_n}$
Impedancias en paralelo	$\frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1}{\overline{Z}_1} + \frac{1}{\overline{Z}_2} + ... + \frac{1}{\overline{Z}_n} = \sum \frac{1}{\overline{Z}_n}$ $\overline{Y} = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + ... + \overline{Y}_n = \sum \overline{Y}_n$	$\overline{I} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 + ... + \overline{I}_n = \sum \overline{I}_n$	$\overline{V} = \overline{I} \cdot \overline{Z} = \overline{I}_n \cdot \overline{Z}_n$

Leyes de Kirchhoff	1.ª) $\sum \overline{I}_n = 0$ 2.ª) $\sum \overline{V}_n = \sum \overline{Z}_n \cdot \overline{I}_n = 0$	**Teorema de Boucherot**	$P_T = \sum P_n$ $Q_T = \sum Q_n$ $S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2}$
Corrección del f.d.p.	$C = \frac{P \cdot tag\ \varphi - P \cdot tag\ \varphi'}{V^2 \cdot \omega}$	**Resonancia**	$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \sqrt{L \cdot C}}$

Generalización de las fórmulas y teoremas de las redes de CC a redes de CA

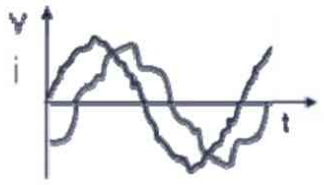
Sustituir:

	Fem	Tensión	Intensidad	Resistencia R/ Impedancia **Z**
CC	E	V	I	R
CA	$\overline{E}$	$\overline{V}$	$\overline{I}$	$\overline{Z}$

Tabla 7.7. Impedancias y leyes

Circuitos con armónicos

Armónicos de tensión V y corriente I
(Sin componente continua)



$$v = \sum_{h=1}^{\infty} \sqrt{2} \cdot V_h \cdot sen(h \cdot \omega \cdot t + \alpha_h)$$

$$i = \sum_{h=1}^{\infty} \sqrt{2} \cdot I_h \cdot sen(h \cdot \omega \cdot t + \alpha_h - \varphi_h)$$

$$I = \sqrt{\sum_{h=1}^{n} I_h^2}$$

$$V = \sqrt{\sum_{h=1}^{n} V_h^2}$$

$$SHD\% = \frac{X_h}{X_1}\ 100$$

$$THD\% = \frac{\sqrt{X_2^2 + X_3^2 \ldots + X_n^2}}{X_1} 100$$

(para V y para I)

$$f.d.p. = \frac{P}{S} = \frac{\sum_{1}^{\infty} V_h \cdot I_h \cdot \cos\varphi_h}{\sqrt{\sum_{h=1}^{\infty} V_h^2} \cdot \sqrt{\sum_{h=1}^{\infty} I_h^2}}$$

$$S = V \cdot I = \sqrt{\sum_{h=1}^{\infty} V_h^2} \cdot \sqrt{\sum_{h=1}^{\infty} I_h^2}$$

$$P = \sum_{h=1}^{\infty} V_h I_h \cos\varphi_h$$

$$Q = \sum_{h=1}^{\infty} V_h I_h sen\varphi_h$$

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$$

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2$$

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$$

$$N = \sqrt{Q^2 + D^2}$$

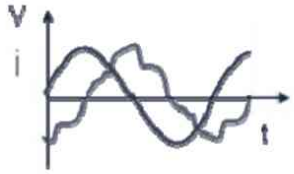
Armónicos sólo de corriente I (Sin componente continua)			
$v = \sqrt{2}\cdot V\cdot \text{sen}\omega\cdot t$		$i = \sum_{h=1}^{\infty} \sqrt{2}\cdot I_h \cdot \text{sen}(h\cdot\omega\cdot t - \varphi_h)$	
$I = \sqrt{\sum_{h=1}^{n} I_h^2}$ $V = V_1$	$SHD_V = 0$ $THD_I = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 \ldots + I_n^2}}{I_1}$ Factor de Desplazamiento = $\cos\varphi_1 = \frac{P_1}{S_1}$ Factor de Distorsión = FD = $\frac{1}{\sqrt{1+TDH_I^2}}$ f.d.p. = $\frac{P_1}{S} = \frac{I_1\cdot\cos\varphi_1}{I} = FD\cdot\cos\varphi_1$	$S = V\cdot I = V\cdot\sqrt{\sum_{h=1}^{\infty} I_h^2}$ $P = P_1 = V_1\cdot I_1\cdot\cos\varphi_1$ $Q = Q_1 = V_1\cdot I_1\cdot\text{sen}\varphi_1$ $D = V_1\sqrt{\left(\sum_{h=2}^{\infty} I_h^2\right)}$	$S^2 = P_1^2 + Q_1^2 + D^2$ $D = \sqrt{S^2 - P_1^2 - Q_1^2}$ $N = \sqrt{Q_1^2 + D^2}$ $S_1^2 = P_1^2 + Q_1^2$

Tabla 7.8. Circuitos con armónicos

7.26 EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Ejercicio 7. 26.1

Una corriente alterna tiene la forma (ecuación en el dominio del tiempo):

$$i = 14{,}1\cdot\text{sen}\left(251\cdot t - \frac{\pi}{4}\right)\ \text{A} \qquad [7.209]$$

Se pide para esta intensidad:

1. Valor eficaz.
2. Frecuencia y periodo.
3. Representación cartesiana y fasorial.
4. Instante, a partir del inicio, en el que tiene su máximo valor.

Solución:

Identificando los términos con la *fórmula [7.67]*:

$$i = I_0 \cdot \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$$

Se tiene:

1. Valor eficaz *I* de la corriente, *fórmula [7.15]:*

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{14{,}1}{\sqrt{2}} = 10\ \text{A}$$

2. Frecuencia *f*, *fórmula [7.3],* y período *T*, *fórmula [7.4]*:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{251} = 0{,}025\ \text{s} = 25\ \text{ms}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}025} = 40\ \text{Hz}$$

3. Representación cartesiana y fasorial de la intensidad: *figura 7.50.*

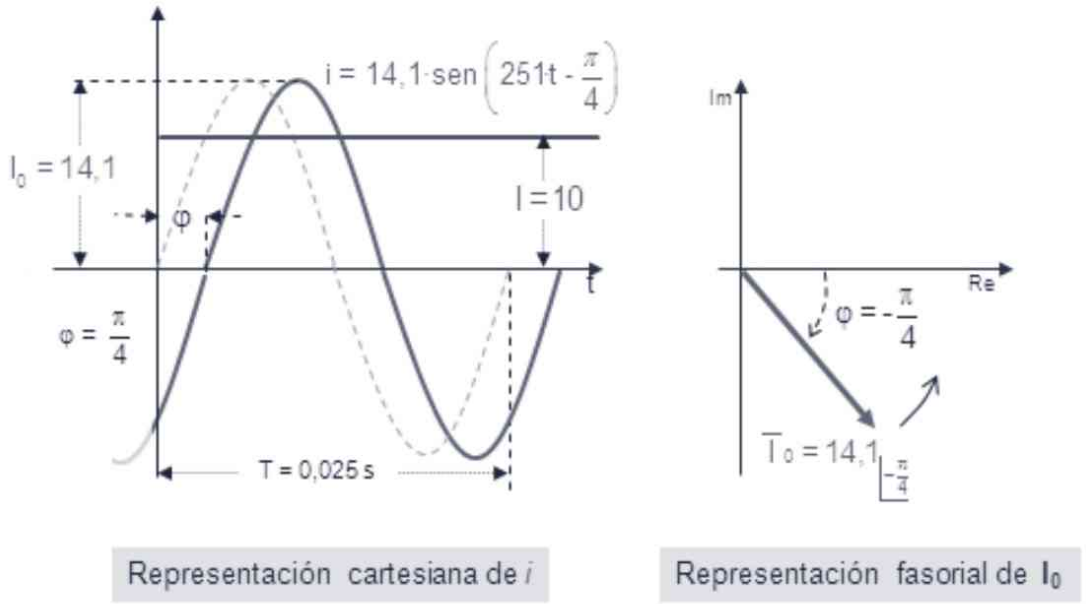


Figura 7.50. Ejercicio 7.25.1

4. Instante, a partir del inicio, en el que la corriente i tiene su máximo valor. El máximo valor de i es I_0, en ese instante se verifica:

$$14,1 = 14,1 \cdot \text{sen}\left(251 \cdot t - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \text{sen}\left(251 \cdot t - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow 251 \cdot t - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 9,4\,\text{ms}$$

Recuérdese que el seno de un ángulo es máximo cuando éste tiene el valor de $\pi/2$ rad (también, $\pi/2 + 2 \cdot \pi \cdot n$).

En la *figura 7.51*, para que sirva de referencia, aparece un ciclo de la intensidad, en línea discontinua, con inicio en el origen.

Nótese que el tiempo de 9,4 ms corresponde a la suma del tiempo correspondiente a ¼ de periodo (25/4 = 6,25 s), más el tiempo correspondiente al ángulo $\varphi = \pi/4$, ($t = \varphi/\omega = (\pi/4)/251 = 3,13$ ms).

Ejercicio 7.26.2

La tensión de CA v en los extremos de una impedancia, y la corriente i que circula a través de ella, tienen las formas, en V y A, respectivamente:

$$v = \sqrt{2} \cdot 10 \cdot \text{sen}(314 \cdot t + 1) \qquad [7.210]$$

$$i = \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \text{sen}314 \cdot t \qquad [7.211]$$

Hallar:

1. Pulsación de la CA.
2. Frecuencia y periodo.
3. Valor máximo y eficaz de la tensión y de la intensidad.
4. Valor de la tensión e intensidad en el instante t = 10 ms.
5. Impedancia en forma polar y binómica.
6. Resistencia y reactancia de la impedancia.
7. Representación cartesiana y fasorial de la tensión y de la intensidad.
8. Potencia instantánea, potencia media, potencia activa, potencia reactiva, potencia aparente y potencia compleja $\boldsymbol{S}$.

9. Representación cartesiana de: la potencia instantánea, la componente activa de la potencia instantánea, la componente reactiva de la potencia instantánea, la potencia activa, la potencia reactiva, la potencia aparente.

Solución:

1. Pulsación ω de la CA.

$$\omega = 314 \text{ rad/s}$$

6. Frecuencia f y período T. Por las *fórmulas [7.4]* y *[7.3]:*

$$\omega = \frac{2\cdot\pi}{T} = 2\cdot\pi\cdot f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\cdot\pi} = \frac{314}{2\cdot\pi} = 50\,\text{Hz} \Rightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0{,}02\,\text{s}$$

7. Valor máximo y eficaz de la tensión (V_0, V) y de la intensidad (I_0, I). Por las *fórmulas [7.15] y [7.18]:*

$$I_0 = \sqrt{2}\cdot 2 = 2{,}8\,\text{A} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot 2}{\sqrt{2}} = 2\,\text{A}$$

$$V_0 = \sqrt{2}\cdot 10 = 14{,}1\,\text{V} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{V_0}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot 10}{\sqrt{2}} = 10\,\text{V}$$

8. Valor de la tensión e intensidad en el instante t = 10 ms. Sustituyendo el tiempo en las *fórmulas [7.209] y [7.210]:*

$$v = \sqrt{2}\cdot 10\cdot \text{sen}\,(314\cdot t + 1) = \sqrt{2}\cdot 10\cdot \text{sen}\,(314\cdot 10\cdot 10^{-3} + 1) = -11{,}8\,\text{V}$$

$$i = \sqrt{2}\cdot 2\cdot \text{sen}\,314\cdot t = \sqrt{2}\cdot 2\cdot \text{sen}\,314\cdot 10\cdot 10^{-3} = 0\,\text{A}$$

Nótese que el instante t = 10 ms es el correspondiente a $T/2$, *figura 7.52*, donde la sinusoide i corta al *eje* 0x, y la sinusoide v tiene valores negativos.

9. Impedancia $\boldsymbol{Z}$ en forma polar y binómica. Por la *fórmula [7.75]*:

Si se quiere expresar el ángulo en grados sexagesimales, teniendo en cuenta que 90º son $\pi/2$ rad, se tiene: 1 rad = 90º/(π/2) = 57,3º

$$Z_{\underline{\varphi}} = \frac{V_{\underline{\alpha}}}{I_{\underline{\alpha-\varphi}}} = \frac{10_{\underline{57,3^\circ}}}{2_{\underline{57,3^\circ-57,3^\circ}}} = \frac{10_{\underline{57,3^\circ}}}{2_{\underline{0^\circ}}} = 5_{\underline{57,3^\circ}}\ \Omega \Rightarrow \text{Forma polar}: \overline{Z} = 5_{\underline{57,3^\circ}}$$

Nótese cómo en este ejercicio se ha tomado como origen de fases la intensidad $\boldsymbol{I}$, se puede poner directamente el fasor de la intensidad como, $\boldsymbol{I} = 2_{0^\circ}$.

Por la *fórmula [7.71] y figura 7.31:*

$$R = Z\cdot\cos\varphi = 5\cdot\cos 57,3^\circ = 2,7\ \Omega \quad \text{y} \quad X = Z\cdot\text{sen}\,\varphi = 5\cdot\text{sen}\,57,3^\circ = 4,2\ \Omega$$

$$\text{Forma binómica}: \overline{Z} = R + j\cdot X = 2,7 + j\cdot 4,2\ \Omega$$

10. Resistencia R y reactancia X de la impedancia.

$$\text{Resistencia } R = 2,7\ \Omega$$

$$\text{Reactancia } X = 4,2\ \Omega$$

Como el ángulo $\varphi > 0$, la reactancia X tiene carácter inductivo.

11. Representación cartesiana y fasorial de la tensión y de la intensidad. *Figura 7.51.*

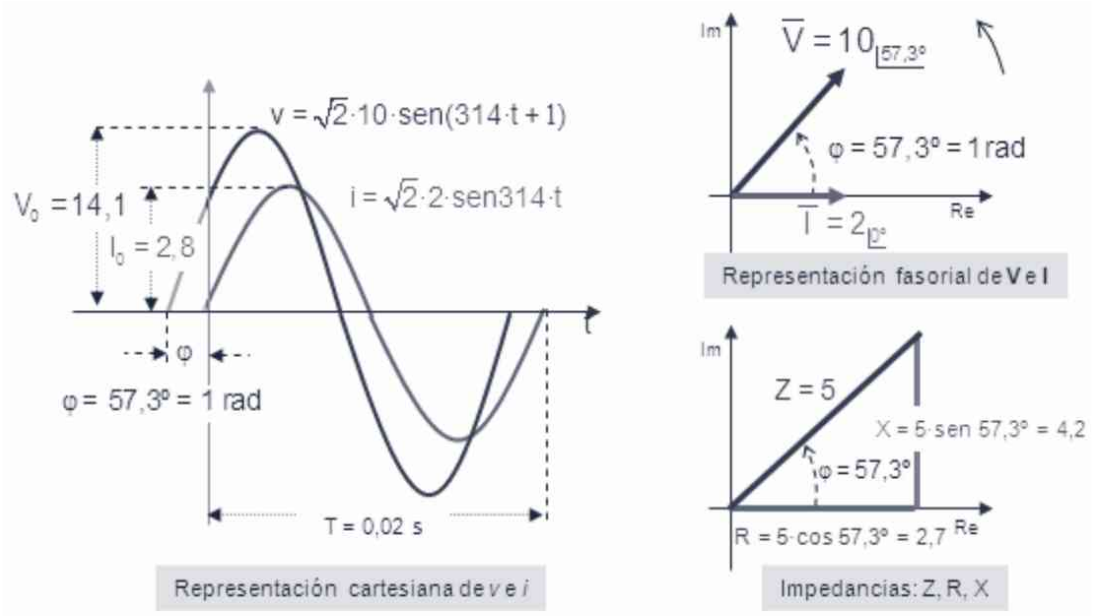


Figura 7.51. Ejercicio 7.25.2. Diagrama cartesiano, fasorial V e I, impedancias

12. Potencia instantánea *p*, potencia media, potencia activa *P*, potencia reactiva *Q*, potencia aparente *S* y potencia compleja ***S***.

La potencia instantánea, *fórmula [7.153]*, se obtiene multiplicando las ecuaciones *[7.209] y [7.210]:*

$$p = v \cdot i = \left[\sqrt{2} \cdot 10 \cdot \text{sen}\ (314 \cdot t + 1)\right] \cdot \left[\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \text{sen}\ 314 \cdot t\right]$$

Como:

$$\text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] \Rightarrow \text{sen}\,(314 \cdot t + 1) \cdot \text{sen}\, 314 \cdot t = \frac{1}{2}[\cos 1 - \cos(2 \cdot 314 \cdot t + 1)]$$

$$p = v \cdot i = 10 \cdot 2 \cdot \cos 1 - 10 \cdot 2 \cdot \cos(2 \cdot 314 \cdot t + 1) = 10{,}8 - 20 \cdot \cos(2 \cdot 314 \cdot t + 1) \quad \text{W}$$

La potencia instantánea *p* también se puede hallar utilizando la *fórmula [7.155]* directamente.

La potencia media, también llamada potencia activa *P*, es el término constante de la fórmula anterior:

$$P = 10 \cdot 2 \cdot \cos 1 = 10{,}8 \text{ W}$$

Para valores diferentes a los instantáneos se suele expresar el ángulo en grados sexagesimales, tal como sigue.

La potencia activa *P* calculada por la fórmula *[7.147]*:

$$P = 10 \cdot 2 \cdot \cos 1 = 10{,}8 \text{ W}$$

La potencia activa *P* corresponde a la potencia de la resistencia *R,* luego la *fórmula [7.94]*:

$$P = I^2 \cdot R = 2^2 \cdot 2{,}7 = 10{,}8 \text{ W}$$

La potencia reactiva *Q* calculada por la fórmula *[7.148]*:

$$Q = V \cdot I \cdot \text{sen}\varphi = 10 \cdot 2 \cdot \text{sen}\ 57{,}3^\circ = 16{,}8 \text{ VAr}$$

La potencia reactiva *Q* corresponde a la potencia de la reactancia *X,* que como se ha visto tiene carácter inductivo, luego la *fórmula [7.112]*:

$$Q_L = I^2 \cdot X_L = 2^2 \cdot 4{,}2 = 16{,}8 \text{ VAr}$$

La potencia aparente *S, figura 7.33:*

$$S = V \cdot I = 10 \cdot 2 = 20 \text{ VAr}$$

La expresión de la potencia en forma compleja, *fórmula [7.149]:*

$$\overline{S} = P + j \cdot Q = 10{,}8 + j \cdot 16{,}8 \quad \text{VA}$$

13. Representación cartesiana de: la potencia instantánea p, la componente activa de la potencia instantánea p_P, la componente reactiva p_Q de la potencia instantánea, la potencia activa P, la potencia reactiva Q, la potencia aparente S.

La potencia instantánea p, también, se puede poner en la forma, *ecuación [7.160]:*

$$p = v \cdot i = 10 \cdot 2 \cdot \cos 1 - 10 \cdot 2 \cdot \cos (2 \cdot 314 \cdot t) \cdot \cos 1 + 10 \cdot 2 \cdot \text{sen} (2 \cdot 314 \cdot t) \cdot \text{sen } 1$$

Esta ecuación, además de lo dicho en el *apartado 7.17*, permite dibujar las curvas de las potencias pedidas, *figura 7.52*.

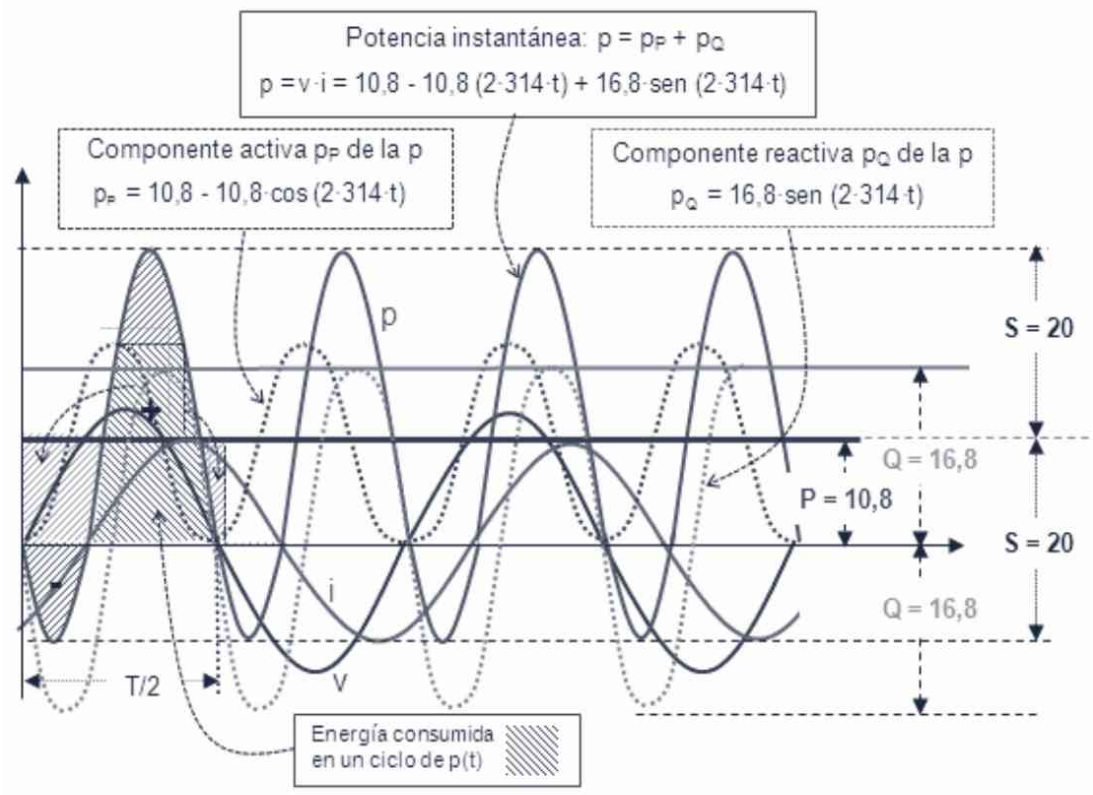


Figura 7.52. Ejercicio 7.25.2. Potencias

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Ejercicio 7.26.3

En el nudo del circuito de CA de la *figura 7.53,* se conocen las intensidades:

$$i_1 = \sqrt{2}\cdot 4\cdot \text{sen}\ (\omega\cdot t - \frac{\pi}{3}) \qquad [7.212]$$

$$i_2 = \sqrt{2}\cdot 2\cdot \text{sen}\ (\omega\cdot t - \frac{5\cdot\pi}{6}) \qquad [7.213]$$

Hallar la intensidad i_3.

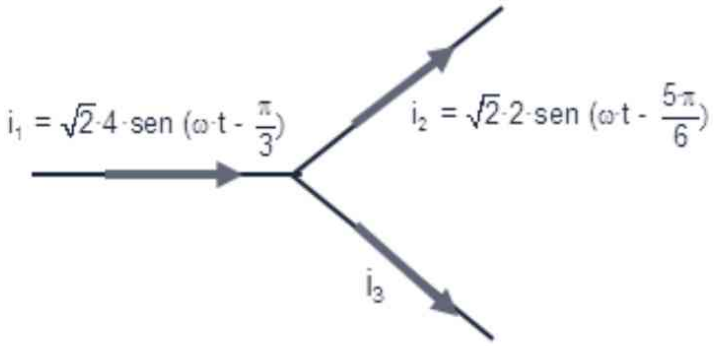


Figura 7.53. Ejercicio 7.25.3

Solución:

En forma fasorial (de valores eficaces) y binómica, *apartado 7.4*, las intensidades son:

$$\overline{I}_1 = 4_{\lfloor -\frac{\pi}{3}} = 2 - 3.46\cdot j$$

$$\overline{I}_2 = 2_{\lfloor -\frac{5\cdot\pi}{6}} = -1{,}73 - j$$

Por la 1.ª ley de Kirchhoff, *fórmula [7.79]*:

$$\overline{I}_1 = \overline{I}_2 + \overline{I}_3 \quad \Rightarrow \quad \overline{I}_3 = \overline{I}_1 - \overline{I}_2 = 2 - j\cdot 3{,}46 - (-1{,}73 - j) = 3{,}73 - j\cdot 2{,}46 = 4{,}47_{\lfloor -0{,}58}$$

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Finalmente pasando al dominio del tiempo:

$$\overline{I}_3 = \sqrt{2}\cdot 4{,}47\cdot \text{sen}\,(\omega\cdot t - 0{,}58)$$

En la *figura 7.54* se hace una representación gráfica de la solución del ejercicio.

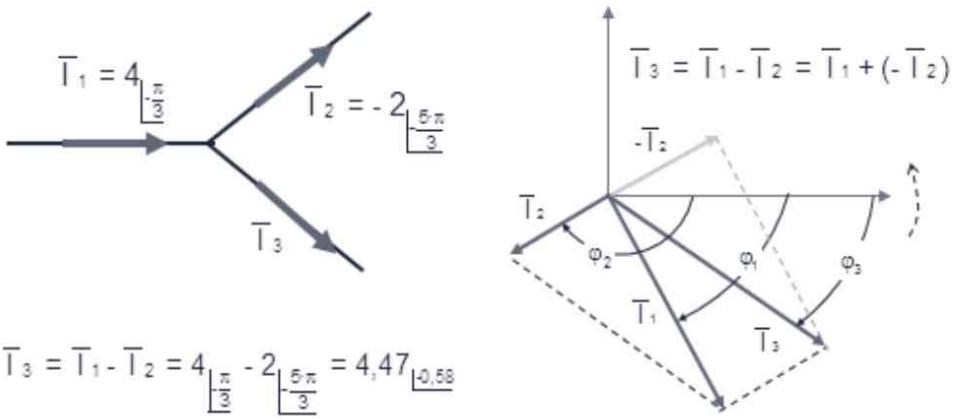


Figura 7.54. Ejercicio 7.25.3. Diagrama fasorial

Ejercicio 7.26.4

En el circuito de la *figura 7.55*, hallar:

1. Impedancia.
2. Intensidad por el circuito.
3. Tensiones en los extremos de cada elemento. Diagrama fasorial de las tensiones.
4. Potencia activa, reactiva y aparente.
5. Factor de potencia.
6. Frecuencia de resonancia.

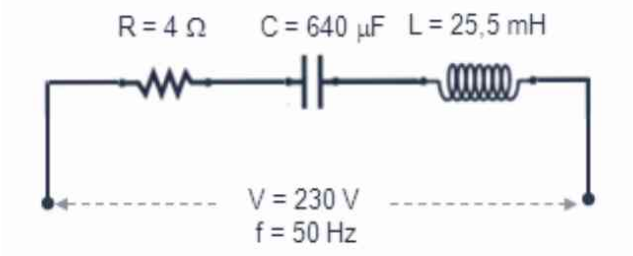


Figura 7.55. Ejercicio 7.25.4

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Solución:

1. Impedancia **Z**, *fórmula [7.137]* y *figura 7.31*:

$$X_L = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 25{,}5 \cdot 10^{-3} = 8\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 640 \cdot 10^{-6}} = 5\ \Omega$$

$$\varphi = \text{arctag}\,\frac{X_L - X_C}{R} = \text{arctag}\,\frac{8-5}{4} = 36{,}8^\circ$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{4^2 + (8-5)^2} = 5\ \Omega \quad \Rightarrow \quad \overline{Z} = 4 + j\,3 = 5_{\underline{36{,}8^\circ}}$$

2. Intensidad ***I*** por el circuito, *fórmula [7.140]*. Se toma como origen de fases el fasor tensión $\boldsymbol{V} = 230_{\underline{0^\circ}}$:

$$\overline{I} = \frac{230_{\underline{|0}}}{5_{\underline{|36{,}8}}} = 46_{\underline{|-36{,}8}}\ \text{A}$$

La intensidad está retrasada 38,8º respecto a la tensión, o lo que es lo mismo, la tensión está adelantada 38,8º respecto a la intensidad.

3. Tensiones, $\boldsymbol{V_R}$, $\boldsymbol{V_C}$, $\boldsymbol{V_L}$, en los extremos de cada elemento. Diagrama fasorial de las tensiones. Por las *fórmulas [7.135],* teniendo en cuenta que se ha tomado ***V*** como origen de fases:

$$\overline{V}_R = I_{\underline{|-36{,}8}} \cdot R_{\underline{|0^\circ}} = 46_{\underline{|-36{,}8^\circ}} \cdot 4_{\underline{|0^\circ}} = 184_{\underline{|-36{,}8^\circ}}\ \text{V}$$

$$\overline{V}_L = I_{\underline{|\varphi^\circ}} \cdot X_{L\underline{|90^\circ}} = 46_{\underline{|-36{,}8^\circ}} \cdot 8_{\underline{|90^\circ}} = 368_{\underline{|53{,}2^\circ}}\ \text{V}$$

$$\overline{V}_C = I_{\underline{|\varphi^\circ}} \cdot X_{C\underline{|-90^\circ}} = 46_{\underline{|-36{,}8^\circ}} \cdot 5_{\underline{|-90^\circ}} = 230_{\underline{|-126{,}8^\circ}}\ \text{V}$$

En la *figura 7.56* se tiene el diagrama fasorial de las tensiones.

Nótese cómo la tensión en los extremos de la inductancia *L*, V_L = 368 V, es mayor que la tensión total, *V* = 230 V. Esto es así, tal como se ha explicado en diferentes apartados de este capítulo, por las características vectoriales que tienen las magnitudes en CA.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Si el diagrama fasorial se hace tomando como origen de fases la intensidad, *figura 7.57*, entonces, $\boldsymbol{I} = 46_{0^\circ}$, y para las tensiones:

$$\overline{V}_R = I_{\underline{\varphi^\circ}} \cdot R_{\underline{0^\circ}} = 46_{\underline{0^\circ}} \cdot 4_{\underline{0^\circ}} = 184_{\underline{0^\circ}}\ V$$

$$\overline{V}_L = I_{\underline{0^\circ}} \cdot X_{L\underline{90^\circ}} = 46_{\underline{0^\circ}} \cdot 8_{\underline{90^\circ}} = 368_{\underline{90^\circ}}\ V$$

$$\overline{V}_C = I_{\underline{0^\circ}} \cdot X_{C\underline{-90^\circ}} = 46_{\underline{0^\circ}} \cdot 5_{\underline{-90^\circ}} = 230_{\underline{-90^\circ}}\ V$$

$$\overline{V} = \overline{V}_R + \overline{V}_C + \overline{V}_L = 184_{\underline{0^\circ}} + 230_{\underline{-90^\circ}} + 368_{\underline{90^\circ}} = 230_{\underline{36,8^\circ}}$$

El diagrama fasorial correspondiente es equivalente al anterior (desplazado un ángulo, en sentido antihorario, de 36,8º)

4. Potencia activa *P*, *fórmula [7.147]*, reactiva *Q*, *fórmula [7.148]*, y aparente *S*, *fórmula [7.146]*.

$$P = V \cdot I \cdot \cos\varphi = 230 \cdot 46 \cdot \cos 36,8^\circ = 8.464\ W$$

$$Q = V \cdot I \cdot \operatorname{sen}\varphi = 230 \cdot 46 \cdot \operatorname{sen} 36,8^\circ = 6.348\ VAr$$

$$S = V \cdot I = 230 \cdot 46 = 10.580\ VA$$

Como la potencia activa *P* corresponde a la resistencia *R*, se puede hallar también, por la *fórmula [7.94]*:

$$P = I^2 \cdot R = 46^2 \cdot 4 = 8.464\ W$$

Como la potencia reactiva *Q* corresponde a la diferencia entre la potencia reactiva demandada Q_L, *fórmula [7.112]*, y la potencia reactiva generada Q_C, *fórmula [7.131]*:

$$Q = Q_L - Q_C = I^2 \cdot X_L - I^2 \cdot X_C = 46^2 \cdot 8 - 46^2 \cdot 5 = 6.348\ VAr$$

En el plano complejo, *figura 7.33*, la expresión de la potencia es:

$$\overline{S} = P + j \cdot Q = 8.464 + j \cdot 6.348$$

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Las potencias, también, se pueden obtener mediante la *fórmula [7.150]*:

$$\overline{S} = \overline{V}\cdot\overline{I}^{*} = 230_{\underline{|0^\circ}}\cdot 46_{\underline{|36,8}} = 10.580_{\underline{|36,8}} = 10.580\cdot(\cos 36,8^\circ + \operatorname{sen} 36,8^\circ) = 8.464 + j\cdot 6.348$$

5. Factor de potencia:

$$\text{f.d.p.} = \frac{P}{S} = \frac{8.464}{10.580} = 0,8$$

$$\text{f.d.p.} = \cos\varphi = \cos 36,8 = 0,8$$

Como era de esperar al tratarse de señales sin armónicos.

6. Frecuencia de resonancia. La resonancia se produce cuando $X_L = X_C$:

$$X_L = X_C \Rightarrow 2\cdot\pi\cdot f\cdot 25\cdot 10^{-3} = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot f\cdot 640\cdot 10^{-6}} \Rightarrow f = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{25\cdot 10^{-3}\cdot 640\cdot 10^{-6}}} = 40\ \text{Hz}$$

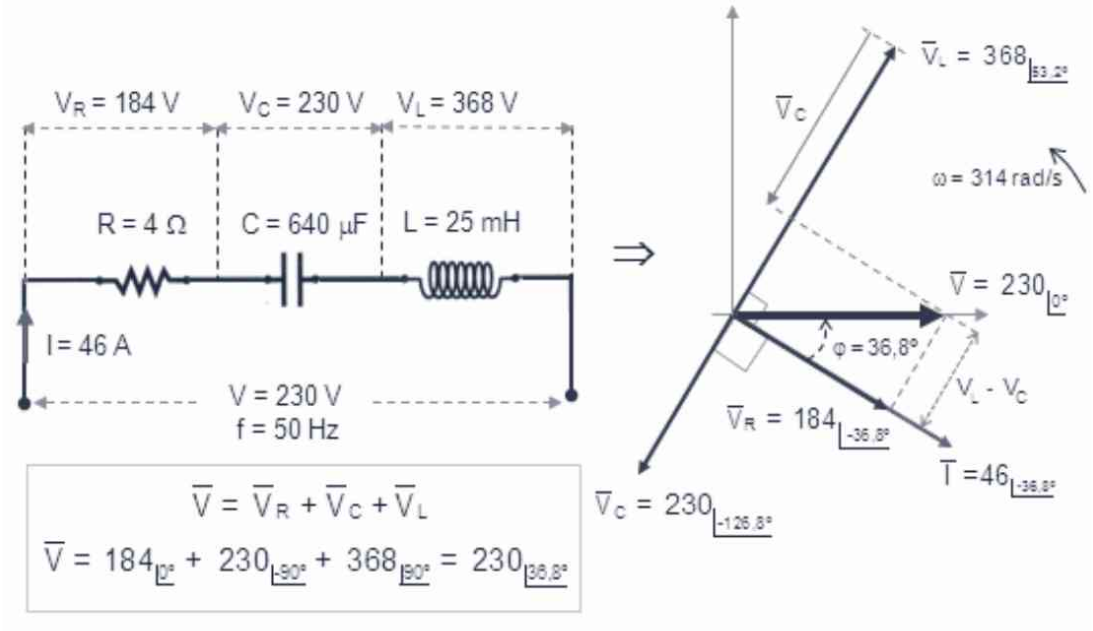


Figura 7.56. Ejercicio 7.25.4. Diagrama fasorial de las tensiones

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

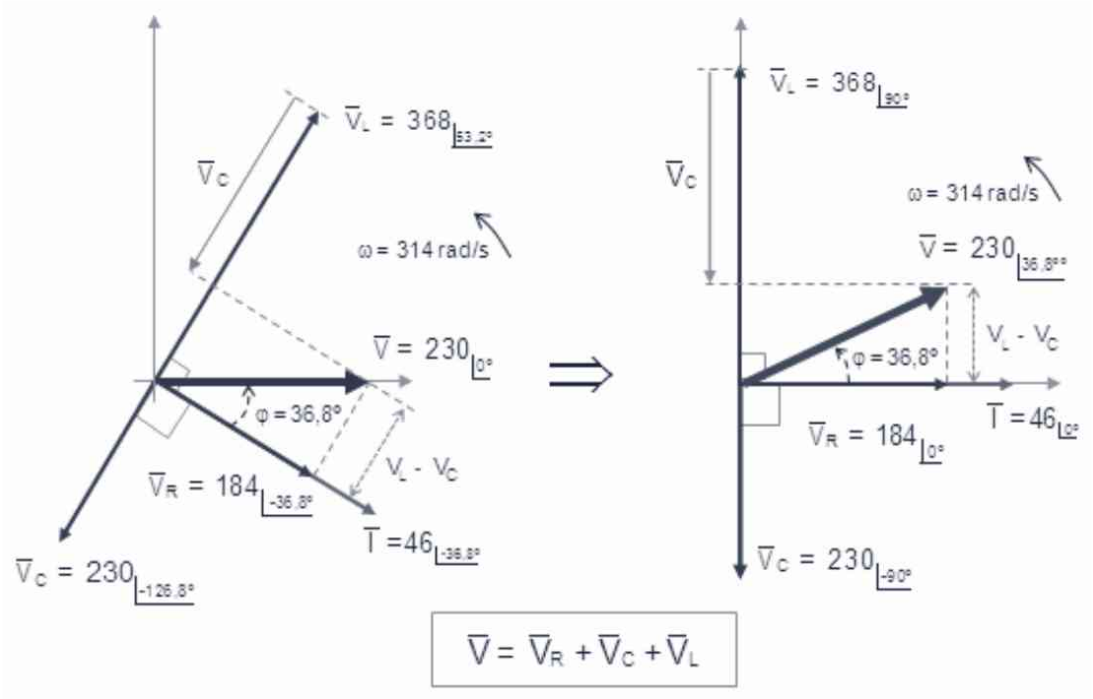


Figura 7.57. Ejercicio 7.25.4. Diagramas fasorial de las tensiones en función de $V_{\angle 0^o}$ e $I \angle 0^o$

Ejercicio 7.26.5

Un taller demanda una potencia de 5 kW de una línea de distribución monofásica de 230 V, 50 Hz, siendo la corriente demandada de 50 A.

1. Representar la carga del taller por una impedancia equivalente resistivo-inductiva R-L.

2. Determinar la capacidad del condensador que se ha de conectar al comienzo de la instalación del taller para un *f.d.p* = 0,8.

3. Potencia activa y reactiva demandada por el taller, antes y después de poner el condensador.

4. Intensidad demandada después de poner el condensador.

Solución:

1. Representar la carga del taller por una impedancia ***Z*** equivalente resistivo-inductiva R-L.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

A partir de la *fórmula [7.63]*, se obtiene el módulo de la impedancia $\boldsymbol{Z}$ que permite el paso de la misma corriente, $I = 50$ A, que el taller:

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{230}{50} = 4,6\,\Omega$$

La *fórmula [7.164]* permite determinar *el* cos φ del taller:

$$P = V \cdot I \cdot \cos\varphi \;\Rightarrow\; \cos\varphi = \frac{P}{V \cdot I} = \frac{5 \cdot 10^3}{230 \cdot 50 \cdot} = 0,43 \;\Rightarrow\; \varphi = \arccos 0,43 = 64^\circ$$

Del triángulo de impedancias, *figura 7.13*:

$$R = Z \cdot \cos\varphi = 4,6 \cdot \cos 64^\circ = 2\,\Omega$$

$$X_L = Z \cdot \operatorname{sen}\varphi = 4,6 \cdot \operatorname{sen} 64^\circ = 4,13\,\Omega \;\Rightarrow\; L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{4,13}{2 \cdot \pi \cdot 50} = 13,1\,\text{mH}$$

Resultando para la impedancia equivalente: $\boldsymbol{Z} = 2 + j \cdot 4,13\ \Omega$, es decir, una resistencia *de* 2 Ω y una inductancia de 13,1 mH.

14. Determinar la capacidad C del condensador que se ha de conectar al comienzo de la instalación del taller para que su *f.d.p* = cos $\varphi' = 0,8$.

El nuevo desfase entre tensión y corriente ha de ser, φ' = arcos 0,8 = 36,8º. Por la *fórmula [7.177]*:

$$C = \frac{P \cdot \operatorname{tag}\varphi - P \cdot \operatorname{tag}\varphi'}{V^2 \cdot \omega} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot \operatorname{tag} 64^\circ - 5 \cdot 10^3 \cdot \operatorname{tag} 36,8^\circ}{230^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50} = 392\ \mu\text{F}$$

15. Potencia activa y reactiva demandada por el taller, antes y después de poner el condensador, *figura 7.58.*

La potencia activa no se modifica, es la misma antes que después: 5 kW.

Por el triángulo de potencias, *figura 7.33*, la potencia reactiva antes y después del condensador:

$$\operatorname{tag}\varphi = \frac{Q}{P} \;\Rightarrow\; Q = P \cdot \operatorname{tag}\varphi = 5.000 \cdot \operatorname{tag} 64^\circ = 10.251\,\text{VAr}$$

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

$$\text{tag}\varphi' = \frac{Q'}{P} \Rightarrow \quad Q' = P \cdot \text{tag}\varphi' = 5.000 \cdot \text{tag}\,36,8^\circ = 3.740\ \text{VAr}$$

La diferencia entre ambas potencias *reactivas, Q - Q'* = 6.511 VAr, corresponde a la potencia reactiva aportada por el condensador (y que el taller no necesita demandar de la línea de distribución). En efecto, la *fórmula [7.131]*, permite conocer la potencia reactiva del condensador (de sentido contrario a la reactivo-inductiva previa del taller):

$$Q_C = -V^2 \cdot \omega \cdot C = -230^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 392 \cdot 10^{-6} = -6.511\ \text{VAr}$$

16. Intensidad demandada después de poner el condensador. A partir de la *fórmula [7.164]*:

$$I' = \frac{P}{V \cdot \cos\varphi'} = \frac{5 \cdot 10^3}{230 \cdot \cos 36,8^\circ} = 27,2\ \text{A}$$

La intensidad *I'*, una vez puesto el condensador, supone un 54,4% de la intensidad sin condensador *I*, con todas las ventajas que esto supone, *apartado 7.18.*

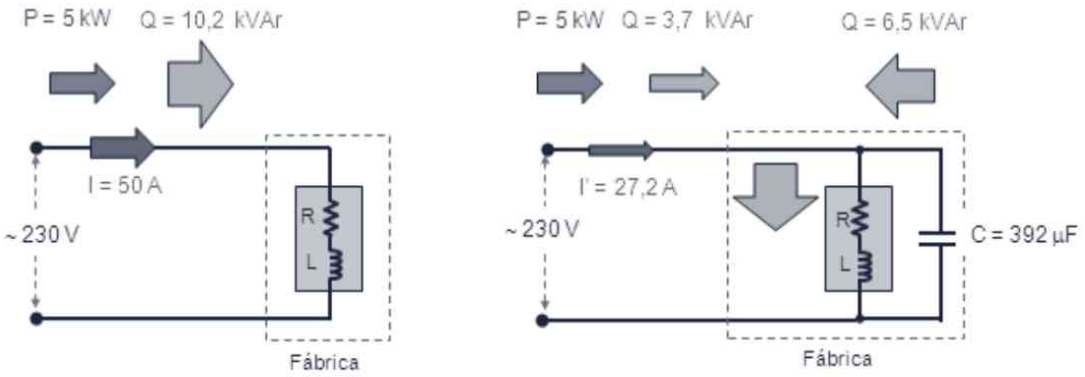


Figura 7.58. Ejercicio 7.25.5. Intensidad y potencias antes y después de corregir el f.d.p

Nótese que la potencia reactiva del taller, una vez corregido el f.d.p. sigue siendo Q = 10,2 kVAr, con la particularidad que, ahora, parte de esa potencia, Q_C = 6,5 kVAr, es aportada por el condensador.

Ejercicio 7.26.6

Una línea eléctrica de CA monofásica de 230 V, 50 Hz alimenta una instalación formada por las siguientes cargas en paralelo:

- Una impedancia serie de R = 8 Ω y L= 19 mH.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

- Una carga óhmico-capacitiva de $P = 2$ kW y cos $\varphi_2 = 0{,}85$.
- Un motor de inducción de potencia útil 2 CV, rendimiento $\eta = 0{,}85$ y cos $\varphi_3 = 0{,}8$ en retraso.

Se pide, mediante el método de Boucherot:

1. Potencia activa, reactiva y aparente suministrada por la línea.
2. Intensidad de la línea y cos φ medio de la instalación.

Solución:

Se determina primero las potencias activas P_n y reactivas Q_n de cada carga y a continuación se aplica el teorema de Boucherot, *fórmulas [7.177]*, *[7.178]* y *[7.179]*:

- Carga de la impedancia:

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + (X_L)^2} = \sqrt{8^2 + \left(2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 19 \cdot 10^{-3}\right)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \quad \Rightarrow \quad \overline{Z}_1 = 8 + j \cdot 6 \ \Omega$$

$$I_1 = \frac{V}{Z_1} = \frac{230}{10} = 23 \text{ A}$$

$$P_1 = I_1^2 \cdot R = 23^2 \cdot 8 = 4.232 \text{ W}$$

$$Q_1 = I_1^2 \cdot X_L = 23^2 \cdot 6 = 3.174 \text{ VAr ind.} = +3.174 \text{ VAr}$$

- Carga óhmico-capacitiva:

$$P_2 = 2.000 \text{ W}$$

$$Q_2 = P_2 \cdot \text{tag}\varphi_2 = 2.000 \cdot \text{tag}(\arccos 0{,}85) = 1.239 \text{ VAr cap.} = -1.239 \text{ VAr.}$$

- Motor de inducción:

$$P_3 = \frac{P_u}{\eta} = \frac{2 \cdot 736}{0{,}85} = 1.731 \text{W}$$

$$Q_3 = P_3 \cdot \text{tag}\varphi_3 = 1.731 \cdot \text{tag}(\arccos 0{,}8) = 1.298 \text{ VAr ind.} = +1.298 \text{ VAr.}$$

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Aplicación del Teorema de Boucherot, *figura 7.59*:

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 = 4.232 + 2.000 + 1.731 = 7.963\ W$$

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 3.174 - 1.239 + 1.298 = +3.233\ VAr$$

$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} = \sqrt{7.963^2 + 3.233^2} = 8.594\ VA$$

La intensidad de la línea I_T y el $\cos\varphi_T$ medio de la instalación:

$$S_T = V \cdot I_T \Rightarrow I_T = \frac{S_T}{V} = \frac{8.594}{230} = 37,4\ A$$

$$\cos\varphi_T = \frac{P_T}{S_T} = \frac{7.963}{8.594} = 0,92\ \text{inductivo}$$

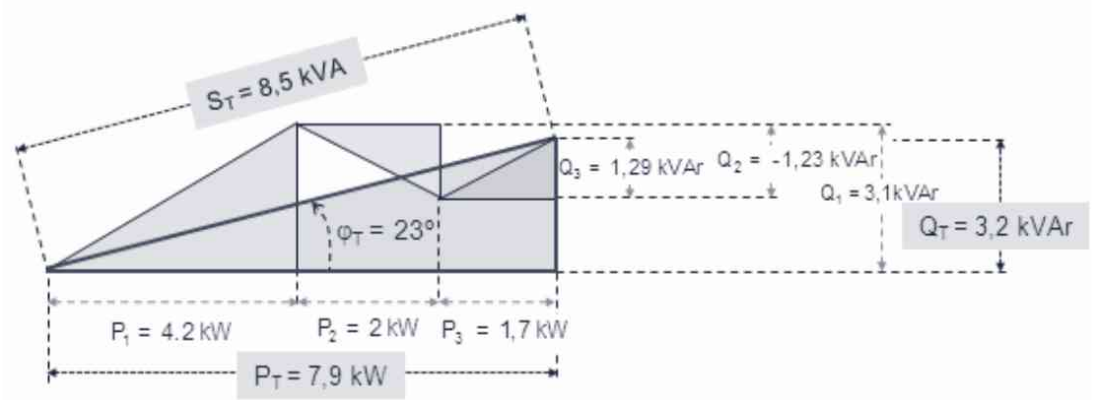


Figura 7.59. Ejercicio 7.25.6. Teorema de Boucherot

Ejercicio 7.26.7

En el circuito eléctrico de la *figura 7.60*, las impedancias están expresadas en Ω. Hallar:

1. Las intensidades y el diagrama fasorial correspondiente.
2. Impedancia y admitancia del circuito.
3. Potencia activa, reactiva y aparente del circuito.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

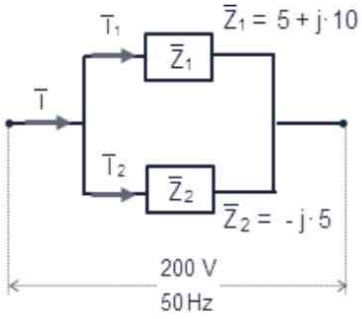


Figura 7.60. Ejercicio 7.25.7

Solución:

1. Las intensidades y el diagrama fasorial correspondiente. Por las *fórmulas [7.71]* y *[7.74]* se determinan las corrientes por cada impedancia. Tomando como origen de fases la tensión, $\boldsymbol{V} = 200_{0^o}$, en los extremos de las cargas:

$$\bar{Z}_1 = 5 + j\cdot 10 = 11,2_{\underline{|63,4^o}}\ \Omega \quad \Rightarrow \quad \bar{I}_1 = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_1} = \frac{200_{\underline{|0^o}}}{11,2_{\underline{|63,4^o}}} = 17,9_{\underline{|-63,4^o}}\ A$$

$$\bar{Z}_2 = -j\cdot 5 = 5_{\underline{|-90^o}}\ \Omega \quad \Rightarrow \quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_2} = \frac{200_{\underline{|0^o}}}{5_{\underline{|-90^o}}} = 40_{\underline{|90^o}}\ A$$

Aplicando la 1.ª Ley de Kirchhoff, *fórmula [7.79]*, se determina la corriente que llega al nudo izquierdo:

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = 17,9_{\underline{|-63,4^o}} + 40_{\underline{|90^o}} = 8 - j\cdot 16 + j\cdot 40 = 8 + j\cdot 24 = 25,3_{\underline{|71,6^o}}$$

En la *figura 7.61*, se tiene el diagrama fasorial correspondiente.

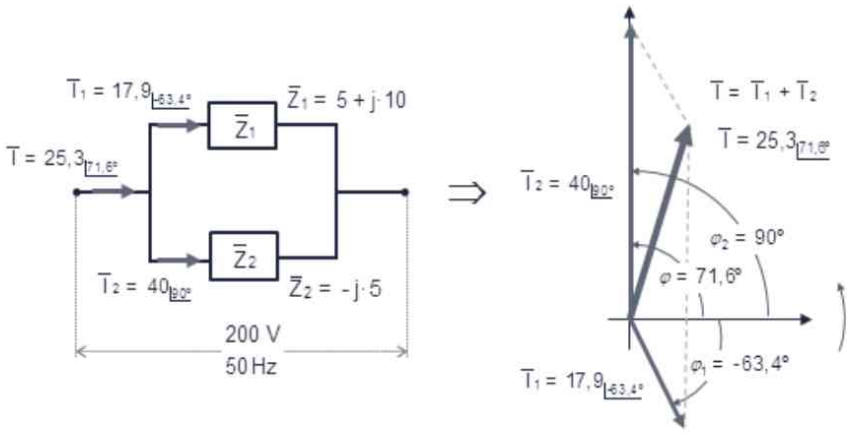


Figura 7.61. Ejercicio 7.25.7 Diagrama fasorial de intensidades

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

2. Impedancia $\boldsymbol{Z}$ y admitancia $\boldsymbol{Y}$ del circuito:

$$\overline{I} = \frac{\overline{V}}{\overline{\overline{Z}}} \Rightarrow \overline{\overline{Z}} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = \frac{200_{\underline{|0^\circ}}}{25,3_{\underline{|71,6^\circ}}} = 7,9_{\underline{|-71,6^\circ}}\ \Omega \Rightarrow \overline{Y} = \frac{1}{\overline{\overline{Z}}} = \frac{1}{7,9_{\underline{|-71,6^\circ}}} = 0,127_{\underline{|71,6^\circ}}\ \Omega^{-1}$$

También se puede hallar la impedancia $\boldsymbol{Z}$ por la *fórmula [7.78]* correspondiente a dos impedancias en paralelo:

$$\frac{1}{\overline{\overline{Z}}} = \frac{1}{\overline{\overline{Z}}_1} + \frac{1}{\overline{\overline{Z}}_2} = \frac{1}{11,2_{\underline{|63,4^\circ}}} + \frac{1}{5_{\underline{|-90}}} \Rightarrow \overline{\overline{Z}} = \frac{11,2_{\underline{|63,4^\circ}} \cdot 5_{\underline{|-90}}}{11,2_{\underline{|63,4^\circ}} + 5_{\underline{|-90}}} = 7,9_{\underline{|-71,6^\circ}}\ \Omega$$

3. Potencia activa P, *fórmula [7.147]*, reactiva Q, *fórmula [7.148]*, y aparente S, *fórmula [7.146]*.

Como el ángulo φ, *fórmula [7.70]*, es el ángulo correspondiente a la impedancia:

$$P = V \cdot I \cdot \cos\varphi = 200 \cdot 25,3 \cdot \cos(-71,6^\circ) = 1.597\ W$$

$$Q = V \cdot I \cdot \operatorname{sen}\varphi = 200 \cdot 25,3 \cdot \operatorname{sen}(-71,6^\circ) = -4.801\ VAr = 4.801\ VAr\ cap.$$

$$S = V \cdot I = 200 \cdot 25,3 = 5.060\ VA$$

Otra manera de calcular las potencias:

Como la potencia activa P corresponde a la resistencia R, se puede hallar también, por la *fórmula [7.94]*:

$$P = I_1^2 \cdot R_1 = 17,9^2 \cdot 5 = 1.597\ W$$

Como la potencia reactiva Q corresponde a la diferencia entre la potencia reactiva inductiva Q_1, *fórmula [7.112]*, y la potencia reactiva capacitiva Q_C, *fórmula [7.131]*:

$$Q = Q_1 - Q_2 = I_1^2 \cdot X_{L1} - I_2^2 \cdot X_{C2} = 17,9^2 \cdot 10 - 40^2 \cdot 5 = -4.801\ VAr$$

En el plano complejo, *figura 7.33*, la expresión de la potencia es:

$$\overline{S} = P + j \cdot Q = 1.597 - j \cdot 4.801$$

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Las potencias, también, se pueden obtener mediante la *fórmula [7.150]*:

$$\overline{S} = \overline{V} \cdot \overline{I}^{*} = 200_{\underline{|0^\circ}} \cdot 25{,}3_{\underline{|-71{,}6^\circ}} = 5.060_{\underline{|-71{,}6}} = 5.060 \cdot [\cos 71{,}6^\circ + j \cdot \operatorname{sen}(-71{,}6^\circ] = 1.597 - j \cdot 4801$$

Nótese que en la fórmula anterior se ha de poner el fasor conjugado ***I****, del fasor ***I***.

Ejercicio 7.26.8

En el circuito de la *figura 7.62*, hallar:

1. Las intensidades de cada rama.
2. Balance de potencias.

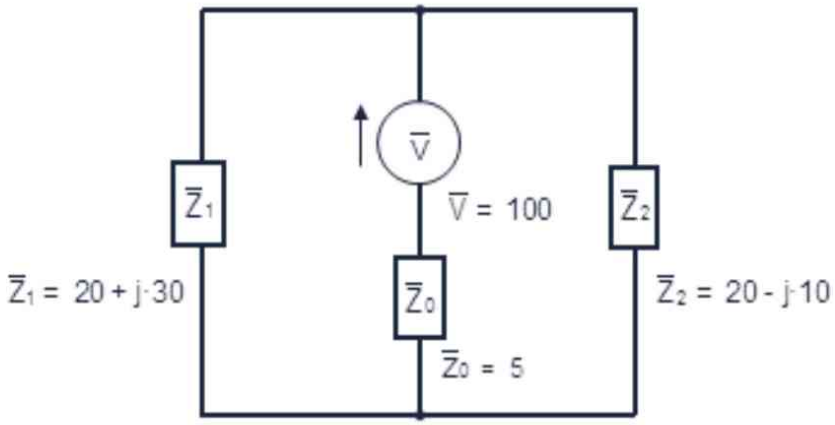


Figura 7.62. Ejercicio 7.25.8

Solución:

1. Las intensidades, I, I_1, I_2, de cada rama. Tomando la tensión V como origen de fases, $V = 100_{0^\circ}$ y aplicando las leyes de Kirchhoff, *figura 7.63*:

Nudo A: $\overline{I} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2$

Malla izquierda: $-\overline{V} = -\overline{I} \cdot \overline{Z}_0 - \overline{I}_1 \cdot \overline{Z}_1 \Rightarrow 100 = \overline{I} \cdot 5 + \overline{I}_1 \cdot (20 + j \cdot 30)$

Malla derecha: $\overline{V} = \overline{I} \cdot \overline{Z}_0 + \overline{I}_2 \cdot \overline{Z}_2 \Rightarrow 100 = \overline{I} \cdot 5 + \overline{I}_2 \cdot (20 - j \cdot 10)$

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Resulta un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Resolviendo el sistema se obtiene:

$$\overline{I}_1 = 1,23 - j\cdot 1,79 = -2,17_{\underline{-55,6^\circ}} \quad A$$

$$\overline{I}_2 = 3,11 + j\cdot 1,6 = 3,5_{\underline{27,26^\circ}} \quad A$$

$$\overline{I} = 4,34 - j\cdot 0,19 = 4,34_{\underline{-2,49^\circ}} \quad A$$

2. Balance de potencias.

   – Potencias generadas por la fuente de tensión:

$$P_V = V\cdot I\cdot \cos\varphi = 100\cdot 4,34\cdot \cos 2,49^\circ = 433,6\ W$$

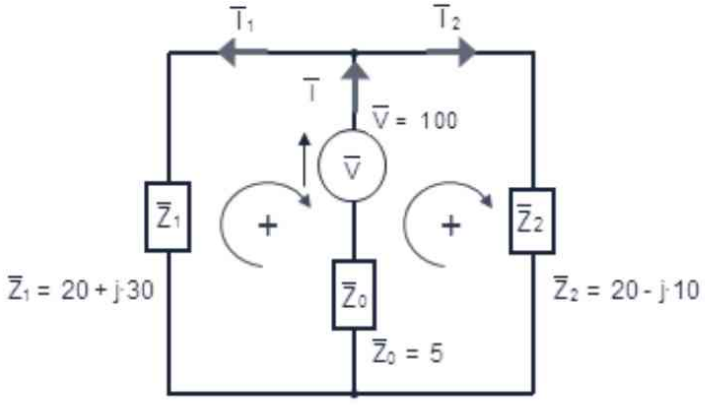
$$Q_V = V\cdot I\cdot \operatorname{sen}\varphi = 100\cdot 4,34\cdot \operatorname{sen} 2,49^\circ = 18,8\ VAr$$

   – Potencias $\boldsymbol{P_Z}$ y $\boldsymbol{Qz}$ de las cargas, $\boldsymbol{Z_0}$, $\boldsymbol{Z_1}$ y $\boldsymbol{Z_2}$:

$$P_Z = P_0 + P_1 + P_2 = I^2\cdot R_0 + I_1^2\cdot R_1 + I_2^2\cdot R_2 = 4,34^2\cdot 5 + 2,17^2\cdot 20 + 3,5^2\cdot 20 = 433,6\ W$$

$$Q_Z = Q_0 + Q_1 + Q_2 = I^2\cdot X_0 + I_1^2\cdot X_1 + I_2^2\cdot X_2 = 4,34^2\cdot 0 + 2,17^2\cdot 30 - 3,5^2\cdot 10 = 18,8\ VAr$$

Potencia generada $\boldsymbol{P_V}$ = Potencia consumida $\boldsymbol{P_Z}$.



$$\begin{cases} \overline{I} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 \\ 100 = \overline{I}\cdot 5 + \overline{I}_1\cdot (20 + j\cdot 30) \\ 100 = \overline{I}\cdot 5 + \overline{I}_2\cdot (20 - j\cdot 10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_V = P_0 + P_1 + P_2 \\ Q_V = Q_0 + Q_1 + Q_2 \end{cases}$$

Figura 7.63. Solución del ejercicio 7.25.8

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Es evidente que la resolución del problema se puede hacer considerando las dos impedancias laterales, en paralelo, en serie con la impedancia central y hallar la impedancia equivalente, parecido a como se hace en el *problema 7.26.9* siguiente.

Ejercicio 7.26.9

En el circuito de la *figura 7.64*, hallar:

1. Impedancia del circuito.
2. Intensidad por cada rama.
3. Tensión V_{ad}. Diagrama fasorial de tensiones e intensidades del circuito.
4. Potencias del circuito, activa, reactiva y aparente.

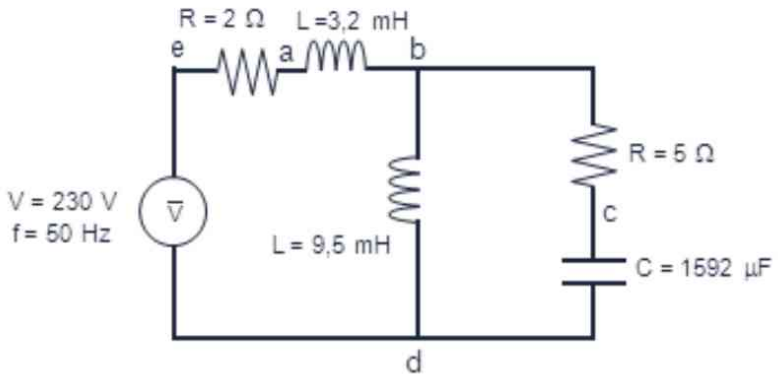


Figura 7.64. Ejercicio 7.25.9

Solución:

1. Impedancia $\boldsymbol{Z_E}$ del circuito, *figura 7.65.*

   – Se hallan las impedancias por rama:

$$\overline{Z}_0 = 2 + j\cdot 2\cdot\pi\cdot 50\cdot 3{,}2\cdot 10^{-3} = 2 + j\cdot 1 = 2{,}23_{\underline{|26{,}56^o}}\ \Omega$$

$$\overline{Z}_1 = j\cdot 2\cdot\pi\cdot 50\cdot 9{,}5\cdot 10^{-3} = j\cdot 3 = 3_{\underline{|90^o}}\ \Omega$$

$$\overline{Z}_2 = 5 - j\cdot\frac{1}{2\cdot\pi\cdot 50\cdot 1592\cdot 10^{-6}} = 5 - j\cdot 2 = 5{,}38_{\underline{|-21{,}8^o}}\ \Omega$$

– Se hallan la impedancia equivalente $\boldsymbol{Z_P}$ del conjunto en paralelo:

$$\frac{1}{\overline{Z}_P} = \frac{1}{\overline{Z}_1} + \frac{1}{\overline{Z}_2} = \frac{1}{3_{\lfloor 90^o}} + \frac{1}{5,38_{\lfloor -21,8^o}} = \frac{3_{\lfloor 90^o} + 5,38_{\lfloor -21,8^o}}{3_{\lfloor 90^o} \cdot 5,38_{\lfloor -21,8^o}} = \frac{5,1_{\lfloor 11,3^o}}{16,14_{\lfloor 68,2}}$$

$$\overline{Z}_P = \frac{16,14_{\lfloor 68,2}}{5,1_{\lfloor 11,3^o}} = 3,16_{\lfloor 56,9^o} = 1,7 + j \cdot 2,65 \quad \Omega$$

La impedancia total $\boldsymbol{Z_E}$ del circuito será:

$$\overline{Z}_E = \overline{Z}_0 + \overline{Z}_P = 2 + j \cdot 1 + 1,7 + j \cdot 2,65 = 3,7 + j \cdot 3,65 = 5,2_{\lfloor 44,6^o} \quad \Omega$$

2. Intensidad por cada rama, $\boldsymbol{I_0}$, $\boldsymbol{I_1}$, $\boldsymbol{I_2}$.

– Tomando el fasor, $\boldsymbol{V} = 230_{0^o}$, como origen de fases, se halla la intensidad $\boldsymbol{I_0}$ por la *fórmula [7.74]*:

$$\overline{I}_0 = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}_E} = \frac{230_{\lfloor 0^o}}{5,2_{\lfloor 44,6^o}} = 44,2_{\lfloor -44,6^o} \text{ A}$$

– Se halla la ddp $\boldsymbol{V_{bd}}$:

$$\overline{V}_{bd} = \overline{I}_0 \cdot \overline{Z}_P = 44,2_{\lfloor -44,6^o} \cdot 3,16_{\lfloor 56,9^o} = 139,7_{\lfloor 12,3^o} \text{ V}$$

También:

$$\overline{V}_{bd} = 230_{\lfloor 0^o} - \overline{I}_0 \cdot \overline{Z}_0 = 230_{\lfloor 0^o} - 44,2_{\lfloor -44,6^o} \cdot 2,23_{\lfloor 25,56^o} = 139,7_{\lfloor 12,3^o} \text{ V}$$

– Se halla las intensidades $\boldsymbol{I_1}$ e $\boldsymbol{I_2}$:

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{V}_{bd}}{\overline{Z}_1} = \frac{139,7_{\lfloor 12,3^o}}{3_{\lfloor 90^o}} = 46,6_{\lfloor -77,7^o} \text{ A}$$

$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{V}_{bd}}{\overline{Z}_2} = \frac{139,7_{\lfloor 12,3^o}}{5,38_{\lfloor -21,8^o}} = 26_{\lfloor 34,1^o} \text{ A}$$

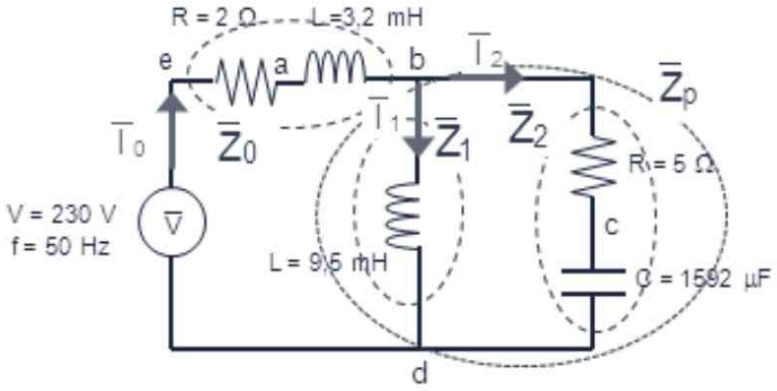


Figura 7.65. Ejercicio 7.25.9. Asociación de impedancias

3. Tensión V_{ad}. Diagrama fasorial de tensiones e intensidades del circuito, *figura 7.66*.

$$\overline{V}_{ad} = \overline{V}_{ab} + \overline{V}_{bd} = \overline{I}_0 \cdot \overline{X}_0 + \overline{I}_1 \cdot \overline{Z}_1$$

$$\overline{V}_{ad} = 44,2_{\underline{|-44,6^\circ}} \cdot 1_{\underline{|90^\circ}} + 46,6_{\underline{|-77,7^\circ}} \cdot 3_{\underline{|90^\circ}} = 44,2_{\underline{|45,4^\circ}} + 139,8_{\underline{|12,3^\circ}} = 178_{\underline{|20^\circ}} \text{ V}$$

También:

$$\overline{V}_{ad} = \overline{V}_{ed} - \overline{V}_{ea} = 230_{\underline{|0^\circ}} - \overline{I}_0 \cdot \overline{R} = 230_{\underline{|0^\circ}} - 44,2_{\underline{|-44,6^\circ}} \cdot 2_{\underline{|0^\circ}} = 230_{\underline{|0^\circ}} - 88,4_{\underline{|-44,6^\circ}} = 178_{\underline{|20^\circ}} \text{ V}$$

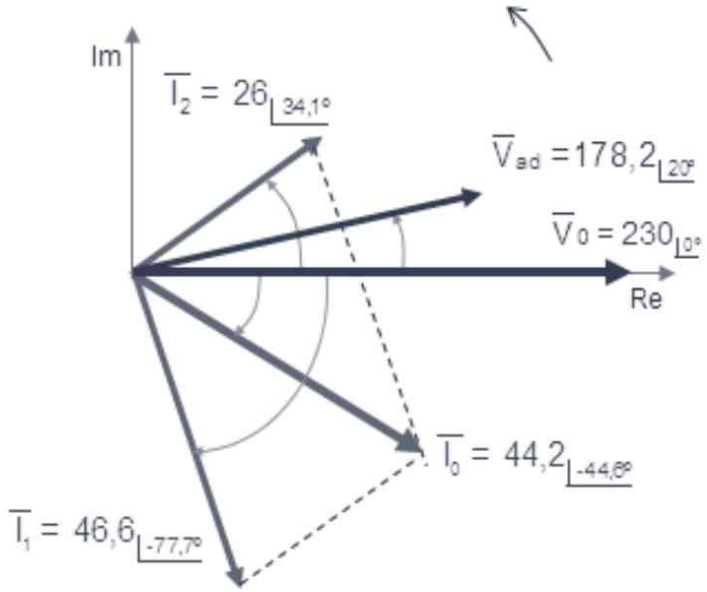


Figura 7.66. Ejercicio 7.25.9. Diagrama fasorial de tensiones e intensidades

4. Potencias del circuito, activa *P*, *fórmula [7.147],* reactiva *Q*, *fórmula [7.148]* y aparente *S*, *fórmula [7.146]*. El ángulo φ, *fórmula [7.70]*, es el ángulo correspondiente a la impedancia $\boldsymbol{Z_E}$:

$$P = V \cdot I \cdot \cos\varphi = 230 \cdot 44,2 \cdot \cos(44,6^\circ) = 7.238\ W$$

$$Q = V \cdot I \cdot \operatorname{sen}\varphi = 230 \cdot 44,2 \cdot \operatorname{sen}(44,6^\circ) = 7.138\ VAr = 7.138\ VAr\ ind.$$

$$S = V \cdot I = 230 \cdot 44,2 = 10.166\ VA$$

También, hallando las potencias de cada elemento de la impedancia equivalente $\boldsymbol{Z_E}$:

$$P = P_E = I_0^2 \cdot R_E = 44,2^2 \cdot 3,7 + 46,6^2 \cdot 0 + 26^2 \cdot 5 = 7.238\ W$$

$$Q = Q_E = I_0^2 \cdot X_E = 44,2^2 \cdot 3,65 = 7.138\ VAr$$

También, por el Teorema de Boucherot:

$$P = P_0 + P_1 + P_2 = I_0^2 \cdot R_0 + I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 = 44,2^2 \cdot 2 + 46,6^2 \cdot 0 + 26^2 \cdot 5 = 7.238\ W$$

$$Q = Q_0 + Q_1 + Q_2 = I_0^2 \cdot X_0 + I_1^2 \cdot X_1 + I_2^2 \cdot X_2 = 44,2^2 \cdot 1 + 46,6^2 \cdot 3 - 26^2 \cdot 2 = 7.138\ VAr$$

Ejercicio 7.26.10

Del circuito de la *figura 7.67*, obtener:

1. El circuito equivalente de Thévenin.
2. El circuito equivalente de Norton.

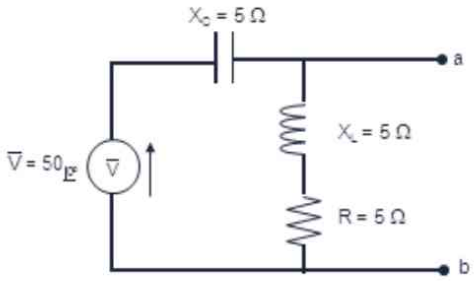


Figura 7.67. Ejercicio 7.25.10

Solución:

Conforme a los apartados 7.9, 4.9 y 4.8.

1. El circuito equivalente de Thévenin, *figura 7.67.*

   – Tensión $\boldsymbol{V_{ab}}$ con el circuito abierto (tensión de Thévenin):

$$\overline{Z} = -j\cdot 5 + j\cdot 5 + 5 = 5_{\underline{|0^o}} \quad \Rightarrow \quad \overline{I} = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}} = \frac{50_{\underline{|0}}}{5_{\underline{|0^o}}} = 10_{\underline{|0^o}}$$

$$\overline{Z}_{ab} = 5 + j\cdot 5 = 7_{\underline{|45^o}} \quad \Rightarrow \quad \overline{V}_{ab} = \overline{I}\cdot\overline{Z}_{ab} = 10_{\underline{|0^o}}\cdot 7_{\underline{|45^o}} = 70_{\underline{|45^o}} \ \ V$$

   – La impedancia equivalente Thévenin $\boldsymbol{Z_{Th}}$, es la impedancia "vista" desde los terminales "*a*" y "*b*" con la fuente de tensión anulada (cortocircuitada):

$$\frac{1}{\overline{Z}_{Th}} = \frac{1}{5+j\cdot 5} + \frac{1}{-5\cdot j} = \frac{5}{25-j\cdot 25} \quad \Rightarrow \quad \overline{Z}_{Th} = \frac{25-j\cdot 25}{5} = 5-j\cdot 5 = 7_{\underline{|-45^o}} \ \ \Omega$$

2. El circuito equivalente de Norton, *figura 7.68.*

   – Intensidad entre los terminales "*a*" y "*b*" cuando se establece un cortocircuito entre dichos terminales (intensidad de Norton).

$$\overline{Z} = -j\cdot 5 = 5_{\underline{|-90^o}} \quad \Rightarrow \quad \overline{I} = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}} = \frac{50_{\underline{|0}}}{5_{\underline{|-90^o}}} = 10_{\underline{|90^o}} \ \ A$$

   – La impedancia equivalente de Norton se obtiene de la misma manera que la de Thévenin:

$$\overline{Z}_N = \overline{Z}_{Th} = 5 - j\cdot 5 = 7_{\underline{|-45^o}} \ \ \Omega$$

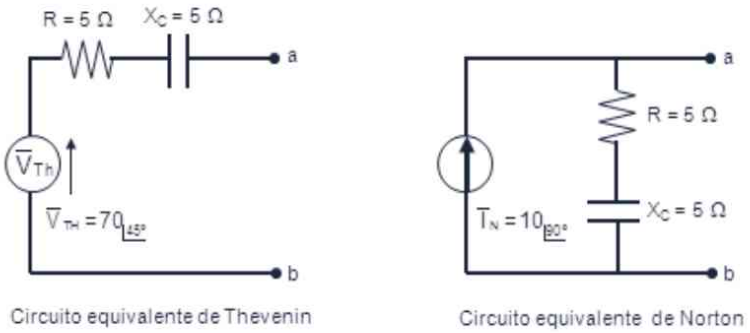


Figura 7.68. Solución ejercicio 7.25.10

Ejercicio 7.25.11

En un circuito alimentado por una CA sinusoidal de 230 V, y frecuencia 50 Hz, la corriente tiene la forma:

$$i = \sqrt{2}\cdot 30\ \text{sen}(\omega t - 60°) + \sqrt{2}\cdot 20\ \text{sen}(3\cdot\omega\cdot t + 70°) + \sqrt{2}\cdot 10\ \text{sen}(5\cdot\omega\cdot t + 80°)$$

Determinar:

1. Intensidad eficaz de la corriente del circuito.
2. Potencia activa, reactiva, aparente, de distorsión y no activa del circuito.
3. Factor de potencia.
4. Factor de desplazamiento.
5. Tasa de distorsión armónica de la intensidad.
6. Factor de distorsión.
7. Diagrama del espectro armónico.
8. Tetraedro de potencias.

Solución:

1. Intensidad eficaz de la corriente del circuito, *fórmula [7.187.1]*:

$$I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{h=1}^{\infty} I_h^2} = \sqrt{0^2 + 30^2 + 20^2 + 10^2} = 37{,}4\ \text{A}$$

No existe componente continua, luego, $I_0 = 0$.

2. Potencia activa P, reactiva Q, aparente S, de distorsión D y no activa N del circuito.

   – Potencia activa P. Cuando la tensión es sinusoidal, sólo la componente fundamental de la intensidad tiene potencia activa, *apartado 7.23*:

$$P = P_1 = V_1 \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_1 = 230\cdot 30\cdot \cos 60° = 3.450\ \text{W}$$

– Potencia reactiva Q. Cuando la tensión es sinusoidal, sólo la componente fundamental de la intensidad tiene potencia reactiva, *apartado 7.23*:

$$Q = Q_1 = V_1 \cdot I_1 \cdot \text{sen}\ \varphi_1 = 230 \cdot 30 \cdot \text{sen}\ 60^\circ = 5.976\ \text{VAr}$$

– Potencia aparente *S, fórmula [7.197]*:

$$S = V_1 I = V_1 \cdot \sqrt{\sum_{h=1}^{\infty} I_h^2} = 230 \cdot 37{,}4 = 8.606\ \text{VA}$$

– Potencia de distorsión *D,* por la *fórmula [7.204]*:

$$S^2 = P_1^2 + Q_1^2 + D^2 \quad \Rightarrow \quad D = \sqrt{S^2 - P_1^2 - Q_1^2} = \sqrt{8.602^2 - 3.450^2 - 5.976^2} = 5.143\ \text{VAd}$$

También se puede hallar *D* por la *fórmula [7.199]*:

$$D = V_1 \sqrt{\left(\sum_{2}^{\infty} I_h^2 \right)} = 230 \cdot \sqrt{20^2 + 10^2} = 5.143\ \text{VAd}$$

– Potencia no activa *N*, *fórmula [7.195]*:

$$N = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{8.606^2 - 3.450^2} = 7.884\ \text{VAr}$$

3. Factor de potencia, *fórmula [7.201]*:

$$\text{f.d.p.} = \frac{P}{S} = \frac{P_1}{S} = \frac{3.450}{8.606} = 0{,}4$$

4. Factor de desplazamiento, *fórmula [7.202]*:

$$\text{Factor de Desplazamiento} = \cos \varphi_1 = \frac{P_1}{S_1} = \frac{3.450}{230 \cdot 30} = 0{,}5$$

Nótese que la presencia de armónicos en la corriente hace disminuir el factor de potencia del circuito, (*fdp* = 0,4), respecto al que tendría si no existiesen dichos armónicos, (*fdp* = 0,5).

5. Tasa de distorsión armónica de la intensidad TDH_I, *fórmula [7.204]*:

$$THD_I = \frac{\sqrt{I_3^2 + I_5^2}}{I_1} = \frac{\sqrt{20^2 + 10^2}}{30} = 0{,}74 \quad \Rightarrow \quad THD_I\,\% = 74\ \%$$

6. Factor de distorsión, *fórmula [7.207]*:

$$\text{Factor de Distorsión} = \frac{1}{\sqrt{1 + THD_I^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0{,}74^2}} = 0{,}8$$

Se comprueba la relación, *fórmula [7.208]*:

$$\text{f.d.p.} = \text{Factor de Distorsión} \cdot \text{Factor de Desplazamiento} = 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}4$$

7. Diagrama del espectro armónico, *figura 7.69*:

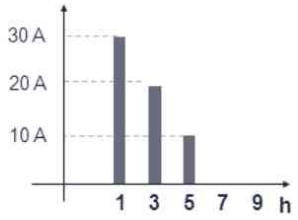


Figura 7.69. Ejercicio 7.25.11: diagrama del espectro armónico

8. Tetraedro de potencias, *figura 7.70*:

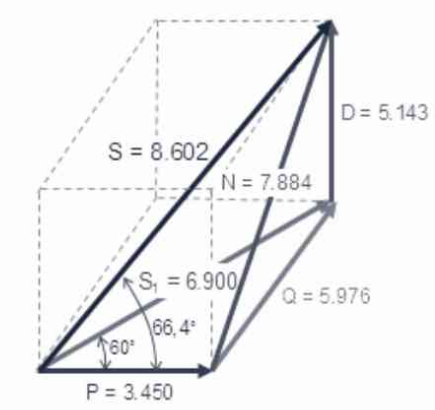


Figura 7.70. Ejercicio 7.25.11: tetraedro de potencias

Ejercicio 7.25.12

A un circuito RL serie, con $R = 4\ \Omega$ y $L = 30$ mH, se aplica la tensión (en V):

$$v = 8 + 50\cdot\text{sen}\omega\cdot t + 25\cdot\text{sen}3\cdot\omega\cdot t$$

La frecuencia de la red es de 50 Hz. Determinar:

1. Intensidad por el circuito.
2. Potencia activa, reactiva, aparente, de distorsión y no activa del circuito.
3. Factor de potencia.

Solución:

1. Intensidad por el circuito, *fórmula [7.186.2]*.

   – Componente continua:

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{8}{4} = 2\ \text{A}$$

   – Componentes alternas:

$$\omega = 2\cdot\pi\cdot 50 = 314\ \text{rad/s}$$

$$\overline{Z}_h = R + j\cdot h\cdot\omega L$$

   – Para la frecuencia fundamental, $h = 1$:

$$\overline{Z}_1 = 4 + j\cdot 314\cdot 0{,}03 = 10{,}2_{\underline{\ 67^\circ}}$$

$$i_1 = \frac{V_{01}}{Z_1}\,\text{sen}(1\cdot\omega t - \varphi_1)$$

$$i_1 = \frac{50}{10{,}2}\,\text{sen}(\omega t - 67^\circ) = 4{,}9\ \text{sen}(\omega t - 67^\circ)$$

– Para el armónico de orden 3, $h = 3$:

$$\bar{Z}_3 = 4 + j\cdot 3\cdot 314\cdot 0{,}03 = 28{,}6_{\underline{|\,82^\circ}}$$

$$i_3 = \frac{V_{03}}{Z_3}\,\mathrm{sen}(3\cdot\omega\cdot t - \varphi_3)$$

$$i_3 = \frac{25}{28{,}6}\,\mathrm{sen}(3\cdot\omega\cdot t - 82^\circ) = 0{,}87\cdot\mathrm{sen}(3\cdot\omega\cdot t - 82^\circ)$$

– Intensidad por el circuito:

$$i = I_0 + \sum_{h=1}^{\infty}\sqrt{2}\cdot I_h\cdot\mathrm{sen}(h\cdot\omega\cdot t - \varphi_h)$$

$$i = 2 + 4{,}9\,\mathrm{sen}(\omega t - 67^\circ) + 0{,}87\,\mathrm{sen}(3\omega t - 82^\circ)$$

Valor eficaz de la intensidad del circuito, *fórmula [7.187.1]*:

$$I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{h=1}^{\infty} I_h^2} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{4{,}9}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}87}{\sqrt{2}}\right)^2} = 4{,}05\ \mathrm{A}$$

2. Potencia activa *P*, reactiva *Q*, aparente *S*, de distorsión *D* y no activa *N* del circuito.

– Potencia activa *P*:

$$P_0 = V_0\cdot I_0 = 8\cdot 2 = 16\,\mathrm{W}$$

$$P_1 = V_1\cdot I_1\cdot\cos\varphi_1 = \frac{50}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4{,}9}{\sqrt{2}}\cdot\cos 67^\circ = 47{,}8\ \mathrm{W}$$

$$P_3 = V_3\cdot I_3\cdot\cos\varphi_3 = \frac{25}{\sqrt{2}}\cdot\frac{0{,}87}{\sqrt{2}}\cdot\cos 82^\circ = 1{,}5\ \mathrm{W}$$

$$P = P_0 + P_1 + P_3 = 16 + 47{,}8 + 1{,}5 = 65\,\mathrm{W}$$

Otra forma de hacerlo:

$$P = I^2 \cdot R = 4{,}05^2 \cdot 4 = 65\ W$$

– Potencia reactiva *Q*:

$$Q_1 = V_1 \cdot I_1 \cdot \text{sen}\ \varphi_1 = \frac{50}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4{,}9}{\sqrt{2}} \cdot \text{sen}\ 67^\circ = 112{,}3\ VAr$$

$$Q_3 = V_3 \cdot I_3 \cdot \text{sen}\ \varphi_3 = \frac{25}{\sqrt{2}} \cdot \frac{0{,}87}{\sqrt{2}} \cdot \text{sen}\ 82^\circ = 10{,}8\ VAr$$

$$Q = Q_1 + Q_3 = 112{,}3 + 10{,}8 = 123{,}1\ VAr$$

– Potencia aparente *S*.

Tensión eficaz *V* del circuito, *fórmula [7.187.2]*:

$$V = \sqrt{V_0^2 + \sum_1^n V_h^2} = \sqrt{8^2 + \left(\frac{50}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{25}{\sqrt{2}}\right)^2} = 40{,}33\ V$$

$$S = V \cdot I = 40{,}33 \cdot 4{,}05 = 163{,}3\ VA$$

– Potencia de distorsión *D*. A partir de la *fórmula [7.194]:*

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2 \quad \Rightarrow \quad D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = \sqrt{163{,}3^2 - 65^2 - 123{,}1^2} = 85{,}4\ VAd$$

– Potencia no activa *N*, *fórmula [7.195]*:

$$N = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{163{,}3^2 - 65^2} = 150\ VAr$$

3. Factor de potencia, *fórmula [7.196]*:

$$\text{f.d.p.} = \frac{P}{S} = \frac{\sum_1^\infty V_h \cdot I_h \cdot \cos\varphi_h}{V \cdot I} = \frac{65}{163{,}3} = 0{,}4$$

Capítulo 8

CORRIENTE ALTERNA TRIFÁSICA

Objetivos:

- Exponer los conceptos básicos de los circuitos en corriente alterna trifásica.
- Describir las magnitudes y fórmulas fundamentales de los circuitos en corriente alterna trifásica.
- Reconocer la diferencia entre sistemas equilibrados y desequilibrados.
- Identificar diferentes formas de conexión de sistemas en estrella (Y) y en triángulo (Δ).
- Analizar las ventajas del sistema trifásico frente al monofásico.
- Conocer los diferentes métodos de medida de la potencia en CA trifásica.
- Analizar la mejora del factor de potencia de una instalación trifásica.
- Resolver problemas de cálculos básicos de circuitos de corriente alterna trifásica.

8.1 GENERACIÓN DE UN SISTEMA TRIFÁSICO

En el *apartado 7.1* se ha visto cómo en una espira rectangular girando a una velocidad angular ω en el interior de un campo magnético de inducción uniforme $\boldsymbol{B}$ se produce una fem sinusoidal. Si en lugar de una espira se tienen tres espiras iguales desfasadas 120º, *figura 8.1 izquierda*, y el conjunto de las tres espiras se hacen girar a la velocidad angular ω en dicho campo magnético, *figura 8.1 derecha*, se obtienen tres ff.ee.mm. inducidas, sinusoidales iguales pero desfasadas 120º en el tiempo, *figura 8.2*, cuyos valores instantáneos son:

$$e_{aa'} = E_0 \cdot \operatorname{sen} \omega t$$

$$e_{bb'} = E_0 \cdot \operatorname{sen}(\omega t - 120^\circ) = E_0 \cdot \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{2\cdot\pi}{3}\right) \qquad [8.1]$$

$$e_{cc'} = E_0 \cdot \operatorname{sen}(\omega t - 240^\circ) = E_0 \cdot \operatorname{sen}(\omega t + 120^\circ) = E_0 \cdot \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{2\cdot\pi}{3}\right)$$

A cada una de las tres espiras anteriores se les denomina *fase* y el sistema formado por las tres fases se denomina sistema trifásico.

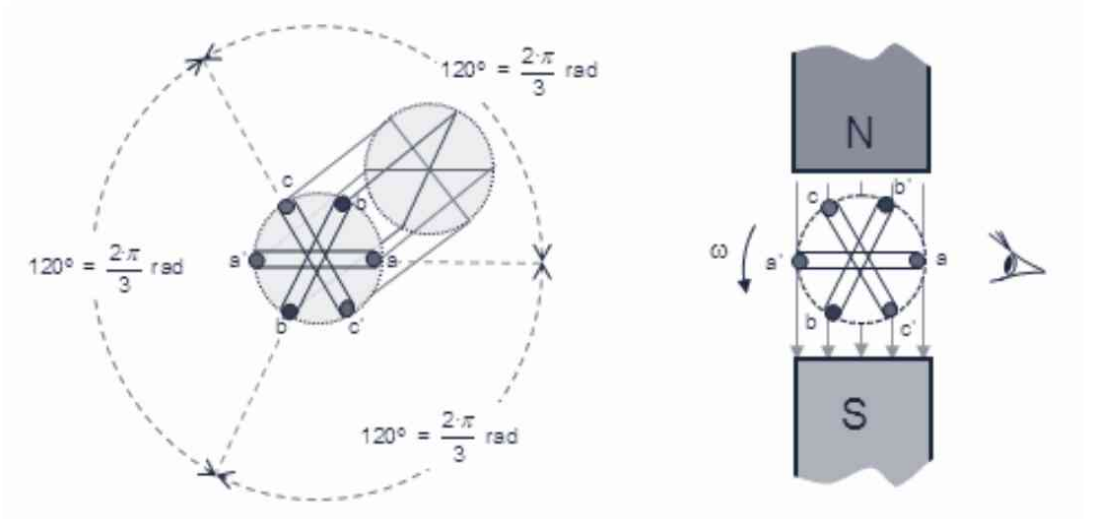


Figura 8.1. Tres espiras iguales desfasadas 120º (izquierda) y generación de un sistema trifásico (derecha)

En los generadores de corriente alterna trifásica, *alternadores trifásicos*, en lugar de una espira hay múltiples espiras, formando devanados, por cada fase y en lugar de girar las espiras (inducido), gira el campo magnético (inductor), *figura 8.4*, pudiendo estos tener varios números de pares de polos *p*, al igual que en los alternadores de CA monofásica (*apartado 7.3*).

La representación fasorial de las ff.ee.mm. se muestra en la *figura 8.2*, siendo sus expresiones matemáticas, expresando los ángulos en grados sexagesimales y en radianes:

$$\begin{aligned} \bar{E}_{aa'} &= E_{0\angle 0^\circ} = E_{0\angle 0} \\ \bar{E}_{bb'} &= E_{0\angle -120^\circ} = E_{0\angle -\frac{3\cdot\pi}{2}} \\ \bar{E}_{cc'} &= E_{0\angle 120^\circ} = E_{0\angle \frac{3\cdot\pi}{2}} \end{aligned} \qquad [8.2]$$

El sistema trifásico anterior constituye un **sistema trifásico simétrico,** esto es, formado por tres ff.ee.mm. sinusoidales, del mismo valor máximo E_0, con la misma frecuencia y desfasadas 120º entre ellas. En este sistema en cualquier instante de tiempo se cumple:

$$e_{aa'} + e_{bb'} + e_{cc'} = 0 \qquad [8.3]$$

Se puede hacer la comprobación sumando las tres *ecuaciones [8.1],* o también, *figura 8.2 centro,* gráficamente tomando un valor cualquiera para el tiempo *t*.

También, en forma fasorial se cumple:

$$\bar{E}_{aa'} + \bar{E}_{bb'} + \bar{E}_{cc'} = 0 \qquad [8.4]$$

Lo que es evidente observando la *figura 8.2 izquierda.* La suma de tres vectores giratorios iguales desfasados 120º, permaneciendo invariables sus posiciones relativas, es cero.

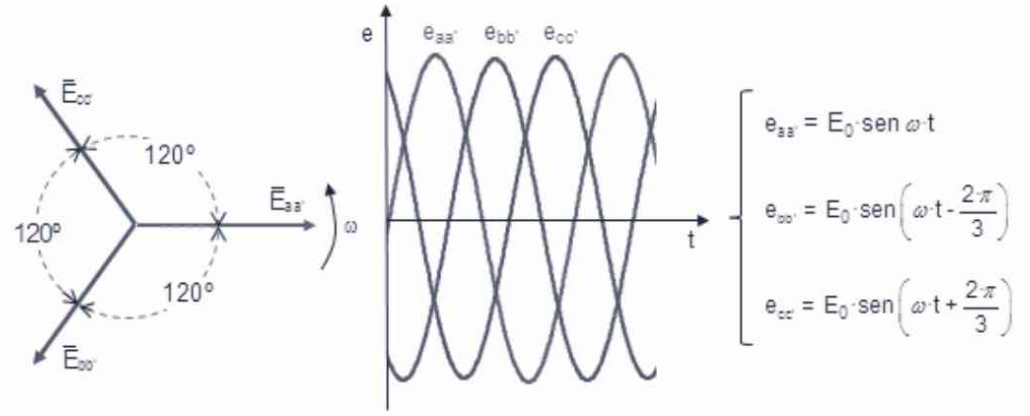


Figura 8.2. Fasores y ff.ee.mm instantáneas en un sistema trifásico equilibrado

Se denomina *secuencia de fases* el orden en el que se suceden los valores máximos de las ff.ee.mm. de cada una de las fases de un sistema trifásico. Se pueden tener dos secuencias, dependiendo del sentido de rotación de las espiras. En la *figura 8.1,* y conforme al sentido de giro indicado (antihorario), esta secuencia es *abc,* se denomina *secuencia directa*. Si se invierte el sentido de giro de las espiras, la secuencia de fases es *acb,* se denomina *secuencia inversa.* Mediante la representación fasorial, *figura 8.3*, un observador situado en una posición fija vería la sucesión de fasores con la secuencia $\boldsymbol{E}_{aa'}$, $\boldsymbol{E}_{bb'}$, $\boldsymbol{E}_{cc'}$, en la *secuencia directa*, y la sucesión de fasores con la secuencia $\mathbf{E}_{aa'}$, $\boldsymbol{E}_{cc'}$, $\boldsymbol{E}_{bb'}$, en la *secuencia inversa:*

Secuencia directa: $\boldsymbol{E}_{aa'} \rightarrow \boldsymbol{E}_{bb'} \rightarrow \boldsymbol{E}_{cc'} \rightarrow \boldsymbol{E}_{aa'} \rightarrow \boldsymbol{E}_{bb'} \rightarrow \boldsymbol{E}_{cc'}$ . . .

Secuencia inversa: $\boldsymbol{E}_{aa'} \rightarrow \boldsymbol{E}_{cc'} \rightarrow \boldsymbol{E}_{bb''} \rightarrow \boldsymbol{E}_{aa'} \rightarrow \boldsymbol{E}_{cc''} \rightarrow \boldsymbol{E}_{bb'}$ . . .

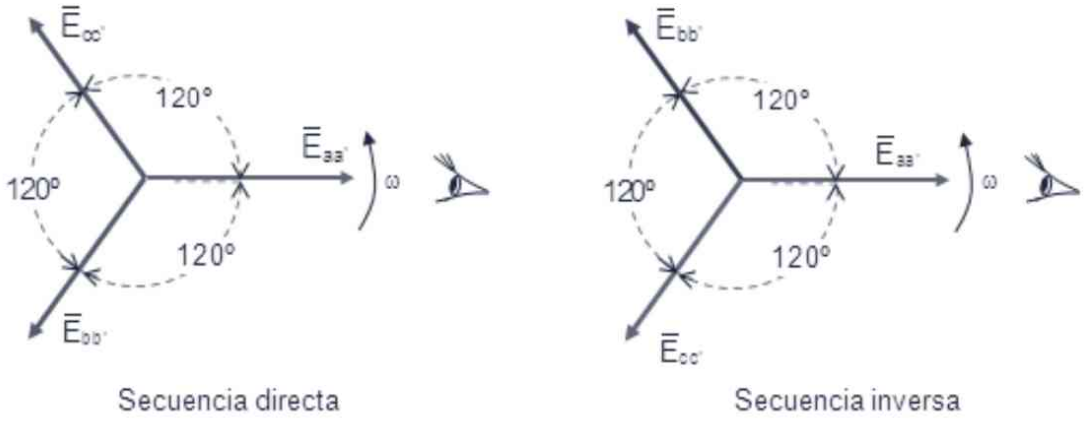


Figura 8.3. Secuencia directa (abc) y secuencia inversa (acb) en un sistema trifásico

La secuencia de fases es de suma importancia en los sistemas trifásicos, pues, determinan, el sentido de rotación de los motores trifásicos y del acoplamiento de alternadores y transformadores, las corrientes y tensiones en los acoplamientos de las cargas, los métodos de medida de potencia, etc. En el *apartado 8.10* se estudia la forma de conocer la secuencia de fases.

En los análisis y ejercicios que se hacen en este capítulo, si no se dice lo contrario, se considera que el sistema trifásico es simétrico y de secuencia directa.

Un generador trifásico como el esquematizado en la *figura 8.4 izquierda*, se puede considerar, *figura 8.4 derecha,* formado por tres generadores monofásicos de tensiones, en *forma fasorial de tensiones eficaces*, $\boldsymbol{E}_{0^\circ}$, $\boldsymbol{E}_{120^\circ}$ y $\boldsymbol{E}_{-120^\circ}$.

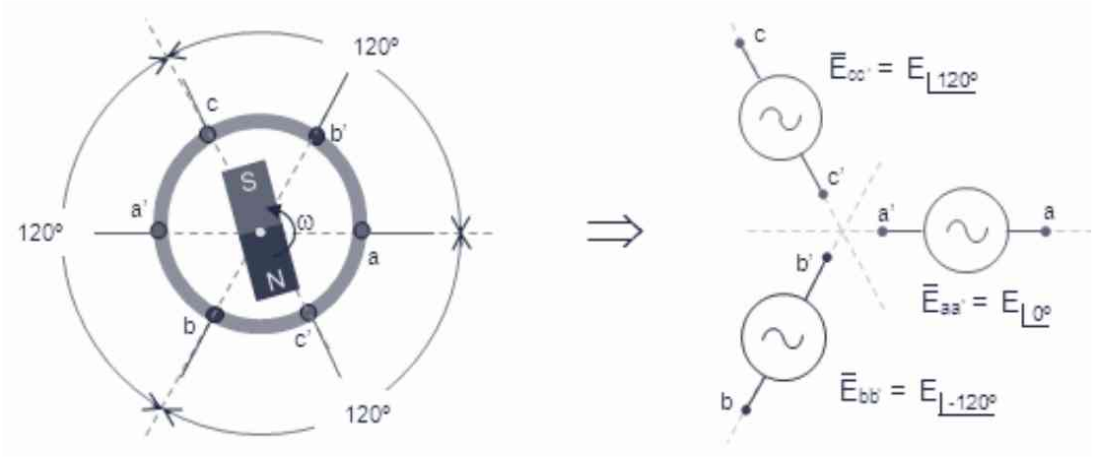


Figura 8.4. Esquema de un generador trifásico bipolar

Si se quiere alimentar tres receptores $\boldsymbol{Z_a}$, $\boldsymbol{Z_b}$ y $\boldsymbol{Z_c}$, en forma independiente, desde el generador trifásico representado en el esquema de la *figura 8.4*, son necesarios 6 conductores, *figura 8.5.* Pero en la práctica esto no se hace así, sino que las fases se combinan en un sistema trifásico de cuatro o tres conductores, mediante las conexiones en *estrella* (Y) o en *triángulo* (Δ), como se verá en el próximo apartado.

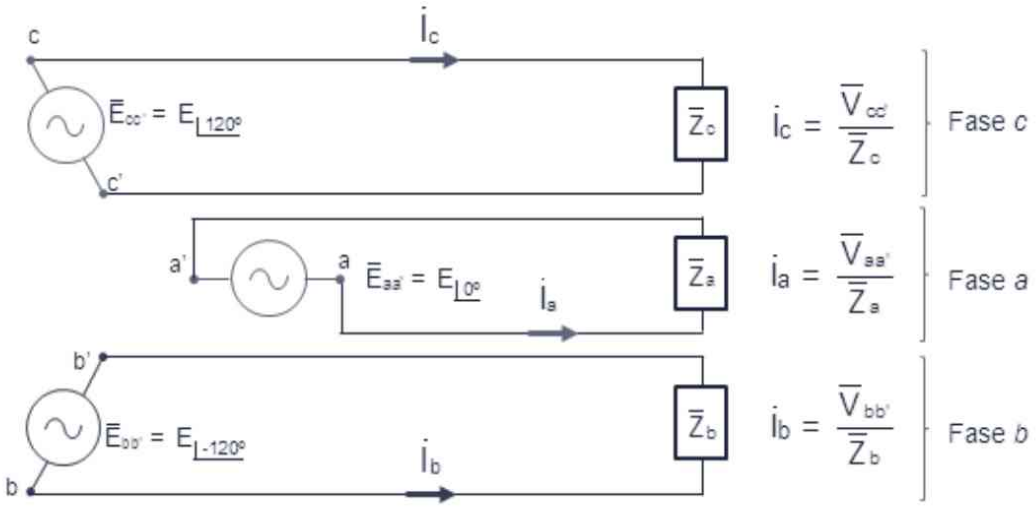


Figura 8.5. Transporte de la energía eléctrica de un alternador trifásico mediante 6 conductores

Considerando que las ff.ee.mm. constituyen un *sistema trifásico simétrico,* se tiene:

- *S*i las tres impedancias de la cargas son iguales ($\boldsymbol{Z_a} = \boldsymbol{Z_b} = \boldsymbol{Z_c}$), los módulos de las intensidades por cada conductor son también iguales ($I_a = I_b = I_c$), se tiene un *sistema trifásico equilibrado* en cargas.

- *Si* alguna de la tres impedancias de la cargas es diferente, los módulos de las intensidades por cada conductor son también diferentes, se tiene un *sistema trifásico desequilibrado* en cargas.

8.2 GENERADOR TRIFÁSICO CONECTADO EN ESTRELLA Y. TENSIONES E INTENSIDADES

La conexión en estrella (Y) del generador de la *figura 8.4* consiste en unir los tres extremos finales de los devanados de cada fase (*a'*, *b'* y *c'*), en un punto común denominado neutro (*N*), del que puede partir el conductor neutro de la línea exterior, y de los otros tres terminales de los devanados de cada fase (*a, b* y *c*), los conductores externos de cada una de las fases, también denominados *L*1, *L*2 y *L*3, y que internacionalmente se les denominan *R*, *S* y *T*, respectivamente, *figura 8.6*.

Las tensiones en los extremos de cada fase se denominan *tensiones simples* o *tensiones de fase* V_F (igual a las ff.ee.mm. correspondientes si el generador está en vacío, e igual a las ff.ee.mm. menos la caída de tensión en cada devanado si el generador está en carga, por ejemplo, $\boldsymbol{V}_{RN} = \boldsymbol{E}_{RN} - \boldsymbol{V}_g$). Conforme a las *ecuaciones [8.2]* se tiene:

$$\begin{aligned} \overline{V}_{RN} = \overline{V}_{aa'} &= V_{\underline{\lfloor 0^o}} = V_{F\underline{\lfloor 0^o}} \\ \overline{V}_{SN} = \overline{V}_{bb'} &= V_{\underline{\lfloor -120^o}} = V_{F\underline{\lfloor -120^o}} \\ \overline{V}_{TN} = \overline{V}_{cc'} &= V_{\underline{\lfloor 120^o}} = V_{F\underline{\lfloor 120^o}} \end{aligned} \qquad [8.5]$$

Se concluye que los módulos (V_{RN}, V_{SN}, V_{TN}) de las tres tensiones de fase ($\boldsymbol{V}_{RN}$, $\boldsymbol{V}_{SN}$, $\boldsymbol{V}_{TN}$) son iguales:

$$V_{RN} = V_{SN} = V_{TN} = V = V_F \qquad [8.6]$$

Se denominan *tensiones compuestas* o *tensiones de líneas* V_L las existentes entre dos *conductores* de fase ($\boldsymbol{V}_{RS}$, $\boldsymbol{V}_{ST}$, $\boldsymbol{V}_{TR}$), *figura 8.7*, y se obtienen a partir de las tensiones simples, ($\boldsymbol{V}_{RN}$, $\boldsymbol{V}_{SN}$, $\boldsymbol{V}_{TN}$). En efecto:

$$\begin{aligned} \overline{V}_{RS} &= \overline{V}_{RN} - \overline{V}_{SN} = V_{\underline{\lfloor 0^o}} - V_{\underline{\lfloor -120^o}} = \sqrt{3}\cdot V_{\underline{\lfloor 30^o}} = \sqrt{3}\cdot V_{F\underline{\lfloor 30^o}} \\ \overline{V}_{TR} &= \overline{V}_{TN} - \overline{V}_{RN} = V_{\underline{\lfloor 120^o}} - V_{\underline{\lfloor 0^o}} = \sqrt{3}\cdot V_{\underline{\lfloor 150^o}} = \sqrt{3}\cdot V_{F\underline{\lfloor 150^o}} \\ \overline{V}_{ST} &= \overline{V}_{SN} - \overline{V}_{TN} = V_{\underline{\lfloor -120^o}} - V_{\underline{\lfloor 120^o}} = \sqrt{3}\cdot V_{\underline{\lfloor -90^o}} = \sqrt{3}\cdot V_{F\underline{\lfloor -90^o}} \end{aligned} \qquad [8.7]$$

De donde se deduce la relación existente entre la tensión de fase V_F y la tensión de línea V_L:

$$V_{RS} = V_{ST} = V_{TR} = V_L = \sqrt{3} \cdot V_F \qquad [8.8]$$

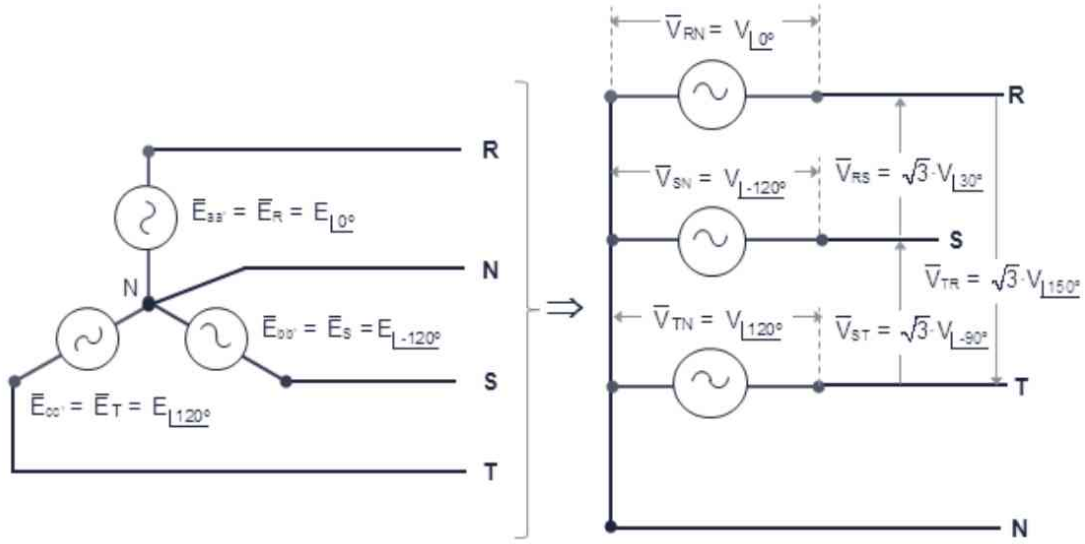


Figura 8.6. Generador trifásico en estrella.Tensiones de fase y de línea

Obsérvese que las tensiones de línea ($\boldsymbol{V_{RS}}$, $\boldsymbol{V_{ST}}$, $\boldsymbol{V_{TR}}$) forman, también, un sistema trifásico simétrico, en el que cada tensión compuesta adelanta 30º (en un sistema de secuencia inversa atrasa 30º), a la tensión simple que comienza con el mismo subíndice (ejemplo, $\boldsymbol{V_{SN}} = V_{-120^\circ}$, y $\boldsymbol{V_{ST}} = \sqrt{3} \cdot V_{-90^\circ} = \sqrt{3} \cdot V_{-120^\circ + 30^\circ}$).

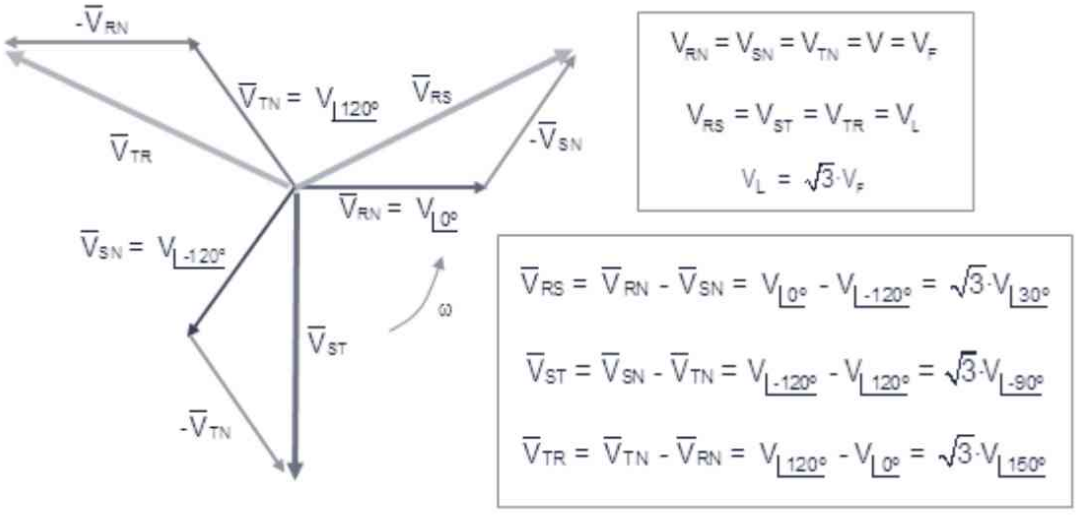


Figura 8.7. Generador trifásico en estrella. Diagrama fasorial de las tensiones de fase y de línea

Si al acoplamiento en estrella se le conecta una carga trifásica equilibrada (por ejemplo, tres impedancias iguales $Z\varphi$, ya sean conectadas en estrella o en triángulo, como se verá posteriormente), *figura 8.8*, por cada conductor de fase circulara una intensidad, de igual módulo y desfasada el mismo ángulo de la tensión de fase correspondiente (pues la carga es equilibrada). Aplicando la 1.ª Ley de Kirchhoff en el punto neutro, se obtiene la intensidad que ha de circular por el conductor neutro *N*, y puesto que las tres intensidades ($\boldsymbol{I_{RN}}$, $\boldsymbol{I_{SN}}$, $\boldsymbol{I_{TN}}$) son iguales pero desfasadas entre sí 120º, dicha suma tiene valor nulo:

$$\overline{I}_N = \overline{I}_{RN} + \overline{I}_{SN} + \overline{I}_{TN} = I_{F\underline{|\,0º-\varphi}} + I_{F\underline{|\,-120-\varphi}} + I_{F\underline{|\,120-\varphi}} = 0 \qquad [8.9]$$

Conclusión, en un sistema trifásico equilibrado, por el conductor neutro no circula corriente.

A la intensidad que circula por cada fase se le denomina *intensidad de fase* I_F, y a la intensidad que circula por cada conductor externo al generador se le denomina *intensidad de línea* I_L. Observando el esquema de conexión en estrella, *figura 8.8*, es evidente que ambas intensidades son iguales:

$$I_F = I_L \qquad [8.10]$$

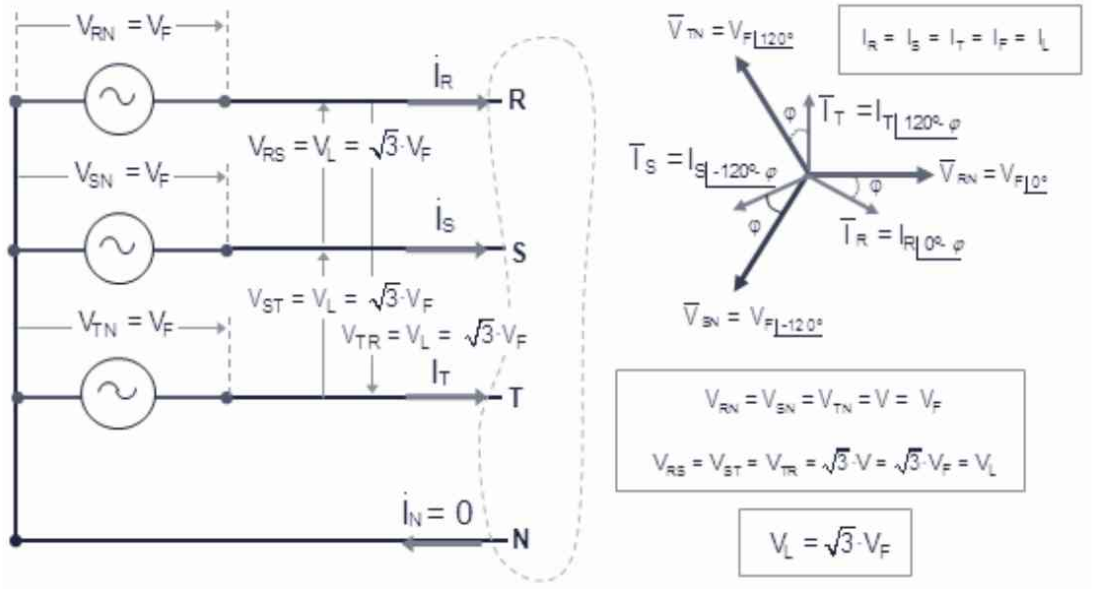


Figura 8.8. Generador trifásico en estrella. Tensiones/intensidades de fase y de línea

En la *figura 8.9* se tiene, a la izquierda, un esquema de la disposición de los terminales de las fases de un alternador trifásico, en el centro, la conexión en estrella de dichos terminales mediante dos pletinas conductoras que cortocircuitan los finales de las fases (pudiendo distribuirse un conductor neutro, lo más frecuente, o no), y, a la derecha, la relación entre las magnitudes de fase y de línea.

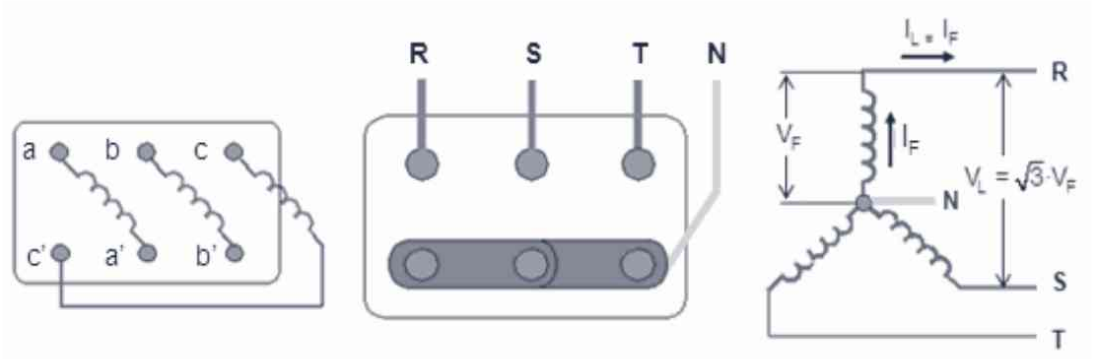


Figura 8.9. Generador trifásico en estrella. Conexión y magnitudes

8.3 GENERADOR TRIFÁSICO CONECTADO EN TRIÁNGULO Δ. TENSIONES E INTENSIDADES

La conexión en triángulo (Δ) del generador de la *figura 8.4* consiste en unir el extremo final del devanado de cada fase (*a', b'* y *c'*), con el extremo inicial del devanado de la fase siguiente (*a, b* y *c*), y usar estos extremos comunes como puntos de partida para los conductores exteriores *R*, *S* y *T, figura 8.10*.

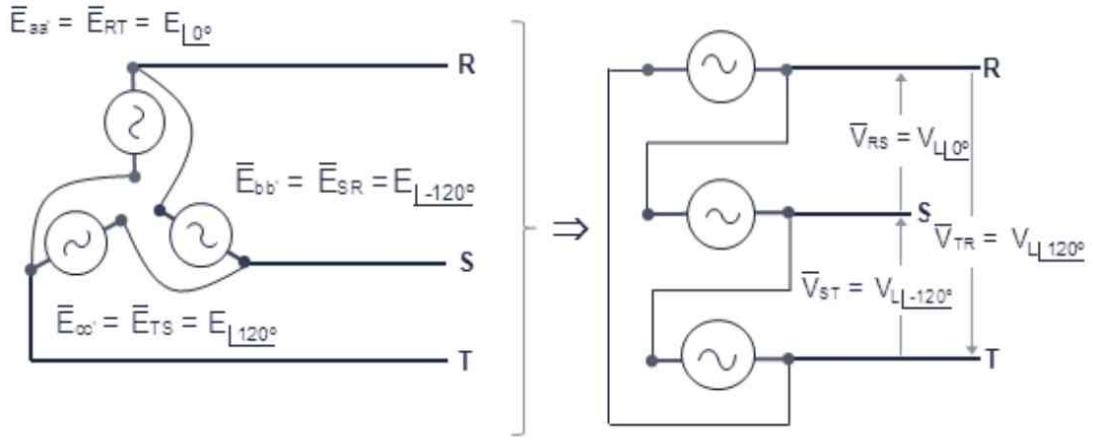


Figura 8.10. Generador trifásico en triángulo

Al igual que en el caso del acoplamiento en estrella, las tensiones en los extremos de cada fase se denominan *tensiones simples* o *tensiones de fase* V_F, y a las tensiones existentes entre dos *conductores* de fase ($\boldsymbol{V_{RS}}$, $\boldsymbol{V_{ST}}$, $\boldsymbol{V_{TR}}$) se les denominan *tensiones compuestas* o *tensiones de líneas* V_L. En este caso, es evidente, por simple inspección visual de los esquemas de la *figura 8.10*, que las tensiones de fase y de línea coinciden, *figura 8.11*.

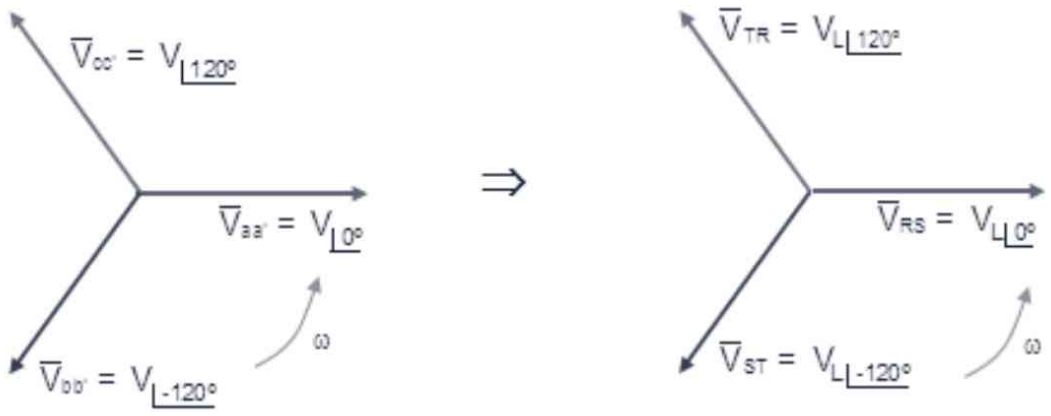


Figura 8.11. Generador trifásico en triángulo. Diagrama fasorial de las tensiones de fase y de línea

Conforme a las *ecuaciones [8.2]* las expresiones matemáticas de estas tensiones son:

$$\overline{V}_{aa'} = V_{\lfloor 0^o} = V_{F\lfloor 0^o} = \overline{V}_{RS} = V_{L\lfloor 0^o}$$

$$\overline{V}_{bb'} = V_{\lfloor -120^o} = V_{F\lfloor -120^o} = \overline{V}_{ST} = V_{L\lfloor -120^o} \qquad [8.11]$$

$$\overline{V}_{cc'} = V_{\lfloor 120^o} = V_{F\lfloor 120^o} = \overline{V}_{TR} = V_{L\lfloor 120^o}$$

Se tiene, pues, que los módulos (V_{RN}, V_{SN}, V_{TN}) de las tres tensiones de línea son, también, tensiones de fase y todas de igual magnitud:

$$V_{RS} = V_{ST} = V_{TR} = V_L = V_F \qquad [8.12]$$

Si al acoplamiento en triángulo se le conecta una carga trifásica equilibrada (por ejemplo, tres impedancias iguales $Z\varphi$, ya sean conectadas en estrella o en triángulo, como se verá posteriormente), *figura 8.12*, por los conductores de línea circularán las intensidades, $\boldsymbol{I_R}$, $\boldsymbol{I_S}$ e $\boldsymbol{I_T}$, y por cada fase circularán las intensidades $\boldsymbol{I_{RT}}$, $\boldsymbol{I_{SR}}$ e $\boldsymbol{I_{TS}}$.

Como en la conexión en estrella, a la intensidad que circula por cada fase, $\boldsymbol{I_{RS}}$, $\boldsymbol{I_{ST}}$ e $\boldsymbol{I_{TR}}$, se le denomina *intensidad de fase* I_F, y a la intensidad que circula por cada conductor externo al generador, $\boldsymbol{I_R}$, $\boldsymbol{I_S}$ e $\boldsymbol{I_T}$, se le denomina *intensidad de línea* I_L.

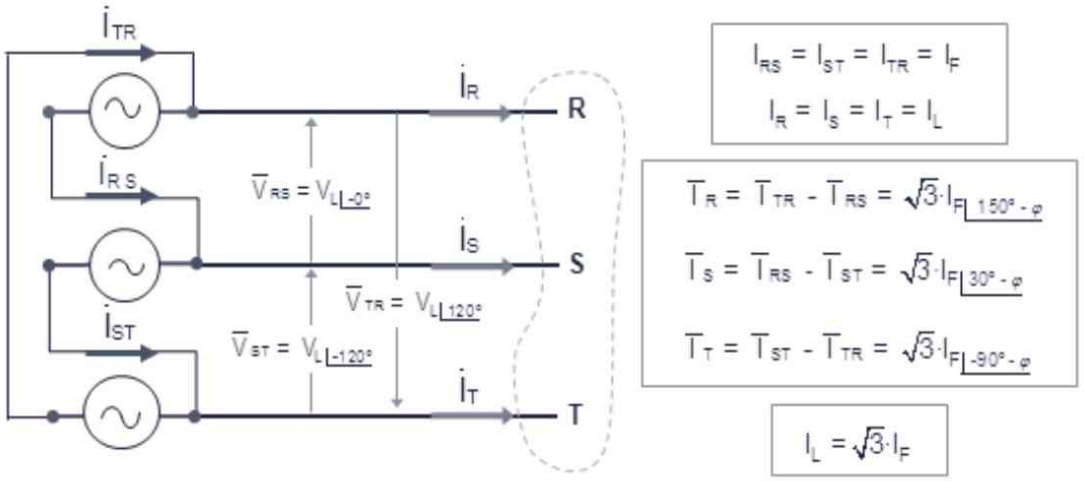


Figura 8.12. Generador trifásico en triángulo. Intensidades de fase y de línea

A partir del diagrama fasorial de las intensidades de fase, $\boldsymbol{I_{RS}}$, $\boldsymbol{I_{ST}}$ e $\boldsymbol{I_{TR}}$, iguales y desfasadas el ángulo φ de cada tensión correspondiente por tratarse de una carga equilibrada, *figura 8.13 izquierda*, y conforme al sentido de las corrientes establecido en la *figura 8.12*, aplicando la 1.ª Ley de Kirchhoff a cada nudo de la *figura 8.12*, se obtiene el diagrama fasorial de las intensidades de línea, $\boldsymbol{I_R}$, $\boldsymbol{I_S}$ e $\boldsymbol{I_T}$, *figura 8.13 derecha.* En efecto:

$$\overline{I}_R = \overline{I}_{TR} - \overline{I}_{RS} = I_{F\underline{|120^\circ - \varphi}} - I_{F\underline{|0^\circ - \varphi}} = \sqrt{3}\cdot I_{F\underline{|150^\circ - \varphi}}$$

$$\overline{I}_S = \overline{I}_{RS} - \overline{I}_{ST} = I_{F\underline{|0^\circ - \varphi}} - I_{F\underline{|-120^\circ - \varphi}} = \sqrt{3}\cdot I_{F\underline{|30^\circ - \varphi}} \qquad [8.13]$$

$$\overline{I}_T = \overline{I}_{ST} - \overline{I}_{TR} = I_{F\underline{|-120^\circ - \varphi}} - I_{F\underline{|120^\circ - \varphi}} = \sqrt{3}\cdot I_{F\underline{|-90^\circ - \varphi}}$$

Se concluye que en la conexión en triángulo la intensidad de línea I_L es $\sqrt{3}$ veces la intensidad de fase I_F:

$$I_R = I_S = I_T = I_L = \sqrt{3}\cdot I_F \qquad [8.14]$$

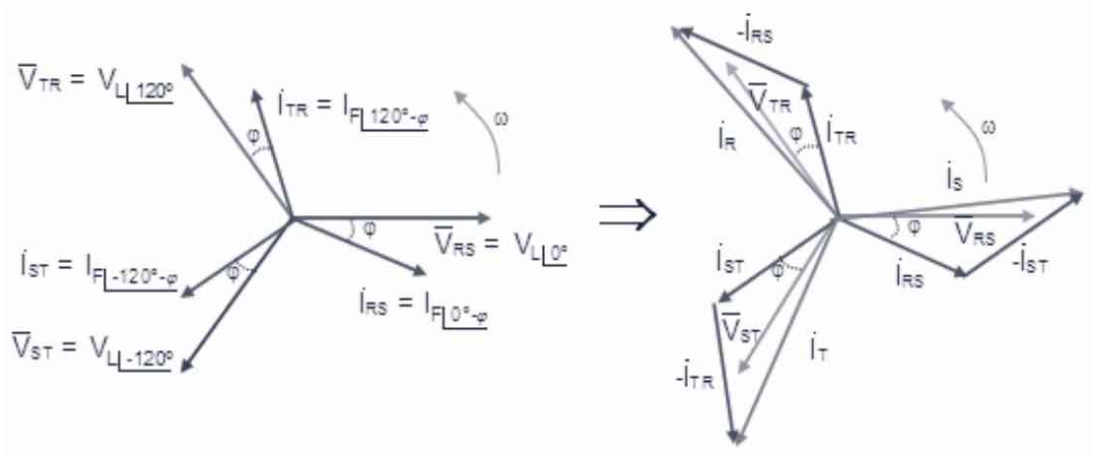


Figura 8.13. Generador trifásico en triángulo. Intensidades de fase y de línea

Obsérvese que las intensidades de línea forman también un sistema trifásico simétrico, en el que cada intensidad de línea está adelantada 30º (en un sistema de secuencia inversa retrasada 30º), respecto a la intensidad de fase que llega al nudo de aquella parte (ejemplo, $\boldsymbol{I_T} = \boldsymbol{I_{ST}} - \boldsymbol{I_{TR}} = \sqrt{3} \cdot I_{F\,-90^\circ\,-\,\varphi}$, e $\boldsymbol{I_{ST}} = I_{F\,-120^\circ\,-\,\varphi} = I_{F\,-90^\circ-\,30^\circ\,-\,\varphi}$).

En la *figura 8.14* se tiene, a la izquierda, un esquema de la disposición de los terminales de las fases del generador, en el centro, la conexión en triángulo de dichos terminales mediante tres pletinas conductoras que cortocircuitan los finales de las fases con los comienzos de las fases siguientes y, a la derecha, la relación entre las magnitudes de fase y de línea.

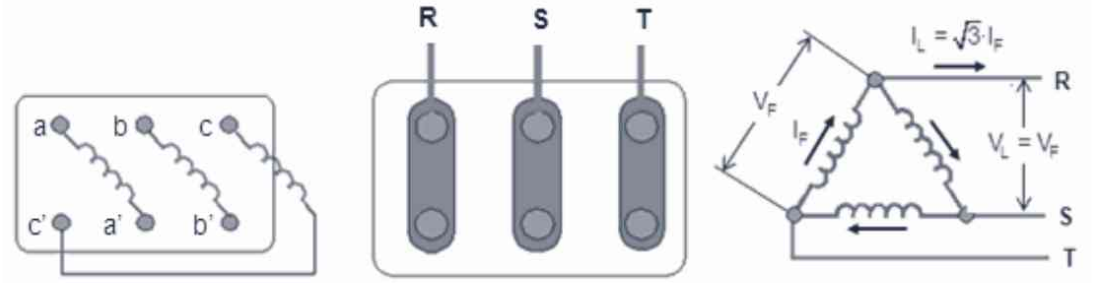


Figura 8.14. Generador trifásico en triángulo. Conexión y magnitudes

8.4 CARGAS EQUILIBRADAS: CARGAS IGUALES EN ESTRELLA Y

Se obtiene conectando a un sistema trifásico con neutro (*R-S-T-N*), por ejemplo, tres impedancias iguales Z_φ, conectando un terminal de cada una de ellas a un punto común, conectado a su vez al neutro del sistema, y los tres terminales restantes a cada una de las fases, *R, S* y *T*, *figura 8.15*.

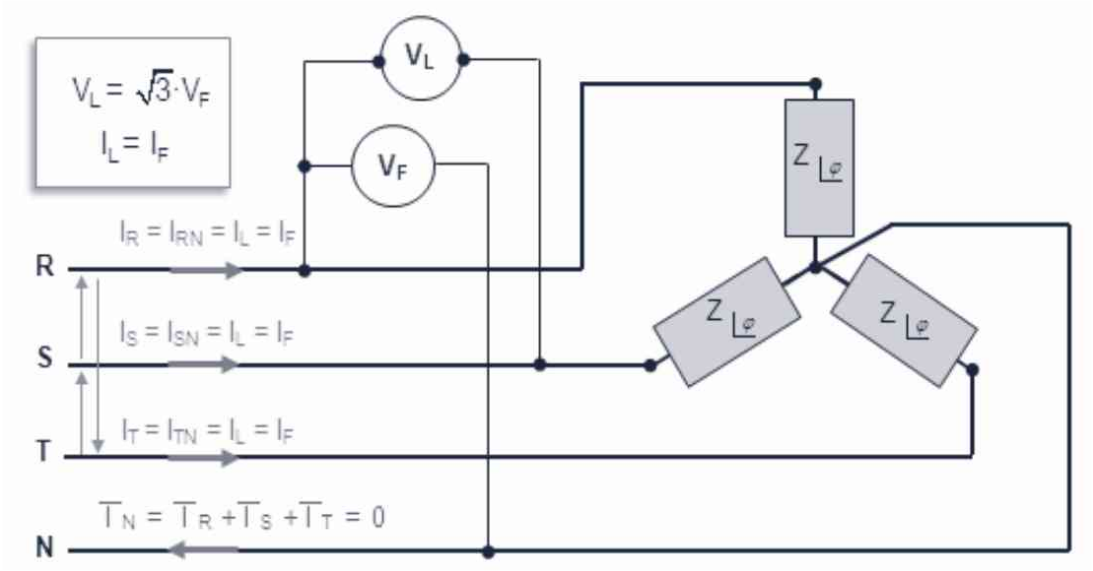


Figura 8.15. Sistema equilibrado: tres impedancias iguales $Z_{\underline{\varphi}}$ en estrella

Como en la conexión en estrella de un alternador, a la intensidad que circula por cada impedancia, $\boldsymbol{I_{RN}}$, $\boldsymbol{I_{SN}}$ e $\boldsymbol{I_{TN}}$, se le denomina *intensidad de fase* I_F, y a la intensidad que circula por cada conductor externo a las cargas, $\boldsymbol{I_R}$, $\boldsymbol{I_S}$ e $\boldsymbol{I_T}$, se le denomina *intensidad de línea* I_L. Es evidente que ambas intensidades coinciden en cada fase y línea, *figura 8.15,* y sus módulos son iguales en todas las fases y líneas, *fórmula [8.16].*

De forma semejante a lo especificado para los generadores, las tensiones en los extremos de cada impedancia se denominan *tensiones simples* o *tensiones de fase* V_F y las existentes entre dos impedancias *tensiones compuestas o de línea* V_L.

Teniendo en cuenta, que las intensidades de línea y fase coinciden, *figura 8.15*; considerando que las tensiones simples son, $\boldsymbol{V_{RN}} = V_{F\,\angle 0^o}$, $\boldsymbol{V_{SN}} = V_{F\,\angle -120^o}$, $\boldsymbol{V_{TN}} = V_{F\,\angle 120^o}$, diagrama fasorial *figura 8.16 izquierda*, por cada impedancia circulará la intensidad:

$$\overline{I}_{RN} = \frac{\overline{V}_{RN}}{\overline{Z}} = \frac{V_{F\underline{|\,0^o}}}{Z_{\underline{|\,\varphi}}} = I_{RN\underline{|\,0^o-\varphi}} = I_{F\underline{|\,0^o-\varphi}} = \overline{I}_R = I_{R\underline{|\,0^o-\varphi}} = I_{L\underline{|\,0^o-\varphi}}$$

$$\overline{I}_{SN} = \frac{\overline{V}_{SN}}{\overline{Z}} = \frac{V_{F\underline{|\,-120^o}}}{Z_{\underline{|\,\varphi}}} = I_{SN\underline{|\,-120^o-\varphi}} = I_{F\underline{|\,-120^o-\varphi}} = \overline{I}_S = I_{S\underline{|\,-120^o-\varphi}} = I_{L\underline{|\,-120^o-\varphi}} \qquad [8.15]$$

$$\overline{I}_{TN} = \frac{\overline{V}_{TN}}{\overline{Z}} = \frac{V_{F\underline{|\,120^o}}}{Z_{\underline{|\,\varphi}}} = I_{TN\underline{|\,120^o-\varphi}} = I_{F\underline{|\,120^o-\varphi}} = \overline{I}_T = I_{T\underline{|\,120^o-\varphi}} = I_{L\underline{|\,120^o-\varphi}}$$

Se concluye que los módulos de las intensidades de fase y de línea son iguales:

$$I_R = I_S = I_T = I_L = I_{RN} = I_{SN} = I_{TN} = I_F = \frac{V_F}{Z} = \frac{V_L}{\sqrt{3}\cdot Z} \qquad [8.16]$$

Aplicando la 1.ª Ley de Kirchhoff en el punto común de las tres impedancias, punto neutro, se obtiene la intensidad que ha de circular por el conductor neutro *N*, y puesto que las tres intensidades (***I**RN*, ***I**SN*, ***I**TN*), son iguales pero desfasadas entre sí 120º, dicha suma tiene valor nulo:

$$\overline{I}_N = \overline{I}_{RN} + \overline{I}_{SN} + \overline{I}_{TN} = I_{F\,\underline{|\,0º-\varphi}} + I_{F\,\underline{|\,-120-\varphi}} + I_{F\,\underline{|\,120-\varphi}} = 0 \qquad [8.17]$$

Por lo tanto, si las tres impedancias en estrella son iguales, se puede prescindir de la conexión del punto común de las impedancias al conductor neutro *N* de la línea.

Para hallar las tensiones compuestas en las impedancias, se procede de forma análoga a como se ha hecho para la conexión en estrella de las fases de un alternador. A partir del diagrama vectorial de las *tensiones de fase*, *figura 8,16 izquierda,* se obtiene el diagrama fasorial de las *tensiones compuestas, figura 8.16 derecha.*

Del diagrama fasorial de la *figura 8.16 derecha,* se tiene otra forma para hallar la relación entre las tensiones compuestas y simples:

$$V_{ST} = V_L = V_F\cdot\cos 30° + V_F\cdot\cos 30° = V_F\cdot\sqrt{3} \qquad [8.18]$$

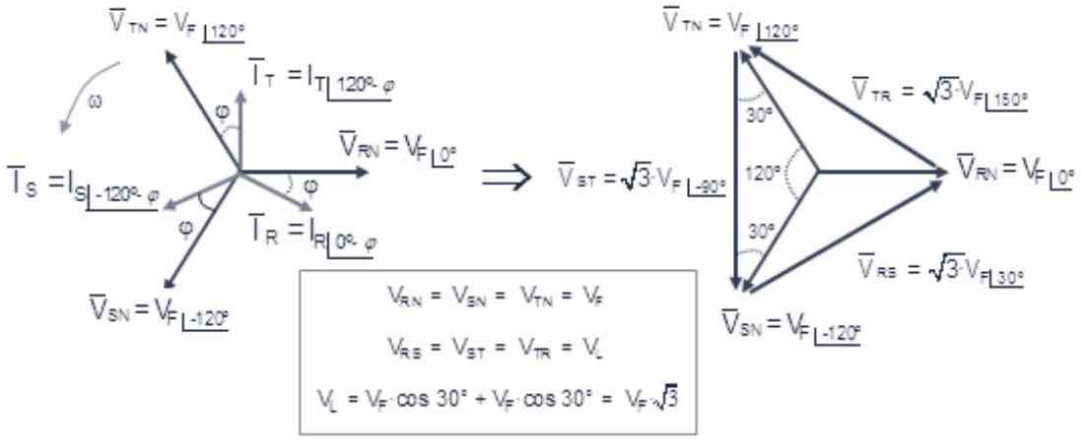


Figura 8.16. Diagrama fasorial de tres impedancias iguales Z_φ en estrella

Se obtienen las mismas ecuaciones *[8.16] y [8.18]* para la *secuencia inversa RTS.*

8.5 CARGAS EQUILIBRADAS: CARGAS IGUALES EN TRIÁNGULO Δ

Se obtiene, por ejemplo, mediante tres impedancias iguales Z_{φ}, en las que se han conectado tres pares de terminales entre ellos, conectados a su vez a los tres conductores del sistema trifásico, *R*, *S* y *T*, *figura 8.17*.

En esta conexión la magnitud común es la tensión. *La tensión de fase* (en los extremos de cada impedancia) y la *tensión de línea* (entre dos conductores externos) coinciden:

$$V_L = V_F \qquad [8.19]$$

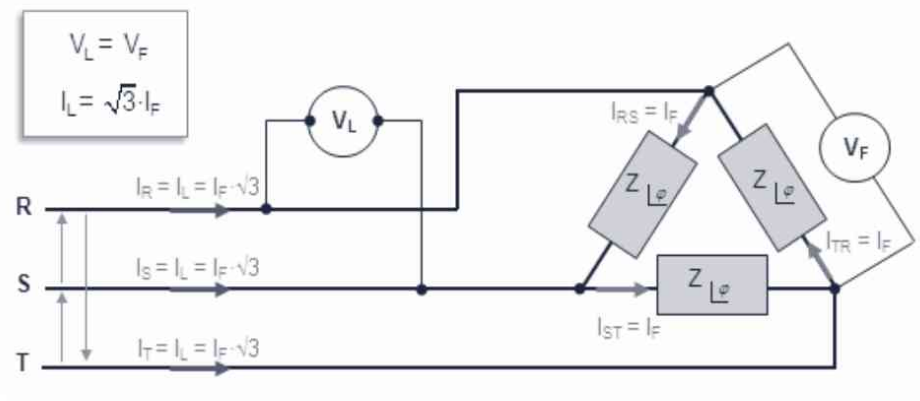


Figura 8.17. Sistema equilibrado: tres impedancias iguales Z_{φ} en triángulo

Como en la conexión en estrella, a la intensidad que circula por cada impedancia, $\boldsymbol{I_{RT}}$, $\boldsymbol{I_{SR}}$ e $\boldsymbol{I_{TS}}$, se le denomina *intensidad de fase* I_F, y a la intensidad que circula por cada conductor externo al generador, $\boldsymbol{I_R}$, $\boldsymbol{I_S}$ e $\boldsymbol{I_T}$, se le denomina *intensidad de línea* I_L.

Si las tensiones de línea son $\boldsymbol{V_{RS}} = V_{L\,\angle 0^o}$, $\boldsymbol{V_{ST}} = V_{L\,\angle -120^o}$, $\boldsymbol{V_{TR}} = V_{L\,\angle 120^o}$, diagrama fasorial *figura 8.18 izquierda*, por cada impedancia circulará la intensidad:

$$\overline{I}_{RS} = \frac{\overline{V}_{RS}}{\overline{Z}} = \frac{V_{L\,\underline{|\,0^o}}}{Z_{\underline{|\,\varphi}}} = I_{RS\,\underline{|\,0^o-\varphi}} = I_{F\,\underline{|\,0^o-\varphi}}$$

$$\overline{I}_{ST} = \frac{\overline{V}_{ST}}{\overline{Z}} = \frac{V_{L\,\underline{|\,-120^o}}}{Z_{\underline{|\,\varphi}}} = I_{ST\,\underline{|\,-120^o-\varphi}} = I_{F\,\underline{|\,-120^o-\varphi}} \qquad [8.20]$$

$$\overline{I}_{TR} = \frac{\overline{V}_{TR}}{\overline{Z}} = \frac{V_{L\,\underline{|\,120^o}}}{Z_{\underline{|\,\varphi}}} = I_{TR\,\underline{|\,120^o-\varphi}} = I_{F\,\underline{|\,120^o-\varphi}}$$

A partir del diagrama fasorial de las intensidades de fase, $\boldsymbol{I_{RS}}$, $\boldsymbol{I_{ST}}$ e $\boldsymbol{I_{TR}}$, iguales y desfasadas el ángulo φ de cada tensión correspondiente, *figura 8.18 izquierda*, y conforme al sentido de las corrientes establecido en la *figura 8.17*, aplicando la 1.ª Ley de Kirchhoff a cada nudo se obtiene el diagrama fasorial de las intensidades de línea, $\boldsymbol{I_R}$, $\boldsymbol{I_S}$ e $\boldsymbol{I_T}$, *figura 8.18 derecha.* En efecto:

$$\overline{I}_R = \overline{I}_{RS} - \overline{I}_{TR} = \sqrt{3}\cdot I_{F\,\underline{|\,-30^\circ-\varphi}}$$

$$\overline{I}_S = \overline{I}_{ST} - \overline{I}_{RS} = \sqrt{3}\cdot I_{F\,\underline{|\,210^\circ-\varphi}} \qquad [8.21]$$

$$\overline{I}_T = \overline{I}_{TR} - \overline{I}_{ST} = \sqrt{3}\cdot I_{F\,\underline{|\,90^\circ-\varphi}}$$

Es decir:

$$I_R = I_S = I_T = I_L = \sqrt{3}\cdot I_F = \sqrt{3}\cdot\frac{V_F}{Z} = \sqrt{3}\cdot\frac{V_L}{Z} \qquad [8.22]$$

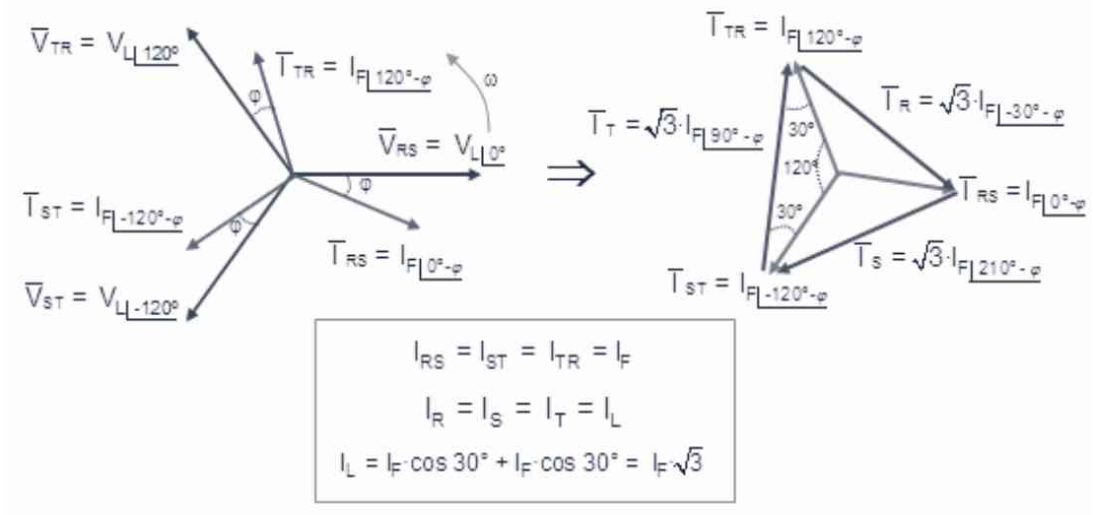


Figura 8.18. Diagrama fasorial de tres impedancias iguales Z_φ en triángulo

Se obtiene las misma *ecuación [8.22]* para la *secuencia inversa RTS*.

8.6 CARGAS DESEQUILIBRADAS: CARGAS DIFERENTES EN ESTRELLA Y CON NEUTRO

Con frecuencia los sistemas eléctricos que se tienen en la práctica se encuentran aproximadamente equilibrados, debido a que las cargas son trifásicas (lo más frecuente, motores trifásicos) y a que las cargas monofásicas existentes se distribuyen entre las tres

fases de manera uniforme. Si las cargas en cada fase no son iguales se producen los *sistemas desequilibrados,* en los que, a diferencia de los sistemas equilibrados, es de *suma importancia* conocer la secuencia de fases, ya que las corrientes de línea dependen de ella.

Si a un sistema trifásico con neutro (*R-S-T-N*), se conectan, por ejemplo, tres impedancias diferentes, *figura 8.19*, se tienen tres intensidades de línea, iguales a la de fase, diferentes entre ellas, y la corriente del neutro no será nula. La tensión en cada una de las impedancias es igual a la tensión de fase V_F, en contraposición a cuando la misma conexión no tiene neutro, *apartado 8.7*, en la que las tensiones en cada impedancia son diferentes.

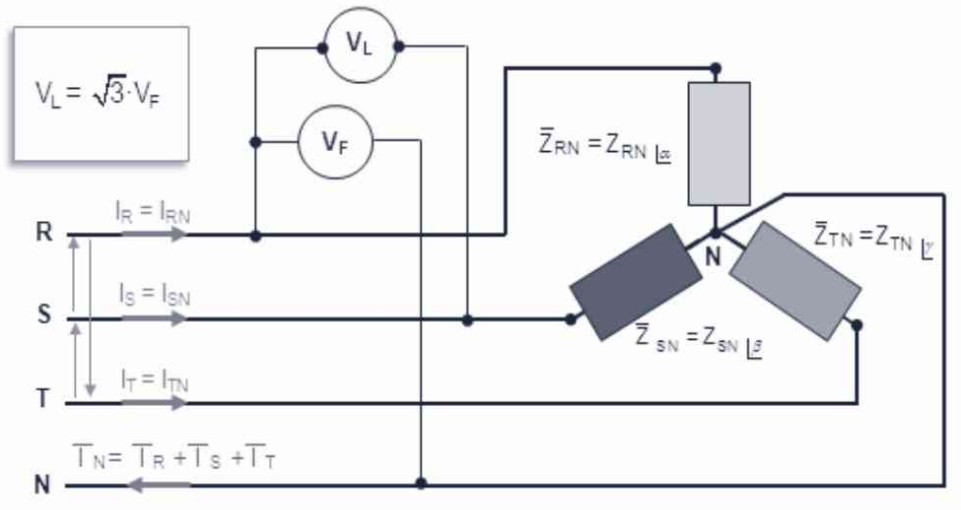


Figura 8.19. Sistema desequilibrado: tres impedancias diferentes en estrella con neutro

Teniendo en cuenta que las intensidades e impedancias definidas en la *figura 8.19*, y el diagrama fasorial de tensiones simples de la *figura 8.20*, $\boldsymbol{V_{RN}} = V_{F\,\angle 0^\circ}$, $\boldsymbol{V_{SN}} = V_{F\,\angle -120^\circ}$, $\boldsymbol{V_{TN}} = V_{F\,\angle 120^\circ}$, por cada impedancia circulará la intensidad:

$$\bar{I}_{RN} = \bar{I}_R = \frac{\bar{V}_{RN}}{\bar{Z}_{RN}} = \frac{V_{F\,\underline{|\,0^\circ}}}{Z_{RN\,\underline{|\,\alpha}}} = I_{RN\,\underline{|\,0^\circ - \alpha}}$$

$$\bar{I}_{SN} = \bar{I}_S = \frac{\bar{V}_{RN}}{\bar{Z}_{SN}} = \frac{V_{F\,\underline{|\,-120^\circ}}}{Z_{SN\,\underline{|\,\beta}}} = I_{SN\,\underline{|\,-120^\circ - \beta}} \qquad [8.23]$$

$$\bar{I}_{TN} = \bar{I}_T = \frac{\bar{V}_{TN}}{\bar{Z}_{TN}} = \frac{V_{F\,\underline{|\,120^\circ}}}{Z_{TN\,\underline{|\,\gamma}}} = I_{TN\,\underline{|\,120^\circ - \gamma}}$$

Aplicando la 1.ª Ley de Kirchhoff en el punto común de las tres impedancias, punto neutro, se obtiene la intensidad que ha de circular por el conductor neutro *N, corriente de retorno (figura 8.19)*:

$$\overline{I}_N = \overline{I}_R + \overline{I}_S + \overline{I}_T = I_{RN\lfloor 0º-\alpha} + I_{SN\lfloor -120-\beta} + I_{TN\lfloor 120-\gamma} \qquad [8.24]$$

Es decir, que los desequilibrios en las cargas producen una corriente por el neutro, en la práctica generalmente de menor valor que las corrientes de línea.

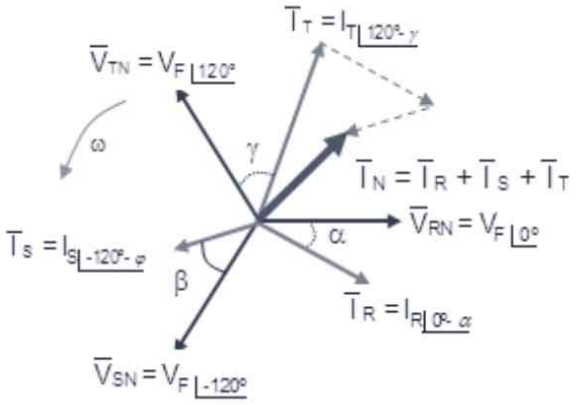


Figura 8.20. Diagrama fasorial de tres impedancias diferentes en estrella con neutro

Observa:

En los **sistemas trifásicos en estrella con neutro**, y *con cargas lineales*, por el neutro no circula corriente si el sistema es equilibrado, y circula una corriente, generalmente de menor valor que las corrientes de línea, si el sistema es desequilibrado, contribuyendo además el conductor neutro a mantener la tensión de fase en un valor constante e igual para cada una de las fases.

Si las *cargas no son lineales*, aun siendo una carga equilibrada, se producen armónicos de corrientes que pueden dar lugar a que por el conductor neutro circule una intensidad elevada, incluso mayor que las corrientes de línea, especialmente debido al armónico de orden 3, por lo que la posibilidad de dicho efecto se ha de tener en cuenta en el cálculo de la sección de los conductores.

8.7 CARGAS DESEQUILIBRADAS: CARGAS DIFERENTES EN ESTRELLA Y SIN NEUTRO

Si a las tres fases de un sistema trifásico simétrico (*R-S-T*) se conectan, por ejemplo, tres impedancias diferentes en estrella, *figura 8.21*, se tienen tres intensidades de línea, iguales a la de fase, pero diferentes entre ellas. La tensión en cada una de las impedancias **no** es igual a la tensión de fase V_F, en contraposición a cuando la misma conexión tiene neutro, *apartado 8.6*, en la que las tensiones en cada impedancia son iguales

a la tensión de fase V_F. El punto común de las tres impedancias no está al potencial del neutro *N* (centro de la estrella, neutro del generador) y se designa con la letra *O* en lugar de *N*.

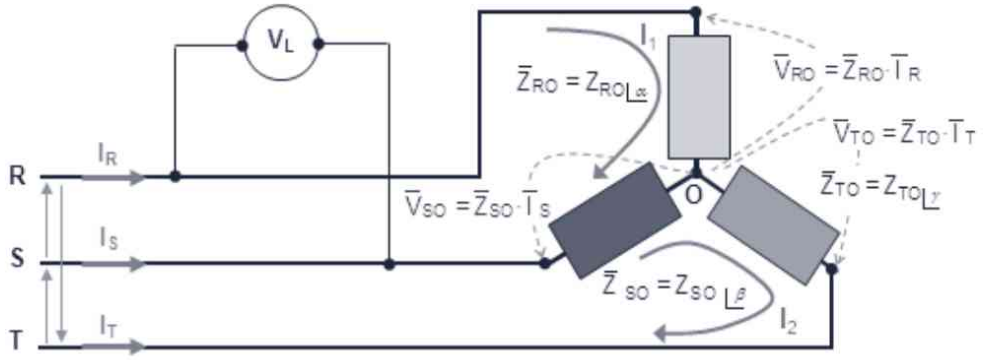


Figura 8.21. Sistema desequilibrado: tres impedancias diferentes en estrella sin neutro

Para hallar las corrientes de línea $\boldsymbol{I_R}$, $\boldsymbol{I_S}$, e $\boldsymbol{I_T}$, se eligen dos corrientes de malla, por ejemplo, $\boldsymbol{I_1}$ e $\boldsymbol{I_2}$ en la *figura 8.21.* Teniendo en cuenta el diagrama fasorial de tensiones de línea ($\boldsymbol{V_{RS}} = V_{L\,\angle 0^o}$, $\boldsymbol{V_{ST}} = V_{L\,\angle -120^o}$, $\boldsymbol{V_{TR}} = V_{L\,\angle 120^o}$) de la *figura 8.22 izquierda*, y aplicando la 2.ª Ley de Kirchhoff, *fórmula [7.79],* a las mallas *ROS* y *SOT,* correspondientes a las corrientes $\boldsymbol{I_1}$ e $\boldsymbol{I_2}$ respectivamente, se tiene:

$$\overline{V}_{RS} = \overline{I}_1 \cdot \left(\overline{Z}_{RO} + \overline{Z}_{SO}\right) - \overline{I}_2 \cdot \overline{Z}_{SO} \qquad [8.25]$$

$$\overline{V}_{ST} = \overline{I}_2 \cdot \left(\overline{Z}_{SO} + \overline{Z}_{TO}\right) - \overline{I}_1 \cdot \overline{Z}_{SO} \qquad [8.26]$$

Ecuaciones que permiten determinar $\boldsymbol{I_1}$ e $\boldsymbol{I_2}$, que, a su vez, permiten determinar las corrientes de línea:

$$\begin{aligned} \overline{I}_R &= \overline{I}_1 \\ \overline{I}_S &= \overline{I}_2 - \overline{I}_1 \\ \overline{I}_T &= -\overline{I}_2 \end{aligned} \qquad [8.27]$$

Las tensiones en los extremos de cada impedancia son:

$$\begin{aligned} \overline{V}_{RO} &= \overline{I}_R \cdot \overline{Z}_{RO} \\ \overline{V}_{SO} &= \overline{I}_S \cdot \overline{Z}_{SO} \\ \overline{V}_{TO} &= \overline{I}_T \cdot \overline{Z}_{TO} \end{aligned} \qquad [8.28]$$

Nótese, *figura 8.22 izquierda*, que las tensiones en los extremos de las impedancias pueden ser muy diferentes a la tensión simple V_F de la línea, pudiendo llegar a ser superiores a la tensión de la red.

La tensión $\boldsymbol{V_{ON}}$ se denomina *tensión del desplazamiento del neutro*, pudiéndose determinar su valor a partir del diagrama fasorial de la *figura 8.22 derecha:*

$$\overline{V}_{ON} = \overline{V}_{TN} - \overline{V}_{TO} = \frac{V_L}{\sqrt{3}}\underline{|90^\circ} - \overline{V}_{TO} \qquad [8.29]$$

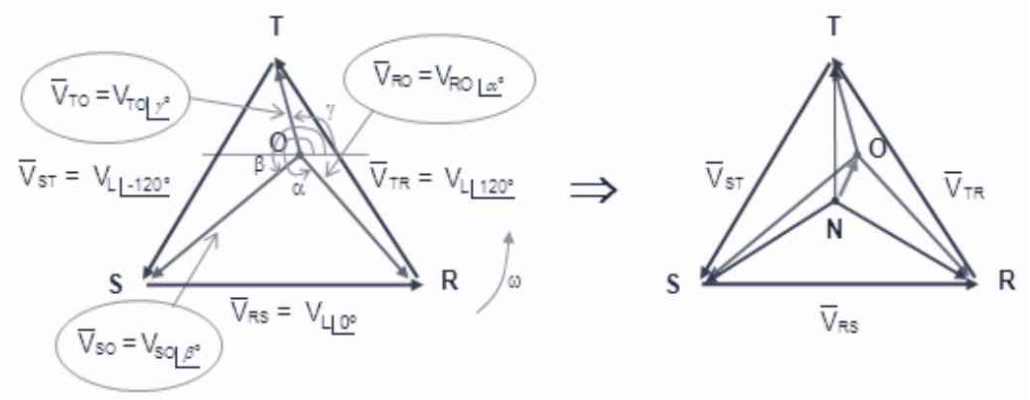


Figura 8.22. Diagramas fasoriales de tres impedancias diferentes en estrella sin neutro

Otro método consiste en transformar en triángulo el acoplamiento en estrella dado, *apartado 8.9*, lo que permite determinar las intensidades de línea correspondientes

8.8 CARGAS DESEQUILIBRADAS: CARGAS DIFERENTES EN TRIÁNGULO Δ

Si a un sistema trifásico simétrico (*R-S-T*) se conectan, por ejemplo, tres impedancias diferentes en triángulo, *figura 8.23*, se tienen tres intensidades de fase diferentes entre ellas, y tres intensidades de línea también diferentes entre ellas, *figura 8.23*.

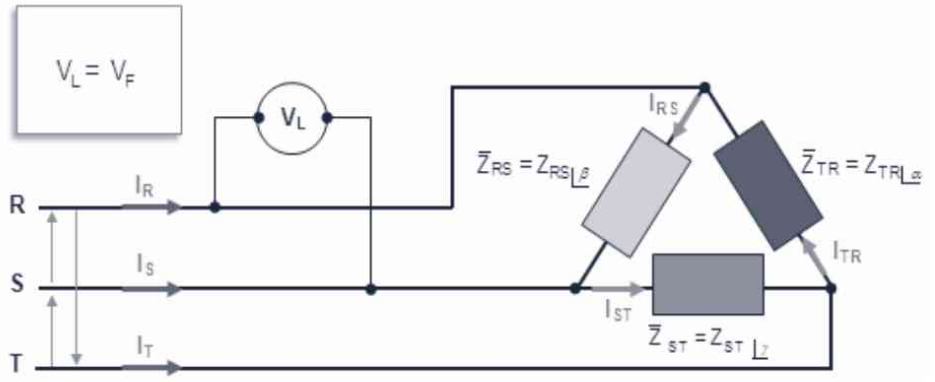


Figura 8.23. Tres impedancias diferentes en triángulo: sistema desequilibrado

Para hallar las corrientes de fase, $\boldsymbol{I_{RS}}$, $\boldsymbol{I_{ST}}$, e $\boldsymbol{I_{TR}}$, considerando que las tensiones de línea son, $\boldsymbol{V_{RS}} = V_{L\angle 0^o}$, $\boldsymbol{V_{ST}} = V_{L\angle -120^o}$, $\boldsymbol{V_{TR}} = V_{L\angle 120^o}$, *figura 8.24,* se tiene:

$$\overline{I}_{RS} = \frac{\overline{V}_{RS}}{\overline{Z}_{RS}} = \frac{V_{F\lfloor 0^o}}{Z_{RS\lfloor \alpha}} = I_{RS\lfloor 0^o-\alpha}$$

$$\overline{I}_{ST} = \frac{\overline{V}_{ST}}{\overline{Z}_{ST}} = \frac{V_{F\lfloor -120^o}}{Z_{ST\lfloor \beta}} = I_{ST\lfloor -120^o-\beta} \qquad [8.30]$$

$$\overline{I}_{TR} = \frac{\overline{V}_{TR}}{\overline{Z}_{TR}} = \frac{V_{F\lfloor 120^o}}{Z_{TR\lfloor \gamma}} = I_{TR\lfloor 120^o-\gamma}$$

Las intensidades de línea $\boldsymbol{I_R}$, $\boldsymbol{I_S}$, e $\boldsymbol{I_T}$, se obtienen aplicando la 1.ª Ley de Kirchhoff a los nudos de la carga:

$$\begin{aligned} \overline{I}_R &= \overline{I}_{RS} - \overline{I}_{TR} \\ \overline{I}_S &= \overline{I}_{ST} - \overline{I}_{RS} \\ \overline{I}_T &= \overline{I}_{TR} - \overline{I}_{ST} \end{aligned} \qquad [8.31]$$

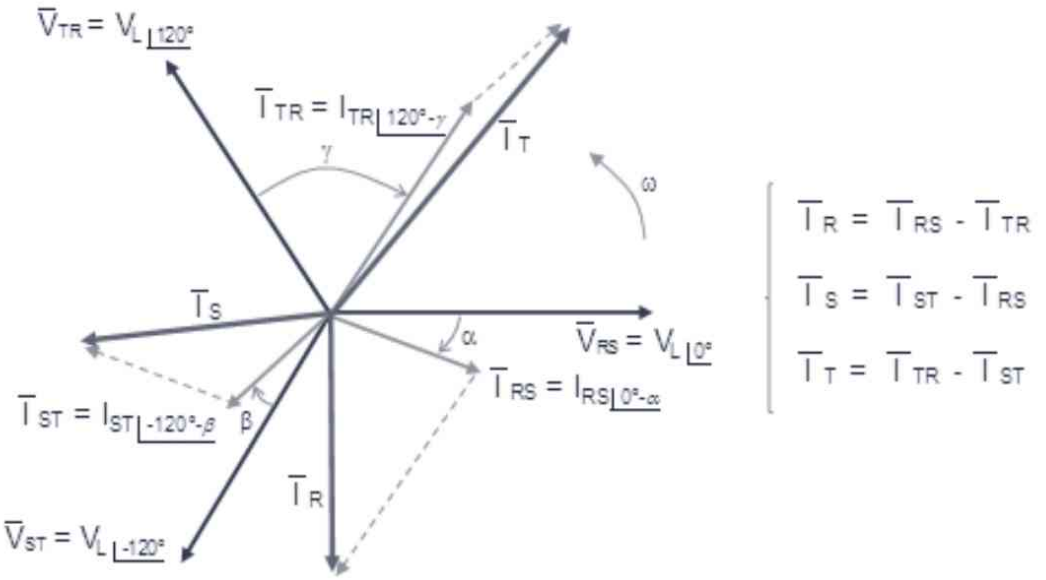


Figura 8.24. Diagrama fasorial de tres impedancias diferentes en triángulo

8.9 TRANSFORMACIÓN ESTRELLA EN TRIÁNGULO Y TRIÁNGULO EN ESTRELLA

A veces interesa transformar una conexión de estrella en triángulo y viceversa. Esto se puede hacer de manera análoga a como se ha hecho en los circuitos de CC, *apartado 4.14,* mediante el Teorema de Kennelly. La deducción de las fórmulas correspondiente para CA se hace de forma semejante a como se hizo en dicho apartado para CC, sin más que sustituir las resistencias por impedancias, obteniéndose las fórmulas que aparecen en la *figura 8.25.*

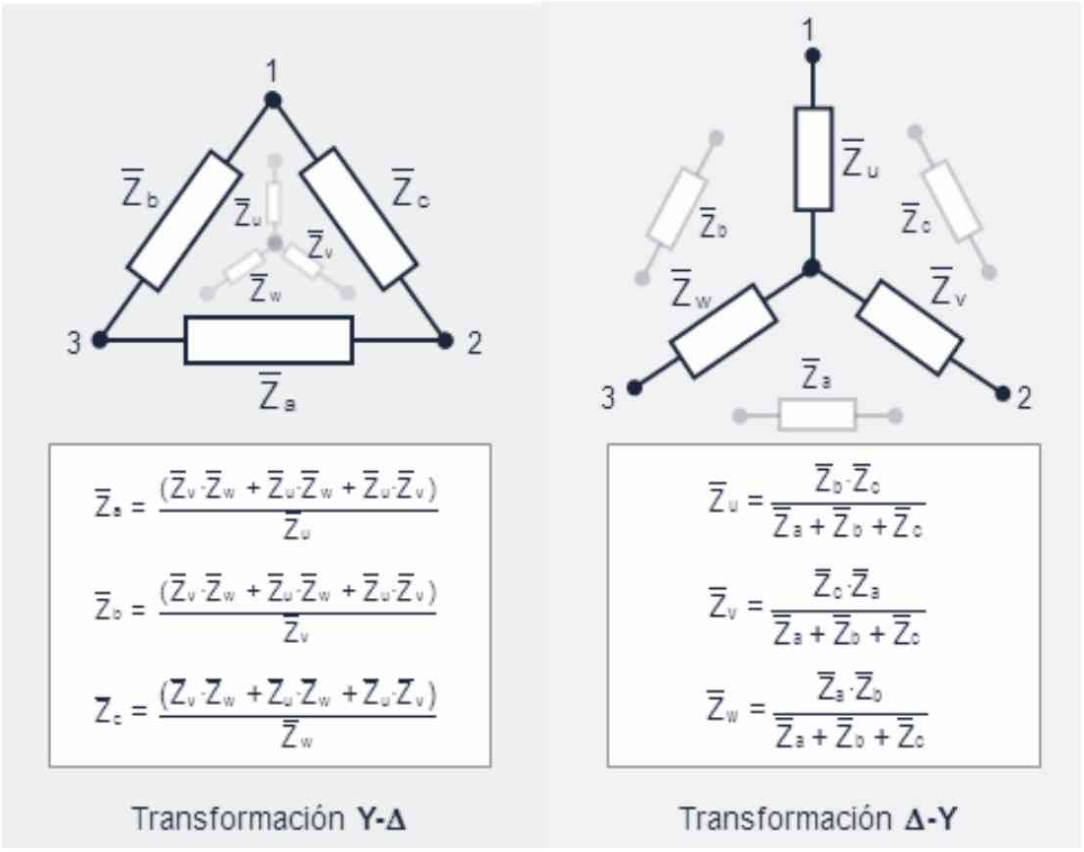


Figura 8.25. Transformación estrella-triángulo y triángulo-estrella

Si el sistema es equilibrado (las tres impedancias iguales), se cumple:

$$\bar{Z}_\Delta = 3 \cdot \bar{Z}_Y \qquad [8.32]$$

$$\bar{Z}_Y = \frac{1}{3}\bar{Z}_\Delta \qquad [8.33]$$

Se pueden recordar las fórmulas de la *figura 8.25* de la siguiente forma:

- Cada impedancia del triángulo Δ es el cociente de la suma de todas las impedancias de la estrella Y tomadas por parejas entre la impedancia del lado opuesto.

- Cada impedancia de la estrella Y es el cociente del producto de las dos impedancias de los lados adyacentes del triángulo Δ entre la suma de todas sus impedancias.

8.10 DETERMINACIÓN DE LA SECUENCIA DE FASES

Como se ha visto en el *apartado 8.1*, la *secuencia de fases es* el orden en el que se suceden los valores máximos de las ff.ee.mm. y tensiones de cada una de las fases de un sistema trifásico *RSTN*. En la *figura 8.26,* tomando como referencia $\boldsymbol{V_{RS}} = V_{RS\angle 0^\circ}$ (se puede tomar cualquier tensión), se representan todas las tensiones para un sistema trifásico *RSTN* de *secuencia directa RST* e *inversa RTS*.

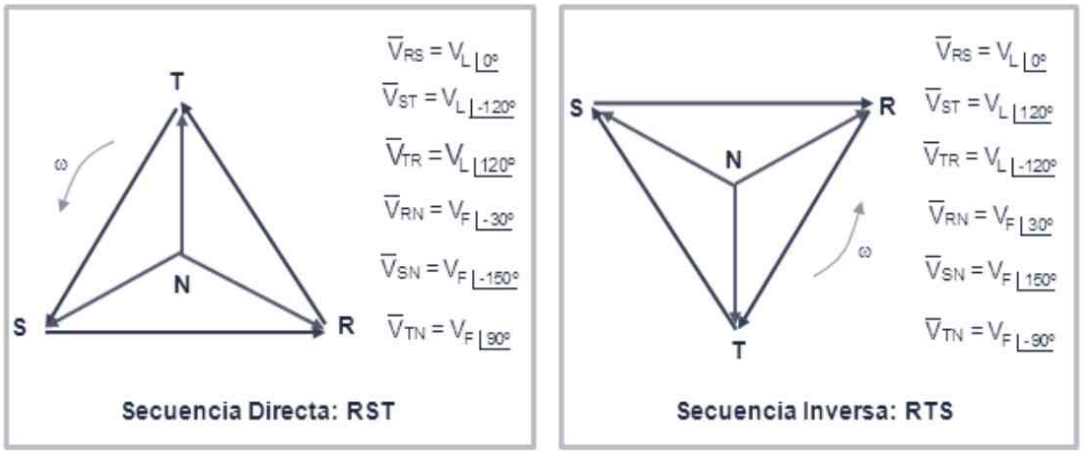


Figura 8.26. Secuencia de fases directa RST e inversa RTS

Además de aparatos de medidas propios para la indicación de la secuencia de fases, existen diferentes métodos para hallar dicha secuencia. Por ejemplo, el que se explica a continuación:

Se monta un circuito formado por dos voltímetros (V_1 y V_2), una resistencia R y un condensador C dispuestos en la forma de la *figura 8.27*. Según sean las lecturas de los voltímetros, como se demuestra continuación, se tiene:

a) Si $V_1 > V_2$, la secuencia de fases es **RST**.

b) Si $V_2 > V_1$, la secuencia de fases es **RTS**.

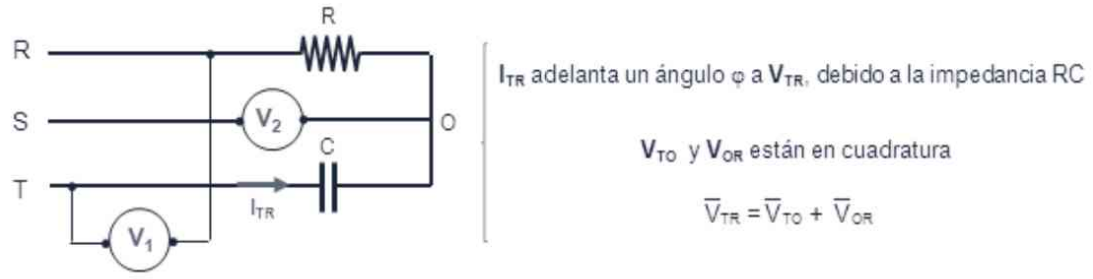


Figura 8.27. Montaje para determinar la secuencia de fases

En efecto, para su demostración:

En primer lugar se dibujan los triángulos de tensiones compuestas correspondientes a cada una de las secuencias, directa ($\boldsymbol{V_{RS}} = V_{L\,\angle 0^\circ}$, $\boldsymbol{V_{ST}} = V_{L\,\angle -120^\circ}$, $\boldsymbol{V_{TR}} = V_{L\,\angle 120^\circ}$) e inversa ($\boldsymbol{V_{RS}} = V_{L\,\angle 0^\circ}$, $\boldsymbol{V_{TR}} = V_{L\,\angle -120^\circ}$, $\boldsymbol{V_{ST}} = V_{L\,\angle 120^\circ}$), *figura 8.28*.

Se sabe que, debido a la impedancia *RC*, la intensidad $\boldsymbol{I_{TR}}$ adelanta un ángulo φ a la tensión $\boldsymbol{V_{TR}}$, y que la tensión $\boldsymbol{V_{TO}}$ en bornes del condensador *C* y la tensión $\boldsymbol{V_{OR}}$ en bornes de la resistencia *R* están en cuadratura. Las dos consideraciones anteriores permiten dibujar, en cada uno de los triángulos, los vectores, $\boldsymbol{I_{TR}}$, $\boldsymbol{V_{TO}}$ y $\boldsymbol{V_{OR}}$, *figura 8.28*. Se observa que:

- En la secuencia directa (*RST*): $V_1 = V_{TR} > V_2 = V_{SO}$.
- En la secuencia inversa (*RTS*): $V_2 = V_{SO} > V_1 = V_{TR}$.

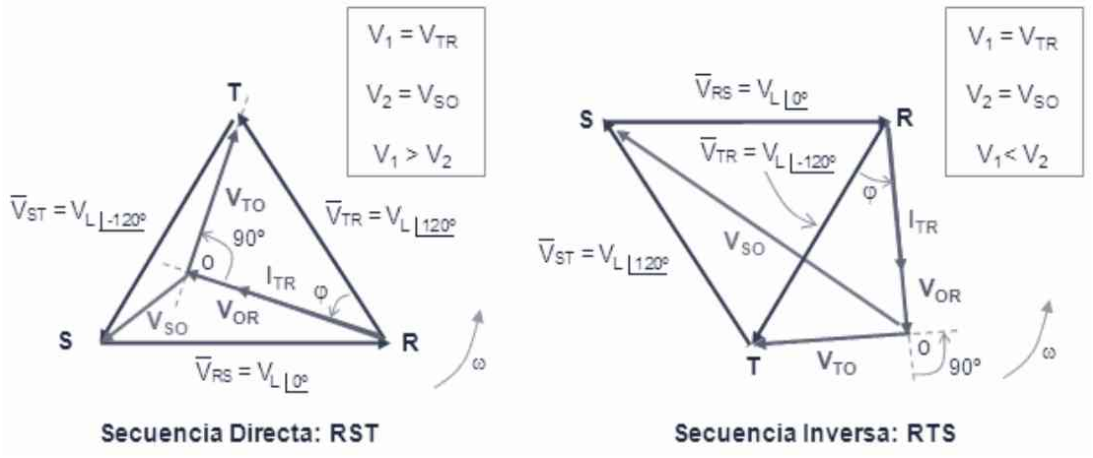


Figura 8.28. Explicación del montaje de la figura 8.27

En la figura 8.29 se tienen diferentes aparatos indicadores de las secuencias de fases.

Figura 8.29. Diferentes aparatos indicadores de secuencia de fases

8.11 POTENCIAS EN UN SISTEMA TRIFÁSICO: CASO GENERAL

Un sistema trifásico es equivalente a tres circuitos monofásicos juntos. Recordando lo que se ha dicho en el apartado *7.17* para la potencia en CA monofásica, para un sistema trifásico se tienen las siguientes potencias:

La *potencia instantánea p(t)* es igual a la suma de las potencias instantáneas de todas sus fases:

$$p(t) = p(t)_R + p(t)_S + p(t)_T \qquad [8.34]$$

La *potencia activa P* es igual a la suma de las potencias activas de todas sus fases:

$$P = P_R + P_S + P_T = V_R \cdot I_R \cdot \cos \varphi_R + V_S \cdot I_S \cdot \cos \varphi_S + V_S \cdot I_S \cdot \cos \varphi_S \qquad [8.35]$$

La *potencia reactiva Q* es igual a la suma de las potencias reactivas de todas sus fases:

$$Q = Q_R + Q_S + Q_T = V_R \cdot I_R \cdot \text{sen } \varphi_R + V_S \cdot I_S \cdot \text{sen } \varphi_S + V_S \cdot I_S \text{sen } \varphi_S \qquad [8.36]$$

La *potencia aparente S* es igual al módulo de la suma vectorial $\boldsymbol{S}$, de las potencias aparentes, $\boldsymbol{S_R}$, $\boldsymbol{S_S}$ y $\boldsymbol{S_T}$ de sus fases:

$$\overline{S} = \overline{S}_R + \overline{S}_S + \overline{S}_T = \overline{V}_R \cdot \overline{I}^*_R + \overline{V}_S \cdot \overline{I}^*_S + \overline{V}_S \cdot \overline{I}^*_S \qquad [8.37]$$

La fórmula anterior también se puede poner en la forma:

$$\overline{S} = (P_R + P_S + P_T) + j\cdot(Q_R + Q_S + Q_T) = P + j\cdot Q \qquad [8.38]$$

En el caso particular de que el sistema trifásico sea equilibrado, como se verá en los próximos apartados, se obtienen unas fórmulas sencillas e independientes del sistema de acoplamiento, en estrella o en triángulo.

El *fdp* de la carga se obtiene por la misma *fórmula [7.171]* utilizada en CA monofásica (*fdp = P/S*). Si la carga es equilibrada y carece de armónicos, para este caso también se cumple la *ecuación [7.172]* de la CA monofásica, es decir, *fdp* = cos $\varphi = P/S$.

En la *tabla 8.3* se tienen las fórmulas para cada caso, en sistemas equilibrados y desequilibrados.

8.12 POTENCIA INSTANTÁNEA EN UN SISTEMA TRIFÁSICO EQUILIBRADO

Para un sistema equilibrado, ya sea estrella o en triángulo, se tiene para las tensiones e intensidades:

$$v_R = \sqrt{2}\cdot V_F\cdot \text{sen}\,(\omega\cdot t) \quad ; \quad i_R = \sqrt{2}\cdot I_F\cdot \text{sen}(\omega\cdot t - \varphi)$$

$$v_S = \sqrt{2}\cdot V_F\cdot \text{sen}\left(\omega\cdot t - \frac{2\cdot\pi}{3}\right) \quad ; \quad i_S = \sqrt{2}\cdot V_F\cdot \text{sen}\left(\omega\cdot t - \frac{2\cdot\pi}{3} - \varphi\right) \qquad [8.39]$$

$$v_T = \sqrt{2}\cdot V_F\cdot \text{sen}\left(\omega\cdot t - \frac{4\cdot\pi}{3}\right) \quad ; \quad i_T = \sqrt{2}\cdot I_F\cdot \text{sen}\left(\omega\cdot t - \frac{4\cdot\pi}{3} - \varphi\right)$$

La potencia instantánea, *fórmula [8.34] y figura 8.30*, es:

$$p(t) = p(t)_R + p(t)_S + p(t)_T = v_R\cdot i_R + v_S\cdot i_S + v_T\cdot i_T$$

$$p(t) = \sqrt{2}\cdot V_F\cdot \text{sen}(\omega\cdot t)\cdot\sqrt{2}\cdot I_F\cdot \text{sen}\,(\omega\cdot t - \varphi) + \sqrt{2}\cdot V_F\cdot \text{sen}\left(\omega\cdot t - \frac{2\cdot\pi}{3}\right)\cdot\sqrt{2}\cdot V_F\cdot \text{sen}\left(\omega\cdot t - \frac{2\cdot\pi}{3} - \varphi\right) +$$

$$+ \sqrt{2}\cdot V_F\cdot \text{sen}\left(\omega\cdot t - \frac{4\cdot\pi}{3}\right)\cdot\sqrt{2}\cdot I_F\cdot \text{sen}\left(\omega\cdot t - \frac{4\cdot\pi}{3} - \varphi\right)$$

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Teniendo en cuenta la identidad trigonométrica:

$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\cdot\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cdot\cos(\alpha-\beta) \qquad [8.40]$$

$$p(t) = V_F\cdot I_F\cdot\left\{3\cdot\cos\varphi - \left[\cos(2\cdot\omega\cdot t-\varphi) + \cos\left(2\cdot\omega\cdot t - \frac{2\cdot\pi}{3}-\varphi\right) + \cos\left(2\cdot\omega\cdot t - \frac{4\cdot\pi}{3}-\varphi\right)\right]\right\} \qquad [8.41]$$

La suma de los términos que se encuentran dentro del corchete de la ecuación anterior representa un sistema simétrico, por lo que dicha suma es cero, quedando:

$$p(t) = 3\cdot V_F\cdot I_F\cdot\cos\varphi \qquad [8.42]$$

Una conclusión muy interesante es que, en un sistema trifásico equilibrado la **potencia instantánea tiene un valor constante**, no es función del tiempo, en contraposición a la potencia monofásica, *apartado 7.11*, cuya potencia instantánea es de carácter pulsatorio. El valor de la potencia instantánea *p* coincide con el de la potencia activa *P*, como se verá en los dos apartados siguientes.

En la *figura 8.30* se tiene la representación gráfica de las potencias instantáneas *p* y las potencias medias *P,* de cada fase (*figura 8.30 izquierda)* y del sistema trifásico en conjunto (*figura 8.30 derecha).*

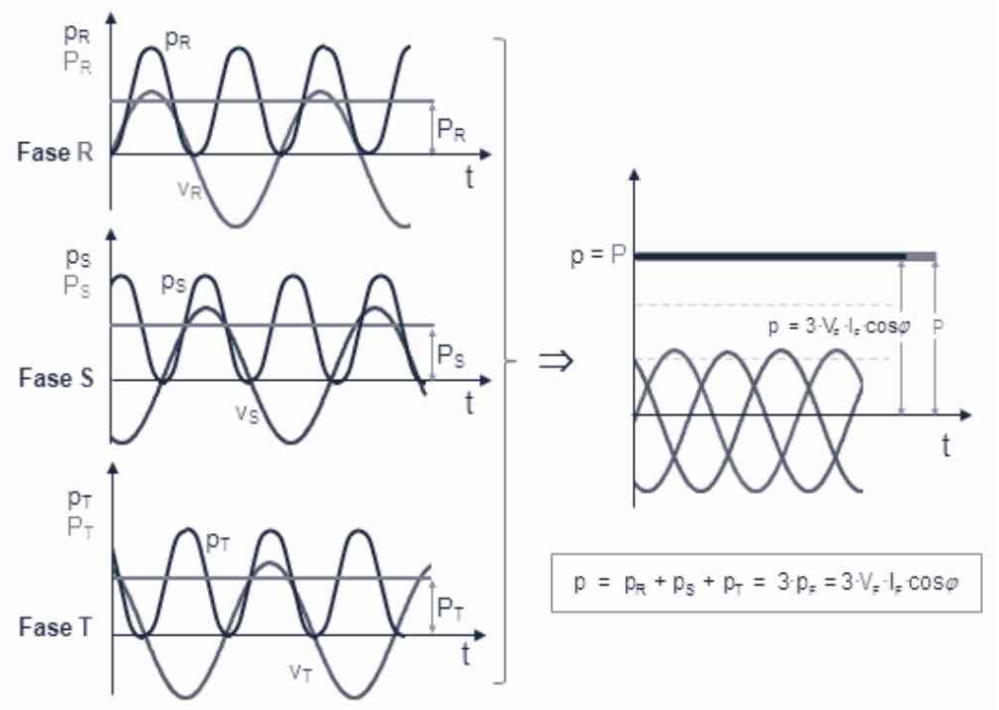


Figura 8.30. Potencias instantáneas p y potencias medias P, de fase y total, de un sistema trifásico

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

8.13 POTENCIA ACTIVA *P*, REACTIVA *Q* Y APARENTE *S* EN UN SISTEMA TRIFÁSICO EQUILIBRADO EN ESTRELLA Y

Sean tres impedancias iguales conectadas en estrella a un sistema trifásico RSTN, *figura 8.31*. En el *apartado 8.4* se obtuvieron las relaciones:

$$V_{RN} = V_{SN} = V_{TN} = V_F$$

$$V_{RS} = V_{ST} = V_{TR} = V_L \qquad [8.43]$$

$$V_L = \sqrt{3} \cdot V_F$$

$$I_R = I_S = I_T = I_L = I_{RN} = I_{SN} = I_{TN} = I_F$$

Teniendo en cuenta las relaciones anteriores y que la potencia activa *P* del sistema, *fórmula [8.35],* es igual a la suma de las potencias activas de cada una de las fases:

$$P = V_{RN} \cdot I_R \cdot \cos\varphi + V_{SN} \cdot I_S \cdot \cos\varphi + V_{TN} \cdot I_T \cdot \cos\varphi = 3 \cdot V_F \cdot I_F \cdot \cos\varphi = 3 \cdot \frac{V_L}{\sqrt{3}} \cdot I_L \cdot \cos\varphi$$

Resultando:

$$P = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi \qquad [8.44]$$

La potencia reactiva *Q* del sistema, *fórmula [8.36],* es igual a la suma de las potencias reactivas de dada una las fases:

$$Q = V_{RN} \cdot I_R \cdot \operatorname{sen}\varphi + V_{SN} \cdot I_S \cdot \operatorname{sen}\varphi + V_{TN} \cdot I_T \cdot \operatorname{sen}\varphi = 3 \cdot V_F \cdot I_F \cdot \operatorname{sen}\varphi = 3 \cdot \frac{V_L}{\sqrt{3}} \cdot I_L \cdot \operatorname{sen}\varphi$$

Resultando:

$$Q = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \operatorname{sen}\varphi \qquad [8.45]$$

La potencia aparente *S,* conforme a la *fórmula [8.38]:*

$$\bar{S} = P + j \cdot Q \Rightarrow S = \sqrt{\left(\sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi\right)^2 + \left(\sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \operatorname{sen}\varphi\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L\right)^2 \cdot \left(\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi\right)} \qquad [8.46]$$

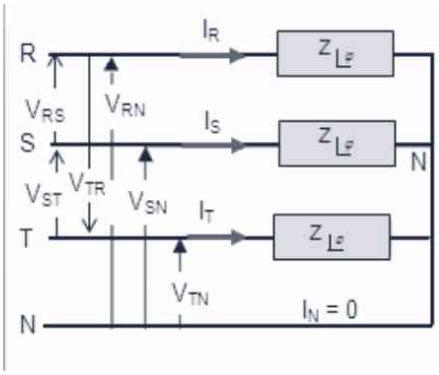
Teniendo en cuenta la identidad trigonométrica:

$$\text{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \qquad [8.47]$$

Resulta:

$$S = \sqrt{3}\cdot V_L \cdot I_L \qquad [8.48]$$

En la *figura 8.31* se tiene un resumen de fórmulas correspondientes a la conexión en estrella.



$$V_{RN} = V_{SN} = V_{TN} = V_F$$

$$V_{RS} = V_{ST} = V_{TR} = V_L$$

$$I_{RN} = I_{SN} = I_{TN} = I_F$$

$$I_R = I_S = I_T = I_L$$

$$V_L = \sqrt{3}\cdot V_F$$

$$I_L = I_F = \frac{V_F}{Z}$$

$$P = \sqrt{3}\cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi$$

$$Q = \sqrt{3}\cdot V_L \cdot I_L \cdot \text{sen}\varphi$$

$$S = \sqrt{3}\cdot V_L \cdot I_L$$

Figura 8.31. Resumen de magnitudes en un sistema trifásico en estrella Y

8.14 POTENCIA ACTIVA *P*, REACTIVA *Q* Y APARENTE *S* EN UN SISTEMA TRIFÁSICO EQUILIBRADO EN TRIÁNGULO Δ

Sean tres impedancias iguales conectadas en triángulo a un sistema trifásico RST, *figura 8.33*. En el *apartado 8.5* se obtuvieron las relaciones:

$$V_{RS} = V_{ST} = V_{TR} = V_F = V_L$$

$$I_{RS} = I_{ST} = I_{TR} = I_F \qquad [8.49]$$

$$I_R = I_S = I_T = I_L$$

$$I_L = \sqrt{3}\cdot I_F$$

Teniendo en cuenta las relaciones anteriores y que la potencia activa *P* del sistema, *fórmula [8.35],* es igual a la suma de las potencias activas de cada una de las fases:

$$P = V_{RS}\cdot I_{RS}\cdot\cos\varphi + V_{ST}\cdot I_{ST}\cdot\cos\varphi + V_{TR}\cdot I_{TR}\cdot\cos\varphi = 3\cdot V_F\cdot I_F\cdot\cos\varphi = 3\cdot V_L\cdot\frac{I_L}{\sqrt{3}}\cdot\cos\varphi$$

Resultando:

$$P = \sqrt{3}\cdot V_L\cdot I_L\cdot\cos\varphi \qquad [8.50]$$

La potencia reactiva *Q* del sistema, *fórmula [8.36],* es igual a la suma de las potencias reactivas de cada una de las fases:

$$Q = V_{RS}\cdot I_{RS}\cdot\operatorname{sen}\varphi + V_{ST}\cdot I_{ST}\cdot\operatorname{sen}\varphi + V_{TR}\cdot I_{TR}\cdot\operatorname{sen}\varphi = 3\cdot V_F\cdot I_F\cdot\operatorname{sen}\varphi = 3\cdot V_L\cdot\frac{I_L}{\sqrt{3}}\cdot\operatorname{sen}\varphi \qquad [8.51]$$

Resultando:

$$Q = \sqrt{3}\cdot V_L\cdot I_L\cdot\operatorname{sen}\varphi \qquad [8.52]$$

La potencia aparente se obtiene exactamente igual a como se ha hecho en la conexión en estrella y su valor es:

$$S = \sqrt{3}\cdot V_L\cdot I_L \qquad [8.53]$$

Los resultados anteriores muestran que, en los sistemas equilibrados, estén conectados en estrella o en triángulo, la expresión de las potencias, activa *P*, reactiva *Q* y aparente *S,* son las mismas para ambas conexiones. Esto significa que para el cálculo de la potencia de un sistema trifásico equilibrado, no es necesario conocer el tipo de acoplamiento de la carga, estrella o triángulo, *es suficiente conocer la tensión e intensidad de línea y el factor de potencia de la carga*.

En la *figura 8.32* se tiene un resumen de fórmulas correspondientes a la conexión en triángulo.

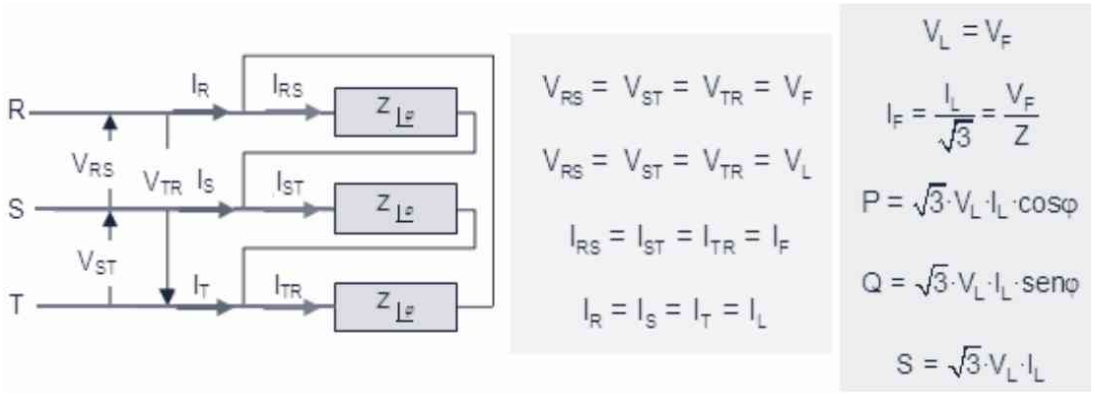


Figura 8.32. Resumen de magnitudes en un sistema trifásico en triángulo Δ

8.15 MEDIDAS DE POTENCIA EN LOS SISTEMAS TRIFÁSICOS

La potencia activa y reactiva en un sistema trifásico se puede medir mediante los correspondientes aparatos de medida trifásicos, vatímetro y varímetro respectivamente, *figura 8.33.* Además, dichas medidas también se pueden realizar mediante vatímetros monofásicos, pudiéndose presentar los siguientes casos:

- Sistemas equilibrados con neutro (RSTN).
- Sistemas equilibrados sin neutro (RST).
- Sistemas desequilibrados con neutro (RSTN.
- Sistemas desequilibrados sin neutro (RST).

Evidentemente, los métodos para sistemas desequilibrados son válidos para sistemas equilibrados (pues estos son casos particulares de aquéllos). Cada uno de estos casos se analiza en los apartados siguientes.

Figura 8.33. Aparatos de medida para un sistema trifásico

8.16 MEDIDA DE LA POTENCIA EN UN SISTEMA EQUILIBRADO CON NEUTRO RSTN

Medida de la potencia activa *P*

Es suficiente con un vatímetro, *figura 8.34.* La potencia es igual en cada una de las fases, por tanto bastará con medir la potencia de una de las tres fases, *W*, y multiplicar la lectura del vatímetro por tres.

En efecto, al estar el circuito equilibrado, la potencia es la misma en cada fase, el vatímetro *W* marca la potencia de la fase *R*:

$$P_R = W = V_{RN} \cdot I_R \cdot \cos \varphi \qquad [8.54]$$

La potencia total del sistema es:

$$P = 3 \cdot W \qquad [8.55]$$

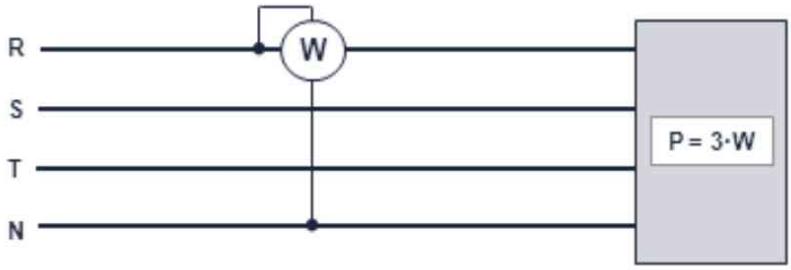


Figura 8.34. Sistema equilibrado con neutro. Medida de la potencia activa, $P = 3 \cdot W$

Medida de la potencia reactiva *Q*

Como por el neutro no circula corriente, se hace de la misma forma que se mide la potencia reactiva en el apartado siguiente.

8.17 MEDIDA DE LA POTENCIA EN UN SISTEMA EQUILIBRADO SIN NEUTRO RST

Medida de la potencia activa *P*

En este sistema trifásico, *figura 8.35*, no se dispone de neutro para conectar la bobina de tensión del vatímetro a la tensión simple, pero se puede formar un *neutro artificial* con dos resistencias, R_W, que tengan el mismo valor óhmico que el circuito voltimétrico del vatímetro, R_W. La potencia activa se obtiene por la misma *fórmula [8.55]* anterior.

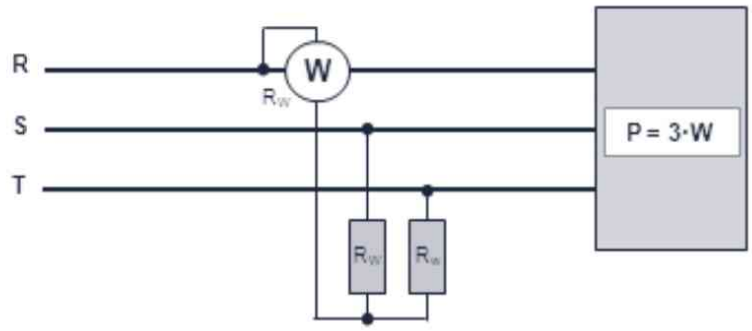


Figura 8.35. Sistema equilibrado sin neutro. Medida de la potencia activa, $P = 3 \cdot W$

Medida de la potencia reactiva *Q*

Un vatímetro también permite conocer la potencia reactiva *Q* del sistema. Para ello se realiza el montaje de la *figura 8.36*, siendo el valor de la potencia reactiva:

$$Q = \sqrt{3} \cdot W \qquad [8.56]$$

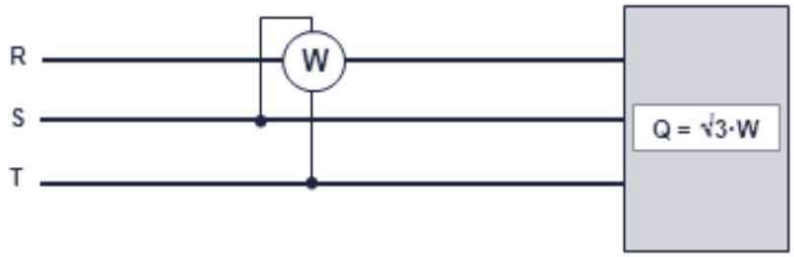


Figura 8.36. Sistema equilibrado sin neutro. Medida de la potencia reactiva, $Q = \sqrt{3} \cdot W$

En efecto, *figura 8.37*, el vatímetro tiene la bobina amperimétrica en la fase *R* y la bobina voltimétrica entre las fases *S* y *T*, luego la potencia que indica es:

$$W = V_{ST} \cdot I_R \cdot \cos(V_{ST}, I_R) = V_L \cdot I_L \cdot \cos(\pi/2 - \varphi) = V_L \cdot I_L \cdot \operatorname{sen}\varphi \qquad [8.57]$$

Ya que, cos ($\pi/2 - \varphi$) = sen φ. Multiplicando los dos miembros de la *igualdad [8.57]* por $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{3} \cdot W = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \operatorname{sen}\varphi = Q \qquad [8.58]$$

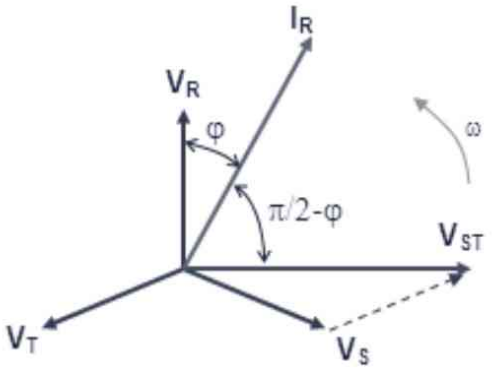


Figura 8.37. Sistema equilibrado sin neutro. Diagrama fasorial de la medida de la potencia reactiva Q

Obviamente, este método también sirve para medir la potencia reactiva en el caso de un sistema equilibrado con neutro (pues el neutro no conduce corriente).

8.18 MEDIDA DE LA POTENCIA EN UN SISTEMA DESEQUILIBRADO CON NEUTRO RSTN

Medida de la potencia activa P

Se utilizan tres vatímetros como se indica en la *figura 8.38*. La potencia del sistema viene dada por la suma de las potencias indicadas en los tres vatímetros.

$$P = W_1 + W_2 + W_3 \qquad [8.59]$$

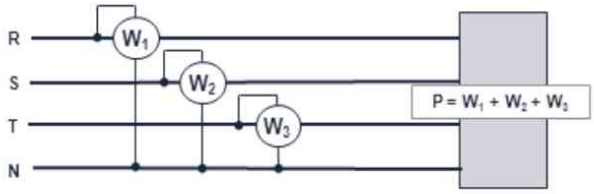


Figura 8.38. Sistemas desequilibrados con neutro. Medida de la potencia activa, $P = W_1 + W_2 + W_3$

En efecto, *figura 8.39,* las potencias indicadas por los vatímetros son:

$$\begin{aligned} W_1 &= V_{RN}\cdot I_R\cdot\cos(\mathbf{V}_{RN}, \mathbf{I}_R) = V_{RN}\cdot I_R\cdot\cos\varphi_R \\ W_2 &= V_{SN}\cdot I_S\cdot\cos(\mathbf{V}_{SN}, \mathbf{I}_S) = V_{SN}\cdot I_S\cdot\cos\varphi_S \\ W_3 &= V_{TN}\cdot I_T\cdot\cos(\mathbf{V}_{TN}, \mathbf{I}_T) = V_{TN}\cdot I_T\cdot\cos\varphi_T \end{aligned} \qquad [8.60]$$

La potencia activa *P* del sistema es la suma de las tres medidas, *fórmula [8.59].*

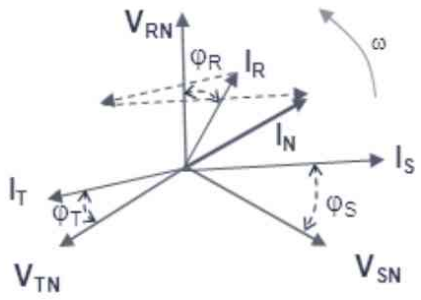


Figura 8.39. Sistema desequilibrado con neutro. Método de los tres vatímetros. Diagrama fasorial

Medida de la potencia reactiva *Q*

De la misma forma que se mide la potencia reactiva en el apartado siguiente.

8.19 MEDIDA DE LA POTENCIA EN UN SISTEMA DESEQUILIBRADO SIN NEUTRO RST. MÉTODO DE LOS TRES VATÍMETROS

Medida de la potencia activa *P*

Mediante tres vatímetros, *figura 8.40*, conectándose un vatímetro a cada una de las fases, y las conexiones de las bobinas voltimétricas se unen, por una parte, a la fase correspondiente y por otra a un punto común *O*. La potencia del sistema se obtiene por la fórmula:

$$P = W_1 + W_2 + W_3 \qquad [6.61]$$

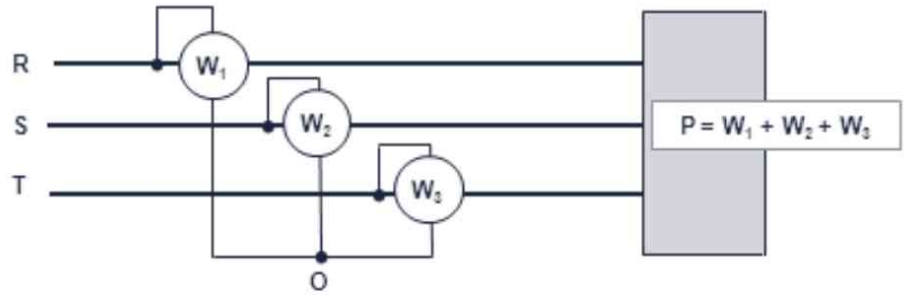


Figura 8.40. Sistemas desequilibrados sin neutro. Método de los tres vatímetros. $P = W_1 + W_2 + W_3$

En efecto, el punto *O* tiene una tensión V_{NO} referida al centro *N* de la estrella del generador o transformador, *figura 8.22*:

$$\begin{aligned} \overline{V}_{RN} &= \overline{V}_{RO} + \overline{V}_{ON} \\ \overline{V}_{SN} &= \overline{V}_{SO} + \overline{V}_{ON} \\ \overline{V}_{TN} &= \overline{V}_{TO} + \overline{V}_{ON} \end{aligned} \qquad [8.62]$$

Como el sistema es a tres hilos, considerando el sentido de las tres corrientes de línea de izquierda a derecha, la suma fasorial de intensidades, y también la de sus conjugados, ha de ser cero:

$$\overline{I}_R + \overline{I}_S + \overline{I}_T = 0 \;\Rightarrow\; \overline{I}^*_R + \overline{I}^*_S + \overline{I}^*_T = 0 \qquad [8.63]$$

Sustituyendo en la fórmula de la potencia aparente ***S*** del sistema, *fórmula [8.37]*, las *ecuaciones [8.62]*:

$$\overline{S} = \overline{S}_R + \overline{S}_S + \overline{S}_T = \overline{V}_{RN} \cdot \overline{I}^*_R + \overline{V}_{SN} \cdot \overline{I}^*_S + \overline{V}_{SN} \cdot \overline{I}^*_S \qquad [8.64]$$

$$\overline{S} = \overline{V}_{RO} \cdot \overline{I}^*_R + \overline{V}_{SO} \cdot \overline{I}^*_S + \overline{V}_{TO} \cdot \overline{I}^*_T + \overline{V}_{ON} \cdot \left(\overline{I}^*_R + \overline{I}^*_S + \overline{I}^*_T \right) = \overline{V}_{RO} \cdot \overline{I}^*_R + \overline{V}_{SO} \cdot \overline{I}^*_S + \overline{V}_{TO} \cdot \overline{I}^*_T \qquad [8.65]$$

La potencia activa *P*, *ecuación [8.38],* corresponde a la componente real de la ecuación anterior, y recordando lo explicado en la *figura 7.34* para la potencia aparente ***S***, en forma compleja, se tiene:

$$P = V_{RO} \cdot I_R \cdot \cos(\overline{V}_{RO}, \overline{I}_R) + V_{SO} \cdot I_S \cdot \cos(\overline{V}_{SO}, \overline{I}_S) + V_{TO} \cdot I_T \cdot \cos(\overline{V}_{TO}, \overline{I}_T) = W_1 + W_2 + W_3 \qquad [8.66]$$

Medida de la potencia reactiva *Q*

Para la medida de la potencia reactiva *Q* mediante vatímetros se utiliza el montaje de la *figura 8.41*, obteniéndose su valor por la fórmula:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}}(W_1 + W_2 + W_3) \qquad [8.67]$$

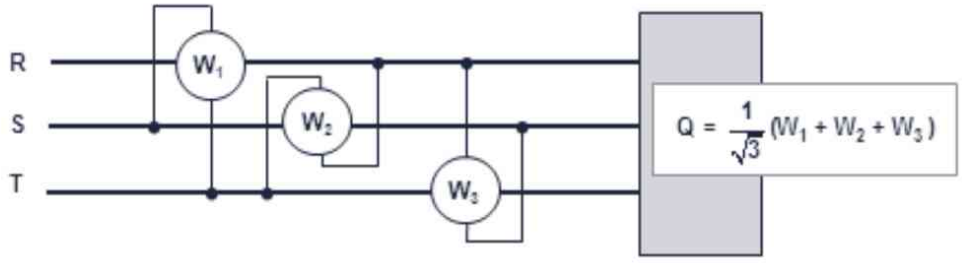


Figura 8.41. Sistemas desequilibrados sin neutro. Medida de la potencia reactiva, $Q = (W_1 + W_2 + W_3)/\sqrt{3}$

En efecto, considerando el sentido de las tres corrientes de línea de izquierda a derecha, *figura 8.41*, y el diagrama fasorial correspondiente, *figura 8.42*, se tiene:

Las potencias marcadas por los vatímetros son:

$$W_1 = V_{ST} \cdot I_R \cdot \cos(\mathbf{V}_{ST}, \mathbf{I}_R) = V_{ST} \cdot I_R \cdot \cos(90^\circ - \varphi_R) = V_{ST} \cdot I_R \cdot \operatorname{sen}\varphi_R$$

$$W_2 = V_{TR} \cdot I_S \cdot \cos(\mathbf{V}_{TR}, \mathbf{I}_S) = V_{TR} \cdot I_S \cdot \cos(90^\circ - \varphi_S) = V_{TR} \cdot I_S \cdot \operatorname{sen}\varphi_S \qquad [8.68]$$

$$W_3 = V_{RS} \cdot I_T \cdot \cos(\mathbf{V}_{RS}, \mathbf{I}_T) = V_{RS} \cdot I_T \cdot \cos(90^\circ - \varphi_T) = V_{RS} \cdot I_T \cdot \operatorname{sen}\varphi_T$$

Sumando, y teniendo en cuenta que el sistema es equilibrado en tensiones, ($V_{RS} = V_{ST} = V_{TR} = V_L = \sqrt{3} \cdot V_F$):

$$W_1 + W_2 + W_3 = \sqrt{3} \cdot V_F \cdot I_R \cdot \operatorname{sen}\varphi_R + \sqrt{3} \cdot V_F \cdot I_S \cdot \operatorname{sen}\varphi_S + \sqrt{3} \cdot V_F \cdot I_T \cdot \operatorname{sen}\varphi_T \qquad [8.69]$$

Como la potencia reactiva Q del sistema es:

$$Q = V_F \cdot I_R \cdot \operatorname{sen}\varphi_R + V_F \cdot I_S \cdot \operatorname{sen}\varphi_S + V_F \cdot I_T \cdot \operatorname{sen}\varphi_T \qquad [8.70]$$

Se concluye:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}}(W_1 + W_2 + W_3) \qquad [8.71]$$

Como se quería demostrar.

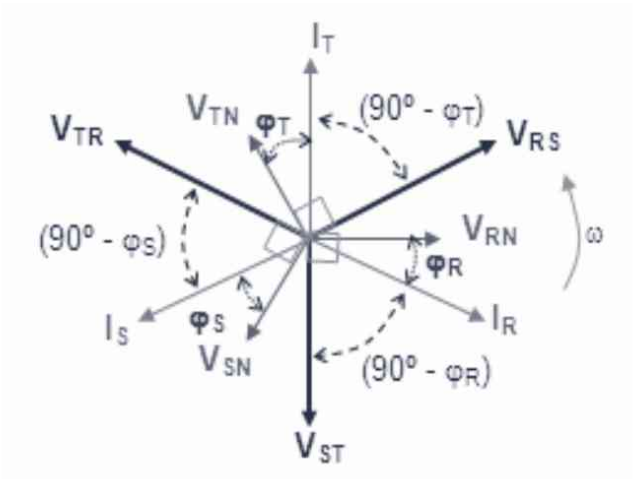


Figura 8.42. Sistemas desequilibrados sin neutro. Método de los tres vatímetros. Diagrama fasorial

8.20 MEDIDA DE LA POTENCIA EN UN SISTEMA DESEQUILIBRADO SIN NEUTRO RST. MÉTODO DE LOS DOS VATÍMETROS. PARTICULARIZACIÓN PARA SISTEMAS EQUILIBRADOS

Si el sistema *carece de neutro* se puede emplear el método de los dos vatímetros o *método Arón*. Aplicado en el caso de sistemas equilibrados se puede obtener, además, más información del sistema como se verá a continuación.

Sistema desequilibrado sin neutro: medida de la potencia activa *P*

El esquema de conexión correspondiente es el de la *figura 8.43*. La potencia del receptor viene dada por la suma de las potencias indicadas en los dos vatímetros.

$$P = W_1 + W_2 \qquad [8.72]$$

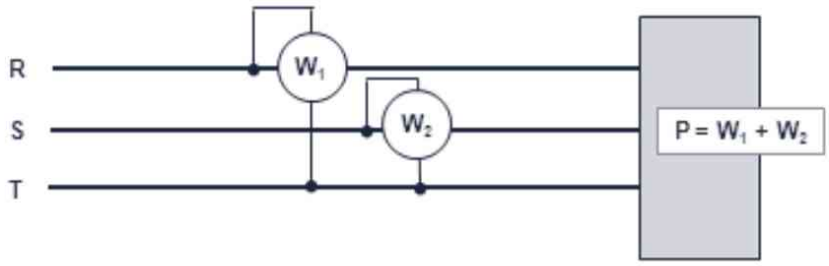


Figura 8.43. Sistemas sin neutro. Método de los dos vatímetros. $P = W_1 + W_2$

En efecto, si *N* es el punto neutro del transformador o alternador del que procede la línea, la potencia aparente ***S*** del sistema, *fórmula [8.37],* es:

$$\overline{S} = \overline{V}_{RN} \cdot \overline{I}_R^* + \overline{V}_{SN} \cdot \overline{I}_S^* + \overline{V}_{TN} \cdot \overline{I}_T^* \qquad [8.73]$$

Considerando el sentido de las corrientes de línea de izquierda a derecha, como el sistema carece de neutro:

$$\overline{I}_R + \overline{I}_S + \overline{I}_T = 0 \Rightarrow \overline{I}_R^* + \overline{I}_S^* + \overline{I}_T^* = 0 \Rightarrow \overline{I}_T^* = -\left(\overline{I}_R^* + \overline{I}_S^*\right) \qquad [8.74]$$

Sustituyendo $\boldsymbol{I_T}$ en la *ecuación [8.73]:*

$$\overline{S} = \overline{V}_{RN}\cdot\overline{I}_R^{\,*} + \overline{V}_{SN}\cdot\overline{I}_S^{\,*} - \overline{V}_{TN}\cdot\left(\overline{I}_R^{\,*} + \overline{I}_S^{\,*}\right) = \left(\overline{V}_{RN} - \overline{V}_{TN}\right)\cdot\overline{I}_R^{\,*} + \left(\overline{V}_{SN} - \overline{V}_{TN}\right)\cdot\overline{I}_S^{\,*} = \overline{V}_{RT}\cdot\overline{I}_R^{\,*} + \overline{V}_{ST}\cdot\overline{I}_S^{\,*} \qquad [8.75]$$

La potencia activa *P* del sistema, *ecuación [8.38],* corresponde a la componente real de la ecuación anterior:

$$P = V_{RT}\cdot I_R\cdot\cos\left(\overline{V}_{RT}, \overline{I}_R\right) + V_{ST}\cdot I_S\cdot\cos\left(\overline{V}_{ST}, \overline{I}_S\right) = W_1 + W_2 \qquad [8.76]$$

El esquema fasorial de la *figura 8.42* ayuda a interpretar la ecuación anterior.

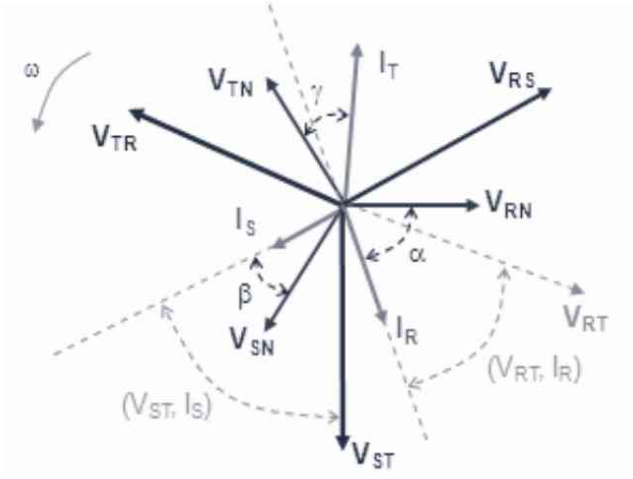


Figura 8.44. Sistema desequilibrado sin neutro. Método de los dos vatímetros. Diagrama fasorial

Sistema equilibrado sin neutro: medida de la potencia activa *P*

En este caso, obviamente (un sistema equilibrado es un caso particular de un sistema desequilibrado) también se cumple:

$$P = W_1 + W_2 \qquad [8.77]$$

En efecto, con la misma conexión de la *figura 8.43* y del diagrama fasorial correspondiente de la *figura 8.45*, se tiene:

$$W_1 = V_{RT}\cdot I_R\cdot\cos\left(\mathbf{V_{RT}}, \mathbf{I_R}\right) = V_L\cdot I_L\cdot\cos(30^\circ - \varphi) \qquad [8.78]$$

$$W_2 = V_{ST}\cdot I_S\cdot\cos\left(\mathbf{V_{ST}}, \mathbf{I_S}\right) = V_L\cdot I_L\cdot\cos(30^\circ + \varphi)$$

Teniendo en cuenta las relaciones trigonométricas:

$$\cos (30^\circ + \varphi) = \cos 30^\circ \cdot \cos \varphi - \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \operatorname{sen} \varphi \qquad [8.79]$$

$$\cos (30^\circ - \varphi) = \cos 30^\circ \cdot \cos \varphi + \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \operatorname{sen} \varphi$$

Sustituyendo en las *ecuaciones [8.77]* y sumando ambas ecuaciones:

$$W_1 + W_2 = V_L \cdot I_L \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi = P \qquad [8.80]$$

Obteniéndose la igualdad de la *ecuación [8.77]* como se quería demostrar:

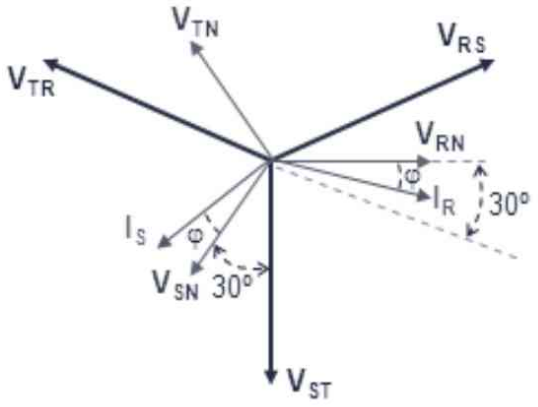


Figura 8.45. Sistema equilibrado sin neutro. Método de los dos vatímetros. Diagrama fasorial

Sistema equilibrado sin neutro: medida de la potencia reactiva Q

Por otra parte, a partir de la diferencia de las *ecuaciones [8.78]* se puede obtener la potencia reactiva *Q*:

$$W_1 - W_2 = V_L \cdot I_L \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \operatorname{sen}\varphi = V_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}} \qquad [8.81]$$

Se concluye:

$$Q = \sqrt{3}(W_1 - W_2) \qquad [8.82]$$

Casos particulares para un sistema equilibrado:

- Si $\cos\varphi = 1 \Rightarrow W_1 = W_2$
- Si $\cos\varphi = 0{,}5$ (en adelanto o en retraso) $\Rightarrow$ Uno de los dos vatímetros marcará 0 W.
- Si $\cos\varphi < 0{,}5$ en retraso $\Rightarrow$ Las desviaciones de los dos vatímetros son de sentido contrario.
- Si $\cos\varphi < 0{,}5$ en adelanto $\Rightarrow$ Las desviaciones de los dos vatímetros son de sentido contrario.

Cuando las desviaciones de los vatímetros son de sentido contrario, es preciso restar la potencia indicada por uno de los vatímetros de la señalada por el otro:

$$P = W_2 - W_1 \quad \text{o} \quad P = W_1 - W_2 \qquad [8.83]$$

Los cálculos anteriores se han hecho para un sistema de secuencia directa *RST*. Si los cálculos se hacen para un sistema de **secuencia inversa *RTS***, los resultados difieren de los anteriores, obteniéndose de forma análoga a como se ha hecho para la secuencia directa. En la *tabla 8.1* se hace un resumen de las indicaciones de los vatímetros para cada secuencia.

Secuencia	Medida	Carga	Ángulo
Directa RST	$W_1 = W_2 > 0$	R	$\varphi = 0^\circ$
	$W_1 = 2 \cdot W_2 > 0$	R + L	$\varphi = 30^\circ$
	$W_1 > 0 \; ; \; W_2 = 0$	R + L	$\varphi = 60^\circ$
	$W_1 > 0 > W_2$	R + L	$60^\circ < \varphi < 90^\circ$
	$W_1 = -W_2 \; ; \; W_1 > 0 > W_2$	L	$\varphi = 90^\circ$
	$W_2 = 2 \cdot W_1 > 0$	R + C	$\varphi = -30^\circ$
	$W_2 > 0 \; ; \; W_1 = 0$	R + C	$\varphi = -60^\circ$
	$W_2 > 0 > W_1$	R + C	$-60^\circ < \varphi < -90^\circ$
	$W_2 = -W_1 \; ; \; W_2 > 0 > W_1$	C	$\varphi = -90^\circ$
Inversa RTS	$W_1 = W_2 > 0$	R	$\varphi = 0^\circ$
	$W_2 = 2 \cdot W_1 > 0$	R + L	$\varphi = 30^\circ$
	$W_2 > 0 \; ; \; W_1 = 0$	R + L	$\varphi = 60^\circ$

	$W_2 > 0 > W_1$	R + L	$60^\circ < \varphi < 90^\circ$
	$W_2 = -W_1$; $W_2 > 0 > W_1$	L	$\varphi = 90^\circ$
	$W_1 = 2 \cdot W_2 > 0$	R + C	$\varphi = -30^\circ$
	$W_1 > 0$; $W_2 = 0$	R + C	$\varphi = -60^\circ$
	$W_1 > 0 > W_2$	R + C	$-60^\circ < \varphi < -90^\circ$
	$W_1 = -W_2$; $W_1 > 0 > W_2$	C	$\varphi = -90^\circ$

Tabla 8.1. Sistema equilibrado RST. Método de los dos vatímetros

Se concluye que el método de los dos vatímetros, además de la medida de la potencia, también puede servir para conocer otras características del sistema medido.

8.21 CORRECCIÓN DEL FACTOR DE POTENCIA EN UN SISTEMA TRIFÁSICO

En el *apartado 7.18* se ha explicado la necesidad de corregir el fdp en las instalaciones de CA monofásica. En los sistemas trifásicos esta necesidad es la misma y, ahora, los cálculos se hacen por fase.

Como en los sistemas monofásicos, en los trifásicos la forma más frecuente de mejorar el fdp es mediante condensadores. Esto se puede realizar de dos formas, *figura 8.46,* mediante:

a) Condensadores acoplados en triángulo.

b) Condensadores acoplados en estrella.

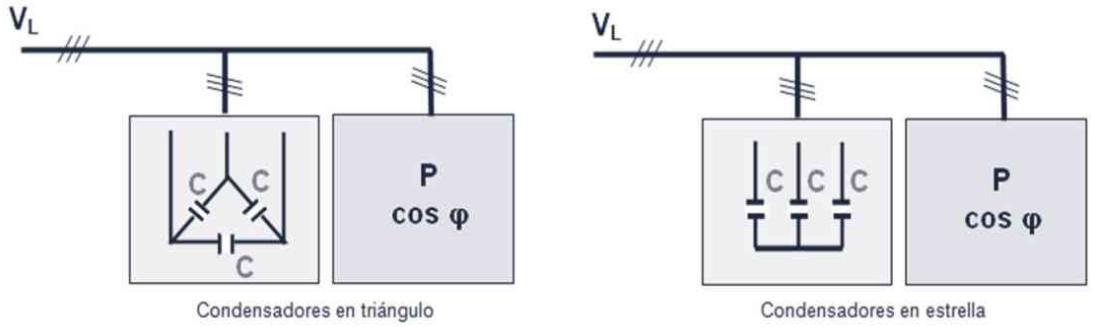


Figura 8.46. Corrección del factor de potencia en un sistema trifásico

Si una carga tiene un cos φ_1 y se quiere corregir a un cos φ_2, mediante un acoplamiento de condensadores, sea en estrella o en triángulo, la potencia reactiva Q_C que

han de aportar dichos condensadores ha de ser igual a la diferencia entre la potencia reactiva Q_1 demandada por la carga con un cos φ_1, antes de mejorar el fdp, y la potencia reactiva Q_2 que ha de tomar de la red una vez se corrija el fdp a un cos φ_2, *figura 8.47,* es decir:

Potencia reactiva Q_C que han de aportar los condensadores una vez corregido el fdp a cos φ_2:

$$Q_C = Q_1 - Q_2 = P \cdot (\text{tag}\ \varphi_1 - \text{tag}\ \varphi_2) \qquad [8.84]$$

Como se hace con tres condensadores, cada uno con una tensión en sus extremos V_c y una intensidad I_C:

$$Q_C = 3 \cdot V_C \cdot I_C \cdot \text{sen}\ 90^\circ = 3 \cdot V_C \frac{V_C}{X_C} = 3 \cdot V_C^2 \cdot \omega \cdot C \qquad [8.85]$$

Igualando las dos ecuaciones anteriores se obtiene la capacidad C necesaria de cada condensador:

$$C = \frac{P \cdot (\text{tag}\ \varphi_1 - \text{tag}\ \varphi_2)}{3 \cdot V_C^2 \cdot \omega} \qquad [8.86]$$

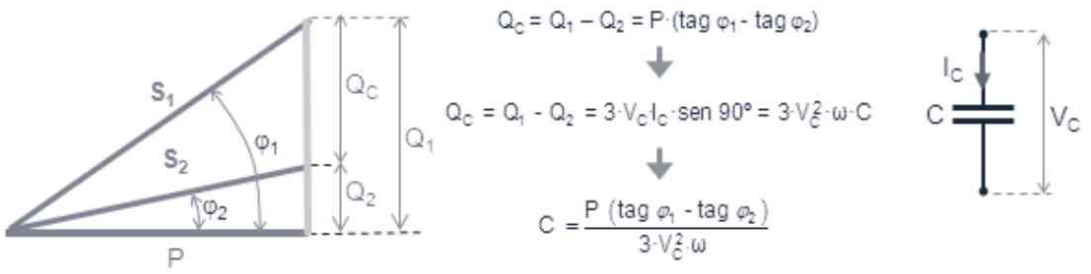


Figura 8.47. Corrección del fdp. Diagrama de potencias

a) Corrección con condensadores en triángulo, *figura 8.48.*

En este acoplamiento la tensión en bornes de cada condensador V_C es la tensión de línea V_L:

$$V_C = V_L \qquad [8.87]$$

Sustituyendo en la *fórmula [8.86]* se obtiene la capacidad de cada condensador:

$$C = \frac{P\ (\text{tag}\ \varphi_1 - \text{tag}\ \varphi_2)}{3 \cdot V_L^2 \cdot \omega} \qquad [8.88]$$

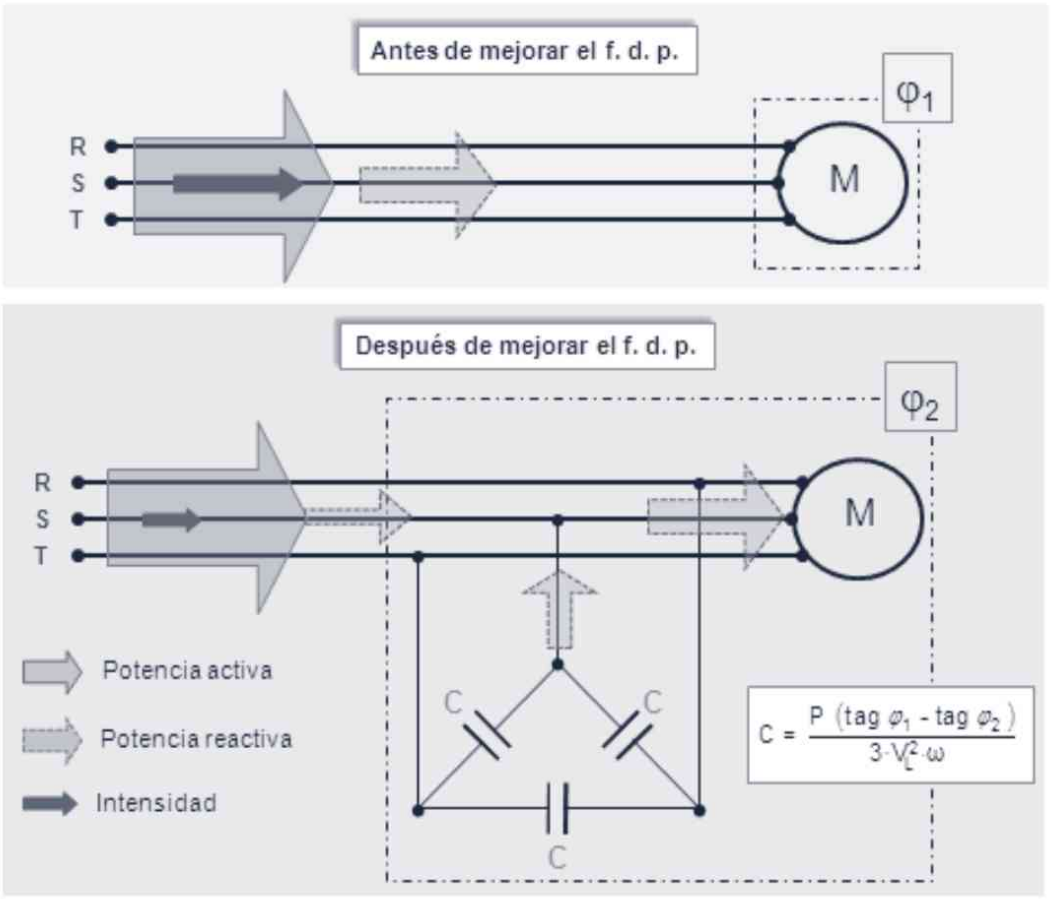


Figura 8.48. Corrección del fdp. Condensadores en triángulo

b) Corrección con condensadores en estrella, *figura 8.49.*

En este acoplamiento la tensión en bornes de cada condensador es la tensión de fase V_F:

$$V_C = V_F = V_L / \sqrt{3} \qquad [8.89]$$

Sustituyendo en la *fórmula [8.86]* se obtiene la capacidad que ha de tener cada condensador:

$$C = \frac{P\,(\text{tag}\,\varphi' - \text{tag}\,\varphi)}{V_L^2\ \omega} \qquad [8.90]$$

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

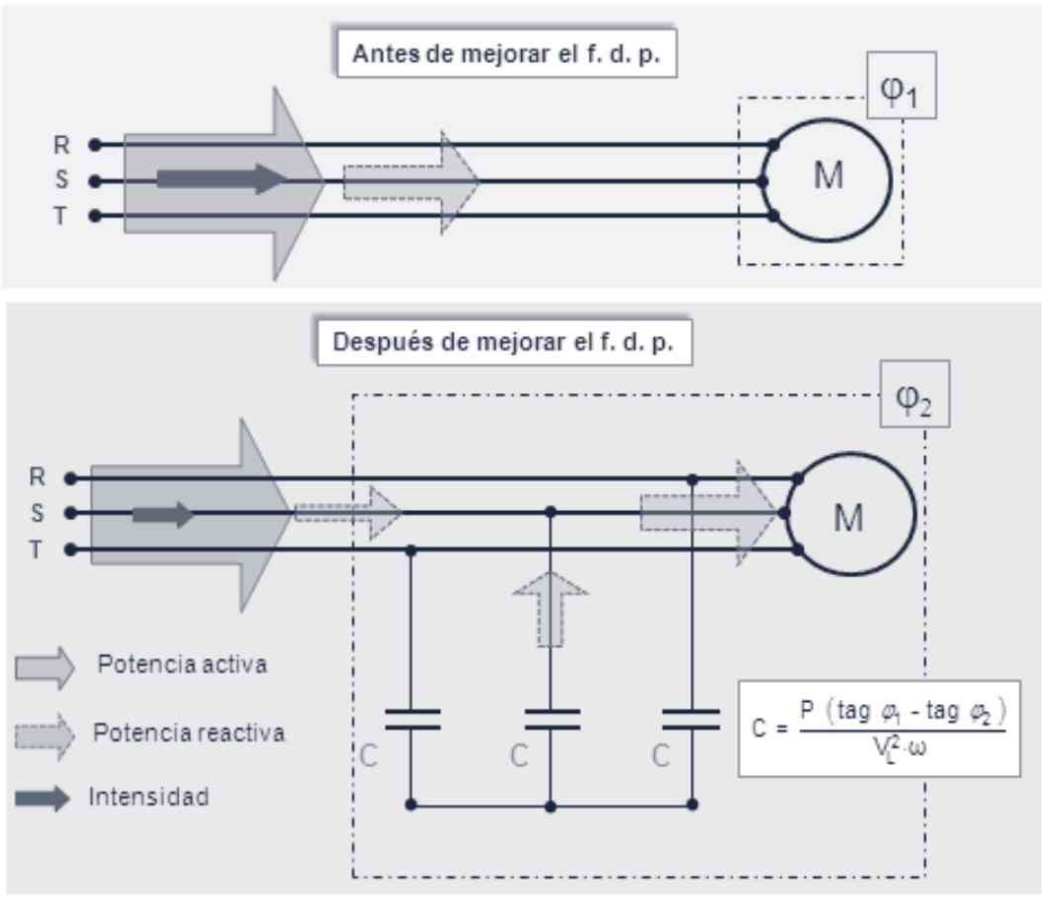


Figura 8.49. Corrección del fdp. Condensadores en estrella

Nótese que la capacidad de cada condensador en triángulo es 1/3 de la capacidad en estrella, pero la tensión en bornes de cada uno es $\sqrt{3}$ superior a la tensión en estrella.

En general, es más interesante hacer la corrección del factor de potencia mediante condensadores en triángulo, pues al ser la capacidad necesaria por condensador menor, el condensador es menos voluminoso y más barato.

8.22 VENTAJAS DEL SISTEMA TRIFÁSICO FRENTE AL SISTEMA MONOFÁSICO

El sistema trifásico se utiliza, casi exclusivamente, para la generación, transporte y distribución de la energía eléctrica, debido, principalmente, a las siguientes ventajas:

1. **Potencia constante.** Potencia instantánea constante, *apartado 8.12*, frente a la CA monofásica que tiene una potencia instantánea pulsatoria, *apartado 7.11.* Consecuencia de esta potencia es un campo magnético giratorio constante, por

lo que los motores trifásicos tienen mejor arranque, mejor rendimiento, menos vibraciones y menor tamaño que los motores monofásicos.

2. **Ahorro en la sección de los conductores.** Si se compara un sistema trifásico equilibrado de tres conductores, con uno monofásico, por tanto de dos conductores, para transportar una misma potencia P, a la misma distancia L, con la misma tensión V entre conductores y con igual pérdida de potencia P_P en ambos sistemas, se tiene:

   Para el sistema monofásico:

$$P = V \cdot I_m \cdot \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad P_P = 2 \cdot R_m \cdot I_m^2 = 2 \cdot \frac{\rho \cdot L}{S_m} \cdot \frac{P^2}{V^2 \cdot \cos^2\varphi} \qquad [8.91]$$

   Para el sistema trifásico con tres conductores (como se hace en AT)

$$P = \sqrt{3} \cdot V \cdot I_t \cdot \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad P_P = 3 \cdot R_t \cdot I_t^2 = 3 \cdot \frac{\rho \cdot L}{S_t} \cdot \frac{P^2}{3 \cdot V^2 \cdot \cos^2\varphi} \qquad [8.92]$$

   Dividiendo las dos ecuaciones anteriores y despejando S_t se obtiene:

$$S_t = \frac{S_m}{2} \qquad [8.93]$$

   La sección S_t en trifásica es la mitad que en la sección S_m en monofásica.

   Teniendo en cuenta la relación entre las secciones anteriores, la relación entre los pesos G de conductor, si γ es el peso específico del mismo es:

$$\frac{G_t}{G_m} = \frac{\gamma \cdot \text{Volumen trifásicafásica}}{\gamma \cdot \text{Volumen monofásica}} = \frac{\gamma \cdot 3 \cdot S_t \cdot LL}{\gamma \cdot 2 \cdot S_m \cdot} = \frac{3 \cdot S_m}{2 \cdot S_T} = \frac{3}{4} \qquad [8.94]$$

$$G_t = 0{,}75 \cdot S_m \qquad [8.95]$$

   Es decir, el transporte en trifásica supone un 75% de peso de conductor que en monofásica.

3. **Disponibilidad de dos tensiones.** Tensión simple V_F entre fase y neutro y tensión compuesta V_L entre dos fases.

8.23 RESUMEN DE CONCEPTOS Y FÓRMULAS DE ESTE CAPÍTULO

En las *figuras 8.50* y *8.51* se tienen diferentes esquemas para una misma conexión estrella y para una misma conexión triángulo, y en las *tablas 8.2, 8.3* y *8.4,* se tiene un resumen del capítulo.

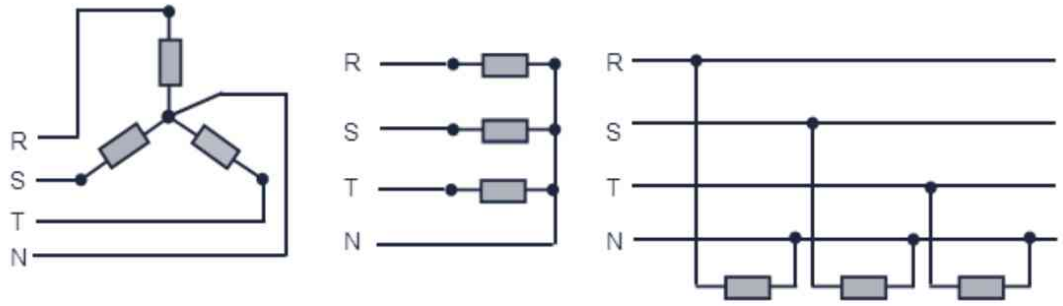


Figura 8.50. Diferentes esquemas para la conexión estrella Y.

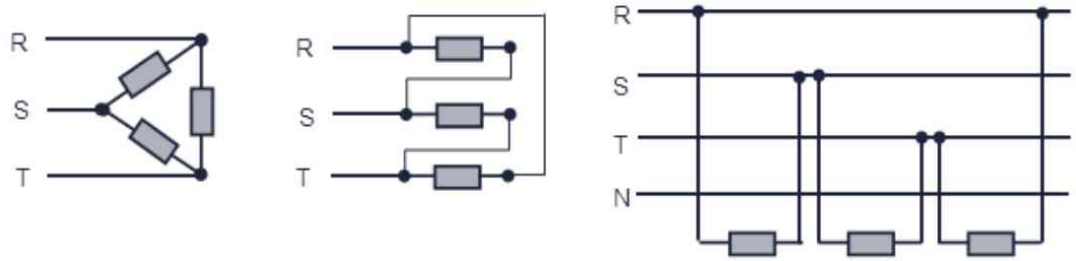
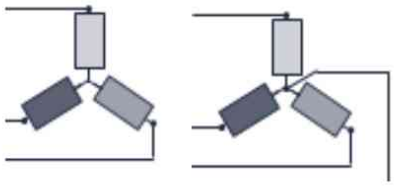
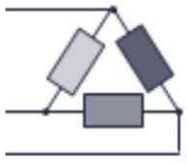


Figura 8.51. Diferentes esquemas para la conexión triángulo Δ

Cargas en CA trifásica		
Carga	**Estrella Y**	**Triángulo Δ**
	$V_{RS} = V_{L\,\angle 0^o}$; $\overline{V}_{ST} = V_{L\,\angle -120^o}$; $\overline{V}_{TR} = V_{L\,\angle 120^o}$	
Desequilibrada		

<table>
<tr><td rowspan="4"></td><td>Intensidades de fase:</td><td>Intensidades de fase:</td></tr>
<tr><td>$\overline{I}_{RO} = \dfrac{\overline{V}_{RO}}{\overline{Z}_{RO}}$
$\overline{I}_{SO} = \dfrac{\overline{V}_{SO}}{\overline{Z}_{SO}}$
$\overline{I}_{TO} = \dfrac{\overline{V}_{TO}}{\overline{Z}_{TO}}$</td><td>$\overline{I}_{RS} = \dfrac{\overline{V}_{RS}}{\overline{Z}_{RS}}$
$\overline{I}_{ST} = \dfrac{\overline{V}_{ST}}{\overline{Z}_{SR}}$
$\overline{I}_{TR} = \dfrac{\overline{V}_{TR}}{\overline{Z}_{TR}}$</td></tr>
<tr><td>Intensidades de línea:</td><td>Intensidades de línea:</td></tr>
<tr><td>$\overline{I}_R = \overline{I}_{RO}$
$\overline{I}_S = \overline{I}_{SO}$
$\overline{I}_T = \overline{I}_{TO}$

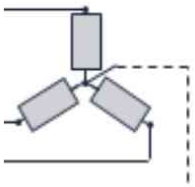
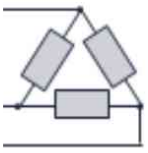
No N $\Rightarrow \overline{I}_R + \overline{I}_S + \overline{I}_S = 0$
Si N $\Rightarrow \overline{I}_R + \overline{I}_S + \overline{I}_S = \overline{I}_N$</td><td>$\overline{I}_R = \overline{I}_{RS} - \overline{I}_{TR}$
$\overline{I}_S = \overline{I}_{ST} - \overline{I}_{RS}$
$\overline{I}_T = \overline{I}_{TR} - \overline{I}_{ST}$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Equilibrada</td><td>  </td><td>  </td></tr>
<tr><td>Intensidades de fase:</td><td>Intensidades de fase:</td></tr>
<tr><td>$I_{RN} = I_{SN} = I_{TN} = I_F = \dfrac{V_F}{Z} = \dfrac{V_L}{\sqrt{3}\cdot Z}$</td><td>$I_{RS} = I_{ST} = I_{TR} = I_F = \dfrac{V_F}{Z} = \dfrac{V_L}{Z}$</td></tr>
<tr><td>Intensidades de línea:</td><td>Intensidades de línea:</td></tr>
<tr><td>$I_R = I_S = I_T = I_L = I_F$</td><td>$I_R = I_S = I_T = I_L = \sqrt{3}\cdot I_F$</td></tr>
<tr><td colspan="3">En un sistema en estrella Y, si existe neutro $\Rightarrow O = N$</td></tr>
</table>

Tabla 8.2. Cargas equilibradas y desequilibradas en un sistema trifásico

Potencias en CA trifásica			
	Carga	**Estrella Y**	**Triángulo Δ**
Potencia aparente **S**	Desequilibrada	$\overline{S}_R = \overline{V}_{RO} \cdot \overline{I}^*_R$ $\overline{S}_S = \overline{V}_{SO} \cdot \overline{I}^*_S$ $\overline{S}_T = \overline{V}_{TO} \cdot \overline{I}^*_T$	$\overline{S}_R = \overline{V}_{RS} \cdot \overline{I}^*_{RS}$ $\overline{S}_S = \overline{V}_{ST} \cdot \overline{I}^*_{ST}$ $\overline{S}_T = \overline{V}_{TR} \cdot \overline{I}^*_{TR}$
		$\overline{S} = \overline{S}_R + \overline{S}_S + \overline{S}_T = P + j \cdot Q \Rightarrow S = \sqrt{P^2 + Q^2}$	
	Equilibrada	$\overline{S} = 3 \cdot \overline{V}_F \cdot \overline{I}^*_F \Rightarrow S = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L$	
Potencia activa **P**	Desequilibrada	$P_R = V_{RO} \cdot I_R \cdot \cos\left(\overline{V}_{RO}, \overline{I}_R\right)$ $P_S = V_{SO} \cdot I_S \cdot \cos\left(\overline{V}_{SO}, \overline{I}_S\right)$ $P_T = V_{TO} \cdot I_T \cdot \cos\left(\overline{V}_{TO}, \overline{I}_T\right)$	$P_R = V_{RS} \cdot I_{RS} \cdot \cos\left(\overline{V}_{RS}, \overline{I}_{RS}\right)$ $P_S = V_{ST} \cdot I_{ST} \cdot \cos\left(\overline{V}_{ST}, \overline{I}_{ST}\right)$ $P_T = V_{TR} \cdot I_{TR} \cdot \cos\left(\overline{V}_{TR}, \overline{I}_{TR}\right)$
		$P = P_R + P_S + P_T$	
	Equilibrada	$P = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi$	
Potencia reactiva **Q**	Desequilibrada	$Q_R = V_{RO} \cdot I_R \cdot \text{sen}\left(\overline{V}_{RO}, \overline{I}_R\right)$ $Q_S = V_{SO} \cdot I_S \cdot \text{sen}\left(\overline{V}_{SO}, \overline{I}_S\right)$ $Q_T = V_{TO} \cdot I_T \cdot \text{sen}\left(\overline{V}_{TO}, \overline{I}_T\right)$	$Q_R = V_{RS} \cdot I_{RS} \cdot \text{sen}\left(\overline{V}_{RS}, \overline{I}_{RS}\right)$ $Q_S = V_{ST} \cdot I_{ST} \cdot \text{sen}\left(\overline{V}_{ST}, \overline{I}_{ST}\right)$ $Q_T = V_{TR} \cdot I_{TR} \cdot \text{sen}\left(\overline{V}_{TR}, \overline{I}_{TR}\right)$
		$Q = Q_R + Q_S + Q_T$	
	Equilibrada	$Q = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \text{sen}\,\varphi$	
Factor de potencia **fdp**	Desequilibrada	$\text{fdp} = \frac{P}{S}$	
	Equilibrada	$\text{fdp} = \frac{P}{S} = \cos\varphi$	
En un sistema en *estrella Y,* si existe neutro $\Rightarrow O = N$			

Tabla 8.3. Potencias en un sistema trifásico

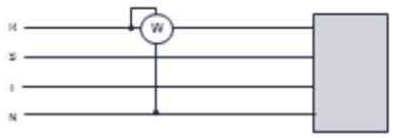
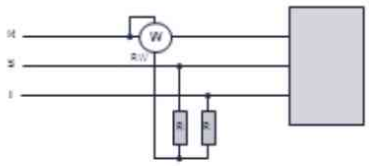
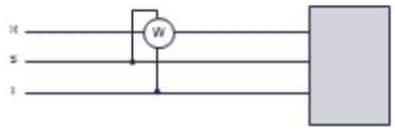
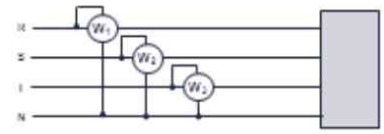
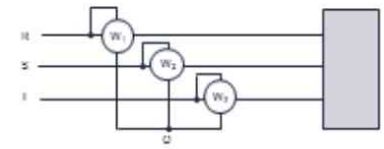
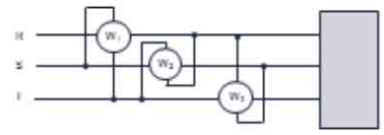
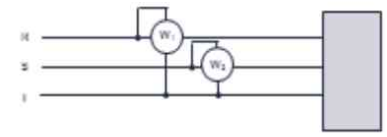
Medida de potencias en CA trifásica			
Sistema		**Esquema**	**Potencia**
Equilibrado	RSTN		$P = 3 \cdot W$
	RST		$P = 3 \cdot W$
	RST		$Q = \sqrt{3} \cdot W$
Desequilibrado	RSTN		$P = W_1 + W_2 + W_3$
	RST		$P = W_1 + W_2 + W_3$
	RST		$Q = \frac{1}{\sqrt{3}}(W_1 + W_2 + W_3)$
	RST		$P = W_1 + W_2$ **Sólo equilibrado:** $Q = \sqrt{3} \cdot (W_1 - W_2)$
Los sistemas equilibrados son casos particulares de los sistemas desequilibrados			

Tabla 8.4. Medida de potencias en un sistema trifásico

8.24 EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Ejercicio 8.24.1

Tres impedancias iguales, $\boldsymbol{Z} = 50_{\angle\ 37^o}$, constituidas por una resistencia y una reactancia, se conectan en estrella a una línea trifásica de 400/230 V y frecuencia 50 Hz. Se pide:

a) Corriente de fase y de línea.

b) Potencia activa, reactiva y aparente del conjunto.

c) Resistencia y reactancia de la impedancia. Corroborar los valores de la potencia activa y reactiva a partir de los valores de la resistencia y de la reactancia obtenidos.

d) Si la línea tiene secuencia directa *RST*, hacer el diagrama fasorial de tensiones e intensidades tomando como tensión de referencia $\boldsymbol{V_{RS}} = 400_{\angle\ 0^o}$.

e) Potencia instantánea.

Solución:

a) Corriente de fase I_F y de línea I_L, *figura 8.52*. Como las tres impedancias son iguales el sistema es equilibrado, por la *fórmula [8.16]*:

$$I_F = \frac{V_F}{Z} = \frac{230}{50} = 4{,}6\ A$$

$$I_F = I_L = I_R = I_S = I_T = I_{RN} = I_{SN} = I_{TN} = 4{,}6\ A$$

Como el sistema es equilibrado por el neutro no circula corriente. Obsérvese en el diagrama fasorial, *figura 8.50*, que los fasores intensidad son iguales desfasados 120º, luego, con resultante nula.

b) Potencia activa *P*, reactiva *Q* y aparente *S* del conjunto. Por las *fórmulas [8.44]*, *[8.45]* y *[8.48]*:

$$P = \sqrt{3}\cdot V_L\cdot I_L\cdot \cos\varphi = \sqrt{3}\cdot 400\cdot 4.6\cdot \cos 37^o = 2.540\ W$$

$$Q = \sqrt{3}\cdot V_L\cdot I_L\cdot \cos\varphi = \sqrt{3}\cdot 400\cdot 4.6\cdot \text{sen } 37^o = 1.904\ VAr$$

$$S = \sqrt{3}\cdot V_L\cdot I_L = \sqrt{3}\cdot 400\cdot 4.6 = 3.183\ VA$$

c) Resistencia y reactancia de la impedancia. Corroborar los valores de la potencia activa y reactiva a partir de los valores de la resistencia y de la reactancia obtenidos. A partir de la *fórmula [7.136]:*

$$R = Z \cdot \cos \varphi = 50 \cdot \cos 37^\circ = 40\ \Omega$$

$$X_L = Z \cdot \operatorname{sen} \varphi = 50 \cdot \operatorname{sen} 37^\circ = 30\ \Omega$$

Una forma de calcular las potencias P y Q teniendo en cuenta la resistencia R y la reactancia X_L es por las fórmulas *[7.145], [7.146] y [8.35]:*

$$P = 3 \cdot P_F = 3 \cdot I_F^2 \cdot R = 3 \cdot 4{,}6^2 \cdot 40 = 2.540\ \text{W}$$

$$Q = 3 \cdot Q_F = 3 \cdot I_F^2 \cdot X_L = 3 \cdot 4{,}6^2 \cdot 30 = 1.904\ \text{W}$$

d) Si la línea tiene secuencia directa *RST*, hacer el diagrama fasorial de tensiones e intensidades tomando como tensión de referencia, $\boldsymbol{V_{RS}} = 400_{\angle 0^\circ}$.

El esquema fasorial correspondiente es el de la *figura 8.52.* Para su construcción, a partir del fasor $\boldsymbol{V_{RS}}$ se trazan los fasores $\boldsymbol{V_{ST}}$ atrasado 120º y $\boldsymbol{V_{TR}}$ adelantado 120º (ver, también, *figura 8.26*). A continuación, uniendo el centro *N* del triángulo resultante con los finales de los fasores anteriores se obtienen $\boldsymbol{V_{RN}}$, $\boldsymbol{V_{RS}}$ y $\boldsymbol{V_{RT}}$. Las corrientes $\boldsymbol{I_{RN}}$, $\boldsymbol{I_{SN}}$ e $\boldsymbol{I_{TN}}$ están retrasadas un ángulo de 37º de los fasores anteriores.

e) Potencia instantánea. Se ha demostrado en el *apartado 8.12* que la potencia instantánea *p* tiene un valor constante, que coincide con la potencia activa *P* ya calculada, que también se puede obtener por la *fórmula [8.42]:*

$$p(t) = 3 \cdot V_F \cdot I_F \cdot \cos\varphi = 3.230 \cdot 4{,}6 \cdot \cos 37^\circ = 2.540\ \text{W}$$

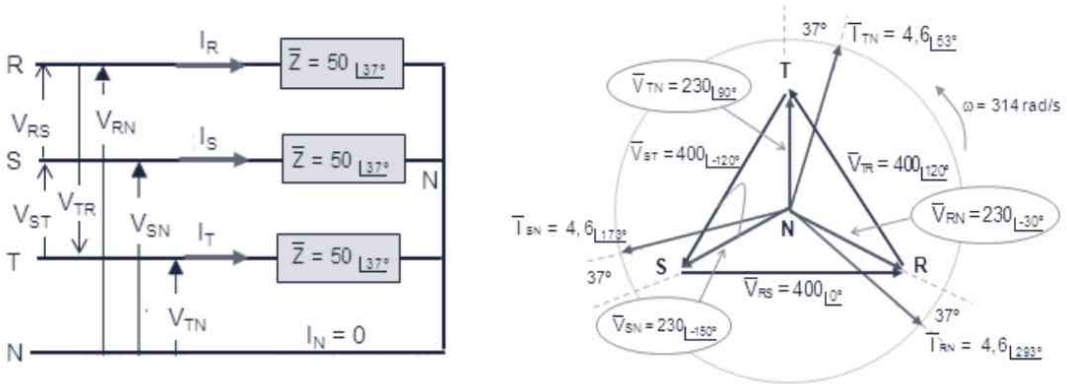


Figura 8.52. Solución del ejercicio 24.1

Ejercicio 8.24.2

Tres impedancias iguales, $\boldsymbol{Z} = 160_{\angle\ 10^o}$, se conectan en triángulo a una línea trifásica de 400/230 V y frecuencia 50 Hz. Se pide:

a) Corriente de fase y de línea.

b) Potencia activa, reactiva y aparente del conjunto.

c) Si la línea tiene secuencia directa *RST*, hacer el diagrama fasorial de tensiones e intensidades tomando como tensión de referencia $\boldsymbol{V_{RS}} = 400_{\angle\ 0^o}$.

Solución:

a) Corriente de fase I_F y de línea I_L, *figura 8.53*. Como las tres impedancias son iguales el sistema es equilibrado, por la *fórmula [8.22]:*

$$I_F = \frac{V_F}{Z} = \frac{V_L}{Z} = \frac{400}{160} = 2{,}5\ A \quad ; \quad I_{RS} = I_{ST} = I_{TR} = I_F = 2{,}5\ A$$

$$I_L = \sqrt{3}\cdot I_F = \sqrt{3}\cdot 2{,}5 = 4{,}3\ A \quad ; \quad I_R = I_S = I_T = I_L = 4{,}3\ A$$

b) Potencia activa *P*, reactiva *Q* y aparente *S* del conjunto. Por las *fórmulas [8.50], [8.52]* y *[8.53]:*

$$P = \sqrt{3}\cdot V_L\cdot I_L\cdot \cos\varphi = \sqrt{3}\cdot 400\cdot 4{,}3\cdot \cos 10^o = 2.934\ W$$

$$Q = \sqrt{3}\cdot V_L\cdot I_L\cdot \cos\varphi = \sqrt{3}\cdot 400\cdot 4{,}3\cdot \text{sen } 10^o = 517\ VAr$$

$$S = \sqrt{3}\cdot V_L\cdot I_L = \sqrt{3}\cdot 400\cdot 4{,}3 = 2.979\ VA$$

c) Si la línea tiene secuencia directa *RST*, hacer el diagrama fasorial de tensiones e intensidades tomando como tensión de referencia $\boldsymbol{V_{RS}} = 400_{\angle\ 0^o}$.

El esquema fasorial aproximado (se ha exagerado el ángulo de 10º para una mejor visión del gráfico) es el de la *figura 8.53.* Para su construcción, a partir del fasor $\boldsymbol{V_{RS}}$ se trazan los fasores $\boldsymbol{V_{ST}}$ atrasado 120º y $\boldsymbol{V_{TR}}$ adelantado 120º. A continuación, se trazan las intensidades de fase $\boldsymbol{I_{RS}}$, $\boldsymbol{I_{ST}}$ e $\boldsymbol{I_{TR}}$, atrasadas 10º de cada tensión de fase correspondiente. Las corrientes de línea $\boldsymbol{I_R}$, $\boldsymbol{I_S}$ e $\boldsymbol{I_T}$ se obtienen por la suma fasorial de las intensidades de fase correspondientes. Se halla, por ejemplo, $\boldsymbol{I_R} = \boldsymbol{I_{RS}} - \boldsymbol{I_{TR}}$. A continuación, respecto de $\boldsymbol{I_R}$ se tiene $\boldsymbol{I_S}$ atrasada 120º (o, lo que es lo mismo, adelantada 240º) e $\boldsymbol{I_T}$ adelantada 120º.

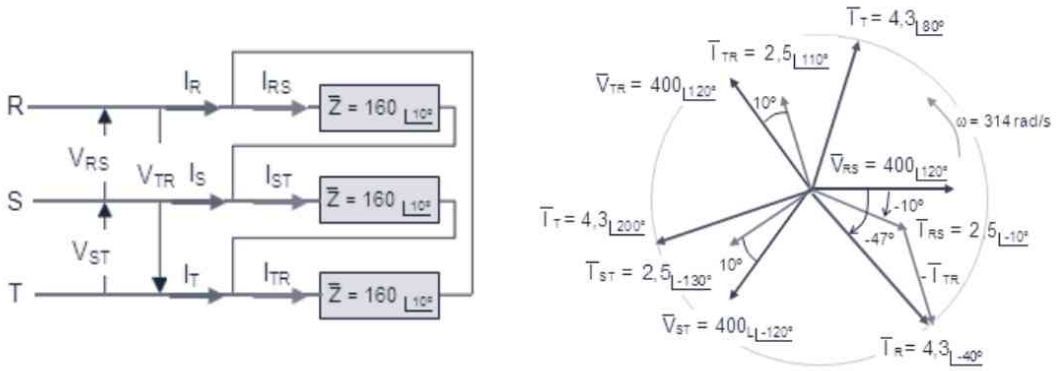


Figura 8.53. Solución del ejercicio 24.2

Ejercicio 8.24.3

En el sistema trifásico de la *figura 8.54*, se pide:

a) Corriente de fase, de línea y del neutro.

b) Diagrama fasorial de tensiones e intensidades tomando como tensión de referencia $\boldsymbol{V_{RS}} = 400_{\angle 0°}$.

c) Potencia activa, reactiva y aparente del conjunto. Factor de potencia de la carga.

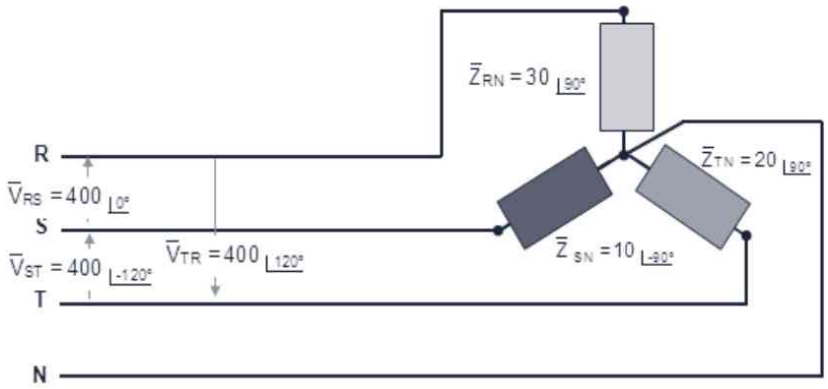


Figura 8.54. Ejercicio 8.24.3

Solución:

a y b) Corriente de fase, de línea y del neutro. Como se trata de un sistema trifásico equilibrado en tensiones, de la *fórmula [8.8]*:

$$V_F = \frac{V_L}{\sqrt{3}} = \frac{400}{\sqrt{3}} = 230 \text{ V}$$

A partir de las tensiones compuestas, $\boldsymbol{V_{RS}}$, $\boldsymbol{V_{ST}}$, $\boldsymbol{V_{TR}}$, se construye el diagrama fasorial de las tensiones simples, *figura 8.56* (ver, también, *figura 8.26*), obteniéndose, para las tensiones simples, $\boldsymbol{V_{RN}} = V_{F\angle -30^o}$, $\boldsymbol{V_{SN}} = V_{F\angle -150^o}$, $\boldsymbol{V_{TN}} = V_{F\angle 90^o}$. Las intensidades de fase, por las *fórmulas [8.23]*, son:

$$\overline{I}_{RN} = \overline{I}_R = \frac{\overline{V}_{RN}}{\overline{Z}_{RN}} = \frac{230_{\lfloor -30^o}}{30_{\lfloor 90^o}} = 7{,}6_{\lfloor -120^o} \text{ A}$$

$$\overline{I}_{SN} = \overline{I}_S = \frac{\overline{V}_{RN}}{\overline{Z}_{SN}} = \frac{230_{\lfloor -150^o}}{10_{\lfloor -90^o}} = 23_{\lfloor -60^o} \text{ A}$$

$$\overline{I}_{TN} = \overline{I}_T = \frac{\overline{V}_{TN}}{\overline{Z}_{TN}} = \frac{230_{\lfloor 90^o}}{20_{\lfloor -90}} = 11{,}5_{\lfloor 180^o} \text{ A}$$

Aplicando la 1.ª Ley de Kirchhoff en el punto común de las tres impedancias, punto neutro, se obtiene la intensidad que ha de circular por el conductor neutro *N, corriente de retorno (figura 8.55)*:

$$\overline{I}_N = \overline{I}_R + \overline{I}_S + \overline{I}_T = 7{,}6_{\lfloor -120^o} + 23_{\lfloor -60^o} + 11{,}5_{\lfloor 180^o} = 26{,}8_{\lfloor 261^o} = 26{,}8_{\lfloor -99^o} \text{ A}$$

Como el circuito está muy desequilibrado, nótese lo elevada que es la intensidad por el neutro, 26,8 A, mayor que la intensidad por cualquiera de las fases.

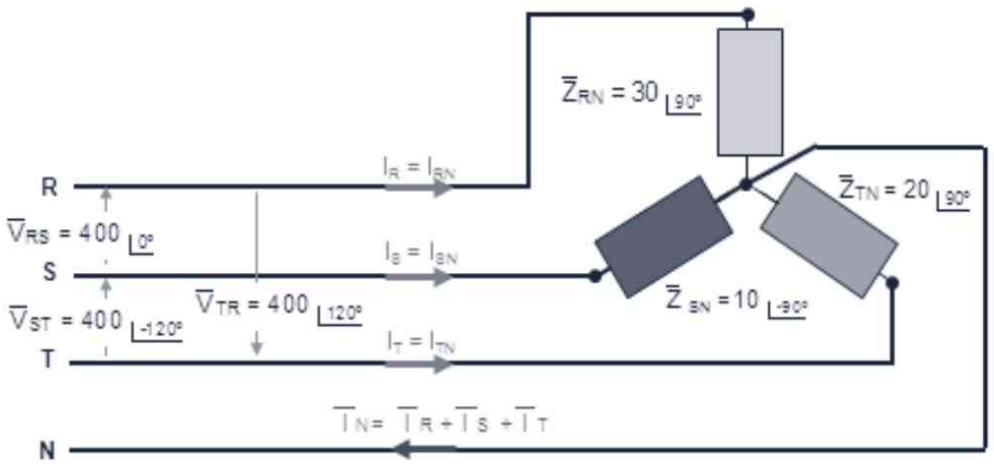


Figura 8.55. Solución del ejercicio 8.24.3

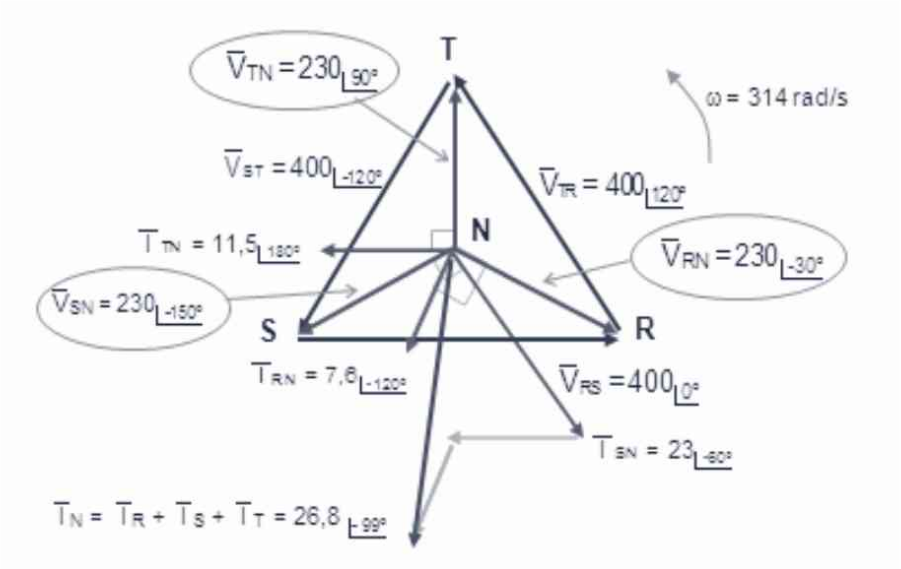


Figura 8.56. Solución del ejercicio 8.24.3

c) Potencia activa, reactiva y aparente del conjunto. Como es un sistema desequilibrado, la potencia de la carga se ha de obtener por la suma de las potencias de cada fase. De la *tabla 8.3*, para un acoplamiento en estrella con neutro, se tiene:

Para la potencia activa *P*:

$$P_R = V_{RN} \cdot I_{RN} \cdot \cos\left(\overline{V}_{RN}, \overline{I}_{RN}\right) = 230 \cdot 7{,}6 \cdot \cos 90^\circ = 0 \text{ W}$$

$$P_S = V_{SN} \cdot I_{SN} \cdot \cos\left(\overline{V}_{SN}, \overline{I}_{SN}\right) = 230 \cdot 23 \cdot \cos(-90^\circ) = 0 \text{ W}$$

$$P_T = V_{TN} \cdot I_{TN} \cdot \cos\left(\overline{V}_{TN}, \overline{I}_{TN}\right) = 230 \cdot 11{,}5 \cdot \cos(-90^\circ) = 0 \text{ W}$$

$$P = P_R + P_S + P_T = 0 \text{ W}$$

Este resultado se esperaba al no ser ninguna de las impedancias de característica resistiva ($-90^\circ < \varphi < 90^\circ$)

Para la potencia reactiva *Q*:

$$Q_R = V_{RN} \cdot I_{RN} \cdot \text{sen}\left(\overline{V}_{RN}, \overline{I}_{RN}\right) = 230 \cdot 7{,}6 \cdot \text{sen } 90^\circ = 1.748 \text{ VAr}$$

$$Q_S = V_{SN} \cdot I_{SN} \cdot \text{sen}\left(\overline{V}_{SN}, \overline{I}_{SN}\right) = 230 \cdot 23 \cdot \text{sen}\ (-90^\circ) = -5.290\ \text{VAr}$$

$$Q_T = V_{TN} \cdot I_{TN} \cdot \text{sen}\left(\overline{V}_{TN}, \overline{I}_{TN}\right) = 230 \cdot 11{,}5 \cdot \text{sen}(-90^\circ) = -2.645\ \text{VA}$$

$$Q = Q_R + Q_S + Q_T = 1.748 - 5.290 - 2.645 = -6.187\ \text{VAr} = 6.187\ \text{VA cap.}$$

Para la potencia aparente *S*:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{0^2 + 6.187^2} = 6.187\ \text{VA}$$

Factor de potencia:

$$\text{fdp} = \frac{P}{S} = \frac{0}{6.187} = 0$$

Como era de esperar, pues el circuito está constituido sólo por elementos inductivos y capacitivos, por tanto, no existe transformación de energía eléctrica (electrostática, electromagnética) en otra forma de energía, existe un trasiego de energía eléctrica (energía fluctuante) entre la red y las cargas.

Ejercicio 8.24.4

En el sistema trifásico de la *figura 8.57* se pide:

a) Corrientes de línea.

b) Potencia activa, reactiva y aparente del conjunto. Factor de potencia de la carga.

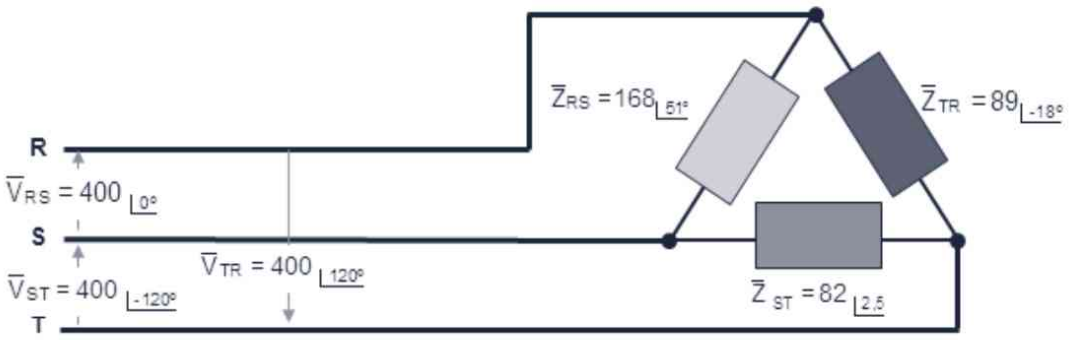


Figura 8.57. Ejercicio 8.24.4

Solución:

a) Corrientes de línea. Por la *fórmula [8.30]* se hallan las corrientes de fase, *figura 8.58*:

$$\overline{I}_{RS} = \frac{\overline{V}_{RS}}{\overline{Z}_{RS}} = \frac{400_{\lfloor 0^o}}{168_{\lfloor 51}} = 2{,}4_{\lfloor -51^o}\ \text{A}$$

$$\overline{I}_{ST} = \frac{\overline{V}_{ST}}{\overline{Z}_{ST}} = \frac{400_{\lfloor -120^o}}{82_{\lfloor 2{,}5}} = 4{,}9_{\lfloor -122{,}5}\ \text{A}$$

$$\overline{I}_{TR} = \frac{\overline{V}_{TR}}{\overline{Z}_{TR}} = \frac{400_{\lfloor 120^o}}{89_{\lfloor -18}} = 4{,}5_{\lfloor 138^o}\ \text{A}$$

Las intensidades de línea, $\boldsymbol{I_R}$, $\boldsymbol{I_S}$, e $\boldsymbol{I_T}$, se obtienen, *fórmulas [8.31]*, aplicando la 1.ª Ley de Kirchhoff a los nudos de la carga:

$$\overline{I}_R = \overline{I}_{RS} - \overline{I}_{TR} = 2{,}4_{\lfloor -51^o} - 4{,}5_{\lfloor 138^o} = 6{,}9_{\lfloor -45^o}\ \text{A}$$

$$\overline{I}_S = \overline{I}_{ST} - \overline{I}_{RS} = 4{,}9_{\lfloor -122{,}5} - 2{,}4_{\lfloor -51^o} = 4{,}7_{\lfloor 209^o}\ \text{A}$$

$$\overline{I}_T = \overline{I}_{TR} - \overline{I}_{ST} = 4{,}5_{\lfloor 138^o} - 4{,}9_{\lfloor -122{,}5} = 7{,}2_{\lfloor 96^o}\ \text{A}$$

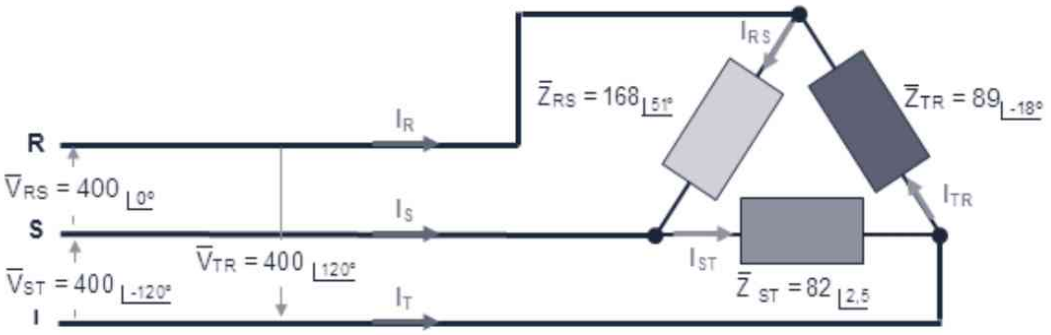


Figura 8.58. Solución del ejercicio 8.24.4

b) Potencia activa, reactiva y aparente del conjunto, por las fórmulas de la *tabla 8.3* para un acoplamiento en triángulo desequilibrado.

La potencia activa *P*:

$$P_{RS} = V_{RS} \cdot I_{RS} \cdot \cos\left(\overline{V}_{RS}, \overline{I}_{RS}\right) = 230 \cdot 2{,}4 \cdot \cos(51^\circ) = 347 \text{ W}$$

$$P_{ST} = V_{ST} \cdot I_{ST} \cdot \cos\left(\overline{V}_{ST}, \overline{I}_{ST}\right) = 230 \cdot 4{,}93 \cdot \cos 2{,}5^\circ = 1.133 \text{ W}$$

$$P_{TR} = V_{TR} \cdot I_{TR} \cdot \cos\left(\overline{V}_{TR}, \overline{I}_{TR}\right) = 230 \cdot 4{,}5 \cdot \cos(-18^\circ) = 984 \text{ W}$$

$$P = P_{RS} + P_{ST} + P_{TR} = 347 + 1.133 + 984 = 2.464 \text{ W}$$

La potencia reactiva *Q*:

$$Q_{RS} = V_{RS} \cdot I_{RS} \cdot \text{sen}\left(\overline{V}_{RS}, \overline{I}_{RS}\right) = 230 \cdot 2{,}4 \cdot \text{sen}(51^\circ) = 429 \text{ VAr}$$

$$Q_{ST} = V_{ST} \cdot I_{ST} \cdot \text{sen}\left(\overline{V}_{ST}, \overline{I}_{ST}\right) = 230 \cdot 4{,}93 \cdot \text{sen}\, 2{,}5^\circ = 49{,}5 \text{ VAr}$$

$$Q_{TR} = V_{TR} \cdot I_{TR} \cdot \text{sen}\left(\overline{V}_{TR}, \overline{I}_{TR}\right) = 230 \cdot 4{,}5 \cdot \text{sen}(-18^\circ) = -320 \text{ VAr}$$

$$Q = Q_{RS} + Q_{ST} + Q_{TR} = 429 + 49{,}5 - 320 = 158{,}5 \text{ VAr}$$

La potencia aparente *S*:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{2.464^2 + 185{,}5^2} = 2.471 \text{ VA}$$

Factor de potencia:

$$\text{fdp} = \frac{P}{S} = \frac{2.464}{2.471} = 0{,}97$$

Un fdp elevado, lo contrario del ejercicio anterior, a pesar de que las cargas tienen argumentos alejados del ángulo 0º, pero uno de esos ángulos es de signo negativo (potencia reactiva capacitiva), esto hace disminuir globalmente el efecto de los ángulos positivos (potencia reactiva inductiva).

Ejercicio 8.24.5

Las cargas en estrella de la *figura 8.59* se conectan a un sistema trifásico de secuencia directa, $\boldsymbol{V}_{RN} = 230_{\angle 0^o}$, $\boldsymbol{V}_{SN} = 230_{\angle -120^o}$ y $\boldsymbol{V}_{TN} = 230_{\angle 120^o}$. Se pide:

a) Corrientes de línea.

b) Tensiones en los extremos de cada impedancia.

c) Potencia activa, reactiva y aparente del conjunto. Factor de potencia de la carga.

d) Tensión de desplazamiento del neutro.

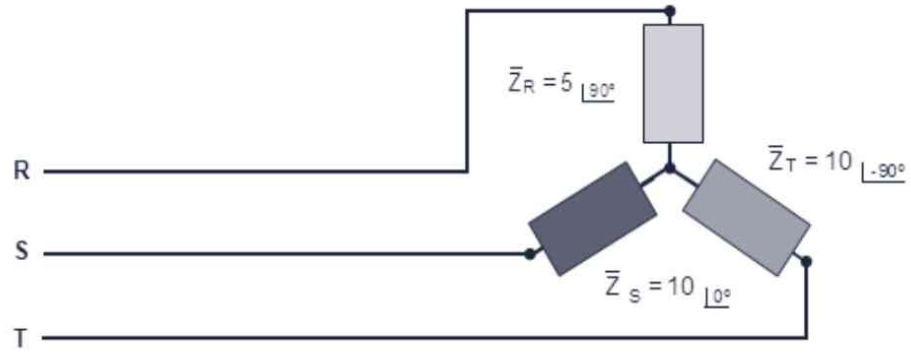


Figura 8.59. Ejercicio 8.24.5

Solución:

a) Corrientes de línea. Se sigue el proceso explicado en el *apartado 8.7.* Se eligen las corrientes de malla $\boldsymbol{I}_1$ e $\boldsymbol{I}_2$, *figura 8.60*. Como en el enunciado son datos las tensiones de fase, lo primero es calcular las tensiones de línea, con sus ángulos correspondientes, $\boldsymbol{V}_{RS}$ y $\boldsymbol{V}_{ST}$, *figura 8.61*, siendo, $V_L = \sqrt{3} \cdot VF = \sqrt{3} \cdot 230 = 400$ V, necesarias para hallar dichas corrientes.

$$\overline{V}_{RS} = \overline{V}_{RN} - \overline{V}_{SN} = 230_{\lfloor 0^o} - 230_{\lfloor -120^o} = 400_{\lfloor 30^o}$$

$$\overline{V}_{ST} = \overline{V}_{SN} - \overline{V}_{TN} = 230_{\lfloor -120^o} - 230_{\lfloor 120^o} = 400_{\lfloor -90^o}$$

Se establecen las ecuaciones en las mallas *ROS* y *SOT:*

$$\overline{V}_{RS} = \overline{I}_1 \cdot \left(\overline{Z}_{RO} + \overline{Z}_{SO}\right) - \overline{I}_2 \cdot \overline{Z}_{SO} \quad \Rightarrow \quad 400_{\lfloor 30^o} = \overline{I}_1 \cdot \left(5_{\lfloor 90^o} + 10_{\lfloor 0^o}\right) - \overline{I}_2 \cdot 10_{\lfloor 0^o}$$

$$\overline{V}_{ST} = \overline{I}_2 \cdot \left(\overline{Z}_{SO} + \overline{Z}_{TO}\right) - \overline{I}_1 \cdot \overline{Z}_{SO} \quad \Rightarrow \quad 400_{\lfloor -90^o} = \overline{I}_2 \cdot \left(10_{\lfloor 0^o} + 10_{\lfloor -90^o}\right) - \overline{I}_1 \cdot 10_{\lfloor 0^o}$$

Operando y ordenando:

$$400_{\lfloor 30^\circ} = \overline{I}_1 \cdot 11{,}2_{\lfloor 26{,}7^\circ} - \overline{I}_2 \cdot 10_{\lfloor 0^\circ}$$

$$400_{\lfloor -90^\circ} = -\overline{I}_1 \cdot 10_{\lfloor 0^\circ} + \overline{I}_2 \cdot 14{,}1_{\lfloor -45^\circ}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior, se obtiene:

$$\overline{I}_1 = 109_{\lfloor 0^\circ} \quad ; \quad \overline{I}_1 = 82_{\lfloor 25^\circ}$$

Las intensidades de línea son:

$$\overline{I}_R = \overline{I}_1 = 109_{\lfloor 0^\circ} \text{ A}$$

$$\overline{I}_S = \overline{I}_2 - \overline{I}_1 = 82_{\lfloor 25^\circ} - 109_{\lfloor 0^\circ} = 49_{\lfloor 135^\circ} \text{ A}$$

$$\overline{I}_T = -\overline{I}_2 = -82_{\lfloor 25^\circ} = 82_{\lfloor -155^\circ} \text{ A}$$

b) Tensiones en los extremos de cada impedancia.

$$\overline{V}_{RO} = \overline{I}_R \cdot \overline{Z}_{RO} = 109_{\lfloor 0^\circ} \cdot 5_{\lfloor 90^\circ} = 545_{\lfloor 90^\circ} \text{ V}$$

$$\overline{V}_{SO} = \overline{I}_S \cdot \overline{Z}_{SO} = 49_{\lfloor 135^\circ} \cdot 10_{\lfloor 0^\circ} = 490_{\lfloor 135^\circ} \text{ V}$$

$$\overline{V}_{TO} = \overline{I}_T \cdot \overline{Z}_{TO} = 82_{\lfloor -155^\circ} \cdot 10_{\lfloor -90^\circ} = 820_{\lfloor -245^\circ} \text{ V}$$

Obsérvese que las tensiones en los extremos de cada una de las impedancias son diferentes entre sí y diferentes a las tensiones que tendrían si estuviese el punto *O* de las cargas conectado al conductor neutro *N* del sistema trifásico, siendo en este caso la tensión para todas las impedancias de 230 V. De aquí la importancia de que en un sistema trifásico con neutro distribuido *RSTN* no se interrumpa la conexión del neutro.

c) Potencia activa, reactiva y aparente del conjunto. Factor de potencia de la carga. Como es un sistema desequilibrado, la potencia de la carga se ha de obtener por

la suma de las potencias de cada fase. De la *tabla 8.3*, para un acoplamiento en estrella sin neutro, recordando que el desfase entre tensión e intensidad en una impedancia está dado por el argumento de dicha impedancia, se tiene:

La potencia activa *P*:

$$P_R = V_{RO} \cdot I_R \cdot \cos\left(\overline{V}_{RO}, \overline{I}_R\right) = 545 \cdot 109 \cdot \cos 90^\circ = 0 \text{ W}$$

$$P_S = V_{SO} \cdot I_S \cdot \cos\left(\overline{V}_{SO}, \overline{I}_S\right) = 490 \cdot 49 \cdot \cos 0^\circ = 24.010 \text{ W}$$

$$P_T = V_{TO} \cdot I_T \cdot \cos\left(\overline{V}_{TO}, \overline{I}_T\right) = 820 \cdot 82 \cdot \cos(-90^\circ) = 0 \text{ W}$$

$$P = P_R + P_S + P_T = 24.010 \text{ W}$$

La potencia reactiva *Q*:

$$Q_R = V_{RO} \cdot I_R \cdot \text{sen}\left(\overline{V}_{RO}, \overline{I}_R\right) = 545 \cdot 109 \cdot \text{sen } 90^\circ = 59.405 \text{ VAr}$$

$$Q_S = V_{SO} \cdot I_S \cdot \text{sen}\left(\overline{V}_{SO}, \overline{I}_S\right) = 490 \cdot 49 \cdot \text{sen } 0^\circ = 0 \text{ VAr}$$

$$Q_T = V_{TO} \cdot I_T \cdot \text{sen}\left(\overline{V}_{TO}, \overline{I}_T\right) = 820 \cdot 82 \cdot \text{sen } (-90^\circ) = -67.240 \text{ W}$$

$$Q = Q_{RS} + Q_{ST} + Q_{TR} = 59.405 + 0 - 67.240 = -7.835 \text{ VAr} = 7.835 \text{ VAr cap.}$$

La potencia aparente *S*:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{24.010^2 + 7.835^2} = 25.256 \text{ VA}$$

Factor de potencia:

$$\text{fdp} = \frac{P}{S} = \frac{24.010}{25.256} = 0{,}95$$

Es evidente que las potencias de cada fase también se pueden calcular de la siguiente manera:

$$P_R = I_R^2 \cdot R_R = 109^2 \cdot 0 = 0\ W; \quad P_S = I_S^2 \cdot R_S = 49^2 \cdot 10 = 24.010\ W; \quad P_T = I_T^2 \cdot R_T = 82^2 \cdot 0 = 0\ W$$

$$Q_R = I_R^2 \cdot X_R = 109^2 \cdot 5 = 59.405\ VAr; \quad Q_S = I_S^2 \cdot X_S = 49^2 \cdot 0 = 0\ VAr; \quad Q_T = I_T^2 \cdot X_T = 82^2 \cdot (-10) = -67.240\ VAr$$

d) Tensión de desplazamiento del neutro, *fórmula [8.29],* en este ejercicio, $\boldsymbol{V}_{TN} = 230_{\angle 120^o}$, *figura 8.61.*

$$\overline{V}_{ON} = \overline{V}_{TN} - \overline{V}_{TO} = \frac{V_L}{\sqrt{3}}\Big|_{120^o} - \overline{V}_{TO} = 230\Big|_{120^o} - 820\Big|_{-245^o} = 591\Big|_{-67^o}\ V$$

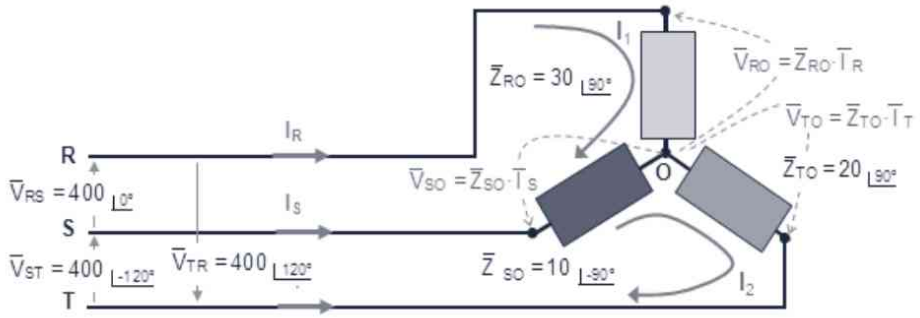


Figura 8.60. Solución del ejercicio 8.24.5

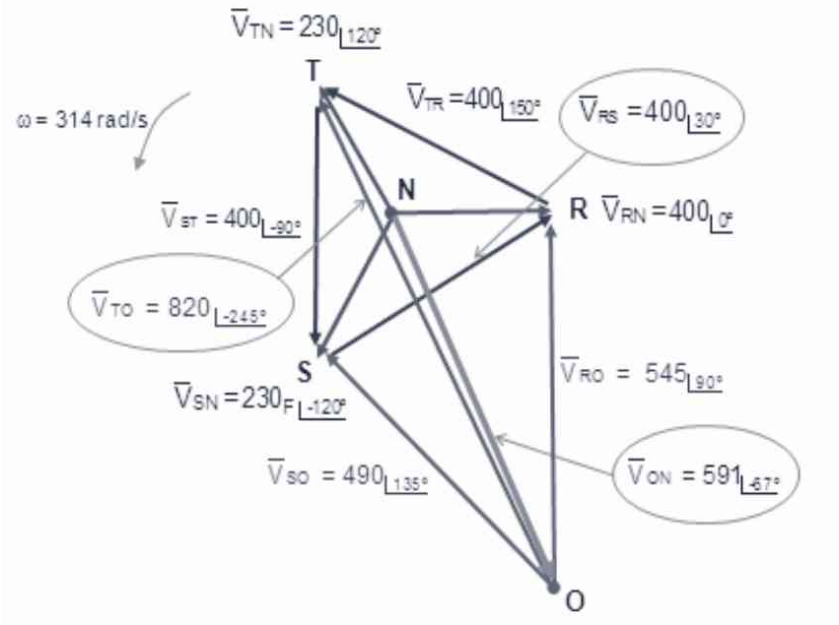


Figura 8.61. Solución del ejercicio 8.24.5. Diagrama fasorial

Ejercicio 8.24.6

La carga trifásica de la *figura 8.62 se* alimenta desde una red trifásica de 400/230 V. Las tres cargas son iguales, $\boldsymbol{Z} = 100_{50^\circ}\,\Omega$. Hallar:

a) Valor que ha de indicar el amperímetro.

b) Suma de las potencias marcadas por los vatímetros, $W_1 + W_2$.

c) Si se corta la fase *T,* valor que ha de indicar el amperímetro y el vatímetro W_1.

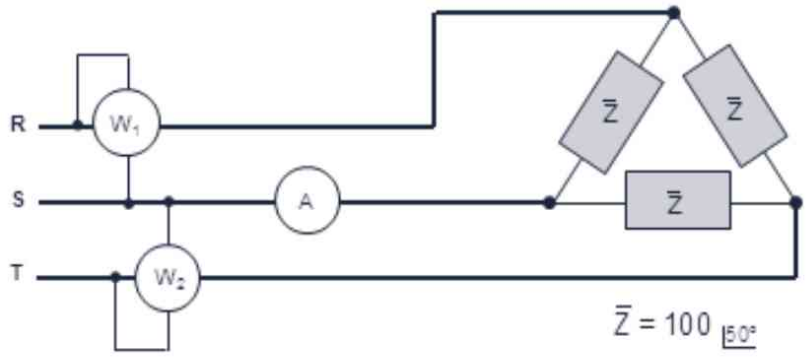


Figura 8.62. Ejercicio 8.24.6

Solución:

a) Valor que ha de indicar el amperímetro. Se trata de un sistema trifásico equilibrado, por la *fórmula [8.22]*:

$$V_F = V_L \quad \Rightarrow \quad I_F = \frac{V_F}{Z} = \frac{400}{100} = 4\ A \quad \Rightarrow \quad I_L = \sqrt{3}\cdot I_F = \sqrt{3}\cdot 4 = 6{,}9\ A$$

$$I_R = I_S = I_T = I_L = 6{,}9\ A \quad \Rightarrow \quad \text{El amperímetro indica } 6{,}9\ A$$

b) Suma de las potencias marcadas por los vatímetros, $W_1 + W_2$. Los vatímetros tienen la conexión Aron, *apartado 8.20,* la suma de las potencias indicadas corresponde a la potencia total de las cargas, *fórmula [8.50]:*

$$P = \sqrt{3}\cdot V_L\cdot I_L\cdot \cos\varphi = \sqrt{3}\cdot 400\cdot 6{,}9\cdot \cos 50^\circ = 3.072\ W \quad \Rightarrow \quad W_1 + W_2 = 3.072\ W$$

c) Valor que ha de indicar el amperímetro y el vatímetro W_1 si se corta la fase *T.* La disposición de la carga es ahora de una impedancia entre *RS* ($\boldsymbol{Z}$) en paralelo

con las impedancias entre *RT* y *TS* en serie ($2 \cdot \boldsymbol{Z}$), y el conjunto a la tensión de $V_{RS} = 400$ V:

$$\frac{1}{\overline{Z}_{RS_eq}} = \frac{1}{\overline{Z}} + \frac{1}{2\cdot\overline{Z}} = \frac{3}{2\cdot\overline{Z}} \quad \Rightarrow \quad \overline{Z}_{RS_eq} = \frac{2}{3}\cdot\overline{Z} = \frac{2}{3}100_{\underline{|50^o}} = 66{,}7_{\underline{|50^o}}\ \Omega$$

$$I_{RS} = \frac{V_{RS}}{Z_{RS_eq}} = \frac{400}{66{,}7} = 6\ \text{A} \quad \Rightarrow \quad \text{El amperímetro indica 6 A}$$

$$P_{RS} = V_{RS}\cdot I_S \cdot \cos\varphi = 400\cdot 6\cdot \cos 50^o = 1.543\ \text{W} \quad \Rightarrow \quad W_1 = 1.543\ \text{W}$$

La potencia P_{RS} también se puede calcular de la siguiente manera:

$$R_{RS_eq} = 66{,}7\cdot\cos 50^o = 42{,}9\ \Omega \quad \Rightarrow \quad P_{RS} = I_{RS}^2\cdot R_{RS_eq} = 6^2\cdot 42{,}9 = 1.543\ \text{W}$$

Ejercicio 8.24.7

Una línea trifásica de 400/230 V y secuencia directa *RST* alimenta tres cargas monofásicas repartidas entre las tres fases, con las siguientes características cada una de ellas; $P_{RN} = 5$ kW, cos $\varphi = 0{,}8$; $P_{SN} = 10$ kW, cos $\varphi = 1$; y $P_{TN} = 15$ kW, cos $\varphi = 0{,}9$.

Se pide los valores que han de marcar cada uno de los aparatos de medida indicados en la *figura 8.63.*

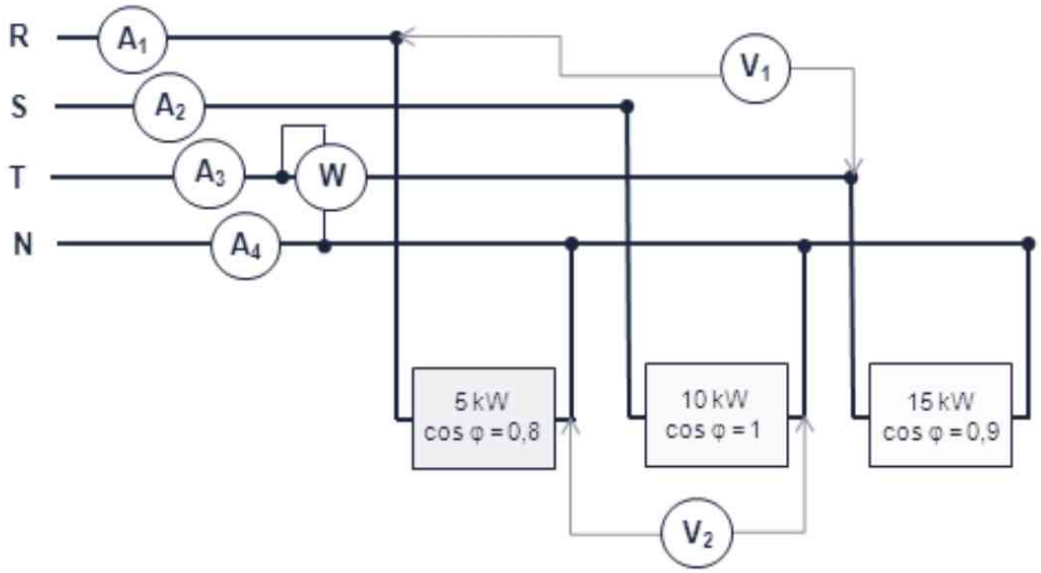


Figura 8.63. Ejercicio 8.24.7

Solución:

Se trata de un acoplamiento en estrella desequilibrado con neutro, similar al del *ejercicio 8.24.3*. Aunque las formas de representación son diferentes, son totalmente equivalentes.

Como se trata de un sistema trifásico equilibrado en tensiones, de la *fórmula [8.8]:*

$$V_F = \frac{V_L}{\sqrt{3}} = \frac{400}{\sqrt{3}} = 230 \text{ V}$$

Considerando las tensiones simples, $\boldsymbol{V_{RN}} = 230_{\angle\, 0^o}$, $\boldsymbol{V_{SN}} = 230_{\angle\, -120^o}$, $\boldsymbol{V_{TN}} = 230_{\angle\, 120^o}$, y calculando el módulo de las intensidades de cada fase por la fórmula de la potencia monofásica, *fórmula [7.157],* se tiene:

$$I_{RN} = \frac{P_{RN}}{V_F \cdot \cos \varphi_{RN}} = \frac{5.000}{230 \cdot 0{,}8} = 27{,}2 \text{ A}$$

Atrasado el ángulo, φ = arcos 0,8 = 37º, de la tensión, $\boldsymbol{V_{RN}} = 230_{\angle\, 0^o}$, es decir, $\boldsymbol{I_{RN}} = 27{,}2_{\angle\, -37^o}$.

$$I_{SN} = \frac{P_{SN}}{V_F \cdot \cos \varphi_{SN}} = \frac{10.000}{230 \cdot 1} = 43{,}5 \text{ A}$$

Como el ángulo, φ = arcos 1 = 0º, en fase con la tensión, $\boldsymbol{V_{SN}} = 230_{\angle\, -120^o}$, es decir, $\boldsymbol{I_{SN}} = 43{,}5_{\angle\, -120^o}$.

$$I_{TN} = \frac{P_{TN}}{V_F \cdot \cos \varphi_{TN}} = \frac{15.000}{230 \cdot 0{,}9} = 72{,}5 \text{ A}$$

Atrasado el ángulo, φ = arcos 0,9 = 26º, de la tensión, $\boldsymbol{V_{TN}} = 230_{\angle\, 120^o}$, es decir, $\boldsymbol{I_{TN}} = 72{,}5_{\angle\, 94^o}$.

La intensidad que circulará por el conductor neutro *N, ecuación [8.24]*, es igual a la suma fasorial de la tres anteriores:

$$\overline{I}_N = \overline{I}_{RN} + \overline{I}_{SN} + \overline{I}_{TN} = 27{,}2_{\underline{\lfloor -37^o}} + 43{,}5_{\underline{\lfloor -120^o}} + 72{,}5_{\underline{\lfloor 94}} = 19_{\underline{\lfloor 105^o}} \text{ A}$$

El vatímetro *W* indica la potencia de la fase *T,* conducida por el circuito *TN*: 5.000 W.

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

El voltímetro V_1 marca la tensión de línea, $V_{RT} = V_L = V_1 = 400$ V.

El voltímetro V_2 está en cortocircuito a través del conductor N: $V_2 = 0$ V

Resumen de las indicaciones de los aparatos de medida en la *tabla 8.5.*

A_1 (A)	A_2 (A)	A_3 (A)	A_4 (A)	W (W)	V_1 (V)	V_2 (V)
27,2	43,5	72,5	19	5.000	400	0

Tabla 8.5. Indicaciones de los aparatos de medida de la figura 8.58

Nota: si la secuencia de fase fuera inversa *RTS*, puede comprobarse realizando el ejercicio, los aparatos de medida indicarían los mismos valores.

Ejercicio 8.24.8

Una línea trifásica de 400 V, 50 Hz, *figura 8.64,* alimenta una instalación formada por:

- Un motor trifásico que suministra una potencia de 20 CV con un rendimiento del 80% y un factor de potencia 0,75.
- Una carga trifásica de 5 kW y cos $\varphi = 1$.
- Una carga trifásica de potencia activa 6 kW y potencia reactiva 3 kVAr.

Calcular:

a) La corriente que marca el amperímetro A.

b) Factor de potencia de la instalación.

c) Suma de los valores marcados por los vatímetros W_1 y de W_2.

d) Capacidad de cada condensador de una batería, que conectados en triángulo, permita elevar el factor de potencia de la instalación a la unidad.

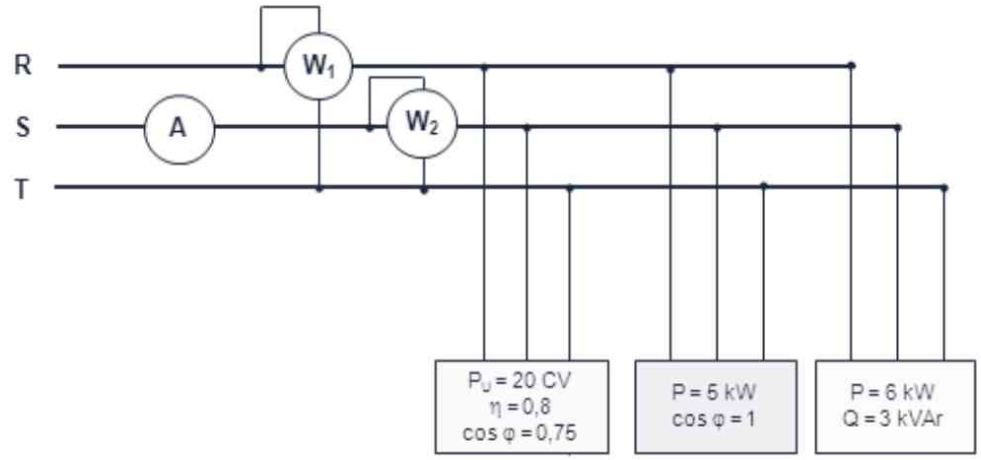


Figura 8.64. Ejercicio 8.24.8

Solución:

Aplicación del teorema de Boucherot, *apartado 7.19,* al sistema.

Carga 1:

$$P_1 = P_u/\eta = 20 \cdot 736/0{,}8 = 18.400\ W$$

$$\cos \varphi_1 = 0{,}75 \Rightarrow \varphi_1 = 41{,}4^\circ \Rightarrow Q_1 = P_1 \cdot \text{tag}\ \varphi_1 = 18.400 \cdot \text{tag}\ (41{,}4^\circ) = 16.221\ VAr$$

Carga 2:

$$P_2 = 5.000\ W$$

$$\cos \varphi_2 = 1 \Rightarrow \varphi_2 = 0^\circ \Rightarrow Q_2 = 0\ VAr$$

Carga 3:

$$P_3 = 6.000\ W$$

$$Q_3 = 3.000\ VAr$$

Total:

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 = 18.400 + 5.000 + 6.000 = 29.400\ W$$

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 16.221 + 0 + 3.000 = 19.221\ VAr$$

$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} = \sqrt{29.400^2 + 19.221^2} = 35.125\ VA$$

a) La corriente que marca el amperímetro *A*.

$$I_T = \frac{S_T}{\sqrt{3}\cdot V_L} = \frac{35.125}{\sqrt{3}\cdot 400} = 50{,}7\ \text{A}$$

b) Factor de potencia de la instalación.

$$\text{fdp} = \frac{P_T}{S_T} = \frac{29.400}{35.125} = 0{,}83$$

c) Suma de los valores marcados por los vatímetros W_1 y de W_2. Puesto que es una conexión Aron:

$$W_1 + W_2 = 29.400\ \text{W}$$

d) Capacidad de cada condensador de una batería, que conectados en triángulo, *fórmula [8.88],* permita elevar el factor de potencia de la instalación a la unidad.

$$\cos \varphi_2 = 1 \Rightarrow \varphi = 0^\circ$$

$$\cos \varphi_1 = 0{,}83 \Rightarrow \varphi_1 = 33{,}9^\circ$$

$$C = \frac{P\ (\text{tag}\ \varphi_1 - \text{tag}\ \varphi_2)}{3\cdot V_L^2\cdot \omega} = \frac{29.400\cdot(\text{tag}\ 33{,}9^\circ - \text{tag}\ 0^\circ)}{3\cdot 400^2\cdot 314} = 131\cdot 10^{-6}\ \text{F} = 131\ \mu\text{F}$$

Obsérvese que no se ha tenido en cuenta para los cálculos la secuencia de fases. En sistemas equilibrados, los cálculos de este tipo son independientes de la secuencia de fases, aunque ésta se ha de tener en cuenta, como se ha visto en el *apartado 8.1*, para otras cuestiones: sentido de giro de los motores, sistemas de medidas, etc.

Ejercicio 8.24.9

Una línea trifásica de 400 V, 50 Hz, *figura 8.65*, secuencia directa *RST*, alimenta una instalación formada por:

- Una carga trifásica equilibrada de 22 kW, cos $\varphi = 0{,}9$.
- Una carga monofásica entre la fase *R* y el neutro *N* de 30 kW, cos $\varphi = 1$.

- Una carga monofásica entre la fase *S* y el neutro *N* de 45 kW, cos φ = 0,8.
- Una carga monofásica entre la fase *T* y el neutro *N* de 10 kW, cos φ = 0,6.

Se pide las indicaciones de cada uno de los amperímetros de la *figura 8.65.*

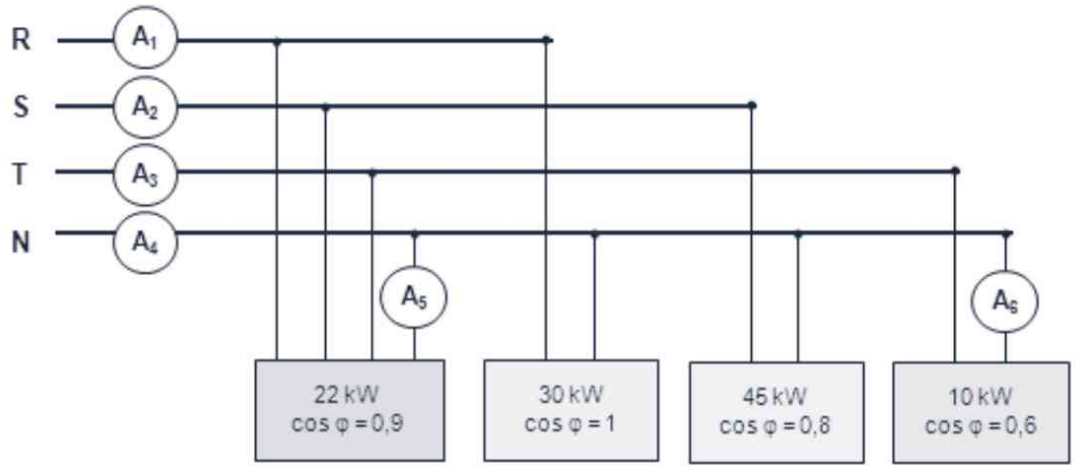


Figura 8.65. Ejercicio 8.24.9

Solución:

Para hallar las indicaciones de cada uno de los amperímetros de la *figura 8.65*, se necesitan las tensiones de fase y tensiones de línea del sistema trifásico, y tomando como referencia, $V_{RN} = 230_{\angle 0^o}$, son:

Tensiones de fase:

$$\overline{V}_{RN} = 230_{\underline{|\ 0^o}}\ V$$

$$\overline{V}_{SN} = 230_{\underline{|\ -120^o}}\ V$$

$$\overline{V}_{TN} = 230_{\underline{|\ 120^o}}\ V$$

Tensiones de línea:

$$\overline{V}_{RS} = \overline{V}_{RN} - \overline{V}_{SN} = 230_{\underline{|\ 0^o}} - 230_{\underline{|\ -120^o}} = 400_{\underline{|\ 30^o}}\ V$$

$$\overline{V}_{ST} = \overline{V}_{SN} - \overline{V}_{TN} = 230_{\underline{|\ -120^o}} - 230_{\underline{|\ 120^o}} = 400_{\underline{|\ -90^o}}\ V$$

$$\overline{V}_{TR} = \overline{V}_{TN} - \overline{V}_{RN} = 230_{\underline{|\ 120^o}} - 230_{\underline{|\ 0^o}} = 400_{\underline{|\ 150^o}}\ V$$

A continuación se halan las intensidades debidas a cada carga, *figura 8.66*.

Carga trifásica 1:

$$I_1 = \frac{P_1}{\sqrt{3}\cdot V_L \cdot \cos \varphi_1} = \frac{22.000}{\sqrt{3}\cdot 400 \cdot 0{,}9} = 35{,}3 \text{ A}$$

Como $\varphi_1 = \text{arc cos } 0{,}9 = 25{,}8^\circ$, entonces:

$$\mathbf{I}_{R1} \text{ atrasada } 25{,}8^\circ \text{ de } \mathbf{V}_{RN} \Rightarrow I_{R1} = 35{,}3_{\lfloor 0\ -25{,}8^\circ} = 35{,}3_{\lfloor -25{,}8^\circ}$$

$$\mathbf{I}_{S1} \text{ atrasada } 25{,}8^\circ \text{ de } \mathbf{V}_{SN} \Rightarrow I_{R1} = 35{,}3_{\lfloor -120\ -25{,}8^\circ} = 35{,}3_{\lfloor -145{,}8^\circ}$$

$$\mathbf{I}_{T1} \text{ atrasada } 25{,}8^\circ \text{ de } \mathbf{V}_{TN} \Rightarrow I_{R1} = 35{,}3_{\lfloor 120\ -25{,}8^\circ} = 35{,}3_{\lfloor 94{,}2^\circ}$$

Carga monofásica 2:

$$I_2 = \frac{P_2}{V_F \cdot \cos \varphi_2} = \frac{30.000}{230 \cdot 1} = 130{,}4 \text{ A}$$

Como, $\varphi_2 = \text{arc cos } 1 = 0^\circ$, entonces:

$$\mathbf{I}_{R2} \text{ en fase con } \mathbf{V}_{RN} \Rightarrow I_{R2} = 130{,}4_{\lfloor 0^\circ}$$

Carga monofásica 3:

$$I_3 = \frac{P_3}{V_F \cdot \cos \varphi_3} = \frac{45.000}{230 \cdot 0{,}8} = 244{,}5 \text{ A}$$

Como, $\varphi_3 = \text{arc cos } 0{,}8 = 36{,}8^\circ$, entonces:

$$\mathbf{I}_{S3} \text{ atrasada } 36{,}8^\circ \text{ de } \mathbf{V}_{SN} \Rightarrow I_{S3} = 244{,}5_{\lfloor -120^\circ\ -\ 36{,}8^\circ} = 244{,}5_{\lfloor -156{,}8^\circ}$$

Carga monofásica 4:

$$I_4 = \frac{P_4}{V_F \cdot \cos \varphi_4} = \frac{10.000}{230 \cdot 0{,}6} = 72{,}4 \text{ A}$$

Como, $\varphi_3 = \text{arc cos } 0{,}6 = 53{,}1°$, entonces:

$$\mathbf{I}_{T4} \text{ atrasada } 53{,}1° \text{ de } \mathbf{V}_{TN} \Rightarrow \quad I_{T4} = 72{,}4_{\lfloor 120° - 53{,}1°} = 72{,}4_{\lfloor 66{,}9°}$$

Sumando las intensidades derivadas de cada fase, se obtienen las intensidades totales por cada uno de los conductores:

$$\overline{I}_R = \overline{I}_{R1} + \overline{I}_{R2} = 35{,}3_{\lfloor -25{,}8°} + 130{,}4_{\lfloor 0°} = 163_{\lfloor -5{,}5°} \text{ A}$$

$$\overline{I}_S = \overline{I}_{S1} + \overline{I}_{S3} = 35{,}3_{\lfloor -145{,}8°} + 244{,}5_{\lfloor -156{,}8°} = 279_{\lfloor 204{,}6°} \text{ A}$$

$$\overline{I}_T = \overline{I}_{T1} + \overline{I}_{T4} = 35{,}3_{\lfloor 94{,}2°} + 72{,}4_{\lfloor 66{,}9°} = 104_{\lfloor 77{,}3°} \text{ A}$$

$$\overline{I}_N = \overline{I}_{R2} + \overline{I}_{S3} + \overline{I}_{T4} = 130{,}4_{\lfloor 0°} + 244{,}5_{\lfloor -156{,}8°} + 72{,}4_{\lfloor 66{,}9°} = 71_{\lfloor 203°} \text{ A}$$

El amperímetro A_5 *indica 0 A,* puesto que la carga es trifásica equilibrada.

El amperímetro A_6 indica la intensidad que circula por la *carga 4*, es decir, 72,4 A.

En la tabla 8.6 figuran las indicaciones de todos los amperímetros.

A_1 (A)	A_2 (A)	A_3 (A)	A_4 (A)	A_5 (A)	A_6(A)
163	279	104	71	0	72,4

Tabla 8.6. Indicaciones de los aparatos de medida de la figura 8.65.

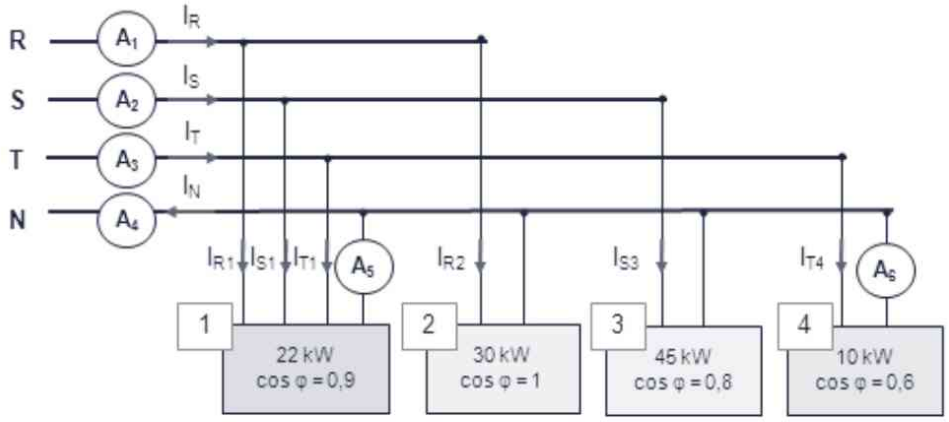


Figura 8.66. Solución del ejercicio 8.24.9

Otra forma de resolver el ejercicio.

De la potencia de la carga trifásica, cada conductor de fase transporta 1/3 de dicha potencia, recordando que para cada carga, $Q = P \cdot tag$, y aplicando el Teorema de Boucherot, se tiene:

Potencias e intensidades de la fase *R*:

$$P_R = \frac{P_{R1}}{3} + P_2 = \frac{22.000}{3} + 30.000 = 37.333 \text{ W}$$

$$Q_R = \frac{Q_{R1}}{3} + Q_2 = \frac{10.655}{3} + 0 = 3.552 \text{ VA}$$

$$\varphi_R = \text{arc tag} = \frac{Q_R}{P_R} = \frac{3.552}{37.333} = 5{,}4^\circ$$

$$I_R = \frac{P_R}{V_F \cdot \cos \varphi_R} = \frac{37.333}{230 \cdot \cos 5{,}4^\circ} = 163 \text{ A}$$

Potencias e intensidades de la fase *S*:

$$P_S = \frac{P_{S1}}{3} + P_3 = \frac{22.000}{3} + 45.000 = 52.333 \text{ W}$$

$$Q_S = \frac{Q_{S1}}{3} + Q_3 = \frac{10.655}{3} + 33.750 = 37.302 \text{ VA}$$

$$\varphi_S = \text{arc tag} = \frac{Q_S}{P_S} = \frac{37.302}{52.333} = 35{,}5^\circ$$

$$I_S = \frac{P_S}{V_F \cdot \cos \varphi_S} = \frac{52.333}{230 \cdot \cos 55{,}5^\circ} = 279 \text{ A}$$

Potencias e intensidades de la fase *T*:

$$P_T = \frac{P_{T1}}{3} + P_3 = \frac{22.000}{3} + 10.000 = 17.333 \text{ W}$$

$$Q_T = \frac{Q_{T1}}{3} + Q_3 = \frac{10.655}{3} + 13.333 = 16.885 \text{ VA}$$

$$\varphi_T = \text{arc tag} = \frac{Q_T}{P_T} = \frac{16.885}{17.333} = 44{,}3^\circ$$

$$I_T = \frac{P_T}{V_F \cdot \cos \varphi_T} = \frac{17.333}{230 \cdot \cos 44{,}3^\circ} = 104 \text{ A}$$

Intensidad del neutro:

Se ha de tener en cuenta que la intensidad en cada fase retrasa a la tensión simple correspondiente el ángulo φ:

$$\overline{I}_N = \overline{I}_R + \overline{I}_S + \overline{I}_T = 163_{\lfloor 0^\circ - 5{,}4^\circ} + 279_{\lfloor -120^\circ - 35{,}5} + 104_{\lfloor 120^\circ - 44{,}3^\circ}$$

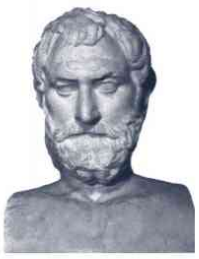
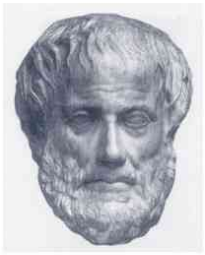
$$\overline{I}_N = \overline{I}_R + \overline{I}_S + \overline{I}_T = 163_{\lfloor -5{,}4^\circ} + 279_{\lfloor -155{,}5} + 104_{\lfloor 75{,}7^\circ} = 71_{\lfloor 203^\circ} \text{ A}$$

Anexo A

GRANDES PERSONAJES EN LA HISTORIA DE LA ELECTRICIDAD

(En cada celda figura el campo de la investigación eléctrica relacionado especialmente con el personaje).

A. de C.

			
Thales de Mileto Grecia (624-547)	Ámbar	**Aristóteles** Grecia (384-322)	Magnetita
▪ Referencias a la electrostática		▪ Referencias al magnetismo	

1.600-1.700

William Gilbert

U.K. (1544-1603)

- Fuerzas magnéticas y eléctricas (1600)

☛ Unidad de fmm (CGS)

Otto von Guericke

Alemania (1602-1686)

- La primera máquina electrostática (1660)

1.700-1.800

Francis Hauksbee

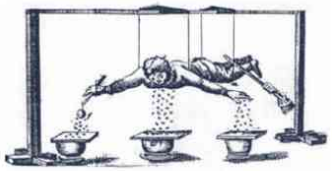
U.K. 1666-1713

- Generador electrostático (1706)

Stephen Gray

U.K. (1666-1736)

- Transmisión de cargas eléctricas (1729)



Charles F. du Fay

Francia (1698-1739)

- Existencia de dos tipos de cargas eléctricas (1733)

P. Musschenbroeck

Alemania (1692-1761)

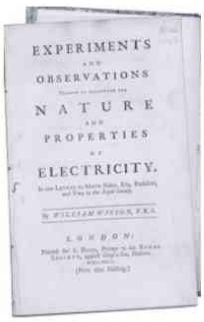
- La botella de Leyden (1745) (condensador eléctrico)

La botella de Leyden

William Watson

U.K. (1715-1787)

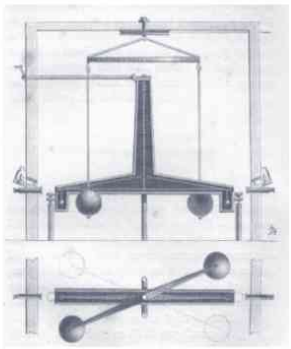
- Conservación de la carga eléctrica (1748)



Henry Cavendish

U.K. (1731 - 1810)

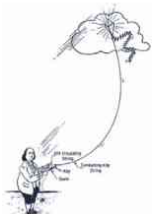
- Conductividad eléctrica (1748)



Benjamin Franklin

USA (1706-1790)

▪ Pararrayos (1752)

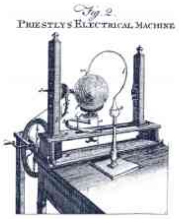


Experimento de Franklin

Joseph Priestley

U.K. (1733-1804)

▪ Electroquímica (1762)



Máquina de Priiestley

Joseph L. Lagrange

Francia (1736-1806)

▪ Matemáticas en electromagnetismo (1777)

$$\bar{E} = \bar{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$$

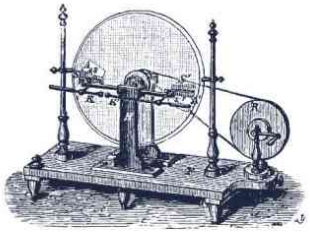
$$\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A}$$

Ecuaciones Euler-Lagrange

Martin van Marum

Holanda (1750-1837)

▪ Generador electrostático (1785)

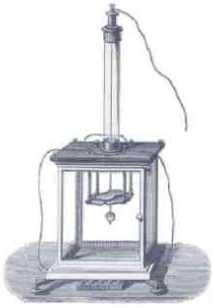


Generador electrostático de M. van Marum

C. Coulomb

Francia (1736-1806)

- Fuerzas y cargas eléctricas (1777)
- ★ Ley de Coulomb (1785)
- ☛ Unidad de carga eléctrica



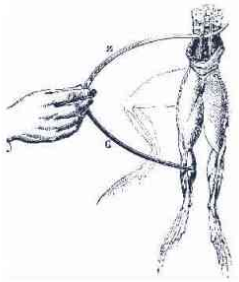
$$\bar{F} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \bar{r}_u$$

Ley de Coulomb

Luigi Galvani

Italia (1737-1798)

- Electricidad en animales (1786)



Experimento con rana

Alesandro Volta

Italia (1745-1827)

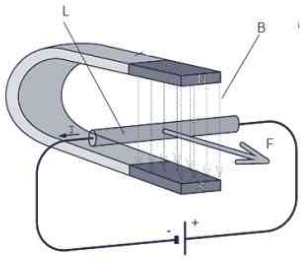
- Pila eléctrica (1800)
- ☛ Unidad de ddp V

Pila de Volta

Pierre S. Laplace

Francia (1749-1827)

- Electromagnetismo (1782)
- ★ Fuerza de Laplace (1820)



$$\bar{F} = \overline{I \cdot L} \times \bar{B}$$

Fuerza de Laplace

$$\nabla^2 V = 0$$

Ecuación de Laplace

1.800-1.900

Johann W. Ritter

Alemania (1776-1810)

▪ Electroquímica. Galvanoplastia. Acumulador eléctrico (1802)

. Acumulador eléctrico.

J. W. Ritter

Humphry Davy

U.K. (1778-1829)

▪ Electroquímica: electrolisis (1806), protección catódica. Arco eléctrico (1808).

Electrolisis. H. Davy

Arco eléctrico. H. Davy

Siméon D. Poisson

Francia (1741-1840)

▪ Electrostática (1813)
Electromagnetismo (1824)

★ Ecuación de Poison

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_V}{\varepsilon}$$

ó

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_V}{\varepsilon}$$

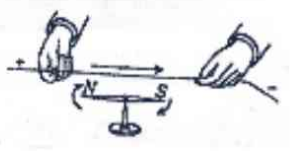
Ecuación de Poisson

Hans C. . Ørsted

Dinamarca (1777-1851)

▪ Electromagnetismo (1820)

☛ Unidad de **H** (CGS)

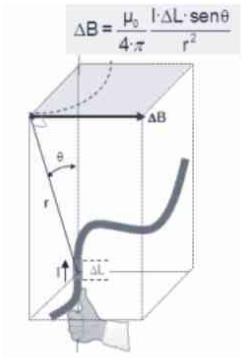


Experimento H. Ørsted

F. Savart

Francia (1791-1841)

- Electromagnetismo
- ★ Ley de Biot-Savart (1820)

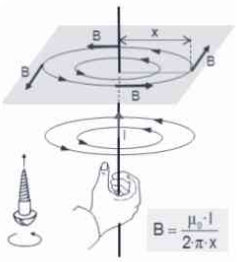


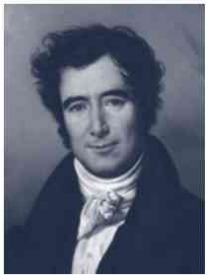
Ley de Biot-Savart

J. B. Biot

Francia (1774-1862)

- Electromagnetismo
- ★ Ley de Biot-Savart (1820)

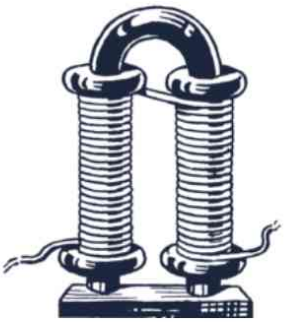




François J. D. Arago

Francia (1786-1853)

- Electromagnetismo. Electroimán (1820)

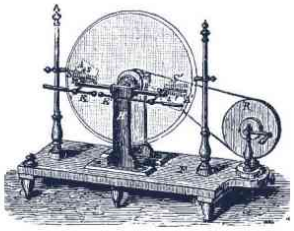


Electroimán de Arago

Johann C. Poggendorff

Alemania (1796-1877)

- Electromagnetismo. Electroquímica



Generador electrostático de Poggendorff

André M. Ampère

Francia (1775-1836)

- Electrodinámica y Electromagnetismo (1820).
- ★ Ley de Ampère
- ☛ Unidad de intensidad I

$$\int_c \bar{B}\cdot\overline{dL} = \mu_0 \cdot \sum_1^n I_i$$

ó

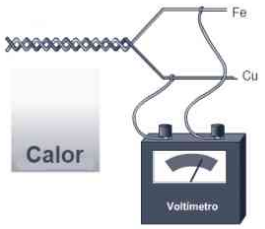
$$\bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 \cdot \bar{J}$$

Ley de Ampère

Thomas J. Seebeck

Estonia (1770-1831)

- Termoelectricidad: efecto Seebeck (1822)



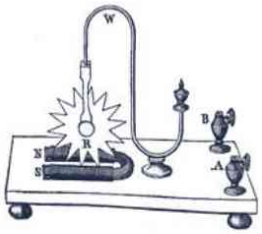
$$V_{AB} = \int_{T_1}^{T_2} S_B(T) - S_A(T)$$

Efecto Seebck

Peter Barlow

U.K. (1776-1862)

- Primer motor eléctrico: rueda de Barlow (1822)

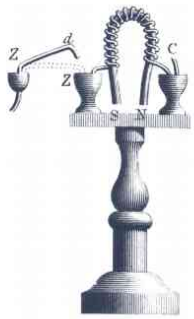


Rueda de Barlow

William Sturgeon

U.K. (1753-1850)

- Electroimán (1825). El galvanómetro (1836)

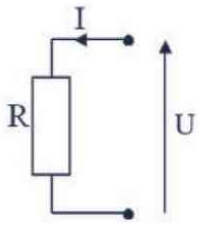


Electroimán de Sturgeon

Georg S. Ohm

Alemania (1789-1854)

- Electrodinámica
- ★ Ley de Ohm (1827)
- ☛ Unidad de resistencia R



$$I = \frac{U}{R}$$

Ley de Ohm CC

George Green

U.K. (1793-1841)

- Estudio matemático del electromagnetismo (1828)

$$\int_S \bar{a}\cdot\overline{ds} = \int_V \operatorname{div}\bar{a}\cdot dv$$

ó

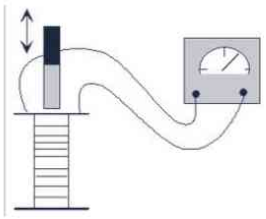
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_c P\,dx + Q\,dy$$

Teorema de Grenn

Joseph Henry

USA (1799-1878)

- Inducción electromagnética (1830)
- ★ Ley de Faraday-Henry
- ☛ Unidad de inductancia L

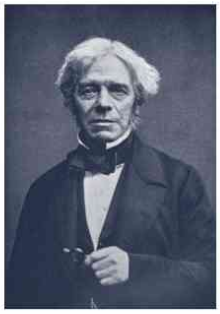


Inducción electromagnética

$$\Phi = L\cdot I$$

$$e_a = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$$

Ley de Faraday-Henry-Lenz



Michael Faraday

U.K. (1791-1867)

- Electromagnetismo Electroquímica
- ★ Ley de Faraday-Henry (1831)
- ☛ Unidad de capacidad C

$$e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

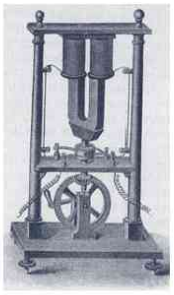
ó

$$\int_S \bar{E}\cdot\overline{dl} = -\frac{d}{dt}\int_S \bar{B}\cdot\overline{dA}$$

ó

$$\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}$$

Ley de Faraday-Henry-Lenz



Hippolyte Pixii

Francia (1808-1835)

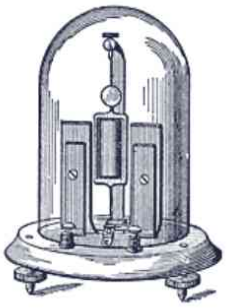
- Primer alternador (1832)

Dinamo de Pixii

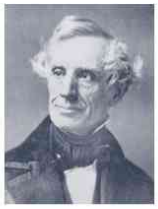
J. Arsène d'Arsonval

Francia (1808-1835)

- Aparatos de medidas eléctricas
- Electrofisiología



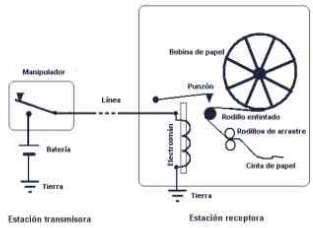
Galvanómetro d'Arsonval



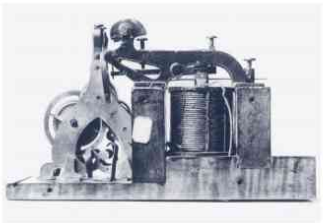
Samuel Morse

USA (1791-1867)

- Telégrafo (1833)



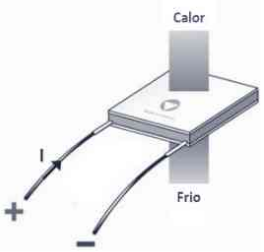
Telégrafo



J. Peltier

Francia (1785-1845)

- Termoelectricidad: efecto Peltier (1834). Inducción electrostática (1840)

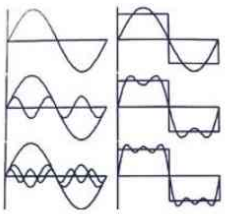


Efecto Peltier

J. B. J. Fourier

Francia (1768-1830)

▪ Estudio matemático de las señales periódicas



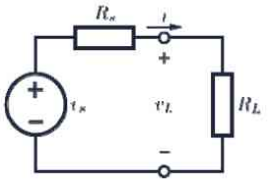
Composición en series de Fourier

Moritz von Jacobi

Rusia (1801-1874)

▪ Dinamo (1834)

★ Teorema de máxima transferencia de potencia



$P_{RL\,max} \Rightarrow R_L = R_S$

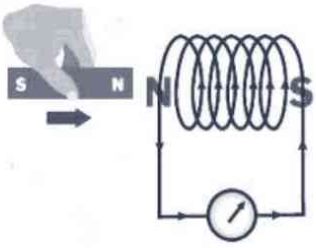
Teorema de máxima transferencia de potencia

H. F. E. Lenz

Rusia (1804-1865)

▪ Electromagnetismo

★ Ley de Lenz (1834)



Ley de Lenz

Johann C. F. Gauss

Alemania (1777-1855)

▪ Electrostática, electromagnetismo (1835)

★ Leyes de Gauss

☛ Unidad de **B** (CGS)

Ley de Gauss para **E:**

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_E = \int_S \bar{E}\cdot d\bar{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{D} = \rho$$

Ley de Gauss para **B:**

$$\Phi_B = 0$$

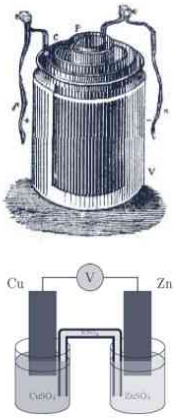
$$\Phi_B = \int_S \bar{B}\cdot d\bar{A} = 0$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0$$

J. F. Daniell

U.K. (1790 -1845)

▪ Pila Daniell (1836)



Pila Daniell

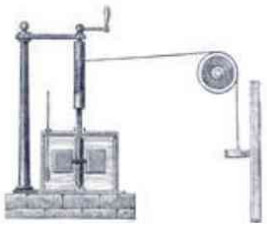
James P. Joule

U.K. (1818-1889)

▪ Electricidad y calor

★ Ley de Joule (1840)

☛ Unidad de energía *W*



$$Q_{Calorias} = 0{,}24 \cdot I^2 \cdot R \cdot t$$

Ley de Joule

Franz E. Neumann

Alemania (1798-1895)

▪ Estudio matemático del electromagnetismo (1845).

$$M_{21} = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\overline{dl}_1 \cdot \overline{dl}_2}{|\overline{r}_2 - \overline{r}_1|}$$

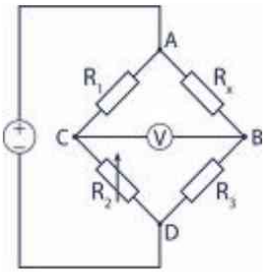
Fórmula de Neumann

Charles Wheatstone

U.K. (1802-1875)

▪ Puente de Wheatstone (1843)

▪ Telégrafo



Puente de Wheatstone

Gustav R. Kirchhoff

Alemania (1824-1887)

- Circuitos eléctricos

★ Leyes de Kirchhoff (1845)

1ª ley (KIL):

$$\sum I_K = 0$$

2ª ley (VIL):

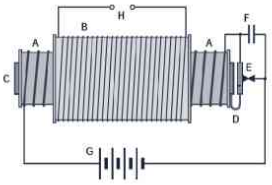
$$\sum V_K = 0$$

Leyes de Kirchhoff

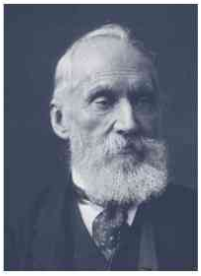
Heinrich D. Ruhmkorff

Alemania (1803-1877)

- Aparatos e instrumentos eléctricos
- Bobina de Ruhmkorff (1851)



Carrete de Ruhmkorff



William Thomson

(Lord Kelvin)

U.K. (1824-1907)

- Termoelectricidad: efecto Thomson (1851). Cable flexible (1858)

☛ Unidad de temperatura

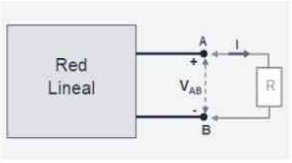
$$Q_{Calorias} = \frac{J^2}{\rho} + \sigma \nabla T \cdot J$$

Efecto Thomson

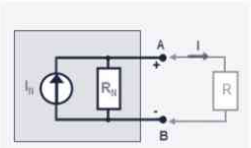
L. Thévenin

Francia (1857-1926)

★ Teorema de Thévenin (1853)



⇓

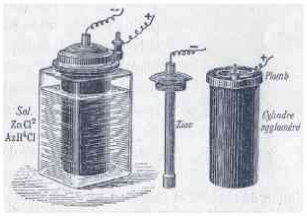


Teorema de Thévenin

Georges Leclanché

Francia (1839-1882)

▪ Pila Leclanché (1866)



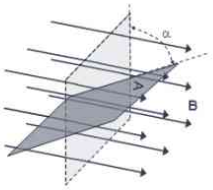
Pila Leclanché

Wilhelm E. Weber

U.K. (1804-1891)

▪ Electromagnetismo

☛ Unidad de la conductancia eléctrica G (G = 1/R)



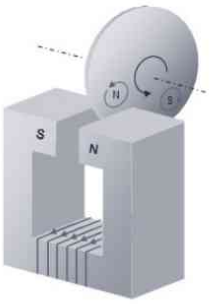
$\Phi_B = \overline{B} \cdot \overline{A}$

Flujo magnético

Leon Foucault

Francia (1819-1868)

▪ Electromagnetismo. Corrientes de Foucault (1855)



Corrientes de Foucault

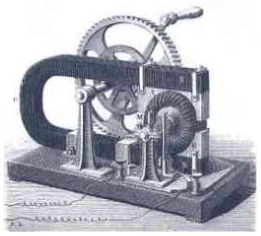
$$P_F = \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{e^2 \cdot B_M^2 \cdot f^2}{\rho}$$

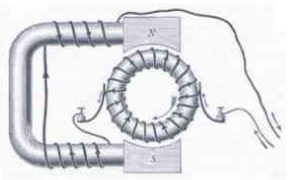
Pérdidas de Foucault

Zenobe Gramme

Bégica **(1826-1901)**

▪ Primera dinamo (1870)



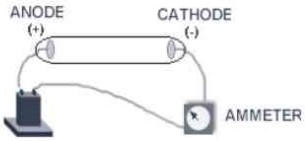


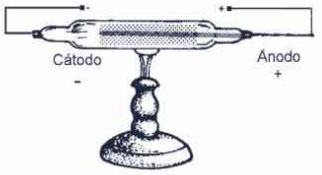
Dinamo Gramme

Johann W. Hittorf

Alemania (1824-1914)

- Electroquímica
- Rayos catódicos (1872)





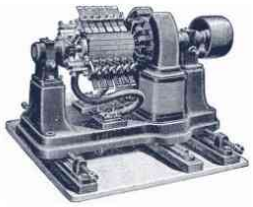
Rayos catódicos

Ernst W. von Siemens

Alemania (1816-1892)

- Unidad flujo magnético Φ
- Dinamo (1866). Locomotora eléctrica (1879). Telégrafo

Locomotora



Dinamo

William Crookes

U.K. (1832-1919)

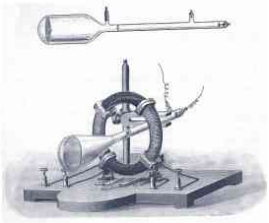
- Tubo de rayos catódicos (1875). Electricidad en los gases

Tubo de Crookes

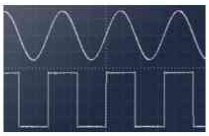
Karl F. Braun

Alemania (1850-1918)

- Primer osciloscopio (1897). Telegrafía sin hilos
- ❶ Nobel de Física 1909



Osciloscopio Braun



https://yolibrospdf.com/electricidad.html

G. F. B. Riemann

Alemania (1826-1866)

▪Análisis y geometría diferencial aplicable en electromagnetismo

Hermann von Helmholtz

Alemania (1821-1894)

▪ Electromagnetismo

★ Teorema de Helmholtz-Thevenin. Ecuaciones de Helmholtz

$$\nabla^2\bar{E} + (\omega^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon - j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \sigma)\cdot\bar{E} = 0$$

$$\nabla^2\bar{H} + (\omega^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon - j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \sigma)\cdot\bar{H} = 0$$

Ecuaciones de Helmholtz

James C. Maxwell

U.K. (1831-1879)

▪ Electromagnetismo

▪ Corriente de desplazamiento (1862)

★Ecuaciones de Maxwell (1873)

☛ Unidad de Φ (CGS)

$$\nabla\cdot\bar{D} = \rho$$

$$\nabla\times\bar{E} = -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\bar{B} = 0$$

$$\nabla\times\bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial\bar{D}}{\partial t}$$

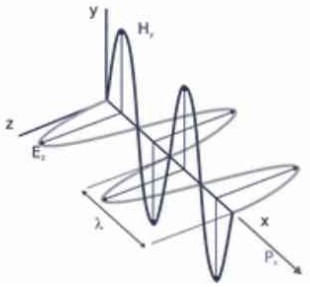
Ecuaciones de Maxwell

John H. Poynting

U.K. (1852-1914)

▪ Electromagnetismo

★ Teorema de Poyting (1884)

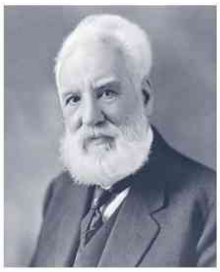


$$\bar{S} = \bar{E}\times\bar{H}$$

$$-\nabla\cdot\bar{S} = \bar{E}\cdot\bar{J} + \bar{E}\cdot\frac{\partial\bar{D}}{\partial t} + \bar{H}\cdot\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}$$

Teorema de Poynting

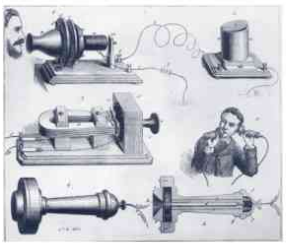
https://yolibrospdf.com/electricidad.html



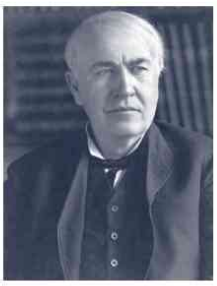
Alexander G. Bell

Escocia (1847-1922)

▪ Teléfono (1876)



Telefonía



Thomas A. Edison

USA (1847-1931)

▪ Lámpara incandescente, (1879). Central eléctrica

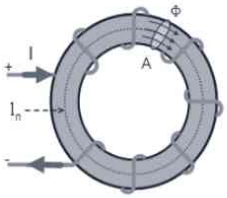
Lámparas de Edison

John Hopkinson

U.K. (1849-1898)

▪ Sistema trifásico (1882). Electromagnetismo

★ Ley de Hopkinson



$$\Phi = \frac{F}{R}$$

$$F = N \cdot I$$

$$R = \frac{l_n}{\mu \cdot A}$$

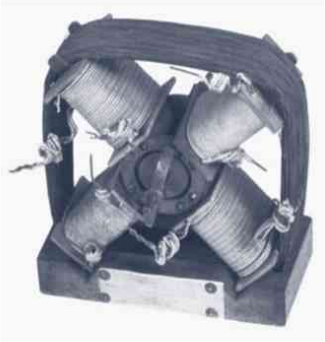
Ley de Hopkinson

Galileo Ferraris

Italia (1847-1897)

▪ Máquinas de corriente alterna (1885)

★ Teorema de Ferraris



Máquina de Ferraris

William Stanley

USA (1858-1916)

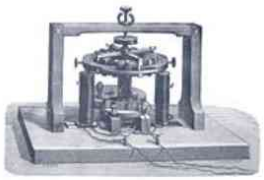
▪ Transformador (1886) y múltiples dispositivos eléctricos

Transformador de Stanley

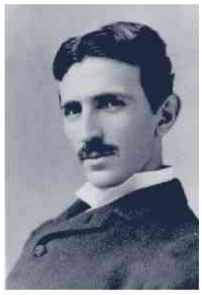
Antonio Pacinotti

Italia (1841-1912)

▪ Dinamo y motor de CC (1865)



Dinamo de Pacinotti



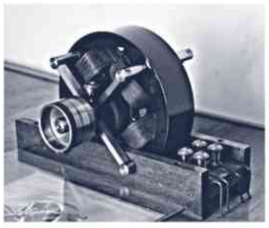
Nikola Tesla

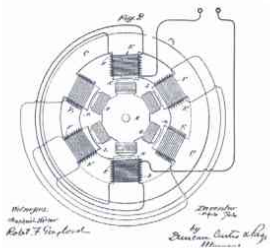
Croacia (1856-1943)

▪ Campo giratorio (1882).

Máquinas eléctricas. Motor de inducción (1887)

☛ Unidad de inducción magnética ***B***



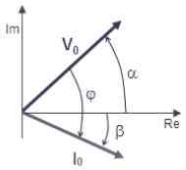


Charles P. Steinmetz

Alemania (1865-1923)

▪ Histéresis magnética (1892). Método fasorial (1893)

Desarrollo del sistema trifásico



$$\overline{V} = V_{0\underline{|\alpha}}$$

$$\overline{Z} = Z_{\varphi} \Rightarrow \overline{Z} = R + j \cdot X$$

$$\dot{I} = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}}$$

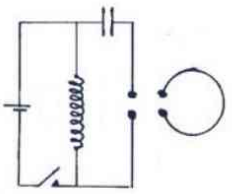
$$\dot{I} = I_{0\underline{|\alpha}}$$

Heinrichc R. Hertz

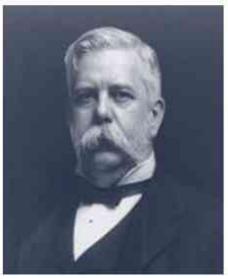
Alemania (1857-1894)

- Demostró la existencia de las ondas electromagnéticas (1887). Efecto fotoeléctrico

☛ Unidad de frecuencia *f*



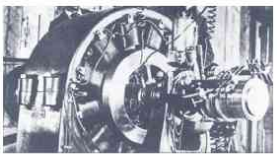
Experimento de Hertz



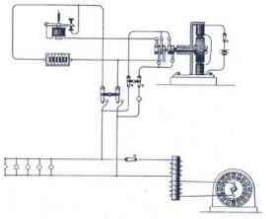
George Westinghouse

USA (1846-1914)

- Distribución de la electricidad en CA (1886). Perfeccionó el trasformador y el alternador



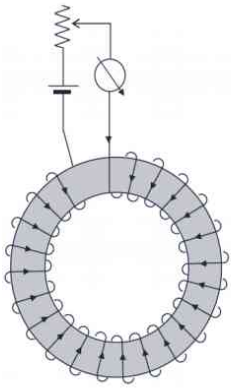
Alternador



Henry A. Rowland

USA (1848-1901)

- Termoelectricidad. Electromagnetismo

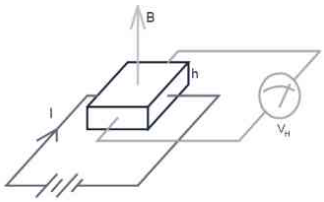


Anillo de Rowland

Edwin H. Hall

USA (1855-1938)

- Efecto Hall



Efecto Hall

$$V_H = R_H \frac{I \cdot B}{h}$$

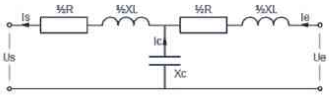
Tensión Hall

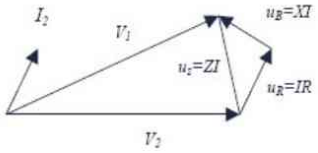
Sebastian Z. de Ferranti

U.K. (1864-1930)

- Generación y distribución de la electricidad en AT

★ Efecto Ferranti





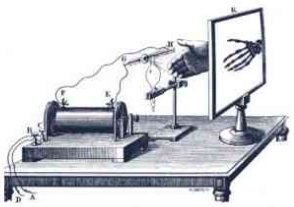
Efecto Ferranti

Wilhelm C. Röntgen

Alemania (1845-1923)

- Rayos X (1895)

❶ Nobel de Física 1901



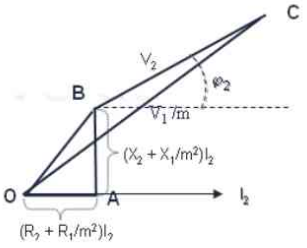
Rayos X

Gisbert J. E. Kapp

Austria (1852-1922)

- Máquinas eléctricas.

★ Diagrama de Kapp



Triángulo de Kapp

Alfred Potier

Francia (1840-1905)

- Estudio de las máquinas eléctricas

★ Diagrama de Potier

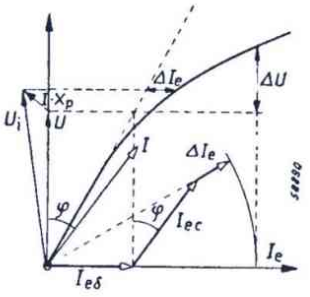
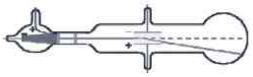


Diagrama de Potier

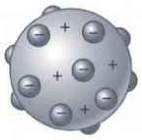
Joseph J. Thomson
U.K. (1856-1940)

- Propiedades eléctricas de los gases. Descubrió el electrón (1897)

❶ Nobel de Física 1906



Experimento de Thomson

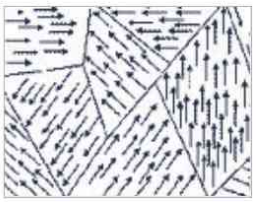


Modelo atómico de Thomson

Pierre E. Weiss
Francia (1865-1940)

- Propiedades magnéticas de los materiales.

★ Dominios de Weiss

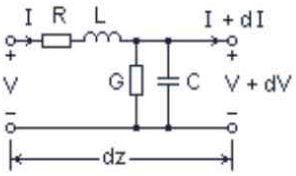


Dominios de Weiss

Oliver Heaviside
U.K. (1850-1925)

- Teoría de las líneas de transmisión de señales

★ Ecuaciones del telegrafista



$$\frac{\partial V}{\partial x} = R \cdot i + L \frac{\partial i}{\partial t}$$

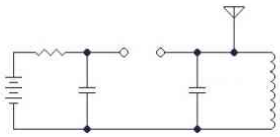
$$\frac{\partial i}{\partial x} = G \cdot v + C \frac{\partial V}{\partial t}$$

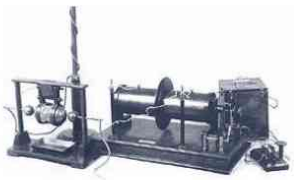
Ecuaciones del telegrafista

Guglielmo Marconi
Italia (1874-1937)

- Telegrafía inalámbrica (1899)

❶ Nobel de Física 1909





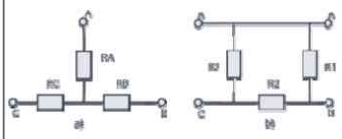
Transmisor de chispa

Arthur E. Kennelly

USA (1861-1939)

▪ Redes eléctricas

★Teorema de Kennelly (1899)



$$RB = \frac{R1 \cdot R2}{R1 + R2 + R3}$$

$$R1 = RA + RB + \frac{RA \cdot RB}{RC}$$

Teorema de Kennelly

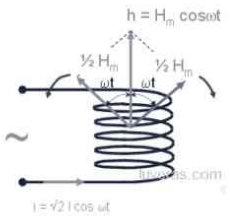
Maurice Leblanc

Francia (1857-1923)

▪ Máquinas eléctricas. Amortiguador Leblanc

★ Teorema de Maurice Leblanc

Amortiguador Leblanc



Teorema de Leblanc

André-Eugène Blondel

Francia (1863-1938)

▪ Oscilógrafo electromagnético

★ Diagrama de Blondel

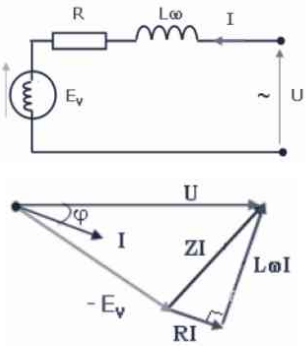


Diagrama de Blondel

H. Behn-Eschenburg

Suiza (1864-1938)

▪Máquinas asíncronas

★ Diagrama de Behn-Eschenburg

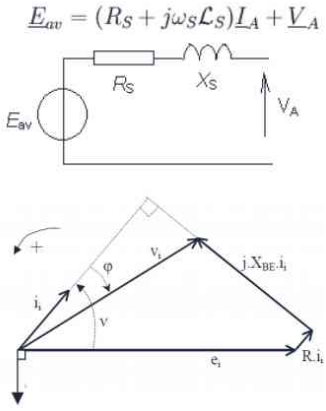


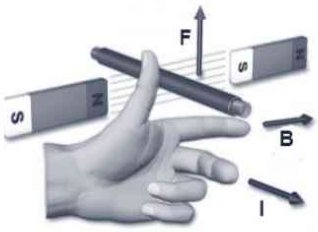
Diagrama de Behn-Eschenburg

1.900-2.000

Hendrik A. Lorentz

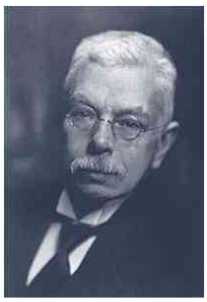
Holanda (1853-1928)

- Electromagnetismo
- ★ Fuerza de Lorentz
- ❶ Nobel de Física 1902



$$\bar{F} = q\cdot\bar{E} + q\cdot\bar{v}\times\bar{B}$$

Fuerza de Lorentz



Pieter Zeeman

Holanda (1855-1943)

- Electromagnetismo. Efecto Zeeman
- ❶ Nobel de Física 1902

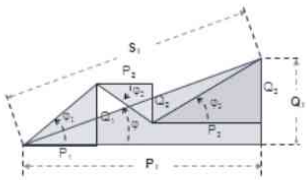
Línea espectral del Na

Lápida de Boucherot

Paul Boucherot

Francia (1869-1943)

- Redes eléctricas
- ★ Teorema de Boucherot



$$P_T = \sum_1^n P_K$$

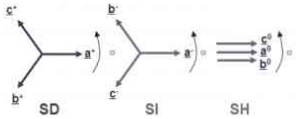
$$Q_T = \sum_1^n Q_K$$

Teorema de Boucherot

Charles L.Fortescue

USA (1876-1956)

- ★ Teorema de Fortescue o componentes simétricas (1918)

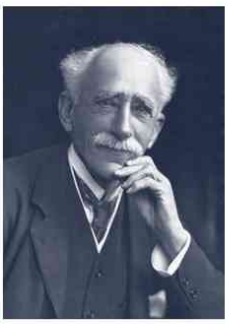


$$\bar{T}_{a+} = \frac{\bar{T}a + a\cdot\bar{T}b + a^2\cdot\bar{T}c}{3}$$

$$\bar{T}_{a-} = \frac{\bar{T}a + a^2\cdot\bar{T}b + a\cdot\bar{T}c}{3}$$

$$\bar{T}_{a0} = \frac{\bar{T}a + \bar{T}b + \bar{T}c}{3}$$

Componentes simétricas

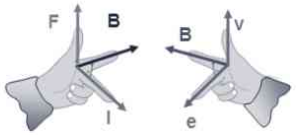


John A. Fleming

U.K. (1848-1945)

▪ Diodo (1903)

. Electromagnetismo. Regla de la mano izquierda y derecha. Estudio de la CA



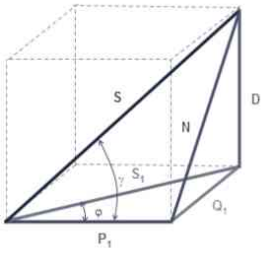
Regla de la mano izquierda y de la mano derecha

Diodo Fleming

C. Budeanu

Rumania (1886-1959)

▪Tetraedro de potencias en CA (1927)



$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2$

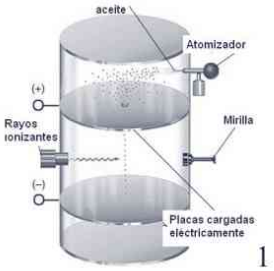
Tetraedro de potencias

Rober A. Millikan

USA (1868-1953)

▪ Efecto fotoeléctrico. Carga del electrón (1909)

❶ Nobel de Física 1923



$1\ C = 6.24 \cdot 10^{18}\ e^-$

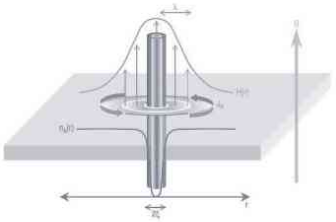
Experimento de Millikan

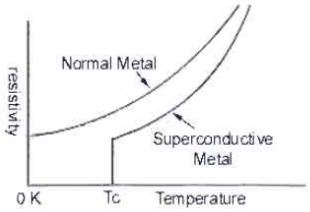
Heike K. Onnes

Holanda (1853-1926)

▪ Superconductividad eléctrica (1911)

❶ Nobel de Física 1913





L. Torres Quevedo

España (1852-1936)

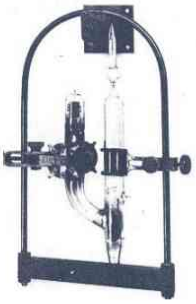
▪ Pionero del radiocontrol

Telekino de Torres Quevedo

Peter Cooper Hewitt

USA (1861-1921)

▪ Lámpara de vapor de mercurio



Blas Cabrera Felipe

España (1878-1945)

▪ Electromagnetismo

★ Ley de Cabrera-Duperier

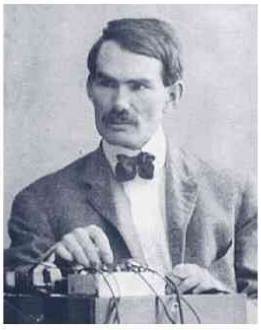
B. Cabrera junto a: Einstein, Fermi, Heisenberg, Bohr, Pauli...

$$(\chi_A + K)\cdot(T + \Delta) = C_A$$

Ley de Cabrera-Duperier

o ley de Curie-Cabrera

o ley de Weiss-Cabrera



A. Lee De Forest

USA (1863-1971)

▪ Triodo (1906)

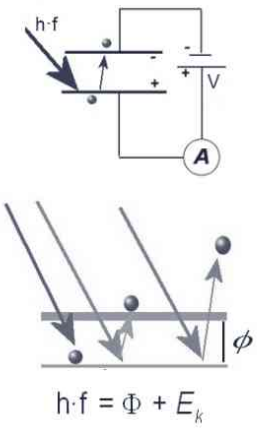
Nacimiento de la Electrónica

Triodo Lee de Forest

Albert Einstein

Alemania (1879-1955)

- Efecto fotoeléctrico (1905)
- ❶ Nobel de Física 1921

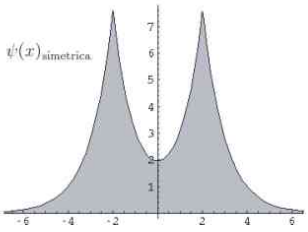


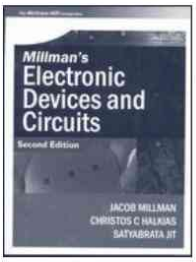
Efecto fotoeléctrico

Paul A. M. Dirac

U.K (1902-1984)

- Electrodinámica cuántica
- ❶ Nobel de Física 1933

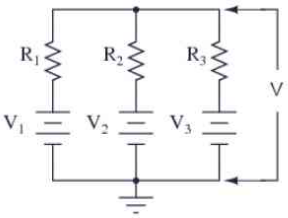




Jacob Millman

Ucrania (1911-1991)

★Teorema de Millman



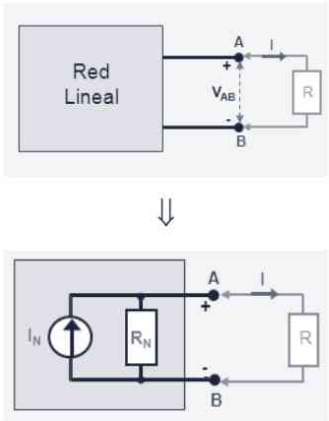
$$V = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Teorema de Millman

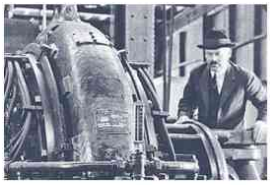
Edward L. Norton

USA (1898-1993)

★Teorema de Norton (1926)



Teorema de Norton

<table>
<tr>
<td> </td>
<td> 
Alternador</td>
<td> </td>
<td rowspan="4">$$\sum_{k=1}^{r} v_k(t).i_k(t) = 0$$
Teorema de Tellegen</td>
</tr>
<tr>
<td>E. F. W. Alexanderson
Suecia (1878-1975)</td>
<td rowspan="2">
TV</td>
<td>Bernard Tellegen
Holanda (1900-1990)</td>
</tr>
<tr>
<td>▪ Radiocomunicaciones. Sistemas de control. TV</td>
<td>▪ Inventó el pentodo. Estudio de redes eléctricas
★ Teorema de Tellegen</td>
</tr>
</table>

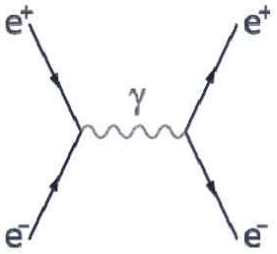
<table>
<tr>
<td> </td>
<td> </td>
<td> </td>
<td rowspan="4">
Transistor</td>
</tr>
<tr>
<td>John Bardeen
USA (1908-1991)</td>
<td>William B.Shockley
USA (1910-1989)</td>
<td>Walter H. Brattain
USA (1902-1989)</td>
</tr>
<tr>
<td>▪ Transistor (1947)
❶ Nobel de Física 1952
❶ Nobel de Física 1972</td>
<td>▪ Transistor (1947)
❶ Nobel de Física 1952</td>
<td>▪ Transistor (1947)
❶ Nobel de Física 1952</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">1947: nacimiento de la era de los Semiconductores</td>
</tr>
</table>

Richard P. Feynman

USA (1918-1988)

▪ Electrodinámica cuántica

❶ Nobel de Física 1965



Jack S. Kilby

USA (1923-2005)

▪ Circuitos integrados (1958)

❶ Nobel de Física 2000

Leyendas utilizadas en esta tabla:

En la celda a la derecha de cada personaje se tiene una referencia a su trabajo en el campo de la electricidad.

Debajo de la fotografía, junto con el nombre y la nacionalidad:

▪ Área de trabajo.

★ Ley, teorema o diagrama con su nombre.

☛ Unidad de medida con su nombre.

❶ Premio Nobel.

Anexo B

MAGNITUDES VECTORIALES. OPERACIONES

Magnitud vectorial

Cuando la medición de una magnitud es expresable por medio de un número real, dicha **magnitud** se denomina **escalar**. Así, por ejemplo, la masa, la temperatura, la energía, etc. son magnitudes escalares.

Cuando una magnitud no puede expresarse solamente con un número real, sino que, además, se le ha de asignar una dirección y un sentido para quedar perfectamente determinada, se trata de una **magnitud vectorial** (o simplemente vector). Así, por ejemplo, además de su valor numérico en la correspondiente unidad, para que quede perfectamente determinada, hay que especificar la dirección del movimiento y su sentido. Al igual que la velocidad, son magnitudes vectoriales la fuerza, el campo magnético, etc.

Se denomina **vector** a todo segmento orientado. El primero de los puntos que lo determinan se llama **origen** y el segundo **extremo** del vector. La recta que contiene al vector determina la **dirección** del mismo y la orientación sobre la recta, definida por el origen y el extremo del vector, determina su **sentido**. En la *figura B.1* se representa el vector $\boldsymbol{V}$ sobre la recta *r*, de origen *O* y extremo *P*. Los vectores se designan con la letra de su nombre en **negrita** ($\boldsymbol{V}$) o con la letra con una **rayita**, o flecha, encima de la letra ($\overline{\mathrm{V}}$).

Se denomina **módulo** de un vector a la longitud del segmento orientado que lo define. El módulo de un vector es *siempre un número positivo*. Se representa mediante la letra sin negrita (V), o como vector entre barras ($|\boldsymbol{V}|, \left|\overline{\mathrm{V}}\right|$).

Dos vectores son ***iguales*** cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Si tienen la misma dirección y sentido pero diferente origen, o punto de aplicación, se denominan equipolentes.

Magnitud vectorial Vectores equipolentes

Figura B.1. Magnitudes vectoriales

Suma de vectores

Para sumar dos vectores ***A*** y ***B***, se escribe ***A*** + ***B*** y se procede de la siguiente manera: a partir del extremo de ***A*** se lleva el vector ***B***, el vector cuyo origen es el origen de ***A*** y cuyo extremo es el extremo de ***B*** es el vector suma, ***A*** + ***B***, *figura B. 2.*

Al mismo resultado se llega tomando ***A*** y ***B*** con el mismo origen y definiendo la suma como la diagonal del paralelogramo construido sobre ***A*** y ***B***, que pasa por el origen.

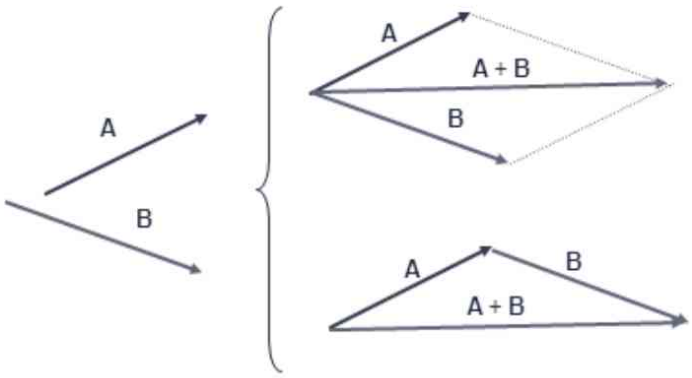


Figura B.2. Suma de vectores

Diferencia de vectores

La diferencia de dos vectores ***A*** y ***B***, se escribe ***A*** – ***B***, es igual a la suma del vector ***A*** y el vector opuesto a ***V***, es decir, ***-V*** (el vector opuesto a ***V*** es un vector con igual dirección y módulo pero sentido contrario de ***V***), *figura B.3.*

Al mismo resultado se llega trazando un vector desde el final del vector sustraendo ***B*** al final del vector minuendo ***A***.

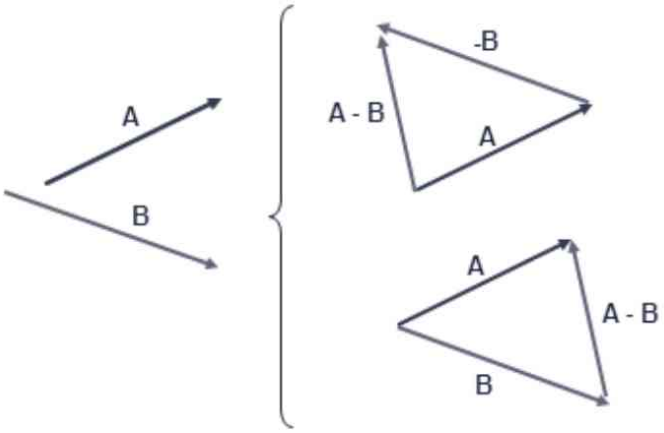


Figura B.3. Diferencia de vectores

Producto de un escalar por un vector. Vector unitario. Componentes de un vector

Dado un escalar m y un vector $\boldsymbol{V}$, *figura B.4*, se define al producto del escalar por el vector ($m \cdot \boldsymbol{V}$) a un nuevo vector $\boldsymbol{V_m}$ de módulo m veces el módulo de $\boldsymbol{V}$ ($V_m = m \cdot V$), de la misma dirección que $\boldsymbol{V}$ y de sentido igual al de $\boldsymbol{V}$ si $m > 0$, y sentido contrario al de $\boldsymbol{V}$, si $m < 0$, *figura B.4.*

Vector unitario o versor de un vector dado $\boldsymbol{V}$ es un vector $\boldsymbol{u}$ que tiene la dirección y sentido de $\boldsymbol{V}$ y módulo la unidad. Es decir:

$$\mathbf{V} = V \cdot \mathbf{u}$$

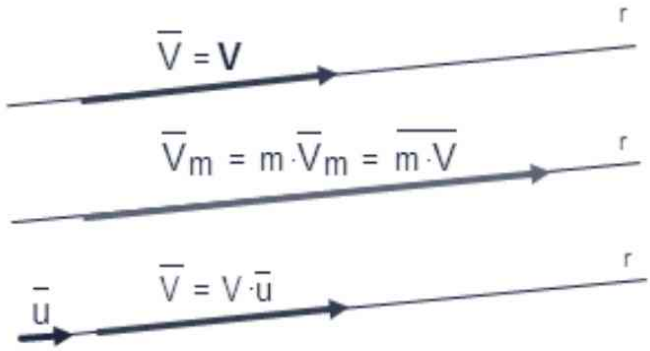


Figura B.4. Producto de un escalar por un vector. Vector unitario

En el plano, un sistema muy importante de vectores unitarios es el que los mismos tienen por direcciones las correspondientes a los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas (x, y) en sentido positivo de estos ejes y que se llaman **versores fundamentales**, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$.

Conforme a lo anterior, *figura B.5,* todo vector V en el plano se puede representar con su origen en el correspondiente origen o de un sistema de coordenadas xy. Sean (V_x, V_y) las coordenadas cartesianas del punto extremo del vector V cuyo origen es o. Los vectores, $V_x \cdot i$, y $A_y \cdot j$ se llaman vectores componentes rectangulares o simplemente vectores componentes de V, según las direcciones x e y respectivamente. Los escalares V_x y V_y se llaman componentes rectangulares o cartesianas, o simplemente componentes del vector V según las direcciones x e y, respectivamente. De esta manera, el vector V se puede poner en la forma:

$$\mathbf{V} = V_x \cdot \mathbf{i} + V_y \cdot \mathbf{j}$$

De la *figura B.5* se deduce:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \quad ; \quad \text{tag}\,\theta = \frac{V_y}{V_x} \quad ; \quad V_x = V \cdot \cos\theta \quad ; \quad V_y = V \cdot \text{sen}\,\theta$$

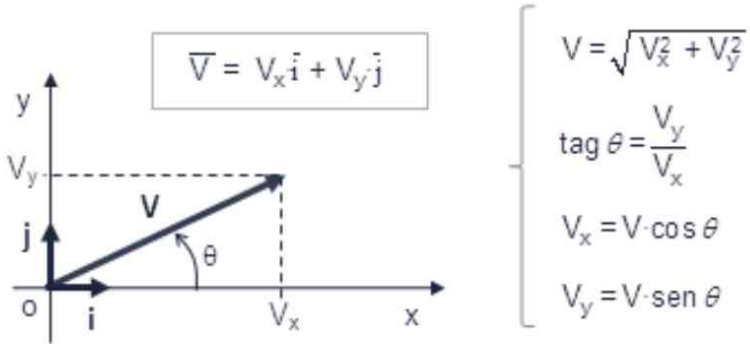


Figura B.5. Componentes de un vector

Dados dos vectores ***A*** y ***B*** en función de los vectores unitarios, la suma y diferencia son:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x) \cdot \mathbf{i} + (A_y + B_y) \cdot \mathbf{j}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x) \cdot \mathbf{i} + (A_y - B_y) \cdot \mathbf{j}$$

Producto escalar de dos vectores

Se denomina **producto escalar** o **interno** de dos vectores ***A*** y ***B*** al escalar obtenido como producto de los módulos de los vectores por el coseno del ángulo θ que forman. Se indica el producto escalar con un punto, de forma tal que:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A \cdot B \cdot \cos\theta$$

Siendo θ el ángulo formado por los dos vectores.

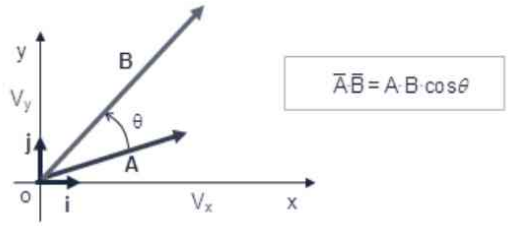


Figura B.6. Producto escalar de dos vectores

Si los vectores ***A*** y ***B*** están en función de los vectores unitarios, el producto escalar es:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_X \cdot B_x + A_y \cdot B_y$$

Producto vectorial de dos vectores

Se llama **producto vectorial** o **externo** de dos vectores ***A*** y ***B***, se escribe ***AxB***, a otro **vector** que tiene:

1. Por módulo al producto de los módulos *A* y *B* por el seno del ángulo θ que forman ambos vectores:

$$|\mathbf{A}x\mathbf{B}| = A \cdot B \cdot \text{sen}\,\theta$$

2. La dirección *perpendicular* al plano determinado por las direcciones de los vectores ***A*** y ***B***.

3. El sentido del vector resultante de ***AxB*** está dado por la regla de la mano derecha, "si los cuatro dedos de la mano derecha indican el sentido para llevar el primer vector sobre el segundo, por el recorrido más corto, el pulgar indica el sentido del vector resultante"

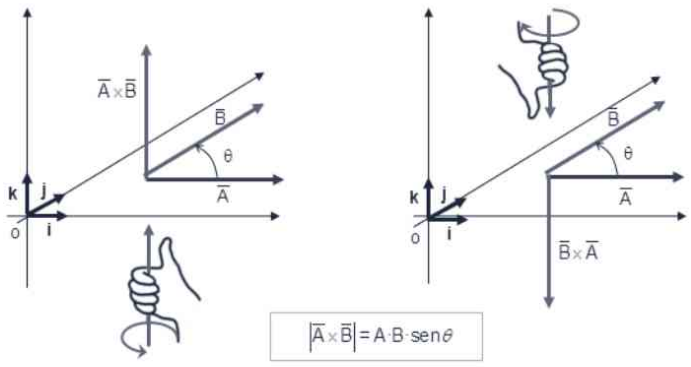


Figura B.7. Producto vectorial de dos vectores

Si los vectores ***A*** y ***B*** están en función de los vectores unitarios, el producto vectorial es:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (A_X \cdot B_y - A_y \cdot B_x) \cdot \mathbf{k}$$

Siendo ***k*** un vector unitario perpendicular a ***i*** y ***j***.

Ejemplo

Se tienen los vectores ***A*** y ***B*** representados en la *figura B.7.* Las componentes cartesianas de los vectores y las diferentes operaciones son:

$\mathbf{A} = 10_{\angle 30^\circ}$	$A_x = 10\cdot\cos 30^\circ = 8{,}6$	$A_Y = 10\cdot\text{sen } 30^\circ = 5$	$\mathbf{A} = 8{,}6\cdot\mathbf{i} + 5\cdot\mathbf{j}$
$\mathbf{B} = 8_{\angle 70^\circ}$	$B_x = 8\cdot\cos 70^\circ = 2{,}7$	$B_Y = 8\cdot\text{sen } 70^\circ = 7{,}5$	$\mathbf{B} = 4\cdot\mathbf{i} + 6{,}9\cdot\mathbf{j}$
A + B	$\mathbf{A}+\mathbf{B} = (A_x + B_x)\cdot\mathbf{i} + (A_y + B_y)\cdot\mathbf{j} = (8{,}6 + 2{,}7)\cdot\mathbf{I} + (5 + 7{,}5)\cdot\mathbf{j} = 11{,}6\cdot\mathbf{I} + 10{,}2\cdot\mathbf{j}$		
	$\lvert\mathbf{A}+\mathbf{B}\rvert = \sqrt{11{,}6^2 + 10{,}2^2} = 15{,}4$	$\theta = \text{arctag} = \dfrac{10{,}2}{11{,}6} = 41{,}3^\circ$	$\mathbf{A}+\mathbf{B} = 15{,}4_{\angle 41{,}3^\circ}$
A - B	$\mathbf{A}-\mathbf{B} = (A_x - B_x)\cdot\mathbf{i} + (A_y - B_y)\cdot\mathbf{j} = (8{,}6 - 2{,}7)\cdot\mathbf{I} + (5 - 7{,}5)\cdot\mathbf{j} = 5{,}9\cdot\mathbf{I} - 2{,}5\cdot\mathbf{j}$		
	$\lvert\mathbf{A}-\mathbf{B}\rvert = \sqrt{5{,}9^2 + 2{,}5^2} = 6{,}4$	$\theta = \text{arctag} = \dfrac{-2{,}5}{5{,}9} = -23^\circ$	$\mathbf{A}-\mathbf{B} = 6{,}4_{\angle -23^\circ}$
A·B	$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A\cdot B\cdot\cos\theta = 10\cdot 8\cdot\cos 40^\circ = 60{,}7$		
	$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_X\cdot B_x + A_y\cdot B_y = 8{,}6\cdot 2{,}7 + 5\cdot 7{,}5 = 60{,}7$		
A×B	$\lvert\mathbf{A}\times\mathbf{B}\rvert = A\cdot B\cdot\text{sen}\,\theta = 10\cdot 8\cdot\text{sen } 40^\circ = 51$		
	$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (A_X\cdot B_y - A_y\cdot B_x)\cdot\mathbf{k} = (8{,}6\cdot 7{,}5 - 5\cdot 2{,}7)\cdot\mathbf{k} = 51\cdot\mathbf{k}$		

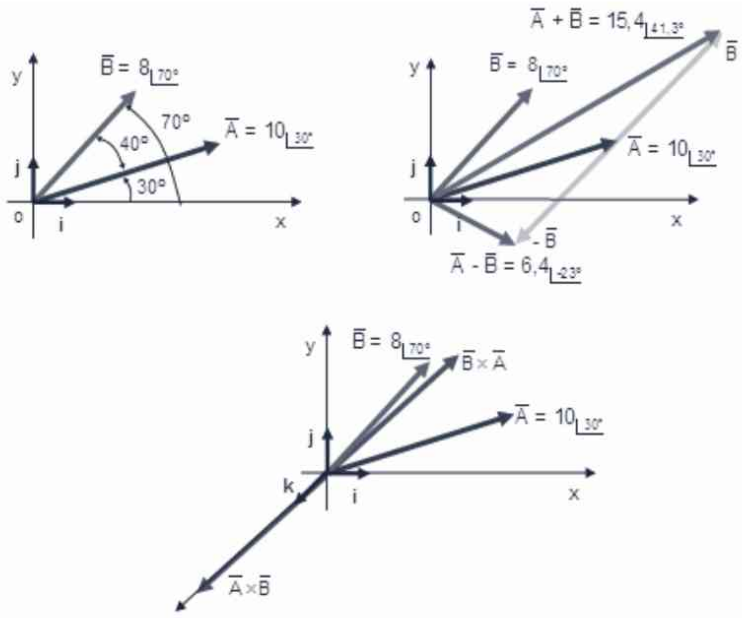
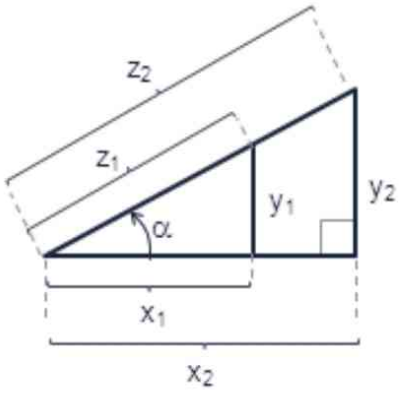


Figura B.8. Operaciones con vectores.

Anexo C

TRIGONOMETRÍA

Triángulo rectángulo y proporcionalidad:



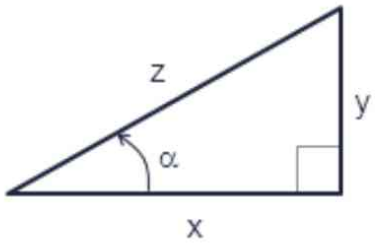
$$z_1^2 = x_1^2 + y_1^2 \quad ; \quad z_2^2 = x_2^2 + y_2^2$$

$$\frac{y_1}{z_1} = \frac{y_2}{z_2} = \text{cte.} = \operatorname{sen}\alpha$$

$$\frac{x_1}{z_1} = \frac{x_2}{z_2} = \text{cte.} = \cos\alpha$$

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \text{cte.} = \operatorname{tag}\alpha$$

Funciones trigonométricas:

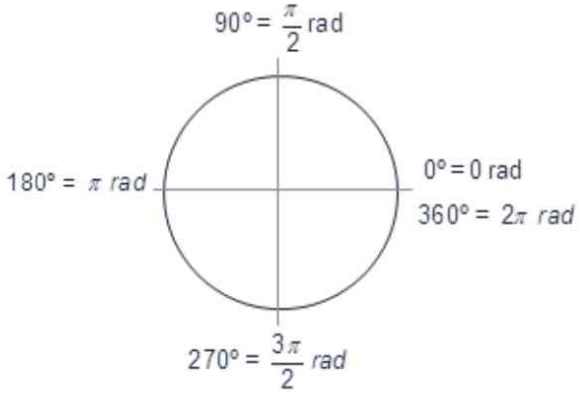


$$\text{sen}\,\alpha = \frac{y}{z} \Rightarrow \alpha = \text{arc sen}\,\frac{y}{z}$$

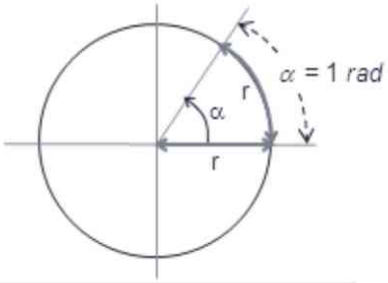
$$\cos\alpha = \frac{x}{z} \Rightarrow \alpha = \text{arc cos}\,\frac{x}{z}$$

$$\text{tag}\,\theta = \frac{y}{x} = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \theta = \text{arc tag}\,\frac{y}{x}$$

Medidas angulares:

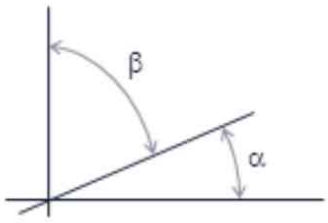


radio = *r*
arco = *r*
⇒ ángulo = 1 *rad*



arco (*m*) = ángulo (*rad*)·radio (*m*)

Ángulos complementarios:

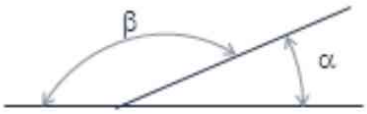


$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\text{sen}\,\beta = \text{sen}\,(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos\beta = \cos(90^\circ - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$$

Ángulos suplementarios:



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\text{sen}\,\beta = \text{sen}\,(180^\circ - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$$

$$\cos\alpha = \cos(180^\circ - \beta) = -\cos\beta$$

Otras funciones trigonométricas:		
$\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$	$\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$	$\operatorname{cotag}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tag}\alpha}$
Identidades pares e impares:		
Se dice que una función es par si $f(x) = f(-x)$, en el caso de que $f(x) = -f(-x)$, se dice que la función es impar.		
$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$
Relación fundamental:		
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$		
Funciones de suma y diferencia de ángulos:		
$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha$	$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta$	
$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$		
Funciones de ángulos dobles y medios:		
$\operatorname{sen} 2\cdot\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$	$\cos 2\cdot\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 2\cdot\cos^2\alpha - 1$	
$\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$	$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$	
Suma y diferencia de funciones:		
$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\cdot\operatorname{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$	$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$	
$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{\alpha-\beta}{2}$	$\cos\alpha - \cos\beta = -2\cdot\operatorname{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{\alpha-\beta}{2}$	
$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$		

Producto de funciones:

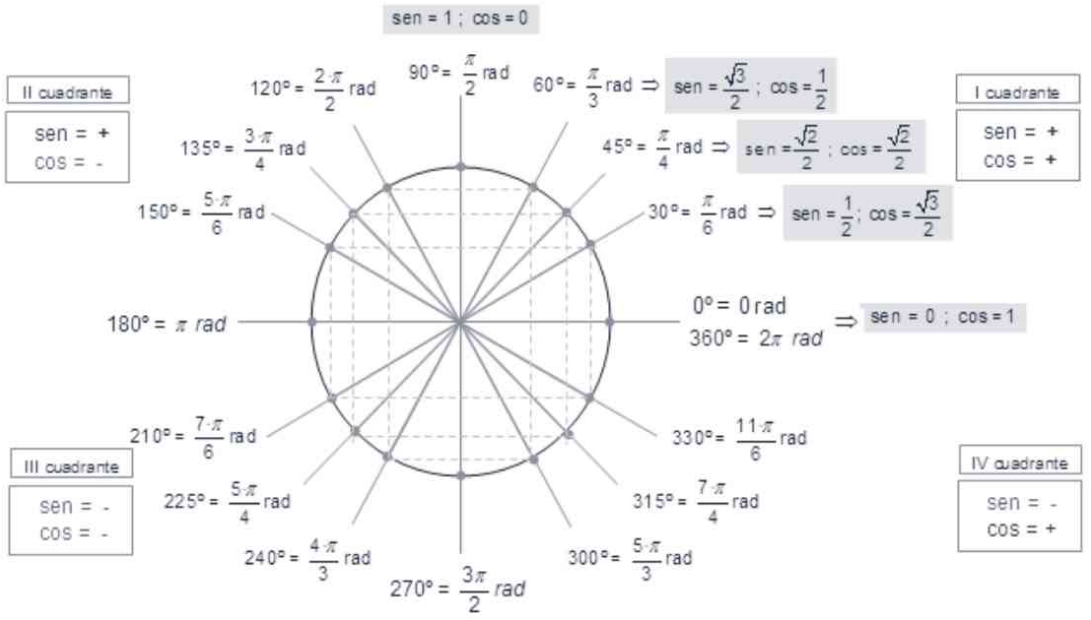
$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\cdot\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cdot\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\cdot\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cdot\cos(\alpha-\beta)$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\cdot\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cdot\cos(\alpha-\beta)$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta}$$

Funciones trigonométricas de ángulos notables:



Anexo D

NÚMEROS COMPLEJOS

Números complejos

El sistema numérico, como se conoce en la actualidad, es el resultado de una evolución gradual en la historia de las Matemáticas. A continuación se relacionan los tipos de números que la humanidad ha ido descubriendo.

- **Números naturales.** También llamados enteros positivos (1, 2, 3, …).

- **Números enteros.** Formados por los naturales más el cero y naturales negativos (… -2, -1, 0, 1, 2, ...).

- **Números racionales.** Formados por los enteros más las fracciones (… -8/3, -1, 5/4, 2, …).

- **Números irracionales.** Formados por todos los números decimales cuya parte decimal tiene infinitas cifras no periódicas, es decir, por todos los números que no se pueden representar por el cociente de dos números enteros. Son irracionales $\sqrt{2} = 1{,}41423\ldots$, $\pi = 3{,}14159...$, etc.

- **Números reales.** Formados por el conjunto de números racionales e irracionales.

  Los números reales pueden representarse por puntos de una recta infinita que llamamos *eje* o *recta real.* El punto correspondiente al cero, se llama *origen.*

- **Número imaginario.** No existe un número real *x* que satisfaga la ecuación polinómica, $x^2 + 1 = 0$. Pues tanto "1" como "-1" al elevarlo al cuadrado es "1" haciendo imposible una solución. Para resolver este tipo de ecuaciones, es necesario introducir el concepto de número imaginario.

  Un número es un *número imaginario* cuando su cuadrado es negativo. Si "*y*" es un número imaginario se ha de cumplir:

$$y^2 = -b$$

  Se llama unidad imaginaria "*j*" a:

$$j = \sqrt{-1}$$

  De esta manera, cualquier número imaginario "*y*" se puede poner como múltiplo de la unidad imaginaria: "*j*":

$$y = \sqrt{-b} = \sqrt{-1 \cdot b} = \sqrt{-1}\sqrt{b} = j \cdot \sqrt{b}$$

- **Números complejos.** Se define un número complejo, $\boldsymbol{z}$, mediante la siguiente expresión:

$$\bar{z} = \mathbf{z} = a + j \cdot b$$

  Esta expresión se conoce con el nombre de **forma binómica** del complejo $\boldsymbol{z}$, siendo *a* y *b* una pareja cualquiera de números reales y ***j*** es la unidad imaginaria, definida anteriormente. Para la notación de un número complejo se utiliza una letra con una rayita encima o dicha letra en negrita.

  En el número complejo $\boldsymbol{z}$, *a* y *b* son, respectivamente, la parte *real* y la parte *imaginaria* de $\boldsymbol{z}$. Si, $b = 0$, se tiene un número real. Si $a = 0$, se tiene un número imaginario.

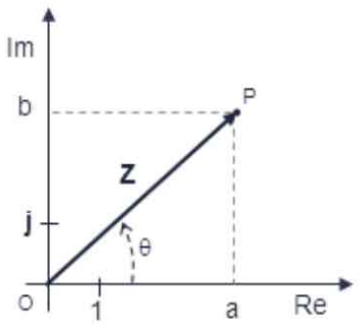
  Dado un número complejo $\boldsymbol{z}$, se llama *conjugado* $\boldsymbol{z}^*$ de dicho número al número complejo que tiene la misma parte real, pero la parte imaginaria es de signo contrario. El conjugado del número complejo $\boldsymbol{z}$ anterior es:

$$\bar{z}^* = \mathbf{z}^* = a + j \cdot b$$

Representación gráfica

Como los números complejos son pares de números reales podemos efectuar una representación de los mismos en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales. En

esta representación, se llama *eje real* (*Re*) al eje de *las x*, y *eje imaginario* (*Im*) al eje de las *y*.



$$\bar{z} = \mathbf{z} = a + j \cdot b$$

$$z = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \text{arctag}\frac{b}{a}$$

Figura D.1. Representación gráfica del número complejo, $\boldsymbol{z} = a + j \cdot b$

Al número complejo, $\boldsymbol{z} = a + j \cdot b$, le corresponde un punto *P* del plano al que se le llama afijo de $\boldsymbol{z}$.

El **módulo** *z* de un número complejo $\boldsymbol{z}$ es el módulo del vector determinado por el origen de coordenadas y su afijo, es decir, $z = OP$.

El **argumento** θ del número complejo $\boldsymbol{z}$ es el ángulo que forma el vector con el eje real, y tomándose como sentido positivo el anti horario.

La forma **polar** del número complejo $\boldsymbol{z}$ es la expresión:

$$\bar{z} = z_{\underline{|\alpha}}$$

De la *figura D.1* se deduce:

$$z = \sqrt{a^2 + b^2} \; ; \; \alpha = \text{arctg}\frac{b}{a}$$

$$a = z \cdot \cos\alpha$$

$$b = z \cdot \text{sen}\,\alpha$$

Como:

$$\bar{z} = a + j \cdot b = z \cdot \cos\alpha + j \cdot z \cdot \text{sen}\,\alpha = z \cdot (\cos\alpha + j \cdot \text{sen}\,\alpha)$$

Siendo la forma **trigonométrica** del número complejo *z*:

$$\bar{z} = z\cdot(\cos\alpha + j\cdot\operatorname{sen}\alpha)$$

Operaciones con números complejos

Sean los dos números complejos siguientes:

En forma binómica, $\bar{z}_1 = a + j\cdot b$, y en forma polar, $\bar{z}_1 = z_{1\underline{\lfloor \alpha_1}}$

En forma binómica, $\bar{z}_2 = c + j\cdot d$, y en forma polar, $\bar{z}_2 = z_{2\underline{\lfloor \alpha_2}}$

Operaciones en forma binómica:

- **Suma**: $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (a + c) + j\cdot(b + d)$
- **Sustracción**: $\bar{z}_1 - \bar{z}_2 = (a - c) + j\cdot(b - d)$
- **Multiplicación**: $\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2 = (a\cdot c - b\cdot d) + j\cdot(a\cdot d + b\cdot c)$
- **División**: $\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \dfrac{(a+j\cdot b)}{(c+j\cdot d)} = \dfrac{(a+j\cdot b)\cdot(c-j\cdot d)}{(c+j\cdot d)\cdot(c-j\cdot d)} = \dfrac{(a\cdot c+b\cdot d)+j\cdot(b\cdot c-a\cdot d)}{c^2+d^2} = \dfrac{a\cdot c+b\cdot d}{c^2+d^2} + j\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$

Operaciones en forma polar:

- **Multiplicación**: $\bar{z}_1.\bar{z}_2 = z_1\cdot z_{2\underline{\lfloor \alpha_1+\alpha_2}}$
- **División**: $\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \dfrac{z_1}{z_{2\underline{\lfloor \alpha_1-\alpha_2}}}$
- **Potenciación**: $(\bar{z})^n = (z)^n_{\underline{\lfloor n\cdot\alpha}} = z^n\cdot(\cos n\cdot\alpha + j\cdot\operatorname{sen} n\cdot\alpha)$

En la fórmula anterior si el módulo, $z = 1$, se tiene la fórmula de Moivre:

$$(\cos\alpha + j\cdot\operatorname{sen}\alpha)^n = (\cos n\cdot\alpha + j\cdot\operatorname{sen} n\cdot\alpha)$$

- **Radicación**: $\sqrt[n]{\bar{z}} = \sqrt[n]{z_{\lfloor \alpha}} = \left(\sqrt[n]{z}\right)_{\lfloor \frac{\alpha}{n} + \frac{2 \cdot k \cdot \pi}{n}}$

Ejemplo

	Forma polar	Forma trigonométrica y binómica
$\bar{z}_1$	$\bar{z}_1 = 4_{\lfloor 60^\circ}$	$\bar{z}_1 = 4_{\lfloor 60^\circ} = 4 \cdot \cos 60^\circ + j \cdot 4 \cdot \text{sen}\, 60^\circ = 2 + j \cdot 3{,}46$
$\bar{z}_2$	$\bar{z}_2 = 3_{\lfloor 210^\circ}$	$\bar{z}_2 = 3_{\lfloor 210^\circ} = 3 \cdot \cos 210^\circ + j \cdot 3 \cdot \text{sen}\, 210^\circ = -2{,}6 - j \cdot 1{,}5$
$\bar{z}_1 + \bar{z}_2$	$\rightarrow$	$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (2 + j \cdot 3{,}46) + (-2{,}6 - j \cdot 1{,}5) = -0{,}6 + 1{,}96$
$\bar{z}_1 - \bar{z}_2$	$\rightarrow$	$\bar{z}_1 - \bar{z}_2 = (2 + j \cdot 3{,}46) - (-2{,}6 - j \cdot 1{,}5) = 4{,}6 + 4{,}96$
$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$	$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = 4_{\lfloor 60^\circ} \cdot 3_{\lfloor 210^\circ} = 12_{\lfloor 270^\circ}$	$\leftarrow$
$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$	$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{4_{\lfloor 60^\circ}}{3_{\lfloor 210^\circ}} = 1{,}33_{\lfloor -150^\circ}$	$\leftarrow$
$\left(\bar{z}_1\right)^2$	$\left(\bar{z}_1\right)^2 = 4^2_{\lfloor 2 \cdot 60^\circ} = 16_{\lfloor 120^\circ}$	$\leftarrow$
$\left(\bar{z}_1\right)^{1/2}$	$\left(\bar{z}_1\right)^{1/2} = 4^{1/2}_{\lfloor \frac{60^\circ}{2} + \frac{2 \cdot k \cdot \pi}{2}} = 2_{\lfloor 30^\circ + k \cdot \pi}$	$\leftarrow$

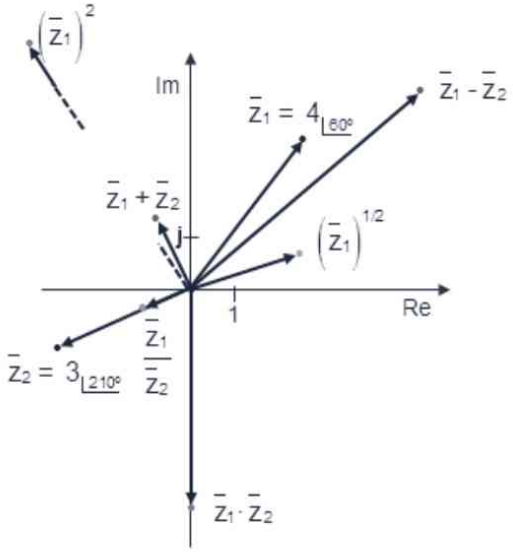


Figura D.2. Ejemplo

BIBLIOGRAFÍA

DMINISTER J. A. (1979). *Circuitos Eléctricos*. McGraw-Hill.

FOUILLÉ, A. (1971). *Electrotecnia para Ingenieros. Tomo I*. Aguilar.

FRAILE MORA, J. (2005). *Electromagnetismo y Circuitos Eléctricos*. McGraw-Hill.

MORENO N.; BACILLER A.; BRAVO J. C. (2003). *Problemas Resueltos de Tecnología Eléctrica.* Thomson.

RAS, E. (1972). *Teoría de Circuitos*. Marcombo.

SEIDMAN, A. H.; MAHROUS, H.; HICKS, T. G. (1984). *Manual de Cálculos de Ingeniería Eléctrica*. McGraw-Hill.

SERWAY, R. A.; BEICHNER, R. J. (2000). *Física para Ciencias e Ingeniería.* McGraw-Hill.

WILDI, T. (1983). *Tecnología de los Sistemas Eléctricos de Potencia*. Hispano Europea.

ÍNDICE DE MAGNITUDES Y UNIDADES

MAGNITUDES Y UNIDADES				
Magnitud	**Símbolo**	**Unidad**	**Símbolo**	**Página**
ELECTROSTÁTICA				
Carga eléctrica	Q	culombio	C	24
Fuerza	F	newton	N	35
Permitividad del vacío	ε_0	culombio^2/newtom·metro^2	C^2/N·m^2	35
Permitividad absoluta	ε	culombio^2/newtom·metro^2	C^2/N·m^2	36
Permitividad relativa	ε_r	-	-	36
Campo eléctrico	E	newton/culombio	N/C	38
Diferencia de potencial (ddp)	V_{ab}	voltio	V	42
Trabajo eléctrico	*W*	julio	J	42
Potencial eléctrico	V	voltio	V	46
Energía potencial eléctrica	U	julio	V	49
Flujo eléctrico	Φ_E	newton·metro^2/culombio	N·m^2/C	50
Densidad lineal de cargas	λ	culombio/metro	C/m	56
Densidad superficial de cargas	σ	culombio/metro^2	C/m^2	58

Densidad volumétrica de cargas	ρ	culombio/metro^3	C/m^3	55
Capacidad	C	faradio	F	80
Susceptibilidad eléctrica	χ	-	-	95
Desplazamiento eléctrico	D	culombio/metro^2	C/m^2	96
Flujo del desplazamiento eléctrico	Φ_D	culombio	C	97
CORRIENTE CONTINUA				
Intensidad (corriente eléctrica)	I	amperio	A	133
Densidad de corriente	J	amperio/metros^2	A/m^2	136
Tensión eléctrica (ddp)	V	voltio	V	137
Resistencia eléctrica	R	ohmio	Ω	146
Conductancia eléctrica	G	siemens	$S = \Omega^{-1}$	146
Resistividad eléctrica	ρ	ohmio·milimetros^2/metro	Ω·mm^2/m	147
Conductividad eléctrica	γ	metro/ ohmio·milimetros^2	m/Ω·mm^2	149
Potencia eléctrica	P	vatios	W	140
Energía eléctrica	*W*	julio	J	140
Fuerza electromotriz (fem)	E	voltio	V	139
Fuerza contraelectromotriz (fcem)	E'	voltio	V	156
ELECTROMAGNETISMO				
Inducción magnética	B	tesla	T	299
Flujo magnético	Φ	weber	Wb	301
Par de fuerzas	T	newton·metro	N·m	328
Excitación magnética (intensidad de campo magnético)	H	amperio/metro	A/m	336

Permeabilidad magnética del vacío	μ_0	newton/amperio^2	N/A^2	336
Permeabilidad magnética absoluta	μ	newton/amperio^2	N/A^2	336
Permeabilidad magnética relativa	μ_r	-	-	336
Susceptibilidad magnética	χ	-	-	342
Coeficiente de autoinducción (inductancia)	L	henrio	H	400
Momento magnético de una espira	M	amperio·metro^2	A·m^2	556
Coeficiente de inducción mutua	M	henrio	H	407
Coeficiente de acoplamiento de bobinas	k	-	-	418
Fuerza magnetomotriz	F	amperio·vuelta	A	424
Reluctancia	R	amperio/weber	A/Wb = H^{-1}	424
Coeficiente de Hopkinson	ν	-	-	
CORRIENTE ALTERNA				
Periodo	T	segundo	s	461
Frecuencia	f	hertz	Hz	461
Pulsación	ω	radianes/segundo	rad/s	462
Velocidad de rotación	N	revoluciones por minuto	rpm	468
Tensión (eficaz)	V	voltio	V	463
Tensión (valor instantáneo)	v	voltio	V	463
Tensión (valor máximo)	V_0	voltio	V	462
Intensidad (eficaz)	I	amperio	A	463
Intensidad (valor instantáneo)	i	amperio	A	463
Intensidad (valor máximo)	I_0	amperio	A	462
Impedancia	Z	ohmio	Ω	479

Resistencia	R	ohmio	Ω	479
Reactancia	X	ohmio	Ω	479
Reactancia inductiva	X_L	ohmio	Ω	490
Reactancia capacitiva	X_C	ohmio	Ω	497
Admitancia	Y	siemens	$S = \Omega^{-1}$	481
Conductancia	G	siemens	$S = \Omega^{-1}$	481
Susceptancia	B	siemens	$S = \Omega^{-1}$	481
Potencia (valor instantáneo)	p	vatio	W	487
Potencia activa	P	vatio	W	506
Potencia reactiva	Q	voltio·amperio reactivo	V·Ar	506
Potencia aparente	S	voltio·amperio	V·A	507
Potencia de distorsión	D	voltio·amperio	V·A	532
Factor de potencia	fdp	-	-	694
Coseno de fi	cos φ	-	-	694

ÍNDICE ALFABÉTICO

A

Acoplamiento magnético....406
Admitancia....481, 483
Aislantes....25, 33, 101
Amperímetro....162
Amperio....133, 333
Amplitud de un armónico....526
Analogía circuito magnético y circuito eléctrico....425
Analogía hidráulica de un condensador....102
Ángulo de fase....469
Argumento....476, 479, 480
Armónicos....523
Armónicos exportados....528
Armónicos importados....528
Autoinducción....399

B

Bobina toroidal....320
Bornes homólogos....415

C

Caída de tensión....184
Campo desmagnetizante....348
Campo eléctrico....37, 39, 47, 352, 442
Campo es conservativo....392
Campo es no conservativo....392
Campo magnético....299, 352
Campo magnético coercitivo....346
Capacidad....80, 496, 517, 615, 655
Capacidad equivalente....103, 104, 105
Carga eléctrica....23, 39, 649, 651
Cargas desequilibradas....588, 590, 592
Cargas equilibradas....584, 587
Cargas lineales....523
Cargas no lineales....523
Ciclo....461
Circulación de la inducción magnética....312
Coeficiente de acoplamiento....418, 441
Coeficiente de autoinducción....400, 441
Coeficiente de Hopkinson....432, 442
Coeficiente de inducción mutua....407, 441
Colector....435
Condensador....82, 517, 615, 649
Condensadores en paralelo....103
Condensadores en serie....104
Conductancia....146, 481
Conductividad....143, 145, 146, 148, 649
Conductores....25, 33, 101
Conductores huecos....399
Constante de tiempo....244, 249
Corrección del f.d.p....517
Corrección del factor de potencia....514, 614
Corriente de conducción....167, 395, 396
Corriente de desplazamiento....168, 395, 396, 662
Corrientes amperianas....337, 339
Corrientes de Foucault....396, 397, 398, 660
Cortocircuitos....182
Cos φ....515

Cosímetro....515
Culombio....24

D

Ddp....42, 45, 137, 144, 651
Delgas....435
Densidad de corriente....135, 137, 143, 442
Densidad de flujo....302
Densidad de flujo magnético....302
Densidad superficial de carga....58, 84
Desfase....480
Desmagnetizar....347
Desplazamiento....353
Desplazamiento eléctrico....96
Dieléctrico....33, 93, 95
Diferencia de potencial....45, 138, 385
Diferencia de potencial eléctrico....42, 137
Dipolo....92, 138, 169, 301
Dipolo eléctrico....92, 352
Dipolo magnético....300, 329
Distorsión individual armónica....527
Distorsión total armónica....527
Dominio de la frecuencia....473
Dominio del tiempo....473, 475
Dominio fasorial....473, 475
Dominios de Weiss....667
Dominios magnéticos....301, 344

E

Ecuaciones de Maxwell....439, 662
Efecto Barkhausen....346
Efecto corona....64
Efecto Hall....334, 665
Efecto Joule....149, 186
Efecto pelicular....399
Efecto proximidad....399
Efecto Skin o pelicular....317
El cable de guarda....61
El coeficiente de autoinducción....427
Electrización....32, 33
Electrización por contacto....26, 32
Electrización por frotamiento....23, 32
Electrización por influencia....27, 32
Energía almacenada en un campo magnético....441
Energía activa....514
Energía almacenada en un acoplamiento magnético....412
Energía almacenada en un campo eléctrico....403
Energía almacenada en una bobina....402, 441
Energía almacenada por un condensador....100
Energía de un campo magnético....401
Energía eléctrica....140, 156
Energía eléctrica almacenada en un condensador....98
Energía fluctuante....495, 508, 514
Energía potencial eléctrica....49
Energía útil....495, 508
Entrehierro....426
Escobillas....435
Espectro armónico....526
Espectro magnético....300
Excitación magnética....336, 353

F

F.d.p....515, 536
Factor de amplitud....466
Factor de desplazamiento....534
Factor de distorsión....536
Factor de forma....466
Factor de potencia....515, 538
Faradio....80, 82
Fase....462
Fcem....156, 157, 159
Fem....138, 139, 157
Fem autoinducida....399, 401
Fem inducida....380, 381, 382, 384, 387
Fem sinusoidal....460, 467
Flujo de fuga....432
Flujo debido al desplazamiento D....97
Flujo eléctrico....50, 353, 396
Flujo magnético....301, 353, 442
Fmm....442
Forma binómica....474, 537
Forma polar....474, 537
Forma trigonométrica....474
Frecuencia....461
Fuente de intensidad....169
Fuente de tensión....169
Fuentes de energía dependientes....169
Fuentes de energía independientes....169
Fuerza contraelectromotriz....156, 393, 401, 437
Fuerza de Laplace....324, 651
Fuerza de Lorentz....322, 669
Fuerza de un electroimán....422
Fuerza electromagnética....322

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Fuerza electromotriz.....138, 155, 380, 401
Fuerza electromotriz autoinducida.....441
Fuerza electromotriz inducida.....380, 441
Fuerza magnetomotriz.....423, 441
Fuerzas de Lorentz.....323
Fugas magnéticas.....432
Fusible.....182

G

Generador elemental.....433
Generador elemental de energía eléctrica..392
Generador trifásico conectado en estrella .578
Generador trifásico conectado en triángulo.....581
Gradiente de V.....43, 48

H

Henrio.....400
Henrio inverso.....424
Hertz.....461
Histéresis.....346
Histéresis giratoria.....348

I

Imanación.....337, 352
Impedancia.....479, 537, 538
equivalente.....481, 482
en paralelo.....482, 538
en serie.....481, 538
forma binómica.....480
forma polar.....480
Inducción eléctrica.....442
Inducción magnética.....299, 352, 442
Inducción remanente.....346
Inductancia.....166, 247, 400, 655
Inductancia mutua.....407
Inductancias en paralelo.....420, 442
Inductancias en serie.....418, 441
Intensidad.....133, 144, 162
Intensidad de campo eléctrico.....38, 352
Intensidad de campo magnético.....336, 442
Intensidad de fase.....580, 582
Intensidad de línea.....580, 582
Interarmónicos.....528
Ionización.....63, 64

J

Jaula de Faraday.....60
Julio.....49, 139, 149

K

KCL.....215
KVL.....215
kW · h.....140, 142

L

Ley de Ampère.....654
Ley de Ampère-Maxwell.....396, 441
Ley de Biot-Savart.....305, 307, 313, 653
Ley de Coulomb.....35, 651
Ley de Faraday.....380, 388
Ley de Faraday-Henry.....380, 655
Ley de Gauss.....51, 52, 353, 354
Ley de Gauss de los campos eléctricos.....438
Ley de Gauss de los campos magnéticos..438
Ley de Gauss para el magnetismo.....304
Ley de Hopkinson.....424, 442, 663
Ley de Joule.....149, 658
Ley de las mallas.....215
Ley de Lenz.....382, 388, 657
Ley de los nudos.....215
Ley de Ohm.....143, 157, 480, 538, 655
Leyes de Gauss.....657
Leyes de Kirchhoff.....215, 539, 659
Leyes de Kirchhoff en CA.....484
LHI.....341, 353
Líneas de campo.....352
Líneas de campo magnético.....299
Líneas de fuerza.....38, 39, 299

M

Magnitud.....467
Malla.....214
Marcas de polaridad.....410
Materiales óhmicos.....143
Maxwell.....302
Medio magnético es perfecto.....341
Megaóhmetro.....164
Método de corrientes de mallas.....221
Método de corrientes de ramas.....219
Método de las tensiones de los nudos.....223

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

Módulo....476, 537
Momento dipolar....93, 352
Momento magnético de una espira....300, 328
Motor elemental....437
Motor elemental de energía eléctrica....393

N

Nudo....214

O

Ohmímetro....163
Ohmio....146, 479, 490, 497

P

Pantalla electrostática....60
Pérdidas de Foucault....441
Pérdidas en el hierro....405, 441
Pérdidas por histéresis....405, 441
Periodo....461
Permeabilidad magnética....306
Permeabilidad magnética absoluta....336, 353
Permeabilidad magnética del vacío....336
Permeabilidad magnética relativa....336, 353
Permitividad absoluta....36
Permitividad del vacío....35
Permitividad eléctrica absoluta....353
Permitividad eléctrica relativa....353
Permitividad relativa....36, 86
Point of Common Coupling, PCC....524
Polaridad de las tensiones inducidas....410
Polarización....44, 45, 88, 95, 352
Polarización eléctrica....26, 94
Polarización remanente....96
Polímetro....164
Polos geográficos....298
Polos magnéticos....298
Potencia activa....489, 506, 507, 513, 514, 597, 600, 602
Potencia aparente....507, 514, 597, 600, 602
Potencia compleja....508
Potencia de distorsión....534
Potencia de distorsión armónica....532
Potencia eléctrica....139
Potencia instantánea....487, 511, 597, 599
Potencia magnetizante....495
Potencia reactiva....506, 513, 514, 597, 600, 602
Potencia reactiva capacitiva....501
Potencia reactiva inductiva....494
Potenciómetro....150
Potencia activa....488
Principio de conservación de la carga eléctrica....24, 215
Principio de conservación de la energía....149, 157, 179, 237, 383, 384, 431, 437, 519, 520
Principio de superposición....225
Principio del flujo máximo....328
Pulsación....462
Punto de Curie....346

R

Rama....214
Reacción del inducido....331
Reactancia....479
Reactancia capacitiva....497, 537, 538
Reactancia inductiva....490, 537, 538
Régimen permanente....241, 478
Régimen transitorio....241, 478
Regla de la mano izquierda....325
Regla de los puntos....415
Reluctancia....424, 441, 442
Reluctancias en paralelo....429, 442
Reluctancias en serie....429, 442
Reóstato....150
Representación cartesiana....469
Representación de Fresnel o fasorial....471
Resistencia....479, 538
Resistencia dieléctrica....442
Resistencia eléctrica....144, 146, 165
Resistencia equivalente....152, 153, 154
Resistencias en paralelo....153
Resistencias en serie....153
Resistencias internas....156
Resistividad....144, 146
Resonancia en paralelo....521
Resonancia en serie....520
Respuesta forzada....242
Respuesta natural....242
Rigidez dieléctrica....89, 98
Ruptura dieléctrica....89

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

S

Secuencia de fases....576, 595
Secuencia directa....576, 596
Secuencia inversa....576, 596
Semiconductores....34
Sentido convencional de la corriente....134
Sentido real de la corriente....134
Siemens....146, 661
Sistema trifásico....575
Sistema trifásico desequilibrado....578
Sistema trifásico equilibrado....577
Sobrecargas....182
Sobreintensidades....181
Solenoide....318
Superficie equipotencial....43, 46
Susceptancia....481
Susceptibilidad eléctrica....95, 353
Susceptibilidad magnética....353
Susceptibilidad magnética del medio....342
Sustancias diamagnéticas....342
Sustancias ferromagnéticas....343
Sustancias paramagnéticas....342

T

Tasa de distorsión armónica....535
Tensión eléctrica....138
Tensiones compuestas....578, 581
Tensiones de fase....578, 581
Tensiones de líneas....578, 581
Tensiones simples....578, 581
Teorema de Ampère....313, 395
Teorema de Ampère para el vector H....339
Teorema de Ampère-Maxwell....396
Teorema de Boucherot....519, 539, 669
Teorema de Kennelly....237, 594, 668
Teorema de la máxima transferencia de potencia....239
Teorema de Millman....236, 672
Teorema de Norton....230
Teorema de reciprocidad....235
Teorema de sustitución....234
Teorema de Tellegen....236, 673
Teorema de Thévenin....228
Teoría de C. Budeanu....531
Tesla....299, 664
Tetraedro de potencias....532, 670
Tierra....25, 26, 28, 61, 64, 82, 100, 298
Trabajo eléctrico....42, 139
Transformación de energía eléctrica en energía calorífica....149
Transformación de energía eléctrica en energía mecánica....438
Transformación de energía mecánica en energía eléctrica....437
Transformación de fuentes....232
Transformación de potencia eléctrica en potencia mecánica....394
Transformación de potencia mecánica en potencia eléctrica....393
Transformación estrella–triángulo....238
Transformación triángulo-estrella....238
Transformadores....412
Triángulo de impedancias....480, 505
Triángulo de tensiones....505
Triboeléctrica....28

V

Valor eficaz....463, 467
Valor instantáneo....462, 467, 537
Valor máximo....467
Valor máximo o de pico....462
Valor medio....462, 467
Vatímetro....163, 494
Vatio....140, 488
Vector magnetización....337
Velocidad de arrastre....136, 143, 145
Velocidad de la luz....306
Viento eléctrico....63
Voltímetro....162
Voltio....42, 138, 139, 156
Voltio-amperio....507
Voltio-amperio reactivo....494, 501

W

Weber....301, 660

Electricidad

Fundamentos y problemas de electrostática, corriente continua, electromagnetismo y corriente alterna

La lectura de este libro permite adquirir una visión de conjunto de los fundamentos de la electricidad, mediante una descripción sencilla, gráfica y práctica, pero con una adecuada fundamentación teórica, pues como dijo Ortega y Gasset, *"nada hay más práctico que una buena teoría"*. En él se desgranan, para su correcto estudio y comprensión, los contenidos necesarios para posteriormente poder adentrarse con propiedad en el amplio mundo de las aplicaciones eléctricas. Aunque el texto tiene un carácter terminal en sí mismo, puede servir de iniciación al libro *Instalaciones eléctricas en baja tensión. Diseño, cálculo, dirección, seguridad y montaje*, de los mismos autores y editorial, cuya 2ª Edición ve la luz en paralelo con esta publicación. Lo que precisamente ha animado a estos autores a lanzarse con esta publicación ha sido la más que buena acogida del anterior título en todo el mercado de habla hispana, así como las peticiones de muchos de sus lectores de poder disponer de un libro sobre fundamentos de electricidad, con la misma metodología pedagógica.

En la elaboración de sus contenidos se ha procurado emplear un lenguaje sencillo y claro, a la vez que riguroso, y se han utilizado procesos matemáticos básicos, pero que a su vez sean capaces de permitir culminar el proceso de aprendizaje con un nivel suficiente de conocimientos. Como valor añadido, en múltiples explicaciones se presentan los razonamientos desde varios ángulos o niveles matemáticos posibles y en una gran cantidad de casos se exponen las aplicaciones prácticas concretas de cada teoría vista.

El texto se ha estructurado en ocho capítulos y cuatro interesantes anexos; en sus más de cuatrocientas figuras se presentan de forma sintética y esquemática los diferentes contenidos que se desarrollan a lo largo del texto y que encuentran un buen punto de apoyo en el más de un centenar de problemas prácticos resueltos que se presentan. Es un libro útil, no solo durante la etapa de aprendizaje, sino también posteriormente durante el ejercicio de la actividad profesional.

El libro está dirigido preferentemente a los alumnos de los Ciclos Formativos de Formación Profesional de Electricidad-Electrónica, también para la asignatura Electrotecnia del Bachillerato Tecnológico, así como para alumnos de los primeros cursos de Grados en Ingenierías, Arquitectura y, en general, estudios técnicos que incorporen en su currículo asignaturas o módulos relacionados con la electricidad. Se ha pensado también para cubrir parte de la programación de un curso de Experto Profesional en Equipos e Instalaciones Eléctricas (*http://volta.ieec.uned.es/programa_ENER.asp*), reconocido con 20 créditos ECTS en un título propio de la UNED (Universidad Nacional de Educación a Distancia), que se imparte totalmente a distancia (*on line*). También puede ser útil para profesionales del sector y, en general, para todas aquellas personas que se encuentren en diferentes entornos relacionados con el mundo de la electricidad, bien por cursar enseñanzas profesionales o por desarrollar tareas en empresas que tengan que ver con este tipo de actividades.

Esperamos que esta obra cumpla con sus expectativas y le sea de utilidad.

9 788499 641348

https://yolibrospdf.com/electricidad.html

yolibros pdf.com

ra-ma.es

Ra-Ma®