Benjamín Garza Olvera

Cálculo integral

Segunda edición

ALWAYS LEARNING

PEARSON

Cálculo integral

Cálculo integral

BENJAMÍN GARZA OLVERA

Revisión técnica

Máximo Pérez Rivas
Universidad Nacional Autónoma de México

Sergio A. Pérez Ruiz
Instituto Tecnológico Autónomo de México

PEARSON

Datos de catalogación

Autor: Garza Olvera, Benjamín.

Cálculo integral
Matemáticas V, educación media superior
Primera edición

Pearson Educación de México, S. A. de C. V., 2015
ISBN: 978-607-32-3063-6

Área: Bachillerato/Matemáticas

Formato: 21 × 27 cm Páginas: 352

Cálculo integral

El proyecto didáctico *Cálculo integral* es una obra colectiva creada por encargo de la editorial Pearson Educación de México, S. A. de C. V., por un equipo de profesionales en distintas áreas, que trabajaron siguiendo los lineamientos y estructuras establecidos por el departamento Pedagógico de Pearson Educación de México, S. A. de C. V.

Especialistas en Cálculo integral responsables:
Obra original: Benjamín Garza Olvera
Revisión técnico-pedagógica: Máximo Pérez Rivas y Sergio A. Pérez Ruiz

▪ **Dirección general:** Sebastián Rodríguez ▪ **Dirección de contenidos y servicios digitales:** Alan Palau ▪ **Gerencia de contenidos K-12:** Jorge Luis Íñiguez ▪ **Gerencia de arte y diseño:** Asbel Ramírez ▪ **Coordinación de bachillerato y custom:** Lilia Moreno ▪ **Edición sponsor:** Berenice Torruco ▪ **Coordinación de arte y diseño:** Mónica Galván ▪ **Supervisión de arte y diseño:** Enrique Trejo ▪ **Asistencia editorial:** José Huerta ▪ **Edición de desarrollo:** Kenyi Casillas ▪ **Corrección de estilo:** Mireille Bravo ▪ **Lectura de pruebas:** Demetrio Alemán ▪ **Diseño de portada:** Pulso Comunicación ▪ **Diagramación:** Ediciones OVA.

ISBN LIBRO IMPRESO: 978-607-32-3063-6
ISBN E-BOOK: 978-607-32-3071-1
ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-3072-8

Avenida Antonio Dovalí Jaime # 70.
Torre B, Piso 6, Colonia Zedec Ed Plaza Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón, México, Distrito Federal C. P. 01210

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 17 16 15 14

PEARSON

Contenido

Cálculo integral

Presentación

El objetivo principal fue escribir un libro que ustedes los estudiantes pudieran leer, entender y disfrutar. A lo largo del libro se utiliza un lenguaje claro y preciso. Se utilizan oraciones cortas, explicaciones claras y muchos ejemplos resueltos a detalle. Los temas fundamentales de cálculo integral permiten cimentar bases más sólidas entre los conocimientos de álgebra, geometría y trigonometría, geometría analítica, así como de cálculo diferencial; todas las definiciones y explicaciones son sencillas y claras para que el estudiante adquiera habilidad en la ejercitación de problemas mediante el razonamiento inductivo. La didáctica que se desarrolla en el texto se fundamenta en una exposición de conceptos introductorios y ejemplos demostrativos, así como, una diversificación en el planteamiento del problema. Los problemas, ejercicios y prácticas que se desarrollan a lo largo de las unidades utilizan distintos tipos de reactivos, lo cual permite tener una evaluación continua del proceso enseñanza-aprendizaje. Se hace énfasis en el incremento gradual de la complejidad de cada ejercicio hasta lograr el cambio de la memorización por un razonamiento más analítico en el planteamiento y desarrollo del proceso de solución de un problema determinado. Al final del libro se encuentran las respuestas a los ejercicios impares para ayudar al estudiante a evaluar el proceso de solución con la respuesta a dicho problema. Los contenidos de este libro tienen como propósito facilitar el estudio de las matemáticas.

Agradezco el apoyo de cada uno de los compañeros de academia local, estatal y nacional para la revisión de este material. Asimismo, a todas las autoridades educativas que confiaron en mi esfuerzo y dedicación para lograr contenidos de alta calidad. De igual forma agradezco al editor, por su esmerada atención a la impresión de esta obra. Por último a mis exalumnos y en especial a mi familia. Debo hacer una mención especial al M. S. I. José Guzmán Martínez quién reviso el material de forma exhaustiva. Él me dijo un día: "*Cuando muere el hombre… Nace la leyenda… Dios da la vida… Nosotros la fuerza.*"

EL AUTOR
Q. I. y Lic. Benjamín Garza Olvera

Metodología para el trabajo con este material

El material está dividido en cuatro unidades, donde se desarrollan los contenidos actuales del programa general de bachillerato tecnológico. Cada unidad cuenta con una evaluación diagnóstica, el desarrollo de los diversos temas y una autoevaluación.

Evaluación diagnóstica

Es una serie de ejercicios que sirven como repaso operativo, pero en general se busca desarrollar habilidades de lógica, aritmética y álgebra.

Cuadros de competencias genéricas y disciplinares

Se localiza en cada una de las actividades que favorecen el logro de competencias; en este apartado el alumno, con la mediación del maestro, deberá determinar cuáles son las competencias genéricas y las competencias disciplinares que está desarrollando y escribir en el cuadro las que sean pertinentes.

Autoevaluación

Es una colección de ejercicios que ayudan a reforzar el trabajo desarrollado a lo largo de la unidad.

Competencias genéricas

Categorías	Competencias
Se autodetermina y cuida de sí	1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue. 2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros. 3. Elige y practica estilos de vida saludables.
Se expresa y se comunica	4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
Piensa crítica y reflexivamente	5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. 6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.
Aprende de forma autónoma	7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
Trabaja en forma colaborativa	8. Participa y colabora de manera efectiva en diversos equipos.
Participa con responsabilidad en la sociedad	9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo. 10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales. 11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica con acciones responsables.

UNIDAD 1

La integral

Evaluación diagnóstica

1. Encuentra la diferencial para la función $y = 5x^4 - 6x + 8$.

2. Calcula la suma usando las propiedades y las fórmulas de la notación de suma:

$$\sum_{i=1}^{n} i(7i+3)$$

3. Aplica el teorema 7 de las propiedades de la integral definida para encontrar el mayor y el menor valor posible de:

$$\int_1^5 (6x^5 + x^3 + 2)dx$$

4. Calcula la $\int_2^4 x^2 dx$ usando el teorema fundamental del cálculo.

5. Calcula la $\int (3x^3 + x^2 + 5x + 9)\,dx$.

La integral

Propósito de la unidad

Que el estudiante:

- Conozca la definición de diferencial y la interprete geométricamente.
- Conozca y aplique las diversas fórmulas fundamentales para determinar las diferencias de funciones.
- Conozca la notación de suma.
- Aplique las propiedades y fórmulas de la notación de suma.
- Conozca y aplique las sumas de Riemann.
- Conozca la integral definida y la notación de Leibniz para la integral.
- Identifique la integral propia e impropia.
- Aplique los teoremas de las propiedades de la integral definida.
- Conozca la integral indefinida.
- Utilice las ecuaciones del formulario general de integrales inmediatas elementales.

Competencias disciplinares

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos y analíticos, mediante lenguaje verbal y matemático.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Contenidos que aborda la unidad

Contenidos conceptuales

- La diferencial.
- La integral definida.
- Propiedades de la integral definida.
- La integral indefinida.
- Aplicación de las cinco primeras ecuaciones del formulario general de integrales inmediatas elementales.
- Aplicación de las ecuaciones 6 y 7 del formulario general de integrales inmediatas elementales.
- Aplicación de las ecuaciones 8 a la 17 del formulario general de integrales inmediatas elementales.
- Aplicación de las ecuaciones 18 a la 24 del formulario general de integrales inmediatas elementales.

Contenidos procedimentales

- Identificará la diferencial.
- Notará las diferencias entre la integral definida y una integral indefinida.
- Analizará las propiedades de la integral definida.
- Resolverá problemas utilizando el formulario general de integrales inmediatas elementales.

Contenidos actitudinales

- Colaborará con sus compañeros al resolver problemas.
- Respeto al trabajar en clase.
- Aprenderá a valorar el trabajo de sus compañeros al resolver problemas.
- Contribuirá con ideas de manera crítica y acciones responsables a la hora de trabajar en equipo.

La diferencial

Por lo general, la notación de derivada para la función $y = f(x)$, es:

$$y' = \frac{dy}{dx}, \text{ o bien, } y' = f'(x),$$

en donde el símbolo $\frac{dy}{dx}$ es una representación del cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando $\Delta x \to 0$.

Si la derivada de $f(x)$ es $f'(x)$ para un valor específico de la variable independiente x y su incremento es Δx, entonces la diferencial de la función dada se denota por el símbolo $df(x)$, y se define por la expresión:

$$df(x) = f'(x)\Delta x = \frac{dy}{dx}\Delta x \qquad \mathbf{(1)}$$

Dado que $f(x) = x$ y su derivada es $f'(x) = 1$; entonces, al sustituir en (**1**), resulta que $d(x) = (1)\Delta x$.

$$\therefore \quad dx = \Delta x \; \} \text{ Diferencial de la variable independiente.}$$

Si $y = f(x)$, al sustituir en la ecuación 1, tenemos que:

$$dy = f'(x)\Delta x = \frac{dy}{dx}\Delta x, \text{ o bien, } \Delta y \approx \frac{dy}{dx}\Delta x.$$

Definición

La diferencial dy de una función, es igual al producto de su derivada $\frac{dy}{dx}$ por la diferencial dx de la variable independiente.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra la diferencial para la función $y = ax^3$.

Solución

Si $\quad y = ax^3$

$\therefore \quad dy = 3ax^2\, dx$

2 Calcula el incremento de la función $y = \sqrt{3x^2 - 11}$ para $x = 5$ y $\Delta x = dx = 0.05$.

Solución

Si $\quad y = \sqrt{3x^2 - 11}$

$$dy = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 - 11}}dx$$

$$dy = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 - 11}}dx$$

$$\Delta y \approx \frac{3(5)}{\sqrt{3(5)^2 - 11}}(0.05)$$

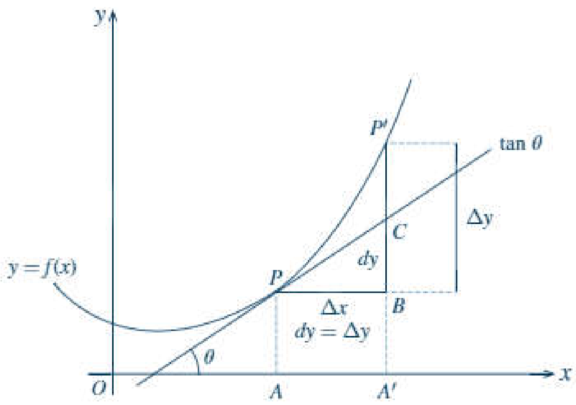
$$\Delta y \approx \frac{15}{\sqrt{75 - 11}}(0.05)$$

$$\Delta y \approx \frac{15}{8}(0.05)$$

$$\therefore \quad dy = 0.09375$$

Interpretación geométrica de la diferencial

Al analizar o interpretar gráficamente el significado de diferencial como una aproximación al incremento de la función tenemos:



Sea $y = f(x)$ la función dada y su diferencial $f'(x)$, que se identifica como el valor de la derivada en P, si el incremento de la variable independiente es $\Delta x = dx = PB$, y con base en la definición de diferencial, se tiene:

$$y = f(x)$$
$$dy = f'(x)\,dx$$

Recordando que el valor de la derivada en cualquier punto de una curva es igual a la pendiente de la tangente a la curva en dicho punto tenemos:

$$dy = f'(x)\,dx$$
$$dy = \tan\theta(PB)$$

Con base en la gráfica anterior, tenemos que: $\tan\theta = \dfrac{BC}{PB}$ ← cateto opuesto ← cateto adyacente

Sustituyendo, se obtiene: $dy = \dfrac{BC}{PB}(PB)$

$\therefore \quad dy = BC$ } Representa el incremento de la ordenada de la "tan" correspondiente a dx.

Si dx representa un incremento cualquiera de la variable independiente x para un punto $P(x,y)$ de la función $y = f(x)$, ésta tiene por derivada $\dfrac{dy}{dx} = f'(x) = \tan\theta$.

Por lo general, la diferencial de la función (dy) y el incremento (Δy) no son iguales.

De la gráfica de la página 5 tenemos que:

$$dy = BC \quad \} \text{ Incremento de la ordenada de la tan en } P.$$
$$\Delta y = BP' \quad \} \text{ Incremento de la ordenada de la función de } P \text{ a } P'.$$

La función se mueve de P a P' mientras que su recta tangente se mueve de P a C, pero la gráfica deja claro que mientras más pequeño sea Δx, la distancia entre los puntos P' y C será menor, por lo tanto, la aproximación de dy a Δy será mejor.

La diferencial como aproximación del incremento

Si el incremento de la variable independiente Δx es muy pequeño, entonces dy y Δy son aproximadamente iguales. Es decir, según la gráfica anterior, se tiene:

Mientras más pequeño sea $dx = PB$, mejor será la aproximación entre $dy = BC$ y $\Delta y = BP'$.

Cuando sólo es necesario obtener un valor aproximado del incremento de la función, calcular el valor de la diferencial será suficiente para resolver el problema.

EJEMPLOS

1 Calcula un valor aproximado para $\sqrt{27}$.

Solución

Sean $y = \sqrt{x}$ } La función representativa de $\sqrt{27}$.

$x = 25$ } Por ser un valor próximo al dado y tener raíz cuadrada exacta.

$dx = \Delta x = 2$ } Incremento de x para llegar a 27.

Entonces,

$$y = \sqrt{x}$$
$$dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$
$$dy = \frac{2}{2\sqrt{25}} = \frac{2}{10} = 0.2$$

Dado que, $y = \sqrt{x} = \sqrt{25} = 5$

$$\sqrt{27} = y + dy$$
$$\sqrt{27} = 5 + 0.2$$
$$\therefore \quad \sqrt{27} = 5.2$$

Como $\sqrt{27} = 5.196152\ldots$, la aproximación calculada es mayor que el valor exacto en 0.003848 unidades.

2 Calcula un valor aproximado para tan 47°, empleando diferenciales.

Solución

Sean $y = \tan x$ } La función representativa de tan 47°.

$x = 45°$ } Por ser un valor próximo al dado ya que $\tan 45° = 1$.

$dx = \Delta x = 2°$ } Incremento de x para tener 47°.

$$2° = \frac{2\pi}{180} = 0.034907 \text{ radianes.}$$

Entonces,

$$y = \tan x$$
$$dy = \sec^2(x)\,dx$$
$$dy = (\sec 45^\circ)^2\,(0.034907)$$
$$dy = (\sqrt{2}\,)^2\,(0.034907)$$
$$dy = 2(0.034907)$$
$$\therefore \quad dy = 0.069813$$

Dado que, $y = \tan 45^\circ = 1$ tenemos:

$$\tan 47^\circ = y + dy$$
$$\tan 47^\circ = 1 + 0.069813$$
$$\therefore \quad \tan 47^\circ \approx 1.069813 \text{ radianes}$$

Con $\tan 47^\circ = 1.0722368\ldots$, la aproximación calculada es menor que el valor exacto en 0.002556 radianes.

3 Determina el volumen aproximado de una concha esférica cuyo radio interno es de 10 cm y su grosor es de 0.15625 cm.

Solución

Sean $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ } La función que representa el volumen de una esfera.
$r = 10$ cm } Radio interno de la concha esférica.
$dr = \Delta r = 0.15625$ cm } Grosor de la concha esférica.
$dV = \Delta V$ } Volumen aproximado de la concha esférica.

Entonces,

$$V = \frac{4}{3}\,\pi r^3$$
$$dV = 4\pi r^2\ dr$$
$$dV = 4\pi(10)^2(0.15625)$$
$$\therefore \quad dV = 62.5\pi$$

$\therefore$ El volumen aproximado de la concha esférica es de 62.5π cm$^3 \approx 196.35$ cm^3.

4 Determina el incremento de área de un cuadrado de 6 pulgadas de lado, al aumentar el lado $\frac{1}{32}$ de pulgada.

Solución

Sean $A = x^2$ } La función que representa el área de un cuadrado.
$x = 6$ pulgadas } Longitud del lado del cuadrado.
$dx = \Delta x = \frac{1}{32}$ pulgadas } Aumento del lado del cuadrado.
$dA = \Delta A$ } Incremento del área del cuadrado.

Entonces,

$$A = x^2$$
$$dA = 2x\ dx$$
$$dA = 2(6)\left(\frac{1}{32}\right)$$
$$\therefore \quad dA = \frac{3}{8} = 0.375$$

$\therefore$ El incremento de área del cuadrado es de 0.375 pulg².

Fórmulas fundamentales para determinar las diferenciales de funciones

Las fórmulas fundamentales para determinar las diferenciales son las mismas que se utilizan para determinar las derivadas, únicamente es necesario multiplicar cada una de ellas por dx, por ejemplo:

1. $d(c) = 0$
2. $d(x) = dx$
3. $d(u + v - w) = du + dv - dw$
4. $d(cv) = c\,dv$
5. $d(u\,v) = u\,dv + v\,du$

5*a*. $d(u\,v\,w) = uv\,dw + uw\,dv + vw\,du$

6. $d(v^n) = nv^{n-1}\,dv$

6*a*. $d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$

7. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

7*a*. $d\left(\dfrac{u}{c}\right) = \dfrac{du}{c}$, para c constante

7*b*. $d\left(\dfrac{c}{u}\right) = -\dfrac{c}{u^2}du$, para c constante

8. $d\left(\sqrt[n]{v}\right) = \dfrac{dv}{nv^{\frac{n-1}{2}}}$

11. $d(|v|) = \dfrac{v}{|v|}dv$

12. $d(\ln v) = \dfrac{dv}{v}$

12*a*. $d(\ln x) = \dfrac{dx}{x}$

13. $d(\log v) = \dfrac{\log e}{v}dv$

13*a*. $d(\log x) = \dfrac{\log e}{x}dx$

14. $d(a^v) = a^v \ln a\,dv$

14*a*. $d(a^x) = a^x \ln a\,dx$

15. $d(e^v) = e^v\,dv$

15*a*. $d(e^x) = e^x\,dx$

16. $d(u^v) = v\,u^{v-1}du + u^v \ln u\,dv$
17. $d(\operatorname{sen} v) = \cos v\,dv$
18. $d(\cos v) = -\operatorname{sen} v\,dv$
19. $d(\tan v) = \sec^2 v\,dv$
20. $d(\cot v) = -\csc^2 v\,dv$
21. $d(\sec v) = \sec v \tan v\,dv$
22. $d(\csc v) = -\csc v \cot v\,dv$
23. $d(\operatorname{vers} v) = -\operatorname{sen} v\,dv$
24. $d(\operatorname{arcsen} v) = \dfrac{dv}{\sqrt{1-v^2}}$
25. $d(\arccos v) = -\dfrac{dv}{\sqrt{1-v^2}}$
26. $d(\arctan v) = \dfrac{dv}{1+v^2}$
27. $d(\operatorname{arccot} v) = -\dfrac{dv}{1+v^2}$
28. $d(\operatorname{arcsec} v) = \dfrac{dv}{v\sqrt{v^2-1}}$
29. $d(\operatorname{arccsc} v) = -\dfrac{dv}{v\sqrt{v^2-1}}$
30. $d(\operatorname{arcvers} v) = \dfrac{dv}{\sqrt{2v-v^2}}$

Nota: las fórmulas 9 y10 se omiten ya que no son diferenciables porque son casos especiales de derivación.

En la práctica el problema de encontrar la diferencial de una función se reduce a encontrar la derivada de la función y multiplicarla por dx o por Δx cuando se requiere una aproximación al incremento de la función.

EJEMPLO

Ejemplo 1 Determina la diferencial de las siguientes funciones:

1. $y = ax - bx^3$

$$\frac{dy}{dx} = a - 3bx^2$$

$$\therefore \quad dy = (a - 3bx^2)\,dx$$

2. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\therefore \quad dy = \frac{-x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

3. $y = \ln(1 - x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{1 - x^2}$$

$$\therefore \quad dy = -\frac{2x\,dx}{1 - x^2}$$

4. $y = \operatorname{sen}(3x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = 6x\,\cos(3x^2)$$

$$\therefore \quad dy = 6x\,\cos(3x^2)\,dx$$

5. $y = ax\,\tan(x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = a\tan(x^2) + ax(2x)\sec^2(x^2)$$

$$\therefore \quad dy = [a\tan(x^2) + 2ax^2\sec^2(x^2)]\,dx$$

6. $y = \operatorname{arccsc}(5x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-5}{5x\sqrt{25x^2 - 1}}$$

$$\therefore \quad dy = \frac{-dx}{x\sqrt{25x^2 - 1}}$$

EJERCICIO 1

I. Calcula la diferencial de las siguientes funciones, para los valores dados de la variable independiente y su incremento.

1. $y = 3x^2 - 8x + 5$, cuando $x = 1$ y $dx = 0.1$.
2. $y = x + \frac{1}{x}$, cuando $x = 4$ y $dx = 0.02$.
3. $y = x^2$, cuando $x = -1$ y $dx = 0.25$.
4. $y = 2x^3$, cuando $x = -2$ y $dx = -0.5$.
5. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, cuando $x = 2$ y $dx = 0.1$.
6. $y = x\sqrt{1 - x^2}$, cuando $x = 0.75$ y $dx = 0.001$.
7. $y = \tan x$, cuando $x = 45°$ y $dx = 0.03528$ radianes.
8. $y = \cos x$, cuando $x = 130°$ y $dx = -0.02139$ radianes.
9. $y = \operatorname{arcsen}(2x)$, cuando $x = 3$ y $dx = 0.045$.
10. $y = \ln x^2$, cuando $x = 5$ y $dx = 0.0083$.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

II. Resuelve los siguientes problemas, empleando diferenciales y en plenaria discute tus resultados.

1. Un disco metálico se dilata por la acción del calor, de manera que su radio aumenta de 12 a 12.03 cm. Encuentra el valor aproximado del incremento del área.
2. Un balín de fierro de 9 mm de radio, por su uso sufre un desgaste hasta que su radio es de 8.72 mm. Encuentra las reducciones aproximadas que sufren su volumen y su área.
3. Si A es el área de un cuadrado de lado 8 cm, encuentra dA y construye una gráfica que represente dA y A.
4. Encuentra el volumen aproximado de un tubo de cobre de 35 cm de longitud, 2 cm de diámetro interno y 3 mm de espesor.
5. Encuentra un valor aproximado del volumen de una cáscara esférica de 300 mm de diámetro externo y 1.5 mm de espesor.

III. Aplicando diferenciales, encuentra valores aproximados para las siguientes expresiones.

1. $\sqrt[3]{65}$
2. 37
3. $\sqrt[4]{83}$
4. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{63}}$
5. $\dfrac{1}{\sqrt{50}}$
6. $\sqrt[4]{\dfrac{17}{81}}$
7. $\ln 5.83$
8. $\operatorname{sen} 61°$
9. $\cos 44°$
10. $\tan 46°$
11. $\cot 29°$
12. $\sec 59°$
13. $\ln 36.4$
14. $e^{2.2}$
15. $e^{5.1}$

IV. Encuentra la diferencial para las siguientes funciones:

1. $y = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x$
2. $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{x}$
3. $y = \sqrt{1 - 3x^2}$
4. $y = \sqrt{a^2 + x^2}$
5. $y = \sqrt[3]{4 - 2x^2}$
6. $y = 3x\sqrt{x^2 + 4}$
7. $y = (1 + x^2)\sqrt{1 - x^2}$
8. $y = 10^{(2x^2)}$
9. $y = 5^{mx}$
10. $y = e^{bx}$
11. $y = e^{\sqrt{x}}$
12. $y = \ln(4 - 3x)$
13. $y = \ln\sqrt{1 + x^2}$
14. $y = \ln(\operatorname{sen} 2x)$
15. $y = \log(ax + b)$
16. $y = \log\sqrt{4 - x^2}$
17. $y = 2\cos(2x)$
18. $y = \dfrac{\tan(4x)}{4}$
19. $y = x \csc x$
20. $y = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

21. $y = \arctan(x^2 - 1)$
22. $y = \operatorname{arcsec}(x^2)$
23. $y = \sqrt{\cos 5x}$
24. $y = \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$
25. $y = \sqrt{\dfrac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$
26. $y = e^{-2x}\cos(3x)$
27. $3x^2 + 2xy + 5y^2 = 24$
28. $x^3 + 6xy^2 + 2y^3 = 10$
29. $x^2 + 4\sqrt{xy} + 2y = a$
30. $\sqrt{\dfrac{x}{y}} - \sqrt{\dfrac{y}{x}} = C$
31. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}$
32. $x - y = e^{x+y}$
33. $2x^3 - xy^2 + 6y = 1$
34. $y = \dfrac{5 - x^2}{5 + x}$
35. $y = \arccos(3x - 4x^3)$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

La integral definida

La notación de suma

Para facilitar la escritura de sumas con muchos términos, reconocibles a través de una propiedad, se utiliza la notación de suma, con la letra griega mayúscula Σ denominada **sigma**, que simboliza matemáticamente una sumatoria.

EJEMPLO

Ejemplo 1 Escribe de manera explícita los sumandos a los que se refiere cada una de las siguientes expresiones:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{8} X_k$ *b)* $\displaystyle\sum_{k=-3}^{3} (2k+4)$ *c)* $\displaystyle\sum_{k=2}^{6} \frac{1}{k}$ *d)* $\displaystyle\sum_{k=2}^{5} k^2$

Solución

a) $$\sum_{k=1}^{8} X_k = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8$$

b) $$\sum_{k=-3}^{3} (2k+4) = [2(-3) + 4] + [2(-2) + 4] + [2(-1) + 4] + [2(0) + 4] + [2(1) + 4] + [2(2) + 4] + [2(3) + 4]$$

$$\sum_{k=-3}^{3} (2k+4) = -2 + 0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 28$$

c) $\sum_{k=2}^{6} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$

d) $\sum_{k=2}^{5} k^2 = (2)^2 + (3)^2 + (4)^2 + (5)^2 = 4 + 9 + 16 + 25 = 54$

De forma general, tenemos que:

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \ldots + f(n)$$

Donde m y n son enteros y $m \leq n$.

En la suma el número m se denomina **límite inferior** y n se denomina **límite superior**, el símbolo k (puede emplearse cualquier otra letra, por ejemplo: i, j, etcétera) se denomina **índice de la suma**.

Propiedades de la notación de suma

1. $\sum_{k=1}^{n} C = nC$; donde C es cualquier constante.

2. $\sum_{k=1}^{n} C \cdot f(k) = C \sum_{k=1}^{n} f(k)$; donde C es cualquier constante.

3. $\sum_{k=1}^{n} [f(k) + g(k)] = \sum_{k=1}^{n} f(k) + \sum_{k=1}^{n} g(k)$; esta propiedad se puede extender a la suma de cualquier número de funciones.

4. $\sum_{k=1}^{n} [f(k) - f(k-1)] = f(n) - f(0)$; a este tipo de sumatorias se les llama sumas telescópicas, por la cancelación que sufren los términos inferiores.

Fórmulas de la notación de suma

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

4. $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$

EJEMPLO

Ejemplo 1 Calcula la suma indicada usando las propiedades y las fórmulas de la notación de suma, para:

a) $\sum_{k=1}^{n} k(5k-4)$ *b)* $\sum_{j=1}^{100} 3j$ *c)* $\sum_{i=1}^{n} (2^i - 2^{i-1})$

Solución

a)
$$\sum_{k=1}^{n} k(5k-4) = \sum_{k=1}^{n} (5k^2-4k) = \sum_{k=1}^{n} (5k^2) + \sum_{k=1}^{n} (-4k) \quad \Big\}\ \text{Propiedad 3}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k \quad \Big\}\ \text{Propiedad 2}$$

$$= 5\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] - 4\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] \quad \Big\}\ \text{Fórmulas 2 y 1}$$

$$= \frac{10n^3+15n^2+5n}{6} - 2n^2 - 2n$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n} k(5k-4) = \frac{10n^3+3n^2-7n}{6}$$

b)
$$\sum_{j=1}^{100} 3j = 3\sum_{j=1}^{100} j \quad \Big\}\ \text{Propiedad 2}$$

$$\sum_{j=1}^{100} 3j = 3\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{3[100(100+1)]}{2} \quad \Big\}\ \text{Fórmula 1}$$

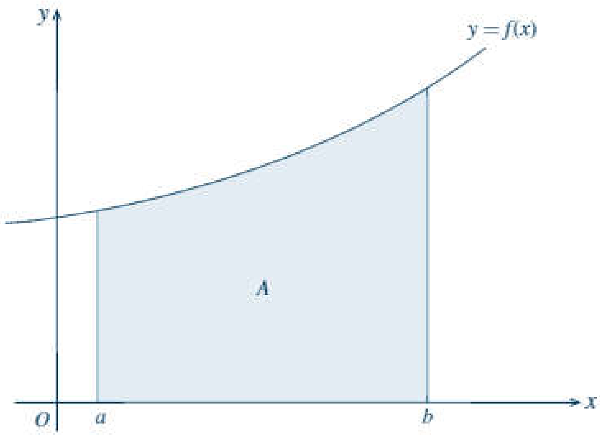
$$\therefore\ \sum_{j=1}^{100} 3j = 15150$$

c)
$$\sum_{i=1}^{n} (2^i - 2^{i-1}) = 2^n - 2^0 \quad \Big\}\ \text{Propiedad 4}$$

$$\therefore\ \sum_{i=1}^{n} (2^i - 2^{i-1}) = 2^n - 1$$

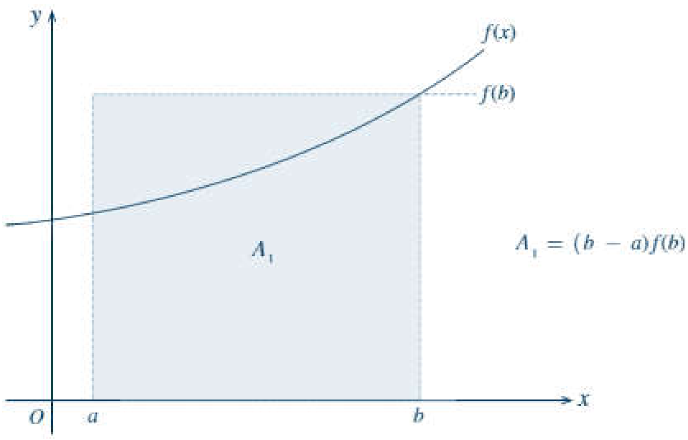
Área bajo una curva

En geometría se ha aprendido a calcular el área de regiones poligonales y circulares. Ahora, analizaremos el problema de la obtención del área de una región del plano cartesiano limitada por el eje de las x, las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, y la curva $f(x)$, donde f es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$. Veamos la siguiente gráfica:

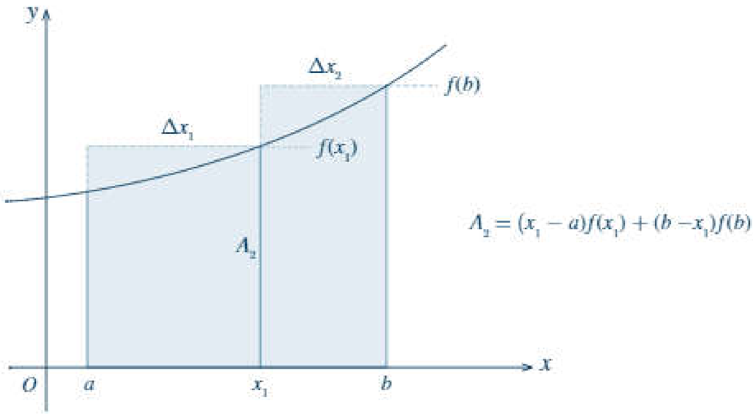


Denotando esta área por $\boldsymbol{A}$, abordamos su cálculo.

Una primera aproximación consiste en calcular el área de la región rectangular sombreada A, como se muestra en la siguiente gráfica:



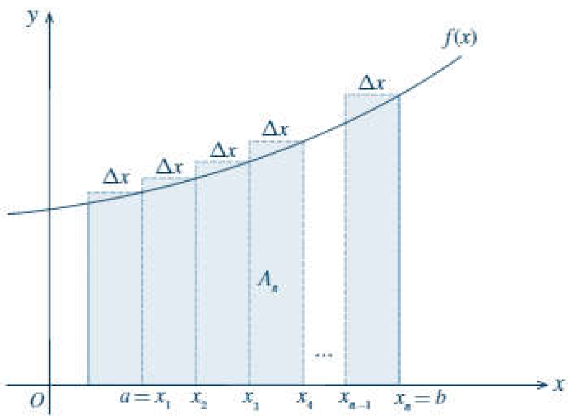
Considerando dos regiones rectangulares, obtenemos una mejor aproximación del área buscada como se muestra en la siguiente gráfica:



Si los dos subintervalos en que dividimos el intervalo $[a,b]$ tienen la misma longitud, es decir, $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x$, la ecuación anterior se puede escribir en la forma:

$$A_2 = \Delta x\, f(x_1) + \Delta x\, f(b) = \Delta x[f(x_1) + f(b)]$$

A medida que el número de regiones rectángulares aumenta, la diferencia entre la suma de sus áreas y el área bajo la curva disminuye, como se muestra en la siguiente gráfica.



Si el intervalo cerrado $[a,b]$ se divide en n subintervalos de igual longitud (Δx), de manera que $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ (gráfica anterior), entonces la ecuación de la suma de las áreas de los n rectángulos, es:

$$A_n = [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(x_n)]\,\Delta x$$

Intuitivamente se hace notar que cuando el número n de rectángulos tiende a infinito, la suma de sus áreas tiende a un límite que es el área buscada. Por lo tanto, la ecuación del área bajo la curva $f(x)$, limitada por la izquierda y por la derecha por las rectas verticales $x = x_0 = a$ y $x = x_n = b$ es:

$$A_n = \lim_{n \to +\infty} \left[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]\Delta x$$

Utilizando la notación de suma, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$A_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

También debe observarse que los n rectángulos pueden ser inscritos o circunscritos. Si consideramos rectángulos inscritos y como $f(x)$ es creciente en el intervalo cerrado $[a,b]$, el valor mínimo absoluto de la función en el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ es $f(x_{k-1})$; por lo tanto, la ecuación del área bajo la curva es:

$$A_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k=1})\Delta x$$

Las sumas correspondientes de las áreas de los rectángulos circunscritos son, por lo menos, tan grandes como el área de la región A y se puede demostrar que el límite de estas sumas cuando n crece sin límite es exactamente el mismo que el límite de la suma de las áreas de los rectángulos inscritos. El valor máximo absoluto de la función en el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ es $f(x_k)$, por lo que la ecuación del área bajo la curva dividida en rectángulos circunscritos es:

$$A_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

EJEMPLO

Ejemplo 1 Encuentra el área de la región limitada por la curva $y = x^2$, entre $x = 0$ y $x = 2$, considerando:

a) Rectángulos inscritos.

b) Rectángulos circunscritos.

Solución

a) Dividamos el intervalo cerrado [0,2] en n subintervalos, cada uno de longitud Δx, es decir:

$$\Delta x = \frac{(b-a)}{n} = \frac{(2-0)}{n} = \frac{2}{n}$$

Como la función $y = x^2$ es creciente en el intervalo cerrado [0,2], el valor mínimo absoluto de la función en el k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ es $f(x_{k-1})$.

Empleando la ecuación respectiva de área: $A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x$ con $x_{k-1} = (k-1)\Delta x$ y $f(x_{k-1}) = [(k-1)\Delta x]^2$ tenemos que:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x = \sum_{k=1}^{n}[(k-1)\Delta x]^2 \Delta x = \sum_{k=1}^{n}(k-1)^2(\Delta x)^3$$

Como $\Delta x = \frac{2}{n}$, al sustituir en la ecuación anterior, se tiene:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x &= \sum_{k=1}^{n}(k-1)^2\left(\frac{2}{n}\right)^3 \\ &= \frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 = \frac{8}{n^3}\left[\sum_{k=1}^{n}k^2 - 2\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1\right]\end{aligned}$$

Aplicando las fórmulas **2**, **1** y la propiedad **1** de la notación de suma se tiene:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(x_{k-1})\Delta x &= \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} + n\right] \\ &= \frac{8}{n^3}\left(\frac{2n^3+3n^2+n-6n^2-6n+6n}{6}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{2n^3-3n^2+n}{n^3}\right) \\ &= \frac{4}{3}\left[2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right] = \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\end{aligned}$$

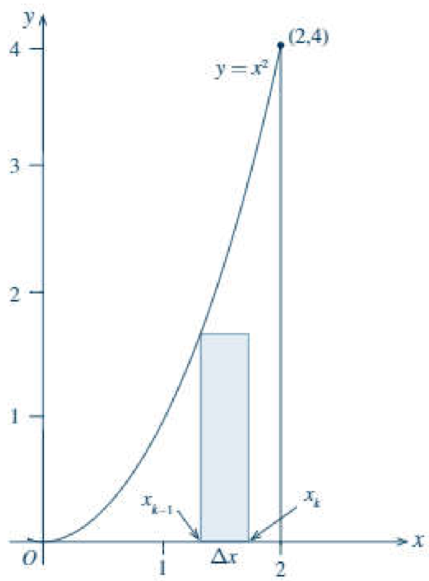
Tomando el límite cuando n tiende a infinito se obtiene:

$$A = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} \right] = \frac{8}{3} - \frac{4}{\infty} + \frac{4}{3\infty^2} = \frac{8}{3}$$

Porque $\frac{4}{n} \to 0$ y $\frac{4}{3n^2} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

$\therefore$ El área de la región es $\frac{8}{3} \approx 2.67$ unidades cuadradas.

Cada rectángulo inscrito bajo la curva puede representarse gráficamente como se muestra a continuación:



b) El valor máximo de la función en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ es $f(x_k)$. Empleando la ecuación respectiva de área: $A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$, con $x_k = k\Delta x$ y $f(x) = x^2$, tenemos que $f(x_k) = (k\Delta x)^2$. Por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} (k\Delta x)^2 \Delta x = \sum_{k=1}^{n} k^2 (\Delta x)^3.$$

Con $\Delta x = \frac{2}{n}$ y, al sustituir en la ecuación anterior se tiene:

$$\left.\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} k^2 \left(\frac{2}{n}\right)^3 = \frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad\right\} \quad \text{Aplicando la fórmula } \mathbf{2}.$$

$$= \frac{8}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] = \frac{8}{n^3} \left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \right) = \frac{8}{6} \left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3} \right)$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

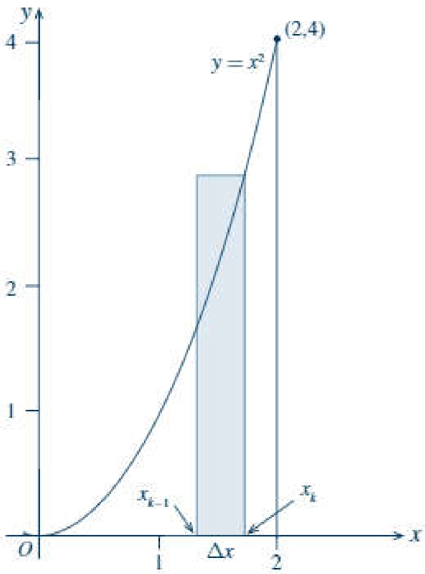
Tomando el límite cuando n se tiende a infinito se obtiene:

$$A = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{8}{3}+\frac{4}{n}+\frac{4}{3n^2}\right]$$
$$=\left[\frac{8}{3}-\frac{4}{\infty}+\frac{4}{3\infty^2}\right]$$
$$A = \frac{8}{3}$$

Porque $\frac{4}{n}\to 0$ y $\frac{4}{3n^2}\to 0$ cuando $n\to\infty$.

$\therefore$ El área de la región es $\frac{8}{3}\approx 2.67$ unidades cuadradas.

Cada rectángulo circunscrito bajo la curva puede representarse gráficamente como se muestra a continuación:



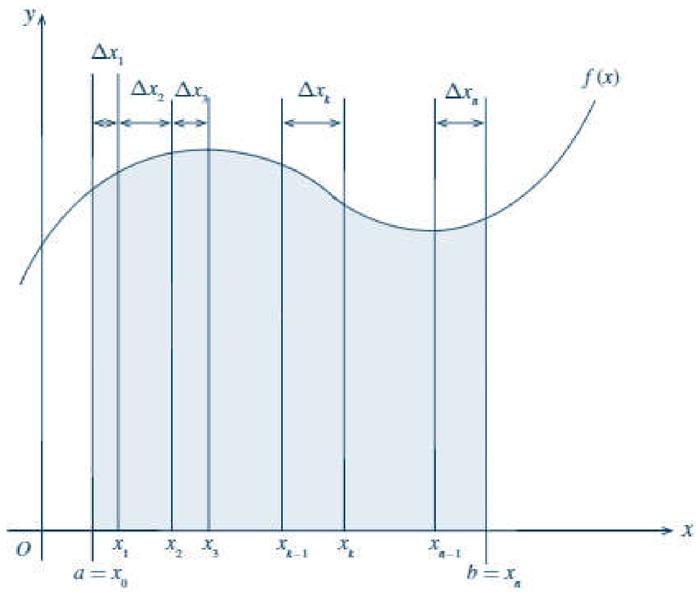
Con estos ejemplos se verifica, que las sumas superior e inferior coinciden en el límite, por lo tanto, el área bajo la curva coincide con este límite.

Sumas de Riemann

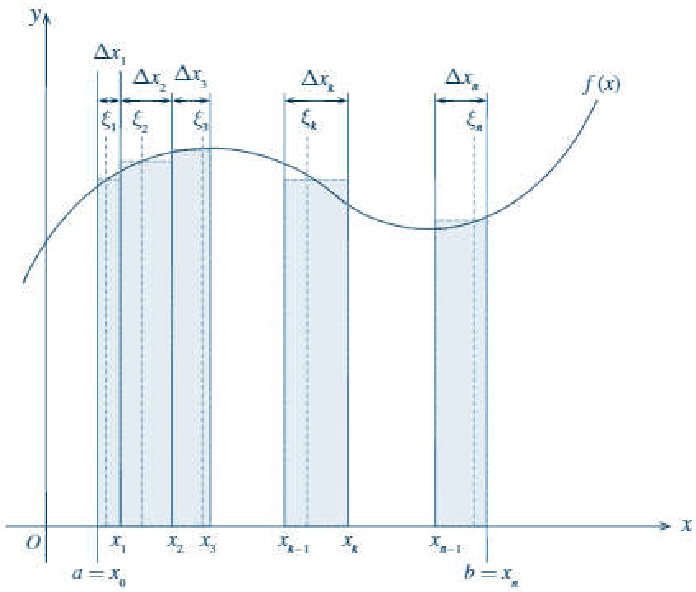
Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$. Dividamos éste en n subintervalos seleccionando cualesquiera $n-1$ puntos distintos, intermedios entre a y b, digamos $x_1, x_2,\ldots, x_{n-1}$, con $x_0 = a$ y $x_n = b$, ordenados de tal manera que $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_{n-1} < x_n$, aunque dichos puntos no sean necesariamente equidistantes.

Los subintervalos así construidos $[x_0,x_1)$, $[x_1,x_2),\ldots, [x_{n-1},x_n]$ tienen longitudes $\Delta x_1, \Delta x_2,\ldots, \Delta x_n$, respectivamente, es decir, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, para $k = 1, 2,\ldots, n$. Debe notarse que estos intervalos son cerrados por la izquierda y abiertos por la derecha, excepto el último que es cerrado, por lo que se explica a continuación.

Al conjunto $\Delta = [x_0,x_1),[x_1,x_2),\ldots, [x_{n-1},x_n]$ de los n subintervalos construidos se le llama una ***partición*** del intervalo $[a,b)$. ***Particionar*** (no partir) un conjunto significa dividirlo en una colección de subconjuntos ajenos entre sí, cuya unión es el conjunto particionado, algo semejante a lo que se obtiene rebanando o partiendo un pastel, pues se obtienen partes ajenas del mismo (rebanadas) cuya unión forma el pastel original completo. La partición del intervalo $[a,b)$ se ilustra en la siguiente figura.



Seleccionamos en cada subintervalo $[x_{k-1},x_k]$ un punto ξ_k, de manera que $x_{k-1} \leq \xi_k < x_k$, como se muestra a continuación:



La suma de las áreas de los rectángulos cuya base es x_{k-1}, x_k y su altura es ξ_k se representa por la sumatoria $f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n$, que en notación de suma se escribe:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Se denomina **suma de Riemann**, con la cual se aproxima al área bajo la curva, cada vez mejor en la medida que n aumenta.

La suma de Riemann es una aproximación al área bajo la curva. Por lo tanto,

$$A = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

y para funciones continuas, el área bajo la curva se obtiene tomando el límite, cuando n tiende a infinito,

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Es decir, área limitada por el eje x, la curva $y = fx$ y las rectas verticales $x = a$, $y = b$.

EJEMPLO

Ejemplo 1

Dada $f(x) = x^2$, con $0 \le x \le 3$, encuentra la suma de Riemann para la función $f(x)$ en el intervalo $[0,3]$, usando la partición Δ: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{5}{4}$, $x_3 = \frac{9}{4}$, $x_4 = 3$ y $\xi_1 = \frac{1}{4}$, $\xi_2 = 1$, $\xi_3 = \frac{3}{2}$, $\xi_4 = \frac{5}{2}$. Traza la gráfica de la función en $[0,3]$ y señala los rectángulos cuyas medidas de área son los términos de las sumas de Riemann.

Solución

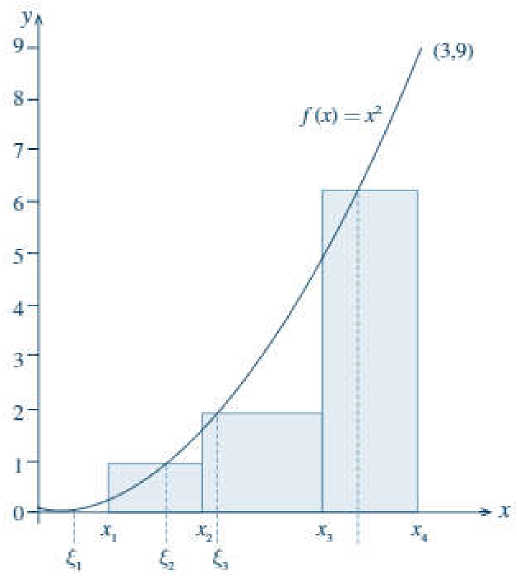
La suma de Riemann para las condiciones dadas es:

$$\sum_{k=1}^{4} f(\xi_k)\,\Delta x_k = f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + f(\xi_3)\,\Delta x_3 + f(\xi_4)\,\Delta x_4$$

$$\sum_{k=1}^{4} f(\xi_k)\Delta x_k = \left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2}-0\right) + (1)^3\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{9}{4}-\frac{5}{4}\right) + \left(\frac{5}{2}\right)^2\left(3-\frac{9}{4}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{4} f(\xi_k)\,\Delta x_k = (0.0625)(0.5) + (1)(0.75) + (2.25)(1) + (6.25)(0.75)$$

$$\sum_{k=1}^{4} f(\xi_k)\Delta x_k = 0.03125 + 0.75 + 2.25 + 4.6875 = 7.71875$$



$\therefore$ La suma de Riemann para la función $f(x) = x^2$ en el intervalo cerrado [0,3] con las condiciones de partición dadas es de 7.71875.

Introducción a la definición de la integral de una función

El concepto de derivación es requerido para precisar la descripción de pendiente de una curva, la velocidad de las partículas en movimiento o más generalmente, del concepto de razón de cambio. El concepto de integración está relacionado con la descripción de áreas de regiones cuyas fronteras pueden describirse mediante una función.

Integral definida

Si $f(x)$ es una función definida en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces la integral definida de $f(x)$ entre a y b, denotada por el símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ está dada por el límite de una suma de Riemann para cuando el número n de subintervalos tiende a infinito. Es decir,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Matemáticamente se lee: **integral definida de f entre los límites a y b.**

Notación de Leibniz para la integral

La definición de la integral como límite de una suma condujo a Leibniz a hacer uso del símbolo $\int$ para denotar la integral porque es semejante a una S mayúscula que sugiere el concepto de suma:

$$\int_a^b f(x)dx$$

El paso al límite *a* a partir de una subdivisión finita en porciones Δx_k es indicada mediante el uso de la letra *d* en lugar de Δ.

En esta notación se identifican los siguientes elementos para la integral definida:

$$\int_{\underbrace{a}_{\text{Límite de integración inferior}}}^{\overbrace{b}^{\text{Límite de integración superior}}} \overbrace{f(x)}^{\text{Integrando}}\, \underbrace{dx}_{\text{Variable de integración}}$$

La integral definida propia e impropia

La integral definida entre los límites *a* y *b*, representada por la expresión:

$$\int_a^b f(x)dx,$$

es geométricamente interpretada como el área de la región del plano cartesiano limitada verticalmente por la curva *f* y el eje *x*, y horizontalmente por las rectas $x = a$ y $x = b$.

Si dividimos el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos de igual longitud (Δx) podemos escribir:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum f(\xi_k)\Delta x \qquad \text{Si } n \to +\infty$$

$$\therefore \quad \Delta x \to 0$$

Si los n subintervalos de la partición del intervalo $[a,b]$ no son de la misma longitud, existe un subintervalo tal que su longitud es mayor o igual a la de cualquier otro. A la longitud de tal subintervalo se le denomina **norma de la partición** y se denota por $||\Delta x||$.

Es claro que si $n \to +\infty$, entonces $||\Delta x|| \to 0$, por lo tanto, podemos escribir:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||\Delta x|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Al considerar la expresión anterior y si f es continua en $[a,b]$, estamos seguros que el $\lim\limits_{||\Delta x||\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ existe y, por lo tanto, f es integrable en $[a,b]$.

De lo anterior establecemos que $\int_a^b f(x)\,dx$ representa a la **integral propia** de $f(x)$ entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

Si f no es continua en $[a,b]$, entonces el límite puede existir o no existir y, por lo tanto, f puede ser integrable en $[a,b]$ o no serlo.

Asimismo, establecemos que $\int_a^b f(x)dx$ representa a la **integral impropia** de $f(x)$ entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, siempre y cuando el límite exista; en el caso en que el límite no exista, se establece que $\int_a^b f(x)dx$ no tiene significado.

EJEMPLO

Ejemplo 1 Encuentra el valor exacto de la integral definida $\int_0^3 x^2\,dx$.

Solución

Considerando una partición regular del intervalo cerrado $[0,3]$ en n subintervalos, se tiene:

$$\Delta x = \frac{(b-a)}{n} = \frac{(3-0)}{n} = \frac{3}{n}$$

Seleccionando a ξ_1 como un punto en cada subintervalo, tenemos:

$$\xi_1 = 0+\frac{3}{n},\ \xi_2 = 0+2\left(\frac{3}{n}\right),\ \xi_3 = 0+3\left(\frac{3}{n}\right),\ \ldots,\ \xi_k = 0+k\left(\frac{3}{n}\right),\ \ldots,\ \xi_n = 0+n\left(\frac{3}{n}\right).$$

Como $f(x)=x^2$, resulta:

$$f(\xi_k) = \left(0+\frac{3k}{n}\right)^2 = \frac{9k^2}{n^2}$$

Por la expresión $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ tenemos:

$$\int_0^3 x^2dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{9k^2}{n^2}\right)\left(\frac{3}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{27}{n^3}\ \sum_{k=1}^{n}k^2$$

Por la fórmula 2 de la notación de suma, resulta:

$$\int_0^3 x^2\,dx = \lim_{x\to+\infty} \frac{27}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{9}{2}\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{n^3}\right)$$

$$\int_0^3 x^2\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{9}{2}\left[2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{9}{2}\left(2+\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}\right)$$

$$\int_0^3 x^2\,dx = \frac{9}{2}(2+0+0) = 9$$

$\therefore$ Geométricamente la $\int_0^3 x^2\,dx$ representa un área comprendida entre el eje x y la curva $y = x^2$, entre $x = 0$ y $x = 3$ igual a 9 unidades cuadradas.

EJERCICIO 2

I. Contesta las siguientes preguntas y socializa tus respuestas.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. ¿Para qué se utiliza la notación de suma?
2. En lenguaje matemático, ¿qué símbolo se usa para representar una sumatoria?
3. ¿Qué elementos se deben considerar para calcular el área bajo una curva en una región del plano cartesiano?
4. Explica cómo se precisa el cálculo del área de una región del plano cartesiano.
5. ¿Cuál es la diferencia entre el uso de rectángulos inscritos y circunscritos en el cálculo del área de una región del plano cartesiano?
6. ¿Qué es una partición del intervalo $[a,b]$?
7. ¿Qué es la suma de Riemann, para una función f dada en intervalo cerrado $[a,b]$?
8. ¿Qué representa geométricamente una suma de Riemann?
9. ¿Qué representa geométricamente el límite de una suma de Riemann?
10. ¿Qué es una integral definida?
11. Explica cada uno de los elementos de una integral definida en la notación de Leibniz.

12 ¿Qué se entiende por norma de la partición?

13. Explica qué es una integral propia y qué es una integral impropia.

II. Resuelve los siguientes problemas y en plenaria discute tus resultados.

1. Escribe de manera explícita los términos de cada una de las siguientes expresiones:

a) $\sum_{k=1}^{5}(Z_k-1)^3$ *b)* $\sum_{k=1}^{4}a_k x_k^2$ *c)* $\sum_{k=1}^{7}(x_k-y_k)$

2. Expresa cada una de las siguientes sumas, usando la notación de suma:

a) $(m_1+n_1)+(m_2+n_2)+(m_3+n_3)+\ldots+(m_8+n_8)$.

b) $(2x_1-y_1+b_1)+(2x_2-y_2+b_2)+\ldots+(2x_n-y_n+b_n)$.

c) $\dfrac{a_1}{1+x_1}+\dfrac{a_2}{1+x_2}+\dfrac{a_3}{1+x_3}+\ldots+\dfrac{a_7}{1+x_7}$.

d) $\sqrt{x_1-2}+\sqrt{x_2-2}+\sqrt{x_3-2}+\ldots+\sqrt{x_{10}-2}$.

3. Calcula el valor numérico de cada una de las sumas indicadas a continuación:

a) $\sum_{k=1}^{8}(5k-3)$ *d)* $\sum_{j=-3}^{5}2^j$

b) $\sum_{k=1}^{7}(k+1)^2$ *e)* $\sum_{j=-1}^{3}\left(\dfrac{1}{j^2+1}\right)$

c) $\sum_{k=1}^{4}\left(\dfrac{k}{k-1}\right)$ *f)* $\sum_{j=-1}^{5}\dfrac{(-1)^{j+1}}{j}$

4. Calcula las sumas que se indican y menciona las propiedades y las fórmulas de la notación de suma que utilices:

a) $\sum_{k=1}^{25}2k(k-1)$ *d)* $\sum_{j=1}^{100}\left[\dfrac{1}{j}-\dfrac{1}{j+1}\right]$

b) $\sum_{k=1}^{20}3k(k^2+2)$ *e)* $\sum_{k=1}^{6}\left[\dfrac{1}{k(k-1)}\right]$

c) $\sum_{k=1}^{n}(5^{k-1}-5^k)$ *f)* $\sum_{j=1}^{40}\left[\sqrt{2j+1}-\sqrt{2j-1}\right]$

5. Encuentra el área de la región limitada por la curva dada, el eje x y las rectas indicadas, tomando rectángulos inscritos y circunscritos para cada función.

a) $y = 2^x$, las rectas $x = -4$ y $x = 4$.

b) $y = x^2$, las rectas $x = -4$ y $x = 0$.

c) $y = x + 4$, las rectas $x = -2$ y $x = 3$.

d) $y = \sqrt{3-x}$, las rectas $x = -6$ y $x = 3$.

e) $y = x^3$, las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

f) $y = e^x$, las rectas $x = -2$ y $x = 3$.

g) $y = \frac{1}{x^2}$, las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

6. Con la notación de suma, determina la suma de Riemann para cada una de las funciones en el intervalo dado, con la partición Δ y los valores ξ_k. Traza la gráfica de la función en el intervalo dado y señala los rectángulos cuyas medidas de área son los términos de la suma de Riemann.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $1 \le x \le 3$; Δ: $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{5}{3}$, $x_3 = \frac{5}{2}$, $x_4 = 3$;
$\xi_1 = 1$, $\xi_2 = \frac{3}{2}$, $\xi_3 = \frac{13}{6}$, $\xi_4 = \frac{17}{6}$.

b) $f(x) = x^3$, $-1 \le x \le 2$; Δ: $x_0 = -1$, $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 1$, $x_4 = \frac{5}{4}$, $x_5 = 2$;
$\xi_1 = -\frac{1}{2}$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = \frac{2}{3}$, $\xi_4 = 1$, $\xi_5 = \frac{3}{2}$.

c) $f(x) = x + 4$, $-2 \le x \le 3$; Δ: $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{4}$, $x_3 = 0$, $x_4 = \frac{1}{2}$, $x_5 = \frac{3}{4}$,
$x_6 = 2$, $x_7 = \frac{5}{2}$, $x_8 = 3$; $\xi_1 = -\frac{3}{2}$, $\xi_2 = -\frac{3}{4}$, $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = \frac{1}{4}$, $\xi_5 = \frac{5}{8}$, $\xi_6 = \frac{5}{4}$, $\xi_7 = \frac{9}{4}$,
$\xi_8 = \frac{11}{4}$.

d) $f(x) = x^2 - x + 1$, $0 \le x \le 2$; Δ: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 0.7$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1.3$, $x_6 = 1.8$, $x_7 = 2$; $\xi_1 = 0.1$, $\xi_2 = 0.4$, $\xi_3 = 0.6$, $\xi_4 = 0.9$, $\xi_5 = 1.1$, $\xi_6 = 1.5$, $\xi_7 = 2$.

e) $f(x)=x^2,\ 1\le x\le 4;\ \Delta: x_0=1,\ x_1=2,\ x_2=\dfrac{11}{4},\ x_3=\dfrac{13}{4},\ x_4=4;$

$\xi_1=\dfrac{9}{4},\ \xi_2=2,\ \xi_3=3,\ \xi_4=\dfrac{15}{4}.$

f) $f(x)=\dfrac{1}{x+2},\ -1\le x\le 3;\ \Delta: x_0=-1,\ x_1=-\dfrac{1}{4},\ x_2=0,\ x_3=\dfrac{1}{2},\ x_4=\dfrac{3}{2},\ x_5=2,$

$x_6=\dfrac{9}{4},\ x_7=\dfrac{5}{2},\ x_8=3;\ \xi_1=-\dfrac{3}{4},\ \xi_2=0,\ \xi_3=\dfrac{1}{4},\ \xi_4=1,\ \xi_5=\dfrac{7}{4},\ \xi_6=2,$

$\xi_7=\dfrac{5}{2},\ \xi_8=3.$

7. Encuentra el valor exacto de las integrales definidas.

a) $\displaystyle\int_1^4 x^3\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-3}^3 (x^3+1)dx$

c) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x}dx$

d) $\displaystyle\int_1^3 4\,dx$

e) $\displaystyle\int_1^4 (2x+1)\,dx$

f) $\displaystyle\int_0^4 5x\,dx$

g) $\displaystyle\int_2^5 x^2\,dx$

h) $\displaystyle\int_{-1}^3 (x^2+6x+3)\,dx$

i) $\displaystyle\int_{-1}^2 (x^2+x-4)\,dx$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Propiedades de la integral definida

La integral definida calculada a partir de su definición, es decir, determinando el límite de la suma de Riemann, resulta ser complicado y poco práctico. Con el fin de establecer un método sencillo y eficaz, es necesario reconocer algunas propiedades de la integral definida, como las que se muestran a continuación.

Teoremas sobre las sumas de Riemann

1. Si Δ es cualquier partición del intervalo cerrado $[a,b]$, se establece que:

$$\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = b-a$$

2. Si f está definida en el intervalo cerrado $[a,b]$ y si $\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} C\, f(x_k)\Delta x_k$ existe, donde Δ es cualquier partición del intervalo $[a,b]$, y C es cualquier constante, tenemos:

$$\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} Cf(x_k)\Delta x_k = C\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$$

Teoremas que dan lugar a las propiedades de la integral definida

1. Si la función f es integrable en el intervalo cerrado $[a,b]$ y C es una constante arbitraria, tenemos:

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx$$

2. Si las funciones f y g son integrables en el intervalo cerrado $[a,b]$ entonces $f+g$ es integrable y se establece que:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Este teorema se puede aplicar a cualquier número de funciones, es decir, si las funciones $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ son todas integrables en el intervalo cerrado $[a,b]$ se tiene:

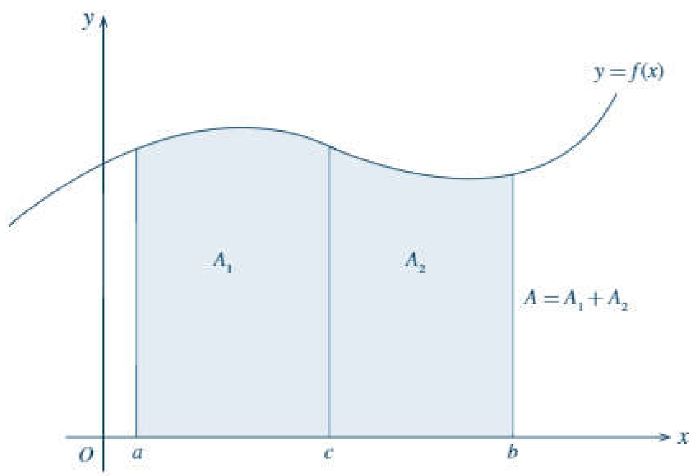
$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\ldots+f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \int_a^b f_3(x)dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)dx$$

Es igualmente aplicable a restas y sumas de funciones.

3. Si la función f es integrable en los intervalos cerrados $[a,b]$, $[a,c]$ y $[c,b]$, tenemos que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \quad \text{donde } a<c<b$$

Este teorema se interpreta geométricamente, si $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a,b]$, entonces se establece que el área bajo la curva $y = f(x)$ entre a y b se puede partir en dos áreas, entre a y c, c y b, como se muestra a continuación:



Puede generalizarse al caso en el que c no es punto intermedio entre a y b, como lo establece la siguiente propiedad.

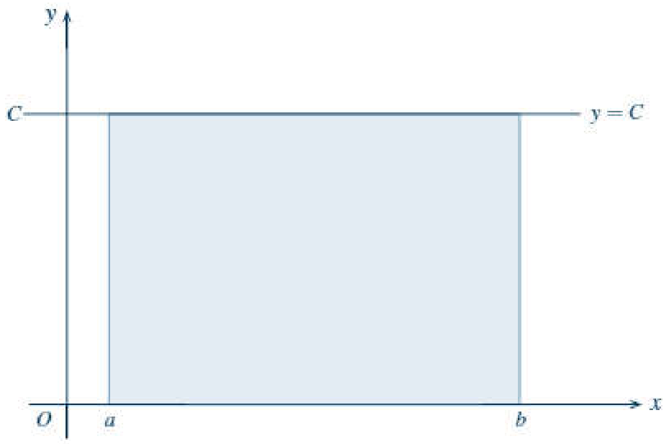
4. Si f es integrable en un intervalo cerrado que contiene los tres números a, b y c en cualquier orden, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

5. Si f es la función constante $f(x) = C$ definida en el intervalo cerrado $[a,b]$ se tiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b C\,dx = C(b-a)$$

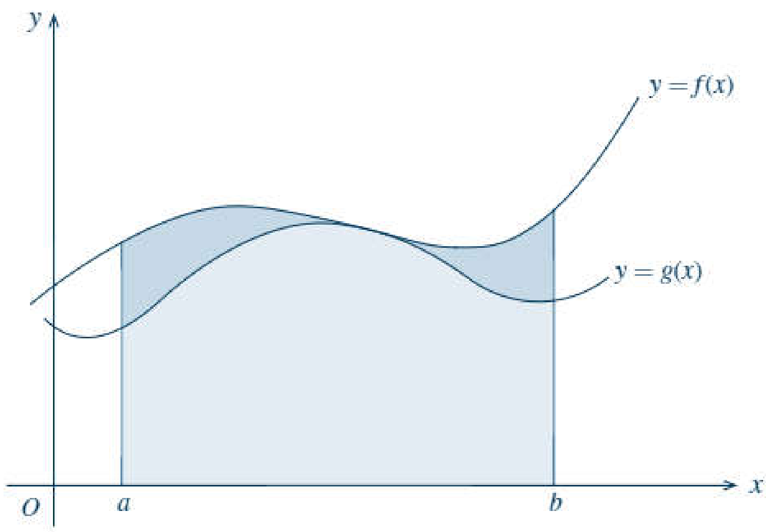
Este teorema se interpreta geométricamente para cuando $C > 0$, estableciéndose que la integral definida $\int_a^b C\,dx$ da la medida del área de la región sombreada, que es un rectángulo cuyas dimensiones son C unidades y $(b - a)$ unidades como se muestra a continuación.



6. Si las funciones f y g son integrables en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $f(x) \geq g(x)$ para toda x en $[a,b]$, tenemos:

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

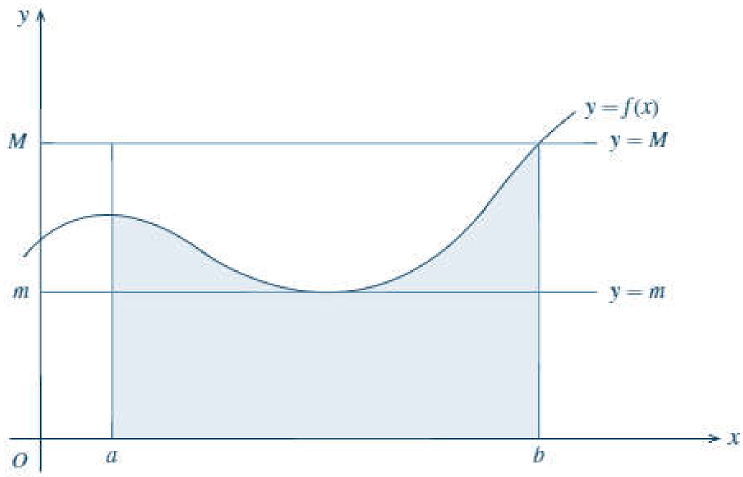
Geométricamente, este teorema significa que si dos regiones comparten la misma base y están limitadas lateralmente por las mismas rectas verticales, una de las áreas será mayor o igual a la otra si su tapa nunca está por abajo de la tapa de la otra, como se observa en la siguiente gráfica:



7. Supongamos que f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$. Si m y M son, los valores mínimo y máximo absolutos de f en $[a,b]$ respectivamente, de tal forma que $m \leq f(x) \leq M$, para toda x tal que $a \leq x \leq b$, entonces:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Si f, además, no toma valores negativos, la interpretación geométrica de este teorema establece que el área bajo la curva de una región cuya tapa se encuentra entre las rectas horizontales $y = m$ y $y = M$, en todo punto del intervalo $[a,b]$, tendrá un valor intermedio entre las áreas de los rectángulos con base en $[a,b]$ y cuyas alturas son m y M, como se muestra a continuación:



EJEMPLO 1

Aplica el teorema 7 de las propiedades de la integral definida para encontrar el mayor y el menor valor posibles de:

$$\int_{-3}^{3} (2x^3 + 3x^2 - 12x)\,dx$$

Solución

1. Se calculan los máximos y mínimos relativos para $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.

   a) Se determina la primera derivada de la función:

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$$
$$y' = 6x^2 + 6x - 12 = x^2 + x - 2$$

   b) Se iguala la primera derivada a cero para obtener los extremos relativos:

$$\left.\begin{array}{lll} x^2 + x - 2 = 0 & x + 2 = 0 & x - 1 = 0 \\ (x+2)(x-1) = 0 & x_1 = -2 & x_2 = 1 \end{array}\right\} \text{Raíces reales o valores críticos.}$$

c) Se agregan los extremos del intervalo y se calcula la función en los valores críticos para obtener el mínimo y el máximo absolutos:

x punto crítico	$2x^3 + 3x^2 - 12x$	valor de la función
-3	$2(-3)^3 + 3(-3)^2 - 12(-3)$	9
-2	$2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2)$	20
1	$2(1)^3 + 3(1)^2 - 12(1)$	-7
3	$2(3)^3 + 3(3)^2 - 12(3)$	45

A partir de la tabla se concluye que el mínimo absoluto de la función es $y = -7$ y se alcanza en $x = 1$; el máximo absoluto es $y = 45$ y se alcanza en $x = 3$.

2. Tomando $m = -7$ y $M = 45$ en la expresión del teorema 7 se obtiene:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

$$(-7)(3-(-3)) \leq \int_{-3}^{3} (2x^3 + 3x^2 - 12x)dx \leq 45(3-(-3))$$

$$-42 \leq \int_{-3}^{3} (2x^3 + 3x^2 - 12x)dx \leq 270$$

Más adelante se encuentra que el valor de esta integral es 54.

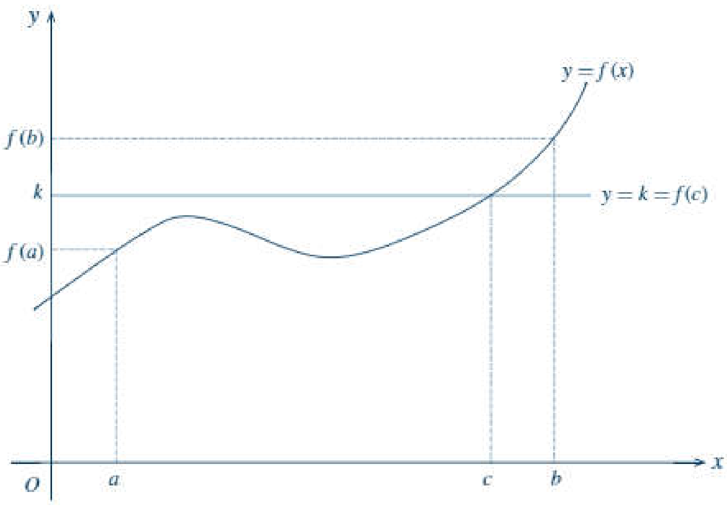
Teorema del valor medio para integrales

Previo al análisis del teorema del valor medio para integrales, revisaremos el **teorema del valor intermedio**, para funciones continuas que se requiere para demostrar el teorema del valor medio para integrales.

El teorema del valor intermedio establece: **si f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $f(a) \neq f(b)$, entonces, para cualquier número k entre $f(a)$ y $f(b)$, existe un número c entre a y b tal que $f(c) = k$.**

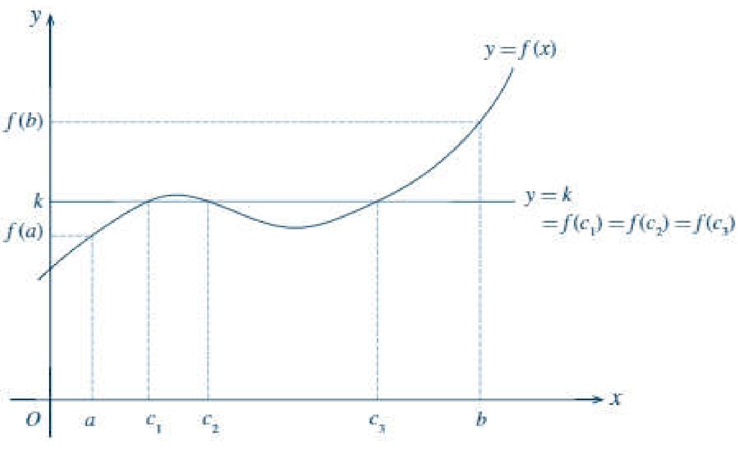
La demostración de este teorema está fuera del objetivo de este libro, por lo que se deja para un curso más avanzado.

El teorema del valor intermedio puede interpretarse geométricamente. En la figura de la página 34 se observa que $(0,k)$ es cualquier punto del eje y entre los puntos $[0, f(a)]$ y $[0, f(b)]$. El teorema del valor intermedio establece que la recta $y = k$ debe intersecar a la curva cuya ecuación es $y = f(x)$ en el punto (c,k), donde c está entre a y b, como se muestra a continuación.



Se hace notar que para algunos valores de k puede existir más de un valor para c.

El teorema del valor intermedio establece que siempre existe por lo menos un valor de c, pero que no es necesariamente único, tal como se muestra a continuación:



El teorema del valor intermedio establece que si la función f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$ cuando x toma todos los valores entre a y b.

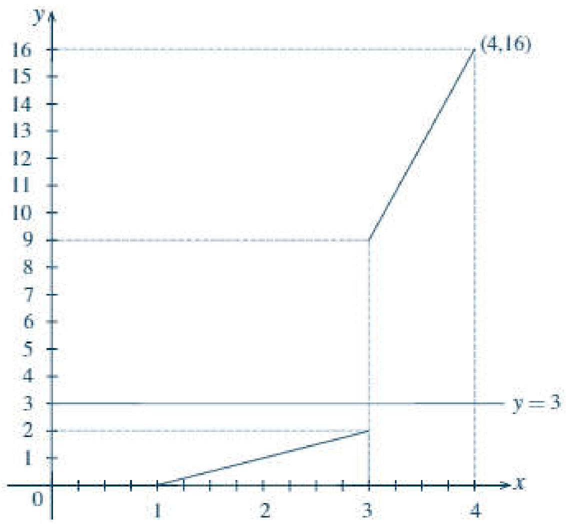
EJEMPLOS

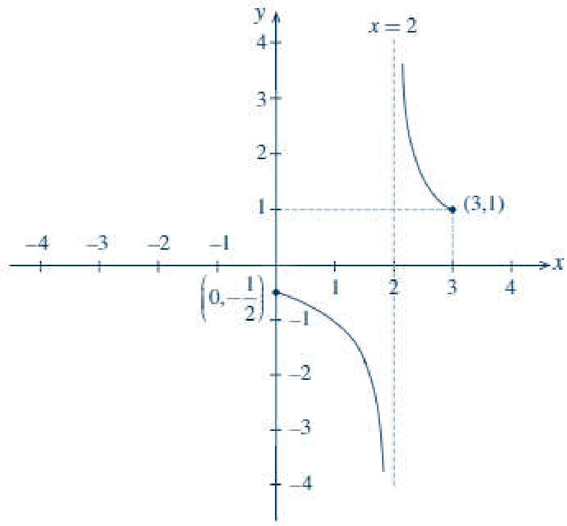
1 Consideremos la función f definida por tramos: $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } 1 \le x \le 3 \\ x^2 & \text{si } 3 < x \le 4 \end{cases}$

La gráfica de esta función se presenta en la figura de la izquierda, dado se hace notar que:

a) La función está definida en el intervalo $[1,4]$, pero no es continua, dado que $f(1) = 0$ y $f(4) = 16$.

b) Si k es cualquier número entre 2 y 9, no existe valor de c tal que $f(c) = k$ porque no hay valores de la función entre 2 y 9.





Consideremos ahora otro ejemplo de una función para la cual el teorema del valor intermedio no es válido.

2 Sea $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, cuya gráfica se muestra en la figura de la derecha en la que se observa que:

a) La función f es discontinua en 2, que es un punto del intervalo cerrado $[0,3]$, ya que $f(0) = -\dfrac{1}{2}$ y $f(3) = 1$.

b) Si k es cualquier número entre $-\dfrac{1}{2}$ y 1, no existe valor de c entre 0 y 3 tal que $f(c) = k$.

Después de haber ilustrado con un par de ejemplos el papel que juega la continuidad en el teorema del valor intermedio, se puede formular y demostrar el teorema del valor medio para integrales.

El **teorema del valor medio** establece:

Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces existe un número X tal que $a \leq X \leq b$ y $\int_a^b f(x)\,dx = f(X)\,(b-a)$.

Demostración del teorema del valor medio para integrales

Es un hecho que toda función continua en un intervalo cerrado alcanza sus valores extremos, es decir, máximo y mínimo absolutos, en algunos valores x del intervalo.

Si f es una función continua en $[a,b]$, existen xm y xM, ambos entre a y b, es decir $a \leq xm \leq b$ y $a \leq xM \leq b$ tales que $fmax = M = fxM$ y $fmin = m = fxm$. Además, $m \leq fx \leq M$ para toda x en $[a,b]$.

Por el teorema **7**, resulta:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Como $(b-a)$ es positivo, porque $a < b$, al dividir entre $(b-a)$, se obtiene:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} \leq M$$

Como $M = fxM$ y $m = fxm$, la expresión anterior se convierte en:

$$f(Xm) \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} \leq f(XM)$$

Por el teorema del valor intermedio, existe X entre Xm y XM tal que,

$$f(x) = \frac{\int_a^b (x)\,dx}{(b-a)},$$

o bien,

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(x),$$

para alguna X entre a y b, con lo que queda demostrado el teorema del valor medio para integrales.

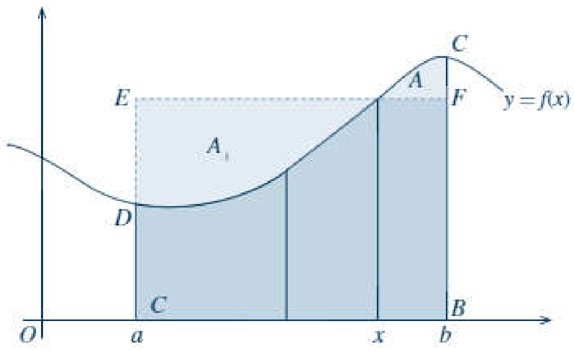
Para visualizar lo que asegura el teorema del valor medio para integrales, consideramos, a manera de ejemplo, una función positiva, continua en el intervalo $[a,b]$.

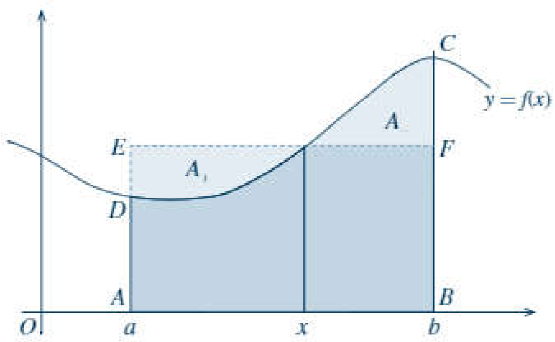
En la figura de la izquierda de la página 37 se muestra la gráfica de una función positiva, definida en el intervalo $[a,b]$, que define la región $ABCD$, cuya área es $abfxdx$. También se muestra el área de un rectángulo $ABFE$ que comparte con la región $ABCD$ tres de sus lados y sólo difiere de ella en la tapa.

Una forma de saber que las áreas de ambas regiones son iguales, es cuando son iguales las áreas A_+ y A_-. En la figura de la izquierda, claramente A_- es menor que A_+, por lo tanto, el área del rectángulo $ABFE$ es mayor que el área de la región $ABCD$, pero queda claro que es posible bajar el segmento FE hasta que A_+ y A_- sean iguales, como se muestra en la figura de la derecha. Al coincidir las áreas A_+ y A_-, el área bajo la curva, dada por la integral, tendrá el mismo valor que el área del rectángulo, cuya altura es fX, para algún valor de X intermedio entre a y b. Dicho de otra forma,

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,fX, \text{ para alguna } X \text{ en } [a,b],$$

y para ello basta que f sea continua en el intervalo $[a,b]$.





EJEMPLO

Ejemplo 1 • Encuentra el valor de X tal que $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = f(X)(3-(-3))$, si $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.

Solución

Primero se determina el valor exacto de la integral definida $\int_{-3}^{3} (2x^3 + 3x^2 - 12x)\,dx$.

Considerando una partición regular del intervalo cerrado $[-3,3]$ en n subintervalos, es decir:

$$\Delta x = \frac{(b-a)}{n} = \frac{(3-(-3))}{n} = \frac{6}{n}$$

Seleccionando ξ_k como un punto en cada subintervalo, se tiene:

$$\xi_1 = -3 + \frac{6}{n},\ \xi_2 = -3 + 2\left(\frac{6}{n}\right),\ \xi_3 = -3 + 3\left(\frac{6}{n}\right), \ldots,\ \xi_n = -3 + n\left(\frac{6}{n}\right), \ldots,\ \xi_n = -3 + n\left(\frac{6}{n}\right).$$

Como $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$, resulta:

$$f(\xi_k) = 2\left(-3+\frac{6k}{n}\right)^3 + 3\left(-3+\frac{6k}{n}\right)^2 - 12\left(-3+\frac{6k}{n}\right)$$

$$f(\xi_k) = 2\left(-27+162\frac{k}{n}-324\frac{k^2}{n^2}+216\frac{k^3}{n^3}\right)+3\left(9-36\frac{k}{n}+36\frac{k^2}{n^2}\right)-12\left(-3+\frac{6k}{n}\right)$$

$$f(\xi_k) = -54+\frac{324k}{n}-\frac{648k^2}{n^2}+\frac{432k^3}{n^3}+27-\frac{108k}{n}+\frac{108k^2}{n^3}+36-\frac{72k}{n}$$

$$f(\xi_k) = 9+\frac{144k}{n}-\frac{540k^2}{n^2}+\frac{432k}{n^3}=\left(\frac{9n^3+144kn^2-540k^2n+432k^3}{n^3}\right)$$

Por la expresión $\int_a^b f(x)\,dx = A = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x$ tenemos:

$$\int_{-3}^{3}(2x^3+3x^2-12x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{9n^3+144kn^2-540k^2n+432k^3}{n^3}\right)\left(\frac{6}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{6}{n^4}\sum_{k=1}^{n}(9n^3+144kn^2-540k^2n+432k^3)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{6}{n^4}\left(9n^3\sum_{k=1}^{n}1+144n^2\sum_{k=1}^{n}k-540n\sum_{k=1}^{n}k^2+432\sum_{k=1}^{n}k^3\right)$$

Por las fórmulas de la notación de suma, resulta:

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{6}{n^4}\left[9n^3(n)+144n^2\frac{(n)(n+1)}{2}-540n\frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}+432\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{6}{n^4}\left(9n^4+\frac{144n^4+144n^3}{2}-\frac{1\,080n^4+1620n^3+540n^2}{6}+\frac{432n^4+864n^3+432n^2}{4}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{6}{n^4}\left(\frac{54n^4+432n^4+432n^3-1\,080n^4-1\,620n^3-540n^2+648n^4+1\,296n^3+648n^2}{6}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{54n^4+108n^3+108n^2}{n^4}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(54+\frac{108}{n}+\frac{108}{n^2}\right)$$

$$=\left(54+\frac{108}{\infty}+\frac{108}{\infty^2}\right)=54+0+0=54$$

$\therefore$ El valor exacto de la integral definida $\int_{-3}^{3}(2x^3+3x^2-12x)\,dx$ es de 54 unidades cuadradas.

Por el teorema del valor medio para integrales, tenemos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x)(b-a) \qquad\qquad 54 = f(x)(6)$$

$$\int_{-3}^{3}(2x^3+3x^3-12x)\,dx = f(x)(3-(-3)) \qquad \therefore \quad f(x)=9$$

Para determinar el valor de x, tenemos que:

$$2x^3+3x^2-12x=9$$

$$x(2x^2+3x-12)=9$$

De tal forma que:

$$x=9 \quad \text{y} \quad 2x^2+3x-12=9 \quad \text{o} \quad 2x^2+3x-21=0$$

Para la primera ecuación tenemos que $x_1 = 9$.

Para la segunda ecuación aplicamos la fórmula general para ecuaciones de segundo grado, lo que resulta:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-4(2)(-21)}}{2(2)}$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{177}}{4} \qquad \therefore \qquad \left\{ \begin{aligned} x_2 &= \frac{-3+\sqrt{177}}{4} \\ x_3 &= \frac{-3-\sqrt{177}}{4} \end{aligned} \right.$$

Rechazamos los valores $x_1 = 9$ y $x_3 = \dfrac{-3-\sqrt{177}}{4}$, ya que no están contenidos en el intervalo cerrado $[-3,3]$.

$$\therefore \quad \int_{-3}^{3}(2x^3+3x^2-12x)dx = f\left(\frac{-3+\sqrt{177}}{4}\right)(6)$$

Valor promedio

El valor $f(x)$ dado por el teorema del valor medio para integrales se llama el **valor medio** o **valor promedio** de f en el intervalo cerrado $[a,b]$. Es una generalización de la media aritmética de un conjunto finito de n números $f(x_1), f(x_2), f(x_3),\ldots, f(x_n)$, la cual está dada por la expresión:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

Considerando una partición regular del intervalo cerrado $[a,b]$ que se divide en n subintervalos de igual longitud, se obtiene $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$.

Sea ξ_k cualquier punto del k-ésimo subintervalo la media aritmética de los valores que toma la función en los n números así obtenidos queda representada por: $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)$.

Como $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ se tiene que $\frac{1}{n} = \frac{\Delta x}{b-a}$, que al sustituir en el cociente, da lugar a:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) = \frac{\Delta x}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) = \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x$$

Al tomar el límite cuando $n \to +\infty$ o $\Delta x \to 0$, tenemos:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

De lo anterior, se concluye que:

Si la función f es integrable en el intervalo cerrado $[a,b]$, el valor promedio de f en $[a,b]$ es:

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

EJEMPLO

Ejemplo

1 Encuentra el valor promedio de la función f definida por $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ en el intervalo cerrado $[-3,3]$.

Solución

Del ejemplo anterior, se obtuvo que $\int_{-3}^{3} (2x^3 + 3x^2 - 12x)dx = 54$

El valor promedio (VP) de f en $[-3,3]$ es:

$$VP = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} = \frac{\int_{-3}^{3} (2x^3 + 3x^2 - 12x)\,dx}{(3-(-3))} = \frac{54}{6} = 9$$

$\therefore$ El valor promedio de la función f definida por $\int_{-3}^{3}(2x^3 + 3x^2 - 12x)\,dx$ en el intervalo cerrado $[-3,3]$, es 9.

El valor promedio de una función tiene aplicaciones importantes en la física e ingeniería en relación con el concepto de centro de masa; en economía se aplica en el cálculo del costo total promedio o del ingreso total promedio. Dichas aplicaciones se analizarán más adelante.

EJERCICIO 3

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

I. En tu cuaderno, contesta las siguientes preguntas y socializa tus respuestas.

1. Describe los teoremas sobre las sumas de Riemann.
2. Enuncia los teoremas que dan lugar a las propiedades de la integral definida.
3. ¿Qué establece el teorema del valor intermedio?
4. Escribe el teorema del valor medio.
5. ¿Qué establece el teorema del valor extremo?
6. Explica qué es el valor medio o valor promedio de una función en un intervalo $[a,b]$.
7. Cita las aplicaciones del valor medio o valor promedio.

II. En equipo, resuelve los siguientes problemas y en plenaria discutan sus resultados.

1. Aplica el teorema 7 de las propiedades de la integral definida para encontrar el mayor valor y el menor valor posible de:

a) $\int_{1}^{3} 5x\,dx$

b) $\int_{-2}^{1} (1+x)^{\frac{2}{3}}\,dx$

c) $\int_{0}^{5} x^2\,dx$

d) $\int_{2}^{4} \sqrt{16-x^2}\,dx$

e) $\int_{0}^{2} \sqrt{1+x^3}\,dx$

f) $\int_{3}^{6} \frac{x}{4+x^2}\,dx$

g) $\int_{0}^{4} (9-x^2)\,dx$

h) $\int_{-1}^{2} (3x^4-4x^3-12x^2)\,dx$

i) $\int_{-5}^{2} \frac{x+7}{x-5}\,dx$

2. En los siguientes problemas se dan una función f y un intervalo $[a,b]$. Determina si el teorema del valor intermedio es válido para el valor dado de K. Si dicho teorema es válido, encuentra un número c tal que $f(c) = K$. Si el teorema resulta no ser válido, explica el porqué. Dibuja la gráfica correspondiente de la curva y la recta $y = K$.

a) $f(x) = 4 + x - x^2$; $[0,3]$; $K = 1$

b) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$; $[-4,3]$; $K = 3$

c) $f(x) = \dfrac{2}{x+4}$; $[-5,-1]$; $K = -\dfrac{1}{2}$

d) $f(x) = \begin{Bmatrix} x^2 - 4 \text{ si } -2 \le x \le 1 \\ x^2 - 1 \text{ si } 1 \le x \le 3 \end{Bmatrix}$; $[-2,3]$; $K = -1$

e) $f(x) = x^2 + 3x - 2$; $[-1,2]$; $K = 3$

f) $f(x) = 4 + 3x - x^2$; $[2,5]$; $K = 1$

g) $f(x) = -\sqrt{64 - x^2}$; $[0,6]$; $K = -6$

h) $f(x) = \dfrac{7}{2x-1}$; $[0,1]$; $K = 4$

3. Encuentra el valor de x que satisfaga el teorema del valor medio para integrales. Construye la gráfica correspondiente a cada caso.

a) $\int_0^2 x^3\,dx$

b) $\int_1^4 (x^2 + 4x + 5)\,dx$

c) $\int_{-2}^2 x^4\,dx$

d) $\int_0^4 (2 + x - x^2)\,dx$

e) $\int_{-1}^2 (4x^3 - 3x^2)\,dx$

f) $\int_{-2}^3 (x^3 + 1)\,dx$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

La integral definida

Los conceptos fundamentales de la integral definida fueron empleados por los antiguos griegos muchos años antes de que fuera descubierto el cálculo diferencial. En el siglo XVII, casi simultáneamente pero en forma independiente, Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz trabajaron en la aplicación del cálculo para determinar el área de una región limitada por una curva o un conjunto de curvas, para ello, calcularon una integral definida mediante la antidiferenciación; en cuyo proceso de solución está contenido el teorema fundamental del cálculo. Para establecer y demostrar el teorema fundamental del cálculo, se analizarán las integrales definidas con un límite superior variable y un teorema preliminar.

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces el valor de la integral definida $\int_b^a f(x)\,dx$ depende únicamente de la función f y de los números a y b y no de la variable x, que es la variable independiente. Del ejemplo $\int_0^3 x^2\,dx$ se determina que el valor exacto de x es 9. Se podría haber empleado cualquier otra literal en lugar de x; por ejemplo:

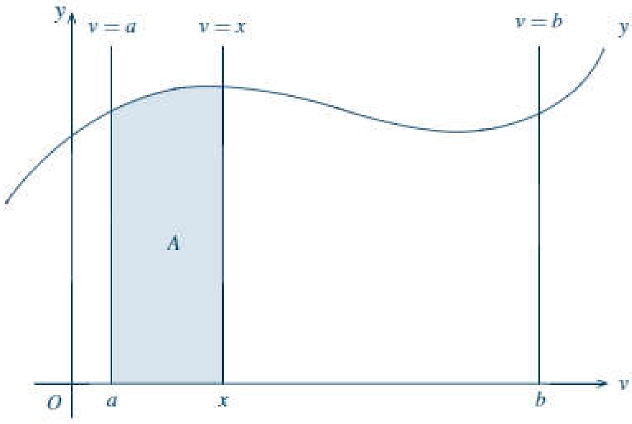
$$\int_0^3 s^2 ds = \int_0^3 t^2 dt = \int_0^3 u^2 du = \int_0^3 v^2 dv = 9$$

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$; por la definición de la integral definida, se garantiza que $\int_b^a f(v)\,dv$ existe. Por lo anterior, se establece que **si la integral definida existe, representa un valor único.** Si x es un valor numérico en $[a,b]$, entonces f es continua en $[a,x]$ ya que es continua en $[a,b]$. Por consiguiente, $\int_a^x f(v)\,dv$ define una función F que tiene como dominio a todos los valores numéricos en el intervalo cerrado $[a,b]$ y cuyo valor de la función en cualquier valor numérico x en $[a,b]$ está dado por:

$$F(x) = \int_a^x f(v)\,dv$$

Si los límites de la integral definida son variables, se emplean distintas literales para estos límites y para la variable independiente en el integrando, esto es, en la ecuación $F(x) = \int_a^x f(v)\,dv$, como x es el límite superior empleamos la literal v como la variable independiente en el integrando.

Si en la ecuación $F(x) = \int_a^x f(v)\,dv$, $f(v) \geq 0$ para todos los valores de v en $[a,b]$, entonces el valor $F(x)$ se puede interpretar geométricamente como la medida del área de la región limitada por la curva $y = f(v)$, el eje v y las rectas $v = a$ y $v = x$ (ver figura de la página 44).



Con base en la figura anterior, se puede ver que $F(a) = \int_a^a f(v)dv$ es igual a cero.

Ahora establecerá y demostrará el teorema a que da lugar la derivada de una función F definida como una integral con un límite superior variable.

Teorema. Sea la función f continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y sea x cualquier valor numérico en $[a,b]$. Si F es la función definida por $F(x) = \int_a^x f(v)$, entonces $F'(x) = f(x)$.

Si $x = a$, la derivada en $F'(x) = f(x)$ puede ser una derivada por la derecha; si $x = b$, la derivada en $F'(x) = f(x)$ puede ser una derivada por la izquierda.

Demostración. Considerando dos valores numéricos (x_1) y $(x_1 + \Delta x)$ en el intervalo cerrado $[a,b]$, tenemos:

$$F(x_1) = \int_a^{x_1} f(v)dv \text{ y } F(x_1 + \Delta x) = \int_a^{x_1+\Delta x} f(v)dv$$

tal que: $F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_a^{x_1+\Delta x} f(v)dv - \int_a^{x_1} f(v) \Big\}$ Ecuación A

Por el teorema **4**, que da lugar a las propiedades de la integral definida, se tiene:

$$\int_a^{x_1+\Delta x} f(v)dv = \int_a^{x_1} f(v)dv + \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(v)dv$$

De igual forma:

$$\int_a^{x_1+\Delta x} f(v)\,dv - \int_a^{x_1} f(v)\,dv = \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(v)\,dv \quad \Big\} \text{ Ecuación B}$$

Al sustituir la ecuación B en A, resulta:

$$F(x_1+\Delta x) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(v)\,dv \quad \Big\} \text{ Ecuación C}$$

Por el teorema del valor medio para integrales, existe algún número X en el intervalo cerrado limitado por (x_1) y $(x_1 + \Delta x)$ tal que:

$$\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(v)\,dv = f(X)\Delta x \quad \Big\} \text{ Ecuación D}$$

De las ecuaciones C y D, se obtiene que $F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = f(X)\Delta x$. Si dividimos entre Δx, resulta:

$$\frac{F(x_1+\Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = f(X)$$

Al tomar el límite cuando $\Delta x \to 0$, tenemos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_1+\Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(X) \quad \Big\} \text{ Ecuación E}$$

El lado izquierdo de la ecuación E es $F'(x_1)$. Para encontrar el $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(X)$, no debe olvidarse que X está contenido en el intervalo cerrado limitado por (x_1) y $(x_1 + \Delta x)$, y como,

$$\lim_{\Delta x \to 0} x_1 = x_1 \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x \to 0} (x_1 + \Delta x_1) = x_1$$

Por el teorema del **apretón** que establece: suponiendo que las funciones f, g y h están definidas en algún intervalo abierto que contiene a a excepto posiblemente en a misma, y que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para toda x en dicho intervalo para las cuales $x \neq a$. También suponiendo que el $\lim\limits_{X \to a} f(x)$ y $\lim\limits_{X \to a} h(x)$ existen y son iguales a L. Entonces $\lim\limits_{X \to a} g(x)$ también existe y es igual a L.

Por lo anterior, se establece que el $\lim\limits_{\Delta x \to 0} X = x_1$. Como f es continua en X_1 se tiene que: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(X) = \lim\limits_{X \to x_1} f(X) = f(x_1)$; por lo tanto, de la ecuación E resulta: $F'(x_1) = f(x_1)$.

Si la función f no está definida para valores de x menores que a pero es continua a la derecha de a, entonces en el argumento anterior si $x_1 = a$ en la ecuación E, Δx se debe aproximar a cero por la derecha. Por lo tanto, el lado izquierdo de la ecuación $F'(x_1) = f(x_1)$ será $F'_+(x_1)$. De la misma manera, si f no está definida para valores de x mayores que b pero es continua a la izquierda de b, entonces si $x = b$ en la ecuación E, Δx se debe aproximar a cero por la izquierda. Por lo tanto, el lado izquierdo de la ecuación $F'(x_1) = f(x_1)$ será $F'_-(x_1)$.

Entonces, el teorema anterior establece que la integral definida $\int_a^x f(v)\,dv$, con límite superior variable x, es una **antiderivada** de f.

Teorema fundamental del cálculo. Sea la función f continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y sea g una función tal que $g'(x) = f(x)$ para toda x en $[a,b]$. Entonces $\int_a^x f(v)dv = g(b) - g(a)$.

Si $x = a$, la derivada en $g'(x) = f(x)$ puede ser una derivada por la derecha y si $x = b$, la derivada en $g'(x) = f(x)$ puede ser una derivada por la izquierda.

Demostración. Si f es continua en todos los números en $[a,b]$ por el teorema establecido y demostrado con anterioridad la integral definida $\int_a^x f(v)\,dv$ con límite superior variable x, define una función f cuya derivada en $[a,b]$ es f. Como por hipótesis $g'(x) = f(x)$, se sigue del teorema que establece: si f y g son dos funciones tales que $f'(x) = g'(x)$ para todos los valores de x en el intervalo I, entonces existe una constante K tal que $f(x) = g(x) + K$ para toda x en I, y que $g(x) = \int_a^x f(v)\,dv + K$, donde K es cualquier constante.

Si $x = b$ y $x = a$, al sustituir en la ecuación anterior, resulta:

$$g(b) = \int_a^b f(v)dv + K \ \text{y} \ g(a) = \int_a^x f(v)dv + K$$

De las ecuaciones anteriores, se tiene: $\quad g(b) - g(a) = \int_a^b f(v)dv - \int_a^a f(v)dv$

Por definición se tiene que $\int_a^b f(v)dv = 0$, lo que resulta $g(b) - g(a) = \int_a^b f(v)dv$

Si f no está definida para valores de x mayores que b pero es continua a la izquierda de b, la derivada en $g'(x) = f(x)$ es una derivada por la izquierda, resultando que: $g'_-(b) = F'_-(b)$ de donde se llega a $g(b) = \int_a^b f(v)dv + K$. De la misma manera, si f no está definida para valores de x menores que a pero es continua a la derecha de a entonces la derivada en $g'(x) = f(x)$ es una derivada por la derecha y resulta que $g'_+(a) = F'_+(a)$ de donde se llega a $g(a) = \int_a^b f(v)dv + K$.

Ahora el valor exacto de cualquier integral definida aplicando el teorema fundamental del cálculo, en donde se hace énfasis en $[g(b) - g(a)] = [g(x)]_a^b$.

EJEMPLO

Ejemplo 1 Calcula la $\int_0^3 x^2\,dx$ usando el teorema fundamental del cálculo.

Solución

Sea $f(x) = x^2$ y la antiderivada de $x^2 = \frac{1}{3}x^3$.*

Si $g(x) = \frac{x^3}{3}$, por el teorema fundamental del cálculo, se tiene:

$$\int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{(3)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3} = 9$$

* El resultado de integrar x^2 es $\frac{1}{3}x^3$ y se obtiene al aplicar directamente las fórmulas de integración para integrales inmediatas elementales que se estudiarán más adelante. El estudiante puede comprobar este resultado haciendo el cálculo del área como el límite de una suma de Riemann.

La integral indefinida

De la expresión $F(x) = \int_a^x f(v)dv$ la función $F(x)$ se denomina una **integral indefinida** de la función $f(v)$. Se dice **una** y no **la** integral indefinida, ya que en lugar de haber elegido a a como el límite inferior de integración, se pudo escoger otro valor constante y en tal caso, se obtendría otro valor para la integral.

Es muy fácil comprobar que cualquier integral definida se determina a partir de una integral indefinida $F(x)$ a través de la expresión:

$$\int_a^b f(v)dv = g(b) - g(a)$$

La relación anterior entre una integral definida y una indefinida sugiere una manera de calcular el valor de la primera a partir de la segunda.

El teorema fundamental del cálculo establece que una integral indefinida $F(x)$ de una función continua $f(x)$ definida por $F(x) = \int_a^x f(v)dv$ posee siempre una derivada $F'(x)$ y es tal que $F'(x) = f(x)$. Es decir, la derivación de una integral indefinida reproduce siempre el integrando.

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int f(v)dv = f(x)$$

El teorema fundamental del cálculo muestra el carácter inverso de las operaciones de derivación e integración, lo cual, constituye el hecho básico del cálculo. Debido a esta relación inversa **derivación-integración** a la función $f(x)$ se le denomina la **primitiva de $F(x)$** ya que esta última proviene de la derivación de la primera.

A continuación veremos que la integral de una función no es única ya que diferentes funciones primitivas pueden tener el mismo diferencial.

EJEMPLO

Ejemplo 1

$f_1(x) = ax^2$ $\qquad$ $f_2(x) = ax^2 + 3$ $\qquad$ $f_3(x) = ax^2 - 7$

$d_1(ax^2) = 2ax\,dx$ $\qquad$ $d_2(ax^2 + 3) = 2ax\,dx$ $\qquad$ $d_3(ax^2 - 7) = 2ax\,dx$

En el proceso inverso, integrando se obtiene:

$$\int 2ax\,dx = ax^2 \qquad \int 2ax\,dx = ax^2 + 3 \qquad \int 2ax\,dx = ax^2 - 7$$

Se puede observar que las tres integrales únicamente difieren en un valor constante y ya se conocía cada una de las funciones primitivas.

$\therefore$ Una función $f(x)$ tiene infinitas funciones primitivas pero dos cualesquiera de ellas, $F_1(x)$ y $F_2(x)$ difieren siempre en una constante.

Pero, ¿qué sucede, si primero se plantea la expresión $\int 2ax\,dx$? ¿Qué respuesta daremos si se comprendió que puede haber una cantidad infinita de funciones que dan lugar a esta diferencial?

Con el fin de dar una respuesta clara y precisa, diremos que $\int 2ax\,dx$ es ax^2 más un valor constante indefinido que representamos por C, es decir:

$$\int 2ax\,dx = ax^2 + C$$

Como no es posible precisar el valor de C, $ax^2 + C$ se conoce como la **integral indefinida de $2ax\,dx$**.

La constante arbitraria C se llama **constante de integración** y es una cantidad independiente de la variable de integración.

Por conclusión, se tiene que $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$ donde $f(x) + C$ es la integral indefinida de $f'(x)\,dx$.

$\therefore$ Al conjunto de todas las funciones primitivas de una función $f(x)$ se le denomina integral indefinida de $f'(x)\,dx$.

El proceso de calcular una integral indefinida o una integral definida se denomina **integración**.

EJERCICIO 4

I. En tu cuaderno, contesta las siguientes preguntas.

Escribe los números correspondientes	
Competencias genéricas	
Competencias disciplinares	

1. ¿Qué representa $\int_a^x f(v)dv$?
2. Define $F(x) = \int_a^x f(v)dv$.
3. ¿Qué representa geométricamente el valor de la ecuación $F(x) = \int_a^x f(v)dv$?
4. Enuncia el teorema a que da lugar la derivada de una función F que representa una integral definida con un límite superior variable.
5. Enuncia el teorema fundamental del cálculo.
6. ¿A qué se le denomina integral indefinida?
7. Para una integral indefinida, ¿qué establece el teorema fundamental del cálculo?
8. ¿Qué es una función primitiva?
9. ¿Qué representa C en una integral?
10. ¿Cómo se llama el proceso para determinar una integral indefinida o una integral definida?

II. Resuelve los siguientes problemas y en plenaria discute tus resultados.

1. Encuentra el área de la región acotada por la curva y rectas dadas en los siguientes incisos. Construye una gráfica mostrando la región y un rectángulo. Expresa la medida del área como el límite de una suma de Riemann y después como integral definida.

   a) $y = 4 - x^2$; el eje x; $x = 0$, $x = 3$.

   b) $y = 8x - x^2$; el eje x; $x = 1$, $x = 3$.

   c) $y = x\sqrt{x+5}$; el eje x; $x = -1$, $x = 4$.

   d) $y = x^2\sqrt{x-3}$; el eje x; $x = 7$, $x = 12$.

   e) $y = x^2 - 4x + 5$; el eje x; $x = -2$, $x = 2$.

   f) $y = x\sqrt{x^2+4}$; el eje x; $x = 9$.

   g) $y = 3x\sqrt{x^2-16}$; el eje x; $x = 4$, $x = 6$.

   h) $y = \sqrt{x+1}$; el eje x; $x = 8$.

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Aplicación de las cinco primeras ecuaciones del fórmulario general de integrales inmediatas elementales

Integración

En cálculo diferencial se aprendió a determinar la derivada $f'(x)$ o la diferencial $f'(x)\,dx$ de una función dada $f(x)$; en cálculo integral se realiza la operación inversa, es decir, se determina una función $f(x)$ cuya derivada o diferencial es conocida.

Ejemplo

Sea $f(x) = x^2 + 9$

$$\left.\frac{dy}{dx} = 2x\right\} \text{ Derivada}$$

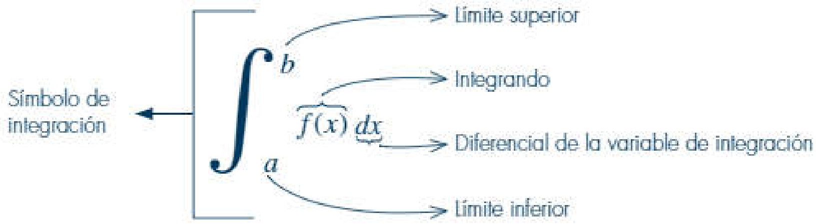
$$\left.dy = 2x\,dx\right\} \text{ Diferencial}$$

$$\left.\int 2x\,dx = x^2 + C\right\} \text{ Integración}$$

$\therefore$ La integración y la diferenciación son operaciones inversas.

De la expresión $\int 2x\,dx = x^2 + C$, no se puede saber cuál es el valor de C (constante de integración), es decir, es un valor indefinido y por ello a esta operación se le conoce como **integral indefinida**.

De la notación para la integral indefinida, se puede identificar:



Ejemplo

De la expresión $\int 2x\,dx$ se tiene que $\int$ es el símbolo de la integral, $\mathbf{2x}$ es el integrando y $\boldsymbol{dx}$ es la diferencial de la integral cuya variable es $\boldsymbol{x}$.

Comprobación de la integración indefinida

Para verificar si el cálculo de la integral indefinida es correcto, se determina la diferencial del resultado y éste debe ser el integrando.

Ejemplo

Sea la expresión $\int \underbrace{3a\,y^2}_{\text{Integrando}}\,dy = \overbrace{ay^3 + C}^{\text{Resultado}}$; donde la diferencial de $ay^3 + C$ es $3ay^2\,dy$.

$\therefore$ El cálculo de la integral indefinida es correcta.

Pasos para integrar una función

1. De la expresión a integrar se toma la variable y se obtiene su diferencial.
2. Si la diferencial resultante completa el diferencial de la integral, se aplica directamente la fórmula correspondiente.
3. Si la diferencial resultante completa la diferencial de la integral y sobran constantes, éstas pasan en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral.

Fórmulas para integrales inmediatas elementales

1. $\int dv = v + C$
2. $\int a\,dv = a\int dv = av + C$
3. $\int (dv + du - dw) = \int dv + \int du - \int dw = v + u - w + C$
4. $\int v^n\,dv = \dfrac{v^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$
5. $\int \dfrac{dv}{v} = \ln v + C = \ln v + \ln C = \ln Cv \qquad (C = \ln C)$

—Las fórmulas para integrales inmediatas elementales se obtienen directamente de las fórmulas generales de diferenciación—.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula la $\int x^3\,dx$.

Solución

Con base en los pasos para integrar una función, en la expresión dada se identifica la variable $v = x$ y al exponente $n = 3$, es decir:

$$v = x \qquad n = 2$$
$$dv = dy$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = dx$ completa la diferencial de la integral dx, razón por la que se aplica directamente la fórmula **4**, de lo que resulta:

$$\therefore \quad \int \underbrace{x}_{v}^{\overset{n}{3}} \underbrace{dx}_{dv} = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C$$

2 Calcula la $\int 5my^2\, dy$.

Solución

En la expresión dada se identifica que $5m$ es una constante que se encuentra como factor en el integrando $5my^2$; al aplicar directamente la fórmula **2**, se tiene:

$$\int \underbrace{5m}_{a} \underbrace{y^2}_{v} \underbrace{dy}_{dv} = 5m \int y^2\, dy$$

Ahora en la expresión resultante, se tiene que la variable es $v = y$ y el exponente $n = 2$, es decir:

$$v = y \qquad n = 2$$
$$dv = dy$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = dy$ completa la diferencial de la integral dy, razón por la que se aplica directamente la fórmula **4**, de lo que resulta:

$$\therefore \quad 5m \int \underbrace{y}_{v}^{\overset{n}{2}} \underbrace{dy}_{dv} = 5m\left(\frac{y^{2+1}}{2+1}\right) + C = \frac{5}{3}my^3 + C$$

3 Calcula la $\int \sqrt{3t}\, dt$.

Solución

Muchas integrales indefinidas no se pueden calcular directamente aplicando las fórmulas inmediatas elementales; sin embargo, esto es posible mediante **artificios**, es decir, mediante la aplicación de propiedades y leyes matemáticas que facilitan la resolución de un problema.

Para el caso propuesto, no se pueden aplicar directamente ninguna de las cinco fórmulas que hasta el momento se conocen. Sin embargo, si el integrando $\sqrt{3t}$ se pasa de la forma **radical** a la forma **exponencial**, se tiene:

$$\int \sqrt{3t}\, dt = \int (3t)^{\frac{1}{2}}\, dt$$

Ahora en la expresión resultante, se tiene que la variable es $v = 3t$ y el exponente es $n = \frac{1}{2}$, es decir:

$$v = 3t \qquad n = \frac{1}{2}$$
$$dv = 3\,dt$$

Se observa que el diferencial de la variable $dv = 3\,dt$ completa el diferencial de la integral dt, razón por la que se aplica directamente la fórmula **4**. Pero, con base en el paso 3 para integrar una función, se observa que en la diferencial de la variable $3\,dt$ nos sobra la constante 3, la cual, pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir;

$$\int \underbrace{(3t)}_{v}^{\overbrace{\frac{1}{2}}^{n}+1} \underbrace{dt}_{dv} = \frac{1}{3}\left[\frac{(3t)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]+C = \frac{1}{3}\left[\frac{(3t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]+C$$

$$\therefore \quad \int (3t)^{\frac{1}{2}+1}\,dt = \frac{2}{9}\sqrt{(3t)^3}+C = \frac{2(3t)}{9}\sqrt{3t}+C = \frac{2t\sqrt{3t}}{3}+C$$

4 Calcula la $\int \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}$.

Solución

Para el ejemplo propuesto no se puede aplicar directamente ninguna de las cinco fórmulas que hasta el momento se conocen. Sin embargo, si el término del denominador lo pasamos al numerador y con base en las leyes de los exponentes, tenemos:

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}} = \int x^{-\frac{2}{3}}\,dx$$

Ahora en la expresión resultante, se tiene que la variable es $v = x$ y el exponente es $n = -\frac{2}{3}$, es decir:

$$v = x \qquad n = -\frac{2}{3}$$
$$dv = dx$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = dx$ completa la diferencial de la integral dx, razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **4**, de lo que resulta:

$$\therefore \quad \int \underbrace{x}_{v}^{\overbrace{-\frac{2}{3}}^{n}} \underbrace{dx}_{dv} = \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}+C = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}+C = 3\sqrt[3]{x}+C$$

5 Calcula la $\int\left(x^4-3x^{\frac{3}{2}}+\frac{7}{\sqrt{x}}+5\right)dx$.

Solución

Para resolver la integral de una suma algebraica (polinomios) de expresiones diferenciables, se aplica directamente la fórmula **3**, de lo que resulta:

$$\int\left(\underbrace{x^4}_{dv}-\underbrace{3x^{\frac{3}{2}}}_{du}+\underbrace{\frac{7}{\sqrt{x}}}_{dw}+\underbrace{5}_{a}\right)dx=\underbrace{\int x^4\,dx}_{1}-\underbrace{\int 3x^{\frac{3}{2}}\,dx}_{2}+\underbrace{\int\frac{7}{\sqrt{x}}dx}_{3}+\underbrace{\int 5\,dx}_{4}$$

Ahora, se integra cada una de las expresiones resultantes de forma individual.

1. En esta integral, se identifica a la variable $v=x$ y al exponente $n=4$, es decir:

$$v=x \qquad n=4$$
$$dv=dx$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv=dx$ completa la diferencial de la integral dx, razón por la que se aplica directamente la fórmula **4**, de lo que resulta:

$$\int \underbrace{x}_{v}^{\overset{n}{4}}\underbrace{dx}_{dv}=\frac{x^{4+1}}{4+1}+C=\frac{x^5}{5}+C$$

2. En esta integral, se identifica que 3 es una constante que se encuentra como factor en el integrando $3x^{\frac{3}{2}}$; aplicando directamente la fórmula **2**; tenemos:

$$-\int \underbrace{3}_{a}\underbrace{x^{\frac{3}{2}}}_{v}\underbrace{dx}_{dv}=-3\int x^{\frac{3}{2}}\,dx$$

Ahora, en la expresión resultante se tiene que la variable es $v=x$ y el exponente $n=\frac{3}{2}$, es decir:

$$v=x \qquad n=\frac{3}{2}$$
$$dv=dx$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = dx$ completa la diferencial de la integral dx, razón por la que se aplica directamente la fórmula **4**, de lo que resulta:

$$-3\int \underbrace{x}_{v}^{\overset{n}{\frac{3}{2}}} \underbrace{dx}_{dv} = -3\left(\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\right)+C = -3\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right)+C = -\frac{6x^{\frac{3}{2}}}{5}+C$$

3. En esta integral no se puede aplicar directamente ninguna de las cinco fórmulas que hasta el momento se conocen. Sin embargo, el denominador se pasa de la forma **radical** a la forma **exponencial**, y por último se pasa al numerador y, con base en las leyes de los exponentes, se tiene:

$$\int \frac{7}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{7}{x^{\frac{1}{2}}}dx = \int 7x^{-\frac{1}{2}}dx$$

Ahora en la expresión resultante, identificamos que 7 es una constante que se encuentra como factor en el integrando $7x^{-\frac{1}{2}}$, al aplicar directamente la fórmula **2**, tenemos:

$$\int \underbrace{7}_{a}\underbrace{x^{-\frac{1}{2}}}_{v}\underbrace{dx}_{dv} = 7\int x^{-\frac{1}{2}}dx$$

En esta última integral se tiene que la variable es $v = x$ y el exponente $n = -\frac{1}{2}$, es decir:

$$v = x \qquad n = -\frac{1}{2}$$
$$dv = dx$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = dx$ completa la diferencial de la integral dx, razón por la que se aplica directamente la fórmula **4**, resultando:

$$7\int \underbrace{x}_{v}^{\overset{n}{-\frac{1}{2}}} \underbrace{dx}_{dv} = 7\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right)+C = 7\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)+C = 14\sqrt{x}+C$$

4. En esta integral se identifica que 5 es una constante y que es el integrando de la expresión, por lo que al aplicar directamente la fórmula **2**, se tiene:

$$\int \underbrace{5}_{v}\underbrace{dx}_{dv} = 5\int dx$$

En la integral resultante, se aplica directamente la fórmula **1**, de lo que resulta:

$$5\int \underbrace{dx}_{dv} = 5x + C$$

Escribiendo en forma unificada el resultado de cada integral, se tiene:

$$\therefore \quad \int\left(x^4-3x^{\frac{3}{2}}+\frac{7}{\sqrt{x}}+5\right)dx=\frac{x^5}{5}-\frac{6x^{\frac{5}{2}}}{5}+14\sqrt{x}+5x+C$$

Se observa que cada resultado tiene una constante, por lo que, en el resultado final se escribe una sola constante, esto es porque la suma de varias constantes es igual a otra constante.

6 ••• Calcula $\int \sqrt{x}(x-3)dx$.

Solución

En este caso se observa que se tiene el producto de dos funciones $u=\sqrt{x}$ y $v=(x-3)$, que conforman el integrando.

Se debe intentar diferenciar cualquiera de ellas para tratar de completar la diferencial de la integral, es decir:

Si se diferencia $u=\sqrt{x}$, resulta: $du=\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$. Si se selecciona a $u=x$ y $n=\dfrac{1}{2}$, al diferenciar, resulta $du=dx$. Pero, la diferencial de la integral por completar debe ser $du=(x-3)\,dx$, por lo que no se completa dicha diferencial.

Si se diferencia $v=(x-3)$, resulta que $dv=dx$. Pero, la diferencial de la integral por completar debe ser $dv=\sqrt{x}\,dx$, por que no se completa dicha diferencial.

La integración de ciertas expresiones se pueden transformar en integrales inmediatas, mediante la ejecución de la operación indicada (multiplicación, división, etcétera). La integral propuesta se reduce a:

$$\int \sqrt{x}(x-3)dx=\int\left(x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

Al aplicar directamente la fórmula **3**, se tiene:

$$\int\left(\underbrace{x^{\frac{3}{2}}}_{dv}-\underbrace{3x^{\frac{1}{2}}}_{dv}\right)dx=\underbrace{\int\left(x^{\frac{3}{2}}\right)dx}_{1}-\underbrace{\int 3x^{\frac{1}{2}}\,dx}_{2}$$

Ahora se integra cada una de las expresiones resultantes en forma individual.

1. En esta integral se identifica a la variable $v=x$ y al exponente $n=\dfrac{3}{2}$, es decir:

$$v=x \qquad n=\frac{3}{2}$$
$$dv=dx$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = dx$ completa la diferencial de la integral dx, razón por la que se aplica directamente la fórmula **4**, resultando:

$$\int \underbrace{x}_{v}^{\overset{n}{\frac{3}{2}}} \underbrace{dx}_{dv} = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + C$$

2. En esta integral se identifica que 3 es una constante que se encuentra como factor en el integrando $3x^{\frac{1}{2}}$, al aplicar directamente la fórmula **2**, se tiene:

$$-\int \underbrace{3}_{a} \underbrace{x}_{v}^{\frac{1}{2}} \underbrace{dx}_{dv} = -3\int x^{\frac{1}{2}}\, dx$$

Ahora, en la expresión resultante se tiene que la variable es $v = x$ y el exponente $n = \frac{1}{2}$, es decir:

$$v = x \qquad n = \frac{1}{2}$$
$$dv = dx$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = dx$ completa la diferencial de la integral dx, razón por la que se aplica directamente la fórmula **4**, resultando:

$$-3\int \underbrace{x}_{v}^{\overset{n}{\frac{1}{2}}} \underbrace{dx}_{dv} = -3\left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right) + C = -3\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) + C = -2x^{\frac{3}{2}} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral, se tiene que:

$$\therefore \quad \int \sqrt{x}(x-3)\, dx = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - 2x^{\frac{3}{2}} + C = 2x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{x}{5} - 1\right) + C$$

7 ••Calcula $\int \sqrt{x}\left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^2 dx$.

Solución

Se observa que en la integral propuesta se presenta el producto de dos funciones $u = \sqrt{x}$ y $v = \left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^2$ que conforman el integrando. Con base en el ejemplo anterior, se debe intentar diferenciar cualquiera de ellas para tratar de completar la diferencial de la integral.

Es decir,

$$\text{Si} \quad u=\sqrt{x} \qquad \text{y} \qquad \text{si} \quad v=\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2$$

$$du=\frac{dx}{2\sqrt{x}} \qquad\qquad dv=\left(1-\sqrt{\frac{a}{x}}\right)dx$$

o también:

$$\text{Si} \quad u=x \;\; n=\frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \text{si} \quad v=\sqrt{a}-\sqrt{x} \;\; n=2$$

$$du=dx \qquad\qquad dv=-\frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

Como en ninguno de los casos se satisface el hecho de completar la diferencial de la integral se realiza la operación indicada, es decir, se desarrolla el binomio al cuadrado y se multiplica, lo que resulta:

$$\int \sqrt{x}\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 dx=\int \sqrt{x}\left(a-2\sqrt{ax}+x\right)dx=\int\left(ax^{\frac{1}{2}}-2\sqrt{a}x+x^{\frac{3}{2}}\right)dx$$

Al aplicar directamente la fórmula **3**, se tiene:

$$\int\Bigg(\underbrace{ax^{\frac{1}{2}}}_{du}-\underbrace{2\sqrt{a}x}_{dv}+\underbrace{x^{\frac{3}{2}}}_{dw}\Bigg)dx=\underbrace{\int ax^{\frac{1}{2}}\,dx}_{1}-\underbrace{\int 2\sqrt{a}x\,dx}_{2}+\underbrace{\int x^{\frac{3}{2}}\,dx}_{3}$$

Ahora se integra cada una de las expresiones resultantes en forma individual.

En la integral 1 se identifica que a es una constante que se encuentra como factor en el integrando $ax^{\frac{1}{2}}$; al aplicar directamente la fórmula **2**, se tiene:

$$\int \underbrace{a}_{a}\underbrace{x^{\frac{1}{2}}}_{v}\underbrace{dx}_{dv}=a\int x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

En la expresión resultante, se tiene que la variable es $v=x$ y el exponente $n=\frac{1}{2}$, es decir:

$$v=x \qquad n=\frac{1}{2}$$

$$dv=dx$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv=dx$ completa la diferencial de la integral dx razón por la que se aplica directamente la fórmula **4** lo que resulta:

$$a\int \underbrace{x}_{v}^{\overset{n}{\frac{1}{2}}}\underbrace{dx}_{dv}=a\left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)+C=a\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)+C=\frac{2ax^{\frac{3}{2}}}{3}+C$$

En la integral 2 se identifica que $2\sqrt{a}$ es una constante que se encuentra como factor en el integrando $2\sqrt{a}x$; al aplicar directamente la fórmula **2**, se tiene:

$$-\int \underbrace{2\sqrt{a}}_{a}\,\underbrace{x}_{v}\,\underbrace{dx}_{dv} = -2\sqrt{a}\int x\,dx$$

En la expresión resultante, se tiene que la variable es $v = x$ y el exponente $n = 1$, es decir:

$$v = x \qquad n = 1$$
$$dv = dx$$

Se debe recordar que con base en las leyes o propiedades de los exponentes, se establece que cuando una literal no tiene exponente, éste es la unidad.

Se observa que la diferencial de la variable $dv = dx$ completa la diferencial de la integral dx, razón por la que se aplica directamente la fórmula **4**, de lo que resulta:

$$-2\sqrt{a}\int \underbrace{x}_{v}^{\overbrace{1}^{n}}\underbrace{dx}_{dv} = -2\sqrt{a}\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right) + C = -2\sqrt{a}\left(\frac{x^2}{2}\right) + C = -\sqrt{a}x^2 + C$$

En la integral 3 se identifica a la variable $v = x$ y al exponente $n = \frac{3}{2}$, es decir:

$$v = x \qquad n = \frac{3}{2}$$
$$dx = dx$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = dx$ completa la diferencial de la integral dx, razón por la que se aplica directamente la fórmula **4**, de lo que resulta:

$$\int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral, se tiene que:

$$\therefore \quad \int \sqrt{x}\left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^2 dx = \frac{2ax^{\frac{3}{2}}}{3} - \sqrt{a}x^2 + \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + C$$

8 ●●·Calcula $\int t\sqrt{at^2-b}\,dt$.

Solución

Se observa que en la integral propuesta se presenta el producto de dos funciones $u=t$ y $v=\sqrt{at^2-b}$ que conforman el integrando. Con base en los ejemplos anteriores, se debe intentar diferenciar cualquiera de ellas para tratar de completar la diferencial de la integral, es decir:

$$\text{Si}\quad u=t \qquad \text{y} \qquad \text{si}\quad v=\sqrt{at^2-b}$$
$$du=d \qquad\qquad dv=\frac{2at\,dt}{\sqrt{at^2-b}}$$

o también:

$$\text{Si}\quad u=t \qquad \text{y} \qquad \text{si}\quad v=at^2-b \qquad n=\frac{1}{2}$$
$$du=dt \qquad\qquad dv=2at\,dt$$

Se observa que cuando $v=at^2-b$ y $n=\frac{1}{2}$, la diferencial de la variable $dv=2at\,dt$ completa la diferencial de la integral $t\,dt$, razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **4**. Pero también, se debe observar que en la diferencial de la variable $2at\,dt$ nos sobra la constante $2a$, la cual, pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\int t\sqrt{at^2-b}dt=\int (at^2-b)^{\frac{1}{2}}t\,dt=\frac{1}{2a}\left[\frac{(at^2-b)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]+C$$

$$\therefore\quad \int t\sqrt{at^2-b}dt=\frac{1}{2a}\left[\frac{(at^2-b)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]+C=\frac{(at^2-b)^{\frac{3}{2}}}{3a}+C$$

9 ●●·Calcula $\int \frac{x^3+4x-3}{x}\,dx$.

Solución

Para este caso se observa que se tiene la división de dos funciones $u=x^3+4x-3$ y $v=x$ que conforman el integrando. Se debe intentar diferenciar cualquiera de ellas para tratar de completar la diferencial de la integral, es decir:

$$\text{Si}\quad u=x^3+4x-3 \qquad \text{y} \qquad \text{si}\quad v=x$$
$$du=(3x^2+4)dx \qquad\qquad dv=dx$$

Como en ninguno de los casos se satisface el hecho de completar la diferencial de la integral, se ejecuta la operación indicada, es decir:

$$\begin{array}{r|l} & x^2+4 \\ \hline x & x^3+4x-3 \\ & -x^3 \\ \hline & 4x-3 \\ & -4x \\ \hline & -3 \end{array} \qquad \therefore \quad x^2+4-\frac{3}{x}$$

Ahora la integral se presenta de la siguiente forma:

$$\int \frac{x^3+4x-3}{x}dx = \int\left(x^2+4-\frac{3}{x}\right)dx$$

Al aplicar directamente la fórmula **3**, se tiene:

$$\int\left(\underbrace{x^2}_{du}+\underbrace{4}_{dv}-\underbrace{\frac{3}{x}}_{dw}\right)dx = \underbrace{\int x^2dx}_{1}+\underbrace{\int 4dx}_{2}-\underbrace{\int \frac{3}{x}dx}_{3}$$

Esta integral también se puede resolver al dividir término a término entre el divisor y al aplicar directamente la fórmula **3**, es decir:

$$\int \frac{x^3+4x-3}{x}dx = \int \frac{x^3}{x}dx+\int \frac{4x}{x}dx-\int \frac{3}{x}dx$$

$$\int \frac{x^3+4x-3}{x}dx = \underbrace{\int x^2dx}_{1}+\underbrace{\int 4dx}_{2}-\underbrace{\int \frac{3}{x}dx}_{3}$$

Ahora se integra cada una de las expresiones resultantes en forma individual.

En la integral 1 se identifica a la variable $v = x$ y al exponente $n = 2$, es decir:

$$v = x \qquad n = 2$$

$$dv = dx$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = dx$ completa la diferencial de la integral dx, razón por la que se aplica directamente la fórmula **4**, lo que resulta:

$$\int \underbrace{x}_{v}^{\overbrace{2}^{n}}\underbrace{dx}_{dv} = \frac{x^{2+1}}{2+1}+C = \frac{x^3}{3}+C$$

En la integral 2 identificamos que 4 es una constante y que es el integrando de la expresión, por lo que, al aplicar directamente la fórmula **2**, se tiene:

$$\int \underbrace{4}_{a} \underbrace{dx}_{dv} = 4\int dx$$

Al aplicar directamente la fórmula **1**, resulta:

$$4\int \underbrace{dx}_{dv} = 4x + C$$

En la integral 3 se identifica que 3 es una constante que se encuentra como **dividendo** en el integrando $\frac{3}{x}$ aplicando directamente la fórmula **2**, tenemos:

$$-\int \frac{\overbrace{3}^{a}}{\underbrace{x}_{v}} \underbrace{dx}_{dv} = -3\int \frac{dx}{x}$$

En la expresión resultante se identifica que la variable $v = x$ se encuentra en el denominador y como:

$$v = x$$
$$dv = dx$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = dx$ completa la diferencial de la integral dx, razón por la que se aplica directamente la fórmula **5**, lo que resulta:

$$-3\int \frac{\overbrace{dx}^{dv}}{\underbrace{x}_{v}} = -3\ln x + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral, se tiene:

$$\therefore \quad \int \frac{x^3 + 4x - 3}{x} dx = \frac{x^3}{3} + 4x - 3\ln x + C$$

10 ••• Calcula $\int \frac{(s+4)}{2s+3} ds$.

Solución

Se observa que en la integral propuesta, se presenta la división de dos funciones $u = s + 4$ y $v = 2s + 3$ que conforman el integrando. Se debe intentar diferenciar cualquiera de ellas para tratar de completar la diferencial de la integral, es decir:

$$\text{Si} \quad u = s + 4 \qquad \text{y} \qquad \text{si} \quad v = 2s + 3$$
$$du = ds \qquad\qquad\qquad dv = 2\,ds$$

Como en ninguno de los casos se satisface el hecho de completar la diferencial de la integral se realiza la operación indicada, es decir:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2} \\ 2s+3\overline{)\,s+4} \\ \underline{-s-\frac{3}{2}} \\ \frac{5}{2} \end{array} \quad \therefore \quad \frac{1}{2}+\frac{\frac{5}{2}}{2s+3}$$

Ahora la integral se presenta de la siguiente forma:

$$\int \frac{(s+4)}{2s+3}ds = \int\left(\frac{1}{2}+\frac{\frac{5}{2}}{2s+3}\right)ds$$

Al aplicar directamente la fórmula **3**, tenemos:

$$\int\left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{dv}+\underbrace{\frac{\frac{5}{2}}{2s+3}}_{dv}\right)ds = \underbrace{\int\frac{1}{2}ds}_{1}+\underbrace{\int\frac{\frac{5}{2}}{2s+3}ds}_{2}$$

Ahora se integra cada una de las expresiones resultantes en forma individual.

En la integral 1 se identifica que $\frac{1}{2}$ es una constante y que es el integrando de la expresión, por lo que, al aplicar directamente la fórmula **2**, se tiene:

$$\int \underbrace{\frac{1}{2}}_{a}\underbrace{ds}_{dv} = \frac{1}{2}\int ds$$

Al aplicar directamente la fórmula **1**, resulta: $\frac{1}{2}\int ds = \frac{s}{2}+C$

En la integral 2 se identifica que $\frac{5}{2}$ es una constante que se encuentra como dividendo en el integrando $\frac{\frac{5}{2}}{2s+3}$, al aplicar directamente la fórmula **2**, se tiene:

$$\int \frac{\overbrace{\frac{5}{2}}^{a}}{\underbrace{2s+3}_{v}}\underbrace{ds}_{dv} = \frac{5}{2}\int\frac{ds}{2s+3}$$

En la expresión resultante, identificamos que la variable $v = 2s + 3$ se encuentra en el denominador y como:

$$v = 2s + 3$$
$$dv = 2\,ds$$

Se hace notar que la diferencial de la variable $dv = 2ds$ completa la diferencial de la integral ds, razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **5**. Pero también, se debe observar que en la diferencial de la variable $2ds$ sobra la constante 2, la cual, pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\frac{5}{2}\int \frac{\overset{dv}{ds}}{\underbrace{2s+3}_{v}} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)[\ln(2s+3)] + C = \frac{5\ln(2s+3)}{4} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral, se tiene:

$$\therefore \quad \int \frac{(s+4)\,ds}{2s+3} = \frac{s}{2} + \frac{5\ln(2s+3)}{4} + C$$

11 Calcula $\int \frac{(a+\ln x)}{x}dx$.

Solución

Se observa que en la integral propuesta se presenta la división de dos funciones $u = (a + \ln x)$ y $v = x$ que conforman el integrando. Se debe intentar diferenciar cualquiera de ellas para tratar de completar la diferencial de la integral, es decir:

$$\text{Si} \quad u = (a+\ln x) \qquad \text{y} \qquad \text{si} \quad v = x$$
$$du = \frac{dx}{x} \qquad\qquad dv = dx$$

Cuando $u = (a + \ln x)$ y considerando como exponente $n = 1$, la diferencial de la variable $du = \frac{dx}{x}$ completa la diferencial de la integral $\frac{dx}{x}$, razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **4**, es decir:

$$\therefore \quad \int \frac{(a+\ln x)\,dx}{x} = \int \underbrace{(a+\ln x)}_{v}^{\overset{n}{1}} \underbrace{\frac{dx}{x}}_{dv} = \frac{(a+\ln x)^{1+1}}{1+1} + C = \frac{(a+\ln x)^2}{2} + C$$

12 ●•·Calcula $\int \operatorname{sen}^2 ax \cos ax\, dx$.

Solución

Para este caso se observa que se tiene el producto de dos funciones $u = \operatorname{sen}^2 ax$ y $v = \cos ax$ que conforman el integrando. Se debe intentar diferenciar cualquiera de ellas para tratar de completar la diferencial de la integral, es decir:

$$\text{Si} \quad u = \operatorname{sen}^2 ax = (\operatorname{sen} ax)^2 \qquad \text{y} \qquad \text{si} \quad v = \cos ax$$
$$du = 2a \operatorname{sen} ax\, dx \qquad\qquad dv = -a \operatorname{sen} ax\, dx$$

También:

$$\text{Si} \quad u = \operatorname{sen} ax \qquad n = 2$$
$$du = a \cos ax\, dx$$

Cuando $u = \operatorname{sen} ax$ y $n = 2$, la diferencial de la variable $du = a \cos ax\, dx$ completa la diferencial de la integral $\cos ax\, dx$, razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **4**. Pero también se debe observar que en la diferencial de la variable $a \cos ax\, dx$ sobra la constante a, la cual, pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\therefore \quad \int \underbrace{\operatorname{sen}^{\overset{n}{2}} ax}_{v}\, \underbrace{\cos ax\, dx}_{dv} = \frac{1}{a}\left[\frac{(\operatorname{sen} ax)^{2+1}}{2+1}\right] + C = \frac{\operatorname{sen}^3 ax}{3a} + C$$

13 ●•·Calcula $\int \left(\dfrac{\sec x}{1+\tan x}\right)^2 dx$.

Solución

Por las propiedades o leyes de los exponentes, la integral propuesta se puede escribir de la siguiente forma:

$$\int \left(\frac{\sec x}{1+\tan x}\right)^2 dx = \int \frac{(\sec x)^2\, dx}{(1+\tan x)^2} = \int \frac{\sec^2 x\, dx}{(1+\tan x)^2}$$

Ninguna de las cinco fórmulas que hasta el momento se conocen, se pueden aplicar. Sin embargo, si el término del denominador se pasa al numerador y con base en las leyes de los exponentes, se tiene:

$$\int \frac{\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}\, dx = \int (1+\tan x)^{-2} \sec^2 x\, dx$$

En la expresión resultante se tiene que la variable es $v = 1 + \tan x$ y el exponente es $n = -2$, es decir:

$$v = 1 + \tan x \qquad n = -2$$
$$dv = \sec^2 x\, dx$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = \sec^2 x\, dx$ completa la diferencial de la integral $\sec^2 x\, dx$, razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **4**, de lo que resulta:

$$\therefore \int \underbrace{(1+\tan x)}_{v}\overset{n}{^{-2}} \underbrace{\sec^2 x\, dx}_{dv} = \frac{(1+\tan x)^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{1+\tan x} + C$$

14 Calcula $\int \frac{e^{\theta}}{a+be^{\theta}} d\theta$.

Solución

Se observa que en la integral propuesta se presenta la división de dos funciones $v = e^{\theta}$ y $v = a + be^{\theta}$ que conforman el integrando. Se debe intentar diferenciar cualquiera de ellas para tratar de completar la diferencial de la integral, es decir:

$$\text{Si} \quad u = e^{\theta} \qquad \text{y} \qquad \text{si} \quad v = a + be^{\theta}$$

$$du = e^{\theta} d\theta \qquad\qquad dv = be^{\theta} d\theta$$

La diferencial de la variable $dv = be^{\theta} d\theta$ completa la diferencial de la integral $e^{\theta} d\theta$, razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **5**. Pero también se debe observar que en la diferencial de la variable $be^{\theta} d\theta$ sobra la constante b, la cual, pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\therefore \int \frac{e^{\theta}}{a+be^{\theta}} d\theta = \frac{1}{b}[\ln(a+be^{\theta})] + C = \frac{\ln(a+be^{\theta})}{b} + C$$

EJERCICIO 5

I. En grupo y con asesoría de su profesor, comprueben las siguientes integrales indefinidas, aplicando las cinco primeras ecuaciones del formulario general de integrales inmediatas elementales.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas	
Competencias disciplinares	

1. $\int x^5\, dx = \frac{x^6}{6} + C$
2. $\int \frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta}} = -2\sqrt{1-\theta} + C$
3. $\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + C$
4. $\int \frac{t^2}{\sqrt{t^3-1}} dt = \frac{2\sqrt{t^3-1}}{3} + C$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax}} = 2\sqrt{\frac{x}{a}} + C$
6. $\int x\sqrt{ax^2+b}\, dx = \frac{(ax^2+b)^{\frac{3}{2}}}{3a} + C$
7. $\int \frac{5\, dx}{x^2} = -\frac{5}{x} + C$
8. $\int z(1+2z)^2\, dz = \frac{z^2}{2} + \frac{4z^3}{3} + z^4 + C$

9. $\int \sqrt[3]{2t}\, dt = \frac{3t\sqrt[3]{2t}}{4} + C$

10. $\int \frac{a^2x^2dx}{\sqrt{x^3+a}} = \frac{2a^2\sqrt{x^3+a}}{3} + C$

11. $\int \frac{6x^3 - 3\sqrt[3]{x}}{x} dx = 2x^3 - 9\sqrt[3]{x} + C$

12. $\int \left(\frac{z^2}{3} - \frac{3}{z^2}\right) dz = \frac{z^3}{9} + \frac{3}{z} + C$

13. $\int \sqrt{1+3y}\, dy = \frac{2(1+3y)^{\frac{3}{2}}}{9} + C$

14. $\int \frac{4s}{(1-2s^2)^2} ds = \frac{1}{1-2s^2} + C$

15. $\int mx^3\, dx = \frac{mx^4}{4} + C$

16. $\int \frac{x^3}{\sqrt{16+x^4}} dx = \frac{\sqrt{16+x^4}}{2} + C$

17. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$

18. $\int \frac{dt}{(a+bt)^3} = -\frac{1}{2b(a+bt)^2} + C$

19. $\int \frac{x^4}{ab} dx = \frac{x^5}{5ab} + C$

20. $\int \frac{(2x-5)}{\sqrt{x^2-5x}} dx = 2\sqrt{x^2-5x} + C$

21. $\int \frac{2a}{\sqrt{x}} dx = 4a\sqrt{x} + C$

22. $\int \frac{(x^2+2)}{\sqrt{x^3+6x}} dx = \frac{2\sqrt{x^3+6x}}{3} + C$

23. $\int b^2 y\, dy = \frac{b^2y^2}{2} + C$

24. $\int \operatorname{sen} 2x \cos 2x\, dx = \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{4} + C$

25. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{1-\cos 2x}} dx = \sqrt{1-\cos 2x} + C$

26. $\int \frac{\sec^2 x}{2+4\tan x} dx = \frac{1}{4}\ln(2+4\tan x) + C$

27. $\int \left(\frac{\csc x}{1+\cot x}\right)^2 dx = \frac{1}{1+\cot x} + C$

28. $\int \frac{\csc x \cot x}{1-\csc x} dx = \ln(1-\csc x) + C$

29. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{verso} x} dx = \ln(1+\operatorname{verso} x) + C$

30. $\int \frac{(3x-2)}{x+1} dx = 3x - 5\ln(x+1) + C$

31. $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{\ln(a+bx)}{b} + C$

32. $\int \frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+5} dx = \frac{\ln(e^{x^2}+5)}{2} + C$

33. $\int \frac{3x^2}{7+x^3} dx = \ln(7+x^3) + C$

34. $\int \frac{ae^x - b}{ae^x + b} dx = 2\ln(ae^x+b) - x + C$

35. $\int \frac{(2+3x^2)a}{2x+x^3}dx = \ln(2x+x^3)+C$

36. $\int \frac{z}{1+z^2}dz = \frac{\ln(1+z^2)}{2}+C$

37. $\int \frac{(x+3)}{x^2+6x}dx = \frac{\ln(x^2+6x)}{2}+C$

38. $\int \frac{e^x}{e^x-2}dx = \ln(e^x-2)+C$

39. $\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}dx = \ln(1+\operatorname{sen} x)+C$

40. $\int \frac{(x^{a-1}+2)}{x^a+2ax}dx = \frac{\ln(x^a+2ax)}{a}+C$

41. $\int (3x+4)^3\,dx = \frac{(3x+4)^4}{12}+C$

42. $\int \operatorname{sen} mx\cos^2 mx\,dx = -\frac{\cos^3 mx}{3m}+C$

43. $\int x(3-x^2)^2\,dx = -\frac{(3-x^2)^3}{6}+C$

44. $\int \tan\left(\frac{x}{a}\right)\sec^2\left(\frac{x}{a}\right)dx = \frac{a\sec^2\left(\frac{x}{a}\right)}{2}+C$

45. $\int \frac{2x}{4x^2-1}dx = \frac{\ln(4x^2-1)}{4}+C$

46. $\int \frac{(1-x)^2}{x}dx = \ln x - 2x + \frac{x^2}{2}+C$

47. $\int (\sqrt{a}+\sqrt{x})^2\,dx = ax + \frac{4x\sqrt{ax}}{3}+\frac{x^2}{2}+C$

48. $\int (\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x})^3\,dx = ax - \frac{9x\sqrt[3]{a^2x}}{4}+$

$\frac{9x\sqrt[3]{ax^2}}{5}-\frac{x^2}{2}+C$

49. $\int \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}dx = \frac{2(\sqrt{a}+\sqrt{x})^3}{3}+C$

50. $\int \sqrt{t}(\sqrt{t}+\sqrt{a})^2\,dt = \frac{2t^{\frac{5}{2}}}{5}+\sqrt{a}\,t^2+\frac{2at^{\frac{3}{2}}}{3}+C$

51. $\int (a-bx)\sqrt{x}\,dx = \frac{2ax^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{2bx^{\frac{5}{2}}}{5}+C$

52. $\int x(a+bx^3)dx = \frac{ax^2}{2}+\frac{bx^5}{5}+C$

53. $\int \frac{x^3+2x^2-1}{x+1}dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+C$

54. $\int \frac{\left(x+\frac{7}{3}\right)}{3x+1}dx = \frac{1}{3}[x+2\ln(3x+1)]+C$

55. $\int (ax^2 - bx + c)dx = \frac{ax^3}{3} - \frac{bx^2}{2} + cx + C$

56. $\int \left(x^3 - 6x + \frac{5}{\sqrt{x}}\right)dx = \frac{x^4}{4} - 3x^2 + 10\sqrt{x} + C$

57. $\int \sqrt{t}(3t+2)dt = \frac{6t^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{4t^{\frac{3}{2}}}{3} + C$

58. $\int \frac{x^2 + 5x - 4}{x}dx = \frac{x^2}{2} + 5x - 4\ln x + C$

II. Encuentra el valor de cada una de las siguientes integrales y comprueba los resultados por diferenciación.

1. $\int \left(x^{\frac{5}{3}} - 3x^{\frac{3}{2}} + 7\sqrt{x} - 5\right)dx$
2. $\int \frac{(e^x + a\cos ax)}{\sqrt{e^x + \operatorname{sen} ax}}dx$
3. $\int \sqrt{x}(3x-2)dx$
4. $\int \sqrt{\frac{\operatorname{arcsen} x}{1-x^2}}dx$
5. $\int \frac{4x^2}{\sqrt{x^3+8}}dx$
6. $\int \left(\frac{x^2}{a} - \frac{a}{x^2}\right)dx$
7. $\int \frac{(x+3)}{x^2+6x}dx$
8. $\int \operatorname{sen}^4 3x \cos 3x\, dx$
9. $\int \frac{\csc^2 ax}{a - b\cot ax}dx$
10. $\int \frac{2}{1+3x}dx$
11. $\int \ln\left(1-\sqrt{x}\right)dx$
12. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{sen}^2 x}dx$
13. $\int \ln e^{2x}\, dx$
14. $\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}dx$
15. $\int \sqrt{x}(a-x)^2\, dx$
16. $\int \frac{x}{9+x^2}dx$
17. $\int \left(x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{2}{3}} + 5\sqrt{x} - 3\right)dx$
18. $\int \sqrt{x}\left(4 - x^{\frac{3}{2}}\right)^3 dx$

19. $\int \frac{\ln mx}{x}dx$

20. $\int \operatorname{sen} ax\sqrt{1+2\cos ax}\,dx$

21. $\int \frac{dx}{x\ln ax}$

22. $\int \cot x(\ln \operatorname{sen} x)dx$

23. $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$

24. $\int \sqrt{\frac{\arccos x}{1-x^2}}\,dx$

25. $\int \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

26. $\int \frac{\sec x\tan x}{a+\sec x}dx$

27. $\int \frac{e^{-2x}}{5-e^{2x}}dx$

28. $\int \frac{dx}{\ln(a-x)}$

29. $\int \sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)^2 dx$

30. $\int \frac{dx}{\ln(x-2)}$

31. $\int \frac{(e^x-\cos x)}{e^x-\operatorname{sen} x}dx$

32. $\int \frac{x}{3-x}dx$

33. $\int \tan x(\ln\cos x)\,dx$

34. $\int \frac{e^{ax}}{\sqrt{e^{ax}-9}}dx$

35. $\int \frac{\arctan 2x}{1+4x^2}dx$

36. $\int \frac{\operatorname{arccot} 3x}{1+9x^2}dx$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Aplicación de las ecuaciones 6 y 7 del formulario general de integrales inmediatas elementales

Ecuaciones para integrar funciones exponenciales:

6. $\int a^v dv=\frac{a^v}{\ln a}+C$

7. $\int e^v dv=e^v+C$

—Las ecuaciones para integrales inmediatas elementales se obtienen directamente de las fórmulas generales de diferenciación—.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula $\int a^{my}\,dy$.

Solución

Con base en los pasos para integrar una función, en la expresión dada se identifica a la variable $v = my$ que se encuentra como exponente en el integrando a^{my}.

$$\text{Si}\quad v = my$$
$$dv = m\,dy$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = m\,dy$ completa la diferencial de la integral dy razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **6**. Pero, con base en el paso tres para integrar una función, se observa que en la diferencial de la variable mdy sobra la constante m, la cual, pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\therefore\ \int \underbrace{a}_{v}^{\overbrace{n}^{v}} \underbrace{dy}_{dv} = \frac{1}{m}\left(\frac{a^{my}}{\ln a}\right) + C = \frac{a^{my}}{m\ln a} + C$$

2 Calcula $\int \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$.

Solución

La integral propuesta se asemeja a la fórmula **7**, donde se identifica que la variable es:

$$v = \sqrt{t}$$
$$dv = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ completa la diferencial de la integral $\frac{dt}{\sqrt{t}}$, razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **7**. Pero, se observa que en la diferencial de la variable $\frac{dt}{2\sqrt{t}}$ sobra la constante $\frac{1}{2}$, la cual, pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\therefore\ \int \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt = \int \underbrace{e}_{e}^{\overbrace{\sqrt{t}}^{v}} \underbrace{\frac{dt}{\sqrt{t}}}_{dv} = 2e^{\sqrt{t}} + C$$

3 ••Calcula $\int 5^{\operatorname{sen} x} \cos x\, dx$.

Solución

La integral propuesta se asemeja a la fórmula **6**, donde identificamos que la variable es:

$$v = \operatorname{sen} x$$
$$dv = \cos x\, dx$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = \cos x\, dx$ completa la diferencial de la integral $\cos x\, dx$, razón por la cual aplicamos directamente la fórmula **6**, lo que resulta:

$$\therefore \quad \int \underbrace{5}_{a}^{\overbrace{\operatorname{sen} x}^{v}} \underbrace{\cos x\, dx}_{dv} = \frac{5^{\operatorname{sen} x}}{\ln 5} + C$$

4 ••Calcula $\int 3\sqrt{e^x}\, dx$.

Solución

En esta integral se identifica que 3 es una constante que se encuentra como factor en el integrando $3\sqrt{e^x}$, al aplicar directamente la fórmula **2**, tenemos:

$$\int 3\sqrt{e^x}\, dx = 3\int \sqrt{e^x}\, dx = 3\int e^{\frac{x}{2}} dx$$

Ahora, en la expresión resultante, el nuevo integrando $\sqrt{e^x}$ se pasa de la forma **radical** a la forma **exponencial**, y se tiene:

$$3\int \sqrt{e^x}\, dx = 3\int (e^x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

La integral resultante se parece a la fórmula **7**, se identifica que la variable es:

$$v = \frac{x}{2}$$
$$dv = \frac{dx}{2}$$

La diferencial de la variable $dv = \dfrac{dx}{2}$ completa la diferencial de la integral dx, razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **7**. Pero, se observa que en la diferencial de la variable $\dfrac{dx}{2}$ sobra la constante $\dfrac{1}{2}$, la cual, pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\therefore \quad \int 3\sqrt{e^x}\, dx = 3\int \underbrace{e}_{e}^{\overbrace{\frac{x}{2}}^{v}} \underbrace{\frac{dx}{2}}_{dv} = 2(3)\left(e^{\frac{x}{2}}\right) + C = 6\sqrt{e^x} + C$$

5 ••Calcula $\int (e^x + e^{-x})^2\, dx$.

Solución

Para el ejemplo propuesto, no se puede aplicar directamente ninguna de las fórmulas que hasta el momento se conocen. Sin embargo, mediante la realización de la operación indicada (desarrollo del binomio al cuadrado), se tiene:

$$\int (e^x + e^{-x})^2\, dx = \int (e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x})dx = \int (e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x})dx = \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x})dx$$

Al aplicar directamente la fórmula **3**, se tiene:

$$\int (\underbrace{e^{2x}}_{dv} + \underbrace{2}_{du} + \underbrace{e^{-2x}}_{dw})^2\, dx = \underbrace{\int e^{2x}\, dx}_{1} + \underbrace{\int 2dx}_{2} + \underbrace{\int e^{-2x}\, dx}_{3}$$

Ahora, se integra cada una de las expresiones resultantes en forma individual.

En la integral 1 se identifica que la variable es:

$$v = 2x$$
$$dv = 2\, dx$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = 2\, dx$ completa la diferencial de la integral dx, razón por la cual estamos en condiciones de aplicar directamente la fórmula **7**. Pero, se hace notar que en la diferencial de la variable $2dx$ sobra la constante 2, la cual pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\int \underbrace{e}_{e}^{\overbrace{2x}^{v}} \underbrace{dx}_{dv} = \frac{1}{2}(e^{2x}) + C = \frac{e^{2x}}{2} + C$$

En la integral 2 se identifica que 2 es una constante y que es el integrando de la expresión, por lo que al aplicar directamente la fórmula **2**, se tiene:

$$\int \underbrace{2}_{a} \underbrace{dx}_{dv} = 2\int dx$$

Al aplicar directamente la fórmula **1**, resulta: $2\int \underbrace{dx}_{dv} = 2x + C$

En la integral 3 se identifica que la variable es:

$$v = -2x$$
$$dv = -2\, dx$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = -2\, dx$ completa la diferencial de la integral dx, razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **7**. Pero, se observa que en la diferencial de la variable $-2\, dx$ sobra la constante -2, la cual, pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\int \underbrace{e}_{e}^{\overbrace{-2x}^{v}} \underbrace{dx}_{dv} = -\frac{1}{2}(e^{-2x}) + C = -\frac{1}{2e^{2x}} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene:

$$\therefore \quad \int (e^x + e^{-x})^2\, dx = \frac{e^{2x}}{2} + 2x - \frac{1}{2e^{2x}} + C = \frac{1}{2}\left(e^{2x} - \frac{1}{e^{2x}}\right) + 2x + C$$

6 ●●· Calcula $\int \left(\frac{1-4^{2x}}{4^{2x}}\right) dx$.

Solución

En el ejemplo propuesto no se puede aplicar directamente ninguna de las fórmulas que hasta el momento se conocen. Sin embargo, mediante la realización de la operación indicada (**división**), se tiene:

$$\int \left(\frac{1-4^{2x}}{4^{2x}}\right) dx = \int \left(\frac{1}{4^{2x}} - \frac{4^{2x}}{4^{2x}}\right) dx = \int \left(\frac{1}{4^{2x}} - 1\right) dx$$

Al aplicar directamente la fórmula **3**, tenemos:

$$\int \left(\frac{1}{4^{2x}} - 1\right) dx = \underbrace{\int \frac{1}{4^{2}}\, dx}_{1} - \underbrace{\int dx}_{2}$$

Ahora, se integra cada una de las expresiones resultantes en forma individual.

En la integral 1 no se puede aplicar directamente ninguna de las fórmulas que hasta el momento se conocen. Sin embargo, si el denominador se pasa al numerador y con base en las leyes de los exponentes, se tiene:

$$\int \frac{1}{4^{2x}}\, dx = \int 4^{-2x}\, dx$$

En la expresión resultante se identifica que la variable es:

$$v = -2x$$
$$dv = -2\, dx$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = -2\,dx$ completa la diferencial de la integral dx, razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **6**. Pero, se observa que en la diferencial de la variable $-2\,dx$ sobra la constante -2, la cual, pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\int \underbrace{4}_{a}^{\overbrace{-2x}^{v}} \underbrace{dx}_{dv} = -\frac{1}{2}\left(\frac{4^{-2x}}{\ln 4}\right) + C = -\frac{1}{2(4^{2x} \ln 4)} + C$$

Al resolver directamente la integral 2 con la fórmula **1**, resulta $-\int \underbrace{dx}_{dv} = -x + C$.

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral, se tiene:

$$\therefore \quad \int \left(\frac{1-4^{2x}}{4^{2x}} \right) dx = -\frac{1}{2(4^{2x}\ln 4)} - x + C = -\left[\frac{1}{2(4^{2x}\ln 4)} + x \right] + C$$

7 ●●• Calcula $\int a^{\theta} e^{\theta}\, d\theta$.

Solución

La integral propuesta presenta el producto de dos funciones a^{θ} y e^{θ} y que conforman el integrando. Al diferenciar cualquiera de ellas se observa que ninguna completa la diferencial de la integral.

Dado que no se tiene fórmula directa que se pueda aplicar, se hará uso de los **artificios** matemáticos que faciliten la solución de la integral.

La integral propuesta, por medio de las leyes o propiedades de los exponentes, se transforma en:

$$\int a^{\theta} e^{\theta}\, d\theta = \int (ae)^{\theta}\, d\theta$$

La expresión resultante se parece a la fórmula **6**, donde se identifica que la variable es:

$$v = \theta$$

$$dv = d\theta$$

La diferencial de la variable $dv = d\theta$ completa la diferencial de la integral $d\theta$, razón por la que se aplica directamente la fórmula **6**, de lo que resulta:

$$\int \underbrace{(ae)}_{a}^{\overset{v}{\theta}} \underbrace{d\theta}_{dv} = \frac{(ae)^{\theta}}{\ln ae} + C = \frac{a^{\theta} e^{\theta}}{\ln ae} + C$$

Por las leyes o propiedades de los logaritmos, el resultado de la integral propuesta se transforma en:

$$\frac{a^{\theta} e^{\theta}}{\ln ae} + C = \frac{a^{\theta} e^{\theta}}{\ln a + \ln e} + C$$

Dado que $\ln e = 1$, el resultado se expresa como: $\quad \dfrac{a^{\theta} e^{\theta}}{\ln a + \ln e} + C = \dfrac{a^{\theta} e^{\theta}}{\ln a + 1} + C$

$$\therefore \quad \int a^{\theta} e^{\theta}\, d\theta = \frac{a^{\theta} e^{\theta}}{\ln ae} + C = \frac{a^{\theta} e^{\theta}}{\ln a + 1} + C$$

EJERCICIO 6

I. Obtén cada una de las integrales que se proponen, aplicando las ecuaciones 6 y 7. Verifica comparando tu resultado con el que se indica.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. $\int 5^{2x}dx = \frac{5^{2x}}{2\ln 5} + C$
2. $\int a^{2x}e^{2x}dx = \frac{a^{2x}e^{2x}}{2(\ln a + 1)} + C$
3. $\int \sqrt[n]{e^x}\, dx = n\sqrt[n]{e^x} + C$
4. $\int (e^{3x} + a^{3x})\, dx = \frac{1}{3}\left(e^{3x} + \frac{a^{3x}}{\ln a}\right) + C$
5. $\int x^2 e^{x^3}dx = \frac{e^{x^3}}{3} + C$
6. $\int ae^{7x}\, dx = \frac{ae^{7x}}{7} + C$
7. $\int 7^x\, dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$
8. $\int s10^{s^2}\, ds = \frac{10^{s^2}}{2\ln 10} + C$
9. $\int \frac{dx}{e^{ax}} = -\frac{1}{ae^{ax}} + C$
10. $\int \frac{d\theta}{a^{2\theta}} = -\frac{1}{2a^{2\theta}\ln a} + C$
11. $\int ba^x dx = \frac{ba^x}{\ln a} + C$
12. $\int (e^{2x})^2\, dx = \frac{e^{4x}}{4} + C$
13. $\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{e^{\cos x}} = \frac{1}{e^{\cos x}} + C$
14. $\int \left(\frac{e^x + 2}{e^x}\right)dx = x - \frac{2}{e^x} + C$
15. $\int a^{\tan\theta}\sec^2\theta\, d\theta = \frac{a^{\tan\theta}}{\ln a} + C$
16. $\int \frac{e^{\sqrt{t}} + 5}{\sqrt{t}}\, dt = 2e^{\sqrt{t}} + 10\sqrt{t} + C$
17. $\int e^{\cot x}\csc^2 x\, dx = -e^{\cot x} + C$
18. $\int m^{bx}\, dx = \frac{m^{bx}}{b\ln m} + C$
19. $\int \frac{a^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{2a^{\sqrt{x}}}{\ln a} + C$
20. $\int 8x^3 e^{-x^4}dx = -\frac{2}{e^{x^4}} + C$
21. $\int x\left[a^{(x^2)} + b\right]dx = \frac{a^{(x^2)}}{2\ln a} + \frac{bx^2}{2} + C$
22. $\int e^{\sec x}\sec x \tan x\, dx = e^{\sec x} + C$
23. $\int \frac{10}{5^{3x}}\, dx = -\frac{10}{3(5^{3x}\ln 5)} + C$
24. $\int \left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right)dx = m\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right) + C$
25. $\int \left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right)^2 dx = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{2x}{m}} - e^{-\frac{2x}{m}}\right) - 2x + C$

II. Encuentra el valor de cada una de las siguientes integrales y comprueba los resultados por diferenciación y en plenaria discute tus resultados.

1. $\int e^{-2x}\, dx$
2. $\int x(e^{x^2} + 2)\, dx$

3. $\int 10^{-ax}\,dx$

4. $\int \frac{4}{\sqrt{a^x}}\,dx$

5. $\int \sqrt{\frac{e^{-x}}{2}}\,dx$

6. $\int x^2 e^{2x^3}\,dx$

7. $\int \frac{e^{2\ln x}}{x}\,dx$

8. $\int e^{\frac{5x}{3}}\,dx$

9. $\int \sqrt{\frac{2}{e^{-x}}}\,dx$

10. $\int \frac{x^2}{8^{x^3}}\,dx$

11. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x-3}}\,dx$

12. $\int b^{(2x^2-2x)}(2x-1)\,dx$

13. $\int \sec^2 x e^{-\tan x}\,dx$

14. $\int a^{\operatorname{sen}(3x^2)} x\cos(3x^2)\,dx$

15. $\int e^{\cot ax}\csc^2 ax\,dx$

16. $\int \frac{3^{ax}}{5^{ax}}\,dx$

17. $\int a^{mx}e^{mx}\,dx$

18. $\int e^{(ax^2+bx+c)}(2ax+b)\,dx$

19. $\int (e^{ax}-e^{-ax})^2\,dx$

20. $\int (e^x-1)^2\,dx$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Aplicación de las ecuaciones 8 a la 17 del formulario general de integrales inmediatas elementales

Fórmulas para integrar funciones trigonométricas directas:

8. $\int \operatorname{sen} v\,dv = -\cos v + C$

9. $\int \cos v\,dv = \operatorname{sen} v + C$

10. $\int \sec^2 v\,dv = \tan v + C$

11. $\int \csc^2 v\,dv = -\cot v + C$

12. $\int \sec v \tan v\,dv = \sec v + C$

13. $\int \csc v \cot v\,dv = -\csc v + C$

14. $\int \tan v\,dv = -\ln \cos v + C = \ln \sec v + C$

15. $\int \cot v\,dv = \ln \operatorname{sen} v + C = -\ln \csc v + C$

16. $\int \sec v dv = \ln(\sec v + \tan v) + C$

17. $\int \csc v dv = \ln(\csc v - \cot v) + C = \ln \tan \frac{v}{2} + C$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula $\int \text{sen } ax\, dx$.

Solución

Con base en los pasos para integrar una función en la expresión dada se identifica a la variable $v = ax$ que es el ángulo del integrando sen ax.

$$\text{Si} \quad v = ax$$
$$dv = a\, dx$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = a\,dx$ completa la diferencial de la integral dx, razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **8**. Pero con base en el paso 3 para integrar una función, se observa que en la diferencial de la variable $a\,dx$ sobra la constante a, la cual, pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\therefore \quad \int \underbrace{\text{sen } ax}_{v} \underbrace{dx}_{dv} = \frac{1}{a}(-\cos ax) + C = -\frac{\cos ax}{a} + C$$

2 Calcula $\int \cos \frac{x}{2} dx$.

Solución

La integral propuesta se asemeja a la fórmula **9**, donde se identifica que la variable es:

$$v = \frac{x}{2}$$
$$dv = \frac{dx}{2}$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = \frac{dx}{2}$ completa la diferencial de la integral dx, razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **9**. Pero, se observa que en la diferencial de la variable $\frac{dx}{2}$ sobra la constante $\frac{1}{2}$, la cual pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\therefore \quad \int \underbrace{\cos \frac{x}{2}}_{v} \underbrace{dx}_{dv} = 2\text{sen} \frac{x}{2} + C$$

3 Calcula $\int \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$.

Solución

En el ejemplo propuesto no se puede aplicar directamente ninguna de las fórmulas que hasta el momento se conocen. Sin embargo, mediante la aplicación de fórmulas e identidades trigonométricas se facilita la solución de la integral.

Utilizando la expresión trigonométrica $\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$, la integral propuesta se transforma en:

$$\int \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int \sec^2\theta\, d\theta$$

La integral resultante se parece a la fórmula **10**, donde se identifica que la variable es:

$$v = \theta$$
$$dv = d\theta$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = d\theta$ completa la diferencial de la integral $d\theta$, razón por la que se aplica directamente la fórmula **10**, de lo que resulta:

$$\therefore \quad \int \underbrace{\sec^2\theta}_{v}\, \underbrace{d\theta}_{dv} = \tan\theta + C$$

4 Calcula $\int \frac{dy}{1-\cos y}$.

Solución

Se observa que no se puede aplicar directamente ninguna de las fórmulas que hasta el momento se conocen, sin embargo, se puede reducir para integrarse mediante el artificio que establece: si la expresión propuesta se multiplica y se divide entre una misma cantidad, ésta no se altera. Seleccionamos $(1 + \cos y)$ para multiplicar y dividir la expresión propuesta, ya que se debe obtener una **diferencia de cuadrados**, es decir:

$$\int \left(\frac{dy}{1-\cos y}\right)\left(\frac{1+\cos y}{1+\cos y}\right) = \int \frac{(1+\cos y)\,dy}{1-\cos^2 y}$$

Utilizando la fórmula trigonométrica $\operatorname{sen}^2 y = 1 - \cos^2 y$ resulta:

$$\int \frac{(1+\cos y)}{1-\cos^2 y}\,dy = \int \frac{(1+\cos y)}{\operatorname{sen}^2 y}\,dy$$

De lo anterior, se obtiene: $$\int \frac{(1+\cos y)}{\operatorname{sen}^2 y}\,dy = \underbrace{\int \frac{dy}{\operatorname{sen}^2 y}}_{1} + \underbrace{\int \frac{\cos y}{\operatorname{sen}^2 y}\,dy}_{2}$$

Ahora se integra cada una de las expresiones resultantes de forma individual.

En la integral 1 no se puede aplicar directamente ninguna de las fórmulas que hasta el momento se conocen. Sin embargo, mediante el uso de fórmulas e identidades trigonométricas se facilita la solución de la integral.

Utilizando la expresión trigonométrica $\frac{1}{\operatorname{sen} y} = \csc y$ la integral se transforma en:

$$\int \frac{dy}{\operatorname{sen}^2 y} = \int \csc^2 y\, dy$$

La integral resultante se parece a la fórmula **11**, donde se identifica que la variable es:

$$v = y$$
$$dv = dy$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = dy$ completa la diferencial de la integral dy, razón por la que se aplica directamente la fórmula **11**, de lo que resulta:

$$\int \underbrace{\csc^2 y}_{v} \underbrace{dy}_{dv} = -\cot y + C$$

En la integral 2 no se puede aplicar directamente ninguna de las fórmulas que hasta el momento se conocen. Sin embargo, si el denominador se pasa al numerador y con base en las leyes de los exponentes, se tiene:

$$\int \frac{\cos y\, dy}{\operatorname{sen}^2 y} = \int \operatorname{sen}^{-2} y \cos y\, dy$$

La expresión resultante se parece a la fórmula **4** de la página 52, donde se identifica a la variable $v = \operatorname{sen} y$ y al exponente $n = -2$, es decir:

$$v = \operatorname{sen} y$$
$$dv = \cos y\, dy$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = \cos y\, dy$ completa la diferencial de la integral $\cos y\ dy$, razón por la que se aplica directamente la fórmula **4**, lo que resulta:

$$\int \underbrace{\operatorname{sen} y}_{v}^{\overset{n}{-2}} \underbrace{\cos y\, dy}_{dv} = \frac{(\operatorname{sen} y)^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{(\operatorname{sen} y)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{\operatorname{sen} y} + C$$

Utilizando la expresión trigonométrica $\frac{1}{\operatorname{sen} y} = \csc y$ el resultado se transforma en:

$$\int \operatorname{sen}^{-2} y \cos y\, dy = -\frac{1}{\operatorname{sen} y} + C = -\csc y + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral, se tiene que:

$$\therefore \quad \int \frac{dy}{1-\cos y} = -\cot y - \csc y + C = -(\cot y + \csc y) + C$$

5 ••·Calcula $\int (\tan x + \sec x)^2\, dx$.

Solución

En el ejemplo propuesto no se puede aplicar directamente ninguna de las fórmulas que hasta el momento se conocen. Sin embargo, mediante la realización de la operación indicada (**desarrollo del binomio al cuadrado**), se tiene:

$$\int (\tan x + \sec x)^2 dx = \int (\tan^2 x + 2\tan x \sec x + \sec^2 x) dx$$

Al aplicar directamente la fórmula **3**, tenemos:

$$\int (\tan^2 x + 2\tan x \sec x + \sec^2 x)\, dx = \underbrace{\int \tan^2 x\, dx}_{1} + 2\underbrace{\int \tan x \sec x\, dx}_{2} + \underbrace{\int \sec^2 x\, dx}_{3}$$

Ahora se integra cada una de las expresiones resultantes en forma individual.

En la integral 1 no se puede aplicar directamente ninguna de las fórmulas que hasta el momento se conocen. Sin embargo, mediante la aplicación de fórmulas e identidades trigonométricas se facilita la solución de la integral.

Utilizando la expresión trigonométrica $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$, la integral se transforma en:

$$\int \tan^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\, dx$$

Al aplicar directamente la fórmula **3**, tenemos: $\int (\sec^2 x - 1)\, dx = \underbrace{\int \sec^2 x\, dx}_{1a} - \underbrace{\int dx}_{1b}$

Sumando $1a$ y 3, se obtiene: $\int \sec^2 x\, dx + \int \sec^2 x\, dx = 2\int \sec^2 x\, dx$

En la integral resultante, se identifica que 2 es una constante y que de acuerdo con la fórmula **2**:

$$\underbrace{2}_{a} \int \underbrace{\tan x \sec x\, dx}_{dv}$$

La integral resultante se parece a la fórmula **10**, donde se identifica que la variable es:

$$v = x$$
$$dv = dx$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = dx$ completa la diferencial de la integral dx, razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **10**. Pero, se hace notar que la constante 2 que está fuera de la integral, multiplica directamente al resultado, es decir:

$$2\int \underbrace{\sec^2 x}_{v} \underbrace{dx}_{dv} = 2\tan x + C$$

En la integral $1b$ se aplica la fórmula **1** lo que resulta: $-\int \underbrace{dx}_{dv} = -x + C.$

En la integral 2 se identifica que 2 es una constante y que de acuerdo con la fórmula **2**, tenemos que:

$$\underbrace{2}_{a}\int \underbrace{\tan x \sec x\, dx}_{dv}$$

La integral resultante se parece a la fórmula **12**, donde se identifica que la variable es:

$$v = x$$
$$dv = dx$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = dx$ completa la diferencial de la integral dx, razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **12**. Pero la constante 2 que está fuera de la integral, multiplica directamente al resultado, es decir:

$$2\int \underbrace{\tan x \sec x}_{v} \underbrace{dx}_{dv} = 2\sec x + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral, tenemos que:

$$\therefore \quad \int (\tan x + \sec x)^2 dx = 2\tan x - x + 2\sec x + C = 2(\tan x + \sec x) - x + C$$

6 ••• Calcula $\int \csc\frac{2}{3}x \cot\frac{2}{3}x\, dx.$

Solución

La integral propuesta se asemeja a la fórmula **13**, donde se identifica que la variable es:

$$v = \frac{2}{3}x$$
$$dv = \frac{2}{3}dx$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = \frac{2}{3}dx$ completa la diferencial de la integral dx, razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **13**. Pero, en la diferencial de la variable $\frac{2}{3}dx$ sobra la constante $\frac{2}{3}$, la cual, pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral.

Es decir,

$$\therefore \quad \int \underbrace{\csc\frac{2}{3}x\cot\frac{2}{3}x}_{v}\underbrace{dx}_{dv} = \frac{3}{2}\left(-\csc\frac{2}{3}x\right)+C = -\frac{3\csc\frac{2}{3}x}{2}+C$$

7 ●●·Calcula $\int e^x \tan e^x\,dx$.

Solución

La integral propuesta se parece a la fórmula **14**, donde se identifica que la variable es:

$$v = e^x$$
$$dv = e^x dx$$

Se hace notar que la diferencial de la variable $dv = e^x\,dx$ completa la diferencial de la integral $e^x\,dx$, razón por la cual aplicamos directamente la fórmula **14**, resultando:

$$\therefore \quad \int e^x \tan e^x dx = \int \underbrace{\tan e^x}_{v}\underbrace{e^x dx}_{dv} = -\ln\cos e^x + C = \ln\sec e^x + C$$

8 ●●·Calcula $\int \frac{\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}d\theta$.

Solución

En el ejemplo propuesto no se puede aplicar directamente ninguna de las fórmulas que hasta el momento se conocen. Sin embargo, mediante la realización de la operación indicada (**división**), se tiene:

$$\int \frac{\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}d\theta = \int\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta}d\theta + \int\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}d\theta = \underbrace{\int d\theta}_{1} + \underbrace{\int\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}d\theta}_{2}$$

Ahora, se integra cada una de las expresiones resultantes de forma individual.

En la integral 1 se aplica la fórmula **1**, de lo que resulta: $\int \underbrace{d\theta}_{dv} = \theta + C$

En la integral 2 no se puede aplicar directamente ninguna de las fórmulas que hasta el momento se conocen. Sin embargo, mediante la aplicación de fórmulas e identidades trigonométricas se facilita la solución de la integral.

Utilizando la identidad trigonométrica $\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \cot\theta$, la integral se transforma en:

$$\int\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}d\theta = \int\cot\theta\,d\theta$$

La integral resultante se parece a la fórmula **15**, donde se identifica que la variable es:

$$v = \theta$$
$$dv = d\theta$$

La diferencial de la variable $dv = d\theta$ completa la diferencial de la integral $d\theta$, razón por la que se aplica directamente la fórmula **15**.

Es decir,

$$\int \underbrace{\cot\theta}_{v}\underbrace{d\theta}_{dv} = \ln \operatorname{sen}\theta + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral, se tiene que:

$$\therefore \quad \int \frac{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \theta + \ln \operatorname{sen}\theta + C$$

9 ●●• Calcula $\int \left[\sec(ax) - \csc\left(\frac{x}{a}\right)\right] dx$.

Solución

Al aplicar directamente la fórmula **3**, se tiene:

$$\int \left[\sec(ax) - \csc\left(\frac{x}{a}\right)\right] dx = \underbrace{\int \sec(ax)\,dx}_{1} - \underbrace{\int \csc\left(\frac{x}{a}\right) dx}_{2}$$

Ahora, se integra cada una de las expresiones resultantes en forma individual.

1. Esta integral se parece a la fórmula **16**, donde se identifica que la variable es:

$$v = ax$$
$$dv = a\,dx$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = a\,dx$ completa la diferencial de la integral dx, razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **16**. Pero, en la diferencial de la variable $a\,dx$ sobra la constante $\boldsymbol{a}$, la cual, pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\int \sec(ax)dx = \frac{1}{a}[\ln(\sec(ax) + \tan(ax))] + C = \frac{\ln(\sec(ax) + \tan(ax))}{a} + C$$

2. Esta integral se parece a la fórmula **17**, donde se identifica que la variable es:

$$v = \frac{x}{a}$$
$$dv = \frac{dx}{a}$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = \frac{dx}{a}$ completa la diferencial de la integral dx, razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **17**. Pero, en la diferencial de la variable $\frac{dx}{a}$ sobra la constante $\frac{1}{a}$, la cual, pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral.

Esto es:

$$-\int \csc\left(\frac{x}{a}\right)dx=-a\ln\left(\csc\left(\frac{x}{a}\right)-\cot\left(\frac{x}{a}\right)\right)+C=-a\ln\tan\left(\frac{x}{2a}\right)+C$$

Al escribir en forma unificada el resultado de cada integral, se tiene que:

$$\therefore\quad \int\left(\sec(ax)-\csc\left(\frac{x}{a}\right)\right)dx=\frac{\ln(\sec(ax)+\tan(ax))}{a}-a\ln\left(\csc\left(\frac{x}{a}\right)-\cot\left(\frac{x}{a}\right)\right)+C$$

O bien,

$$\therefore\quad \int\left(\sec(ax)-\csc\left(\frac{x}{a}\right)\right)dx=\frac{\ln(\sec(ax)+\tan(ax))}{a}-a\ln\tan\left(\frac{x}{2a}\right)+C$$

EJERCICIO 7

I. En equipo de dos personas, comprueben las siguientes integrales indefinidas, aplicando las ecuaciones 8 a la 17 del formulario general de integrales inmediatas elementales.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. $\int \operatorname{sen} mx\,dx=-\frac{\cos mx}{m}+C$
2. $\int \cos 5x\,dx=\frac{\operatorname{sen} 5x}{5}+C$
3. $\int \tan ax\,dx=\frac{\ln\sec ax}{a}+C$
4. $\int \frac{n\,dz}{\cos^2(mz)}=\frac{n}{m}\tan(mz)+C$
5. $\int \csc z\,dz=\ln(\csc z-\cot z)+C$
6. $\int \sec 2\theta\tan 2\theta d\theta=\frac{\sec 2\theta}{2}+C$
7. $\int x^2\cos x^3\,dx=\frac{\operatorname{sen} x^3}{3}+C$
8. $\int \csc^2 5x\,dx=-\frac{\cot 5x}{5}+C$
9. $\int \cot\frac{x}{a}dx=a\ln\operatorname{sen}\frac{x}{a}+C$
10. $\int \frac{b}{\operatorname{sen}^2 ax}dx=-\frac{b\cot ax}{a}+C$
11. $\int e^x\tan e^x dx=\ln\sec e^x+C$
12. $\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen} x}=\tan x+\sec x+C$
13. $\int x\operatorname{sen} x^2\,dx=-\frac{\cos x^2}{2}+C$
14. $\int \cos\left(\frac{2x}{3}\right)dx=\frac{3\operatorname{sen}\left(\frac{2x}{3}\right)}{2}+C$
15. $\int \operatorname{sen}(a-bx)dx=\frac{\cos(a-bx)}{b}+C$
16. $\int \csc^2(b-ax)dx=\frac{\cot(b-ax)}{a}+C$
17. $\int \sec\left(\frac{x}{2}\right)\tan\left(\frac{x}{2}\right)dx=2\sec\left(\frac{x}{2}\right)+C$
18. $\int \csc^2(2ax)dx=-\frac{\cot 2ax}{2a}+C$
19. $\int \csc\left(\frac{x}{3}\right)dx=3\ln\tan\frac{x}{6}+C$
20. $\int \frac{dz}{\cot(3z)}=\frac{\ln\sec 3z}{3}+C$
21. $\int \frac{dy}{\cos^2(4y)}=\frac{\tan 4y}{4}+C$
22. $\int \frac{d\theta}{\tan 5\theta}=\frac{\ln\operatorname{sen} 5\theta}{5}+C$

23. $\int \frac{dt}{\operatorname{sen} 2t} = \frac{\ln \tan t}{2} + C$

24. $\int \frac{a}{\cos^2 b\theta} d\theta = \frac{a \tan b\theta}{b} + C$

25. $\int (\tan x + \cot x)^2 \, dx = \tan x - \cot x + C$

26. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2\operatorname{sen}\sqrt{x} + C$

27. $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \csc x - \cot x + C$

28. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x} = \tan x - \sec x + C$

29. $\int (\tan x - 1)^2 \, dx = \tan x + 2\ln\cos x + C$

30. $\int \frac{\operatorname{sen} z}{\sqrt{a-\cos z}} dz = 2\sqrt{a-\cos z} + C$

31. $\int \frac{\operatorname{sen} t}{1+\cos t} dt = -\ln(1+\cos t) + C$

32. $\int \frac{\csc^2\theta}{\sqrt{a-\cot\theta}} d\theta = 2\sqrt{a-\cot\theta} + C$

33. $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt = -2\cos\sqrt{t} + C$

34. $\int (\sec x - \tan x)^2 \, dx = 2(\tan x - \sec x) - x + C$

35. $\int \frac{\sec^2\theta}{1+2\tan\theta} d\theta = \frac{\ln(1+2\tan\theta)}{2} + C$

36. $\int (1-\csc z)^2 \, dz = z - 2\ln\tan\frac{z}{2} - \cot z + C$

37. $\int (ax + b\operatorname{sen} 2x) dx = \frac{1}{2}(ax^2 - b\cos 2x) + C$

38. $\int \frac{\csc x \cot x}{4-5\csc x} dx = \frac{1}{5}\ln(4-5\csc x) + C$

39. $\int \frac{\operatorname{sen} mx}{n+\cos mx} dx = -\frac{\ln(n+\cos mx)}{m} + C$

40. $\int (\sec(mx) + \tan(mx))^2 \, dx = \frac{2(\tan(mx) + \sec mx)}{m} - x + C$

41. $\int \csc\left(\frac{ax}{b}\right)\cot\left(\frac{ax}{b}\right) dx = -\frac{b\csc^{\frac{ax}{b}}}{a} + C$

42. $\int \left(\tan(2\theta) - \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) d\theta = -\frac{\ln\cos 2\theta}{2} - 2\ln\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + C$

43. $\int \frac{\cos\theta}{\sqrt{1+3\operatorname{sen}\theta}}d\theta = \frac{2\sqrt{1+3\operatorname{sen}\theta}}{3}+C$

44. $\int \frac{\sqrt{2+5\tan z}}{\cos^2 z}dz = \frac{2(2+5\tan z)^{\frac{3}{2}}}{15}+C$

45. $\int \sec bx\,dx = \frac{\ln(\sec bx+\tan bx)}{b}+C$

46. $\int \csc mx \cot mx\,dx = -\frac{\csc mx}{m}+C$

47. $\int \sec^3 x \tan x dx = \frac{\sec^3 x}{3}+C$

48. $\int e^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx = e^{\operatorname{sen} x}+C$

49. $\int \frac{(\cos x+1)}{\operatorname{sen} x + x}dx = \ln(\operatorname{sen} x + x)+C$

50. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+\tan x}}dx = 2\sqrt{1+\tan x}+C$

II. Encuentra el valor de cada una de las siguientes integrales y comprueba los resultados por diferenciación y en plenaria discute tus resultados.

1. $\int \cot z \ln(\operatorname{sen}(z))dz$
2. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x}dx$
3. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{sen}^2 x}dx$
4. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x}dx$
5. $\int e^x \operatorname{sen}^3(e^x)\cos(e^x)dx$
6. $\int \frac{\tan^2\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$
7. $\int x \sec x^2\,dx$
8. $\int \frac{\csc^2 y}{1+\cot y}dy$
9. $\int \sec^2\theta e^{-\tan\theta}\,d\theta$
10. $\int \frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x}dx$
11. $\int \frac{\cos^2 x}{1-\operatorname{sen} x}dx$
12. $\int \frac{\cos(2x)}{1-\operatorname{sen}^2(x)}dx$
13. $\int \operatorname{sen}(2z)\sqrt{1+2\cos(2z)}\,dz$
14. $\int \tan mx \sec^2 mx\,dx$
15. $\int \sec^2 3x\,dx$
16. $\int \sec 2x \tan 2x\,dx$
17. $\int \frac{\sec^2 ax}{\tan ax}dx$
18. $\int \frac{d\theta}{1+\sec(a\theta)}$
19. $\int e^{\tan x}\sec^2 mx\,dx$
20. $\int e^{2\operatorname{sen} ax}\cos ax\,dx$
21. $\int \operatorname{sen}^3 2ax \cos 2ax\,dx$
22. $\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$
23. $\int \cos(ax)\sqrt{1+a\operatorname{sen}(ax)}\,dx$
24. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1-\operatorname{sen}^2 x}dx$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Aplicación de las ecuaciones 18 a la 24 del formulario general de integrales inmediatas elementales

Fórmulas para integrar expresiones de segundo grado de dos términos:

18. $\displaystyle\int \frac{dv}{v^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{v}{a}+C$

19. $\displaystyle\int \frac{dv}{v^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{v-a}{v+a}\right|+C$

19*a*. $\displaystyle\int \frac{dv}{a^2-v^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+v}{a-v}\right|+C$

20. $\displaystyle\int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}}=\operatorname{arcsen}\frac{v}{a}+C$

21. $\displaystyle\int \frac{dv}{v\sqrt{v^2-a^2}}=\frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{v}{a}+C$

22. $\displaystyle\int \frac{dv}{\sqrt{u^2\pm a^2}}=\ln\left|v\sqrt{v^2\pm a^2}\right|+C$

23. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-v^2}\,dv=\frac{v}{2}\sqrt{a^2-v^2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{v}{a}+C$

24. $\displaystyle\int \sqrt{v^2\pm a^2}\,dv=\frac{v}{2}\sqrt{v^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln\left|v+\sqrt{v^2\pm a^2}\right|+C$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula $\displaystyle\int \frac{dt}{16+t^2}$.

Solución

Con base en los pasos para integrar una función, se identifica en la expresión dada que:

$$\begin{aligned} v^2&=t^2 \quad a^2=16\\ v&=t \quad\ \ a=4\\ dv&=dt \end{aligned}$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv=dt$ completa la diferencial de la integral dt, razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **18**, es decir:

$$\therefore \int \frac{\overset{dv}{dt}}{\underset{a^2}{16}+\underset{v^2}{t^2}}=\frac{1}{4}\arctan\frac{t}{4}+C=\frac{\arctan\frac{t}{4}}{4}+C$$

2 Calcula $\int \frac{dx}{m^2x^2 - n^2}$.

Solución

La integral propuesta se asemeja a la fórmula **19**, donde se identifica que:

$$\begin{aligned} v^2 &= m^2x^2 \quad a^2 = n^2 \\ v &= mx \qquad a = n \\ dv &= m\,dx \end{aligned}$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = m\,dx$ completa la diferencial de la integral dx, razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **19**. Pero, en la diferencial de la variable $m\,dx$ sobra la constante m, la cual, pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\therefore \int \frac{\overset{dv}{dx}}{\underbrace{m^2x^2}_{v^2} - \underbrace{n^2}_{a^2}} = \frac{1}{m}\left[\frac{1}{2n}\ln\left|\frac{mx-n}{mx+n}\right| + C\right] = \frac{1}{2mn}\ln\left|\frac{mx-n}{mx+n}\right| + C$$

3 Calcula $\int \frac{5dz}{9-(z-3)^2}$.

Solución

En la integral propuesta se identifica que 5 es una constante y que de acuerdo con la fórmula **2**, se tiene:

$$\therefore \int \frac{\overset{a}{5}dz}{9-(z-3)^2} = \underset{a}{5}\int \underbrace{\frac{dz}{9-(z-3)^2}}_{dv}$$

La integral resultante se parece a la fórmula **19*a***, donde se identifica que:

$$\begin{aligned} v^2 &= (z-3)^2 \quad a^2 = 9 \\ v &= (z-3) \qquad a = 3 \\ dv &= dz \end{aligned}$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = dz$ completa la diferencial de la integral dz, razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **19*a***, es decir:

$$\therefore 5\int \frac{\overset{dv}{dz}}{\underbrace{9}_{a^2} - \underbrace{(z-3)^2}_{v^2}} = 5\left[\frac{1}{2(3)}\ln\left|\frac{3+(z-3)}{3-(z-3)}\right|\right] + C = \frac{5}{6}\ln\left|\frac{z}{6-z}\right| + C$$

4 ●●·Calcula $\int \frac{\cos\theta}{\sqrt{7-\text{sen}^2\theta}}\,d\theta.$

Solución

La integral propuesta se asemeja a la fórmula **20**, donde se identifica que:

$$v^2 = \text{sen}^2\theta \qquad a^2 = 7$$
$$v = \text{sen}\,\theta \qquad a = \sqrt{7}$$
$$dv = \cos\theta\; d\theta$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = \cos\theta\, d\theta$ completa la diferencial de la integral $\cos\theta\, d\theta$, razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **20**, es decir:

$$\therefore \quad \int \frac{\overbrace{\cos\theta}^{dv}}{\sqrt{\underbrace{7}_{a^2}-\underbrace{\text{sen}^2\theta}_{v^2}}}\,d\theta = \text{arcsen}\left(\frac{\text{sen}\,\theta}{\sqrt{7}}\right)+C$$

5 ●●·Calcula $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-9}}.$

Solución

La integral propuesta se asemeja a la fórmula **21**, donde se identifica que:

$$v^2 = x^4 \qquad a^2 = 9$$
$$v = x^2 \qquad a = 3$$
$$dv = 2x\,dx$$

Se observa que la variable resultante $v = x^2$, no coincide con lo establecido en la fórmula **21**. Para que la integral propuesta satisfaga la condición de la fórmula será necesario multiplicar y dividir la expresión entre una misma cantidad, siendo para este caso x, es decir:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-9}}\left(\frac{x}{x}\right) = \int \frac{x}{x^2\sqrt{x^4-9}}\,dx$$

Ahora, se observa que la diferencial de la variable $dv = 2x\,dx$ completa la diferencial de la integral $x\,dx$, razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **21**. Pero, se hace notar que en la diferencial de la variable $2x\,dx$ sobra la constante 2, la cual, pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\therefore \quad \int \frac{\overbrace{x\,dx}^{dv}}{\underbrace{x^2}_{v}\sqrt{\underbrace{x^4}_{v^2}-\underbrace{9}_{a^2}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\text{arcsec}\frac{x^2}{3}\right)+C = \frac{1}{6}\text{arcsec}\frac{x^2}{3}+C$$

6 ••Calcula $\int \frac{z}{\sqrt{3z^4+5}}dz$.

Solución

La integral propuesta se asemeja a la fórmula **22**, donde se identifica que:

$$v^2 = 3z^4 \qquad a^2 = 5$$
$$v = \sqrt{3}z^2 \qquad a = \sqrt{5}$$
$$dv = 2\sqrt{3}z\,dz$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = 2\sqrt{3}z\,dz$ completa la diferencial de la integral $z\,dz$, razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **22**. Pero, en la diferencial de la variable $2\sqrt{3}z\,dz$ sobra la constante $2\sqrt{3}$, la cual, pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\therefore \quad \int \frac{\overbrace{z\,dz}^{dv}}{\sqrt{\underbrace{3x^4}_{v^2}+\underbrace{5}_{a^2}}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}z^2+\sqrt{3z^4+5}\right|+C$$

7 ••Calcula $\int \frac{2e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

Solución

En la integral propuesta se identifica que 2 es una constante y que de acuerdo con la fórmula **2**, se tiene:

$$\int \frac{\overset{a}{2}e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \underset{a}{2}\int \frac{e^x dx}{\underbrace{\sqrt{e^{2x}-1}}_{dv}}$$

La integral resultante se parece a la fórmula **22**, donde se identifica que:

$$v^2 = e^{2x} \quad a^2 = 1$$
$$v = e^x \qquad a = 1$$
$$dv = e^x dx$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = e^x\,dx$ completa la diferencial de la integral $e^x dx$, razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **22**, es decir:

$$\therefore \quad \int \frac{2e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = 2\int \frac{\overbrace{e^x dx}^{dv}}{\underbrace{e^{2x}}_{v^2}-\underbrace{1}_{a^2}} = 2\ln\left|e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right|+C$$

8 ●●·Calcula $\int \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx$.

Solución

La integral propuesta se puede resolver directamente aplicando la fórmula **23**. También se puede resolver aplicando el proceso de la sustracción de números racionales, es decir:

$$\int \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx = \int \sqrt{\frac{4-x^2}{4}}dx = \underbrace{\frac{1}{2}}_{a}\int \underbrace{\sqrt{4-x^2}\,dx}_{dv}$$

En la integral resultante, donde se aplica directamente la fórmula **2** se identifica que:

$$\begin{aligned} v^2 &= x^2 \quad a^2 = 4 \\ v &= x \quad\;\; a = 2 \\ dv &= dx \end{aligned}$$

Se observa la diferencial de la variable $dv = dx$ completa la diferencial de la integral dx, razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **23**, es decir:

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\int \sqrt{\underbrace{4}_{a^2}-\underbrace{x^2}_{v^2}}\overbrace{dx}^{dv} = \frac{x}{4}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + \text{arcsen}\frac{x}{2} + C$$

9 ●●·Calcula $\int \sqrt{8+3x^2}\,dx$.

Solución

La integral del ejemplo se parece a la fórmula **24**, donde se identifica que:

$$\begin{aligned} v^2 &= 3x^2 \quad a^2 = 8 \\ v &= \sqrt{3}x \quad a = \sqrt{8} \\ dv &= \sqrt{3}\,dx \end{aligned}$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = \sqrt{3}\,dx$ completa la diferencial de la integral dx, razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **24**. Pero, en la diferencial de la variable $\sqrt{3}\,dx$ sobra la constante $\sqrt{3}$, la cual pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\therefore \quad \int \sqrt{\underbrace{8}_{a^2}+\underbrace{3x^2}_{v^2}}\,\underbrace{dx}_{dv} = \frac{x}{2}\sqrt{8+3x^2} + \frac{4}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}x + \sqrt{8+3x^2}\right| + C$$

10 Calcula $\int \sqrt{(2x-1)^2-9}\,dx$.

Solución

La integral del ejemplo se parece a la fórmula **24**, donde se identifica que:

$$v^2=(2x-1)^2 \quad a^2=9$$
$$v=(2x-1) \qquad a=3$$
$$dv=2\,dx$$

Se observa que la diferencial de la variable $dv=2\,dx$ completa la diferencial de la integral dx, razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **24**. Pero, en la diferencial de la variable $2\,dx$ sobra la constante 2, la cual, pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\therefore \int \sqrt{\underbrace{(2x-1)^2}_{v^2}-\underbrace{9}_{a^2}}\,\underbrace{dx}_{dv}=\frac{(2x-1)}{4}\sqrt{(2x-1)^2-9}-\frac{9}{4}\ln\left|(2x-1)+\sqrt{(2x-1)^2-9}\right|+C$$

EJERCICIO 8

I. En equipo, comprueben las siguientes integrales indefinidas, aplicando las ecuaciones 18 a la 24 del formulario general de integrales inmediatas elementales.

Escribe los números correspondientes	
Competencias genéricas	
Competencias disciplinares	

1. $\int \frac{dx}{4+x^2}=\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+C$

2. $\int \frac{dx}{x^2-9}=\frac{1}{6}\ln\left(\frac{x-3}{x+3}\right)+C$

3. $\int \frac{dz}{\sqrt{16-z^2}}=\text{arcsen}\frac{z}{4}+C$

4. $\int \frac{d\theta}{\sqrt{\theta^2-25}}=\ln\left(\theta+\sqrt{\theta^2-25}\right)+C$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2-25}}=\frac{1}{40}\ln\left(\frac{4x-5}{4x+5}\right)+C$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2-9x^2}}=\frac{1}{24}\ln\left(\frac{4+3x}{4-3x}\right)+C$

7. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\sqrt{4-9\theta^2}} = \frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\frac{3\theta}{2} + C$

8. $\displaystyle\int \frac{dv}{4-(v+3)^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{5+v}{-(v+1)}\right| + C$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{9-16x^2} = \frac{1}{24}\ln\left[\frac{3+4x}{3-4x}\right] + C$

10. $\displaystyle\int \frac{11}{5+11x^2}\,dx = \frac{11}{\sqrt{55}}\arctan\sqrt{\frac{11}{5}}x + C$

11. $\displaystyle\int \frac{x}{7x^4+3}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{21}}\arctan\sqrt{\frac{7}{3}}x^2 + C$

12. $\displaystyle\int \frac{\theta}{\theta^4-4}\,d\theta = \frac{1}{8}\ln\left(\frac{\theta^2-2}{\theta^2+2}\right) + C$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2+5} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\arctan\frac{2x}{\sqrt{5}} + C$

14. $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{9x^2-16}}\,dx = \ln\left(3x+\sqrt{9x^2-16}\right) + C$

15. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,dx = \ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right) + C$

16. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{9-\operatorname{sen}^2 x}}\,dx = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{3}\right) + C$

17. $\displaystyle\int \frac{ax}{1-x^4}\,dx = \frac{a}{4}\ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) + C$

18. $\displaystyle\int \frac{5x}{x^4+16}\,dx = \frac{5}{8}\arctan\frac{x^2}{4} + C$

19. $\displaystyle\int \frac{dy}{9+(y-2)^2} = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{y-2}{3}\right) + C$

20. $\displaystyle\int \frac{dt}{1+a^2t^2} = \frac{1}{a}\arctan at + C$

21. $\displaystyle\int \frac{5e^x}{1-e^{2x}}\,dx = \frac{5}{2}\ln\left|\frac{1+e^x}{1-e^x}\right| + C$

22. $\int \frac{6x}{\sqrt{3-8x^4}}\,dx = \frac{3}{\sqrt{8}}\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{8}{3}}x^2 + C$

23. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{4-\tan^2 x}}\,dx = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\tan x}{2}\right) + C$

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}} = \frac{1}{3}\ln\left|3x+\sqrt{9x^2-1}\right| + C$

25. $\int \frac{dx}{9x^2+4} = \frac{1}{6}\arctan\frac{3x}{2} + C$

26. $\int \frac{b}{\sqrt{a^2x^2-c^2}}\,dx = \frac{b}{a}\ln\left|ax+\sqrt{a^2x^2-c^2}\right| + C$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+25}} = \frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2+25}\right| + C$

28. $\int \frac{dz}{\sqrt{25z^2-4}} = \frac{1}{5}\ln\left|5z+\sqrt{25z^2-4}\right| + C$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2+(x+a)^2}} = \ln\left|(x+a)+\sqrt{b^2+(x+a)^2}\right| + C$

30. $\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\operatorname{arcsen}\frac{x}{2} + C$

31. $\int \sqrt{25+9x^2}\,dx = \frac{x}{6}\sqrt{25+9x^2} + \frac{25}{6}\ln\left|3x+\sqrt{25+9x^2}\right| + C$

32. $\int \sqrt{2-\frac{x^2}{8}}\,dx = \frac{x}{4\sqrt{2}}\sqrt{16-x^2} + 2\sqrt{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{4} + C$

33. $\int \sqrt{5x^2-3}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{5x^2-3} + \frac{3}{2\sqrt{5}}\ln\left|\sqrt{5}x+\sqrt{5x^2-3}\right| + C$

34. $\int \sqrt{2+5x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{2+5x^2} + \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left(\sqrt{5}x+\sqrt{2+5x^2}\right) + C$

35. $\int \sqrt{3-8x^3}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{3-8x^2} + \frac{3}{4\sqrt{2}}\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{8}{3}}x + C$

36. $\int \sqrt{m^2-(x+n)^2}\,dx = \frac{(x+n)}{2}\sqrt{m^2-(x+n)^2}+\frac{m^2}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x+n}{m}\right)+C$

37. $\int \sqrt{(2\theta-1)^2-4}\,d\theta = \frac{(2\theta-1)}{2}\sqrt{(2\theta-1)^2-4}-2\ln\left|(2\theta-1)+\sqrt{(2\theta-1)^2-4}\right|+C$

38. $\int \sqrt{9-e^{2x}}\,e^x dx = \frac{e^x}{2}\sqrt{9-e^{2x}}+\frac{9}{2}\operatorname{arcsen}\frac{e^x}{3}+C$

39. $\int \sqrt{4+\cos^2 t}\,\operatorname{sen} t dt = -\frac{\cos t}{2}\sqrt{4+\cos^2 t}-2\ln\left|\cos t+\sqrt{4+\cos^2 t}\right|+C$

40. $\int \sqrt{8-3u^4}\,6u\,du = \frac{3u^2}{2}\sqrt{8-3u^4}+4\sqrt{3}\ \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{3}{8}}u^2+C$

41. $\int \sqrt{5+x^6}\,7x^2\,dx = \frac{7x^3}{6}\sqrt{5+x^6}+\frac{35}{6}\ln\left(x^3+\sqrt{5+x^6}\right)+C$

42. $\int \sqrt{9-\cot^2 x}\,\csc^2 x\,dx = -\left[\frac{\cot x}{2}\sqrt{9-\cot^2 x}+\frac{9}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{\cot x}{3}\right)\right]$

43. $\int \sqrt{6-4t^2}\,dt = -\sqrt{6-4t^2}+\frac{3}{2}\operatorname{arcsen}\frac{2t}{\sqrt{6}}+C$

44. $\int \sqrt{(2x+1)^2+1}\,dx = \frac{2x+1}{4}\sqrt{(2x+1)^2+1}+\frac{1}{4}\ln\left|(2x+1)+\sqrt{(2x+1)^2+1}\right|+C$

45. $\int \sqrt{36-(x-3)^2}\,dx = \frac{(x-3)}{2}\sqrt{36-(x-3)^2}+18\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-3}{6}\right)+C$

II. Encuentra el valor de cada una de las siguientes integrales y comprueba los resultados por diferenciación.

1. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x+4}dx$

2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{9+\ln^2 x}}$

3. $\int \frac{\sqrt{\cos x}\,\operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos^3 x+9}}dx$

4. $\int \frac{4x^2}{4-9x^6}dx$

5. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen}^3 x+9}}dx$

6. $\int \frac{\csc^2 x}{\cot^2 x+9}dx$

7. $\int \frac{5}{9x^2-25}dx$

8. $\int \frac{\sec^2 ax}{\sqrt{16-\tan^2 ax}}dx$

9. $\int \frac{4x}{1-4x^4}dx$

10. $\int \frac{2}{4+(x-2)^2}dx$

11. $\int \frac{3}{4x^2+16}dx$

12. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{9-\operatorname{sen}^2 x}}dx$

13. $\int \frac{3}{x^2-25}dx$

14. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{\cos^2 x-4}}dx$

15. $\int \frac{\sec^2 x}{4-\tan^2 x}dx$

16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{(\ln x)^2+9}}$

17. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x\sqrt{\ln^3 x+8}}dx$

18. $\int \frac{\csc^2 x}{4+\cot^2 x}dx$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{16+(x-6)^2}}$

20. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-4}}dx$

21. $\int \sqrt{3y^2-1}\,dy$

22. $\int \sqrt{(3z+1)^2-2}\,dz$

23. $\int \sqrt{3\theta^2-10}\,d\theta$

24. $\int \sqrt{7-5u^2}\,du$

25. $\int \sqrt{\cos^2 3x+4}\ \operatorname{sen} 3x\,dx$

26. $\int \sqrt{a^2x^2-c^2}\,dx$

27. $\int \sqrt{1+a^2y^2}\,dy$

28. $\int \frac{ax}{\sqrt{x^4+b^4}}dx$

29. $\int \sqrt{11+7x^4}\ x\,dx$

30. $\int \sqrt{(x-1)^2-7}\,dx$

31. $\int \sqrt{4-\frac{x^2}{4}}\,dx$

32. $\int \sqrt{5+3x^2}\,dx$

33. $\int \sqrt{8-3x^2}\,dx$

34. $\int \sqrt{\operatorname{sen}^2(2x)+9}\ \cos(2x)\,dx$

35. $\int \sqrt{\cos^2(2x)+16}\ \operatorname{sen}(2x)\,dx$

36. $\int \sqrt{8-(2x-1)^2}\,dx$

37. $\int \sqrt{4-9t^2}\,dt$

38. $\int \sqrt{5t^4+3}\ t\,dt$

39. $\int \sqrt{25-x^6}\, x^2 dx$

40. $\int \frac{dt}{t\sqrt{4t^2-9}}$

41. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-16}}$

42. $\int \frac{d\theta}{\theta\sqrt{\theta^2-5}}$

43. $\int \frac{dx}{2x\sqrt{16x^2-8}}$

44. $\int \sqrt{1-x^4}\, x\, dx$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Autoevaluación

1. Determina el volumen aproximado de una concha esférica cuyo radio interno es de 8 cm y su grosor es de 0.2865 cm.

2. Encuentra el área de la región limitada por la curva $y = e^{x+4}$, entre $x = -6$ y $x = 2$, considerando:
   a) Rectángulos inscritos.
   b) Rectángulos circunscritos.

3. Encuentra el valor promedio de la función f definida por $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 2x$ en el intervalo cerrado $[-2,1]$.

4. Encuentra el área de la región acotada por la curva $y = \sqrt{x-9}$ y las rectas dadas por el eje x; $x = 10$ y $x = 16$. Construye una gráfica mostrando la región y un rectángulo. Expresa la medida del área como el límite de una suma de Riemann y después como integral definida.

5. Encuentra el valor de cada una de las siguientes integrales y comprueba los resultados por diferenciación.

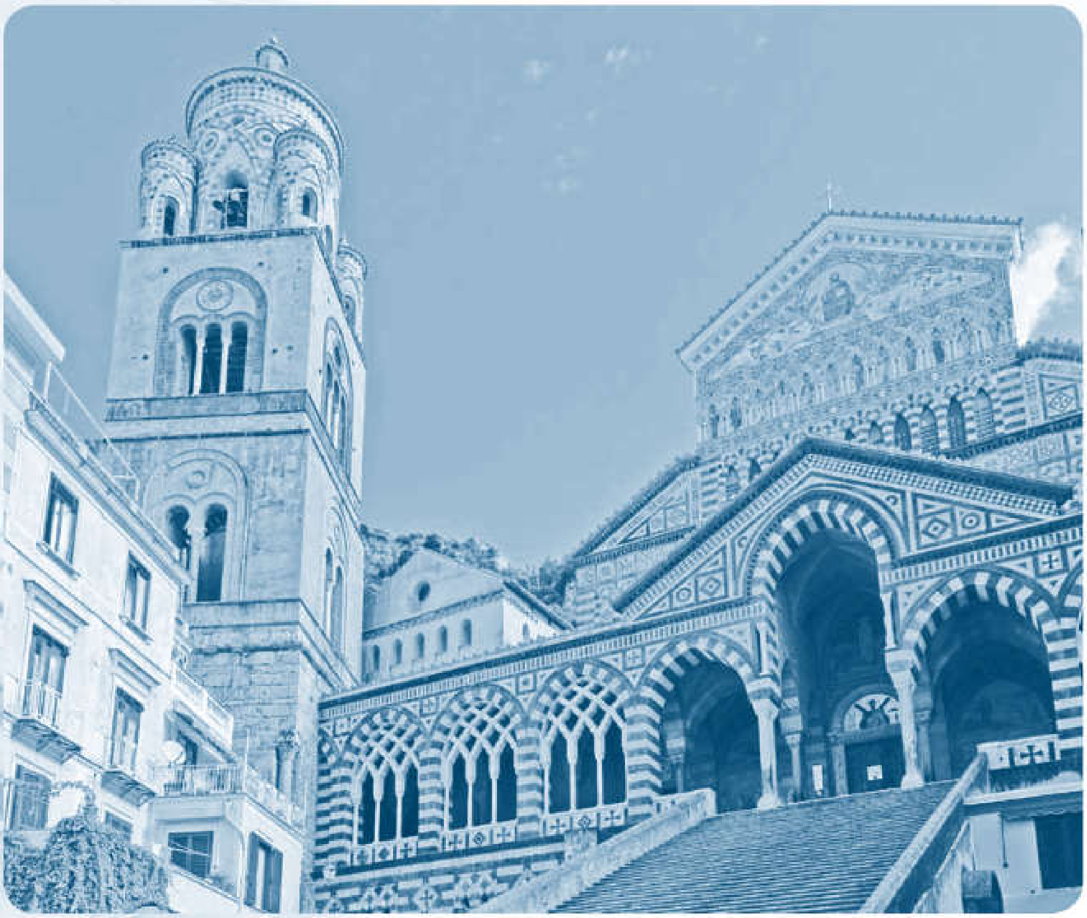
   a) $\int \text{sen} 2x \cos^2 2x dx$

   b) $\int 3^{x+2} dx$

   c) $\int \sec^2 2x dx$

   d) $\int \sqrt{(x+2)^2 - 25dx}$

UNIDAD 2



Métodos de integración

Evaluación diagnóstica

1. ¿En qué consiste el método de sustitución algebraica para resolver integrales indefinidas?

2. ¿Cuándo puede aplicarse el método de sustitución trigonométrica a la solución de integrales indefinidas?

3. Escribe la fórmula para realizar la integración por partes de una integral indefinida.

4. Indica a qué tipo de funciones puede aplicarse el método de integración por partes.

5. ¿A qué se le conoce como integración por racionalización?

Métodos de integración

Propósito de la unidad

Que el estudiante:

- Conozca los métodos para la solución de integrales indefinidas, reducibles a inmediatas, por sustitución algebraica.
- Utilice el cambio de variable para la solución de integrales indefinidas, reducibles a inmediatas, por sustitución trigonométrica.
- Aplique los diferentes casos de la integración por partes para la solución de integrales indefinidas.
- Aplique el método de integración de funciones racionales por fracciones parciales para la solución de integrales indefinidas.
- Aplique el método por sustitución de una nueva variable para la solución de integrales indefinidas.

Competencias disciplinares

1. Construye e interpreta modelos deterministas mediante la aplicación de problemas algebraicos y geométricos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos y analíticos, mediante lenguaje verbal y matemático.
8. Interpreta tablas, gráficos, mapas, textos con símbolos matemáticos y científicos.

Contenidos que aborda la unidad

Contenidos conceptuales

- Solución de integrales indefinidas, reducibles a inmediatas, por sustitución algebraica
- Solución de integrales indefinidas, reducibles a inmediatas, por sustitución trigonométrica
- Solución de integrales indefinidas por el método de integración por partes en sus diferentes casos
- Solución de integrales indefinidas por el método de integración de funciones racionales por fracciones parciales
- Solución de integrales indefinidas por el método de integración por sustitución de una nueva variable (método de integración por racionalización)

Contenidos procedimentales

- Comprenderá los diferentes métodos para la solución de integrales indefinidas.
- Identificará el método apropiado para la solución de una integral indefinida.
- Utilizará el caso apropiado de los diversos métodos para determinar la solución de una integral indefinida.
- Resolverá problemas utilizando los métodos para la solución de integrales indefinidas.

Contenidos actitudinales

- Colaborará con sus compañeros al resolver problemas.
- Respeto al trabajar en clase.
- Aprenderá a valorar el trabajo de sus compañeros al resolver problemas.
- Contribuirá con ideas de manera crítica y acciones responsables a la hora de trabajar en equipo.

Solución de integrales indefinidas, reducibles a inmediatas, por sustitución algebraica

Las integrales que contienen expresiones del tipo $ax^2 + bx + c$ o $ax^2 + bx$, pueden integrarse fácilmente aplicando alguno de los siguientes métodos:

Primer método

Una integral que contiene una expresión cuadrática de tres términos $ax^2 + bx + c$ o de dos términos $ax^2 + bx$, puede reducirse a otra con expresiones de alguna de las formas $v^2 \pm a^2$ o $a^2 - v^2$ completando un trinomio cuadrado perfecto (sustitución algebraica) que se representa por TCP.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 13}$.

Solución

En la integral propuesta, se identifica que la expresión $x^2 - 4x + 13$ es de la forma $ax^2 + bx + c$. Completando el cuadrado en $x^2 - 4x + 13$, tenemos:

$$x^2 - 4x + 13 = \underbrace{x^2 - 4x + 4}_{\text{TCP}} + 9, \text{ es decir:}$$

$$x^2 - 4x + 13 = (x-2)^2 + 9$$

De lo anterior resulta: $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 13} = \int \frac{\overset{dv}{dx}}{\underbrace{(x-2)^2}_{v^2} + \underset{a^2}{9}}$

Aplicando la fórmula **18**, se tiene que: $v^2 = (x-2)^2 \quad a^2 = 9$

$$v = (x-2) \qquad a = 3$$

$$dv = dx$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 13} = \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 9} = \frac{1}{3}\arctan\frac{(x-2)}{3} + C$$

2 Encuentra $\int \frac{dx}{3x - x^2 - 2}$.

Solución

En la integral propuesta, se identifica que la expresión $3x - x^2 - 2$ ordenada $-x^2 + 3x - 2$ tiene la forma $ax^2 + bx + c$. Completando el cuadrado en $-x^2 + 3x - 2$, tenemos:

$$-x^2 + 3x - 2 = -\underbrace{\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right)}_{\text{TCP}} + \frac{1}{4}, \text{ es decir:}$$

$$-x^2+3x-2=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$$

De lo anterior resulta: $\displaystyle\int\frac{dx}{3x-x^2-2}=\int\frac{\frac{dv}{dx}}{\underbrace{\frac{1}{4}}_{a^2}-\underbrace{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}_{v^2}}$

Aplicando la fórmula **19*a***, se tiene que: $v^2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 \quad a^2=\frac{1}{4}$

$$v=\left(x-\frac{3}{2}\right) \qquad a=\frac{1}{2}$$

$$dv=dx$$

$$\therefore\ \int\frac{dx}{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)}\ln\left|\frac{\frac{1}{2}+\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{2}-\left(x-\frac{3}{2}\right)}\right|+C=\ln\left|\frac{x-1}{2-x}\right|+C$$

3 Encuentra $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x+4}}$.

Solución

En la integral propuesta el coeficiente numérico del término $3x^2$ no es cuadrado perfecto, por lo que se recomienda su transformación. Para lograrlo, sólo es necesario multiplicar y dividir la expresión integral por una misma cantidad, que por lo general, es el mismo coeficiente numérico, es decir:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x+4}}=\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)=\int\frac{\sqrt{3}\,dx}{\sqrt{9x^2-6x+12}}=\sqrt{3}\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+12}}$$

De la integral resultante, se identifica que la expresión $9x^2-6x+12$ es de la forma ax^2+bx+c. Completando el cuadrado en $9x^2-6x+12$, tenemos:

$$9x^2-6x+12=\underbrace{9x^2-6x+1}_{\text{TCP}}+11,\ \text{es decir:}$$

$$9x^2-6x+12=(3x-1)^2+11$$

De lo anterior resulta: $\displaystyle\sqrt{3}\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+12}}=\sqrt{3}\int\frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^2+11}}$

Aplicando la fórmula **22**, se tiene que: $v^2=(3x-1)^2 \quad a^2=11$

$$v=(3x-1) \qquad a=\sqrt{11}$$

$$dv=3dx$$

$$\therefore\ \int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x+4}}=\sqrt{3}\int\frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^2+11}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|(3x-1)+\sqrt{3x^2-2x+4}\right|+C$$

4 Encuentra $\int \frac{dt}{3t-2t^2}$.

Solución

En la integral propuesta, la expresión $3t = 2t^2$ ordenada $-2t^2 + 3t$ tiene la forma $ax^2 + bx$. También, el coeficiente numérico del término $-2t^2$, no es cuadrado perfecto, por lo que se recomienda su transformación. Para lograrlo, sólo es necesario multiplicar y dividir la expresión integral por una misma cantidad, que por lo general, es el mismo coeficiente numérico, es decir:

$$\int \frac{dt}{3t-2t^2}\left(\frac{2}{2}\right) = \int \frac{2\,dt}{6t-4t^2} = 2\int \frac{dt}{6t-4t^2}$$

Completando el cuadrado en la expresión ordenada $-4t^2 + 6t$, se tiene:

$$-4t^2+6t = -\underbrace{\left(4t^2-6t+\frac{9}{4}\right)}_{\text{TCP}}+\frac{9}{4}, \text{ es decir:}$$

$$-4t^2+6t = -\left(2t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4} = \frac{9}{4}-\left(2t-\frac{3}{2}\right)^2$$

De lo anterior resulta: $$2\int \frac{dt}{\sqrt{6t-4t^2}} = 2\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{9}{4}-\left(2t-\frac{3}{2}\right)^2}}$$

Aplicando la fórmula **19*a***, se tiene que:

$$v^2 = \left(2t-\frac{3}{2}\right)^2 \qquad a^2 = \frac{9}{4}$$

$$v = \left(2t-\frac{3}{2}\right) \qquad a = \frac{3}{2}$$

$$dv = 2\,dt$$

$$\therefore\quad 2\int \frac{dt}{\frac{9}{4}-\left(2t-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{2}{2}\left[\frac{1}{2\left(\frac{3}{2}\right)}\ln\left|\frac{\frac{3}{2}+\left(2t-\frac{3}{2}\right)}{\frac{3}{2}-\left(2t-\frac{3}{2}\right)}\right|\right]+C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{2t}{3-2t}\right|+C$$

5 Encuentra $\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx$.

Solución

En la integral propuesta, se identifica que la expresión $x^2 + 2x + 5$ es de la forma $ax^2 + bx + c$. Completando el cuadrado en $x^2 + 2x + 5$, tenemos:

$$x^2+2x+5 = \underbrace{x^2+2x+1}_{\text{TCP}}+4, \text{ es decir:}$$

$$x^2+2x+5 = (x+1)^2+4$$

De lo anterior resulta: $$\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx = \int \sqrt{(x+1)^2+4}\,dx$$

Aplicando la fórmula **24**, tenemos que: $v^2 = (x+1)^2 \quad a^2 = 4$

$v = (x+1) \quad a = 2$

$dv = dx$

$$\therefore \int \sqrt{(x+1)^2+4}\,dx = \frac{(x+1)}{2}\sqrt{x^2+2x+5} + 2\ln\left|(x+1)+\sqrt{x^2+2x+5}\right| + C$$

6 Encuentra $\int \sqrt{4x-x^2}\,dx$.

Solución

En la integral propuesta, se identifica que la expresión $4x - x^2$ ordenada $-x^2 + 4x$ tiene la forma $ax^2 + bx$. Completando el cuadrado en $-x^2 + 4x$, tenemos:

$$(-x^2+4x) = \underbrace{(x^2-4x+4)}_{\text{TCP}} + 4, \text{ es decir:}$$

$$(-x^2+4x) = -(x-2)^2 + 4 = 4-(x-2)^2$$

De lo anterior resulta: $\int \sqrt{4x-x^2}\,dx = \int \sqrt{4-(x-2)^2}\,dx$

Aplicando la fórmula **23**, se tiene que: $v^2 = (x-2)^2 \quad a^2 = 4$

$v = (x-2) \quad a = 2$

$dv = dx$

$$\therefore \int \sqrt{4-(x-2)^2}\,dx = \frac{(x-2)}{2}\sqrt{4x-x^2} + 2\,\text{arcsen}\,\frac{(x-2)}{2} + C$$

Segundo método

Cuando el integrando es una fracción cuyo numerador es una expresión de primer grado y el denominador de segundo grado o raíz de ella, la integral puede reducirse a una integral inmediata, tal y como se explica a continuación.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra $\int \frac{(x+3)dx}{x^2+4}$.

Solución

Multiplicando el numerador de la integral por dx, resulta:

$$\int \frac{(x+3)dx}{x^2+4} = \int \frac{x\,dx+3dx}{x^2+4}$$

Aplicando directamente la fórmula **3**, tenemos:

$$\int \frac{x\,dx+3dx}{x^2+4} = \underbrace{\int \frac{x\,dx}{x^2+4}}_{1} + 3\underbrace{\int \frac{dx}{x^2+4}}_{2}$$

Ahora integremos cada una de las integrales resultantes en forma individual.

De la integral 1 se identifica que: $v = x^2 + 4$

$dv = 2x\,dx$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = 2x\,dx$ completa la diferencial de la integral $x\,dx$, razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **5**. Pero, en la diferencial de la variable $2x\,dx$ sobra la constante 2, la cual, pasa en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral, es decir:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C$$

De la integral 2 se identifica que: $v^2 = x^2 \quad a^2 = 4$

$v = x \quad a = 2$

$dv = dx$

Se observa que la diferencial de la variable $dv = dx$ completa la diferencial de la integral dx, razón por la que se puede aplicar directamente la fórmula **18**, es decir:

$$3\int \frac{dx}{x^2+4} = 3\left[\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\right] + C = \frac{3}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral, se tiene:

$$\therefore \quad \int \frac{(x+3)\,dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+4) + 3\arctan\frac{x}{2}\right] + \boldsymbol{C}$$

2 ••• Encuentra $\displaystyle\int \frac{(3x-2)\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

Solución

Multiplicando el numerador de la integral por dx resulta:

$$\int \frac{(3x-2)\,dx}{\sqrt{16-x^2}} = \int \frac{3x\,dx - 2\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$$

Aplicando directamente la fórmula **3**, tenemos:

$$\int \frac{3x\,dx - 2\,dx}{\sqrt{16-x^2}} = \underbrace{3\int \frac{x\,dx}{\sqrt{16-x^2}}}_{1} - \underbrace{2\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}}_{2}$$

Ahora, se integra cada una de las expresiones resultantes en forma individual.

En la integral 1, el denominador se pasa de la forma **radical** a la forma **exponencial**. Por último, se pasa al numerador y con base en las leyes de los exponentes, se tiene:

$$3\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = 3\int \frac{x\,dx}{(16-x^2)^{\frac{1}{2}}} = 3\int (16-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,x\,dx$$

En la integral resultante se identifica que: $v = 16 - x^2 \quad n = -\dfrac{1}{2}$

$dv = -2x\,dx$

Aplicando la fórmula **4**, se tiene:

$$3\int (16-x^2)^{-\frac{1}{2}} x\,dx = -\frac{3}{2}\left[\frac{(16-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right] + C = -3\sqrt{16-x^2} + C$$

De la integral 2 se identifica que: $v^2 = x^2 \quad a^2 = 16$

$$v = x \qquad a = 4$$

$$dv = dx$$

Aplicando la fórmula **20**, se tiene: $-2\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = -2\,\text{arcsen}\,\frac{x}{4} + C$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral, se tiene:

$$\therefore \quad \int \frac{(3x-2)\,dx}{\sqrt{16-x^2}} = -3\sqrt{16-x^2} - 2\,\text{arcsen}\,\frac{x}{4} + C = -\left(3\sqrt{16-x^2} + 2\,\text{arcsen}\,\frac{x}{4}\right) + C$$

3 ●●· Encuentra $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{6x-x^2}}$.

Solución

Cuando la integral propuesta contenga en el denominador una expresión de la forma $ax^2 + bx + c$, $ax^2 + bx$ o la raíz de ella, se recomienda primero tomar como variable a dicha expresión, es decir:

$$v = 6x - x^2$$

$$dv = (6-2x)\,dx$$

$$dv = -2(x-3)\,dx$$

En el numerador de la integral, se debe tener $(x-3)\,dx$ para completar el diferencial de la variable, es decir:

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{6x-x^2}} = \int \frac{(x-3+3+3)\,dx}{\sqrt{6x-x^2}} = \int \frac{(x-3+6)\,dx}{\sqrt{6x-x^2}}$$

Aplicando directamente la fórmula **3**, tenemos:

$$\int \frac{(x-3)\,dx + 6\,dx}{\sqrt{6x-x^2}} = \underbrace{\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{6x-x^2}}}_{1} + \underbrace{6\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2}}}_{2}$$

Ahora, se integra cada una de las expresiones resultantes en forma individual.

La integral 1 puede reducirse como la fórmula **4**, es decir:

$$\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{6x-x^2}} = \int (6x-x^2)^{-\frac{1}{2}}(x-3)\,dx$$

En esta integral se identifica que: $v = 6x - x^2 \qquad n = -\frac{1}{2}$

$$dv = (6-2x)\,dx$$

$$dv = -2(x-3)\,dx$$

De tal forma que:

$$\int (6x-x^2)^{-\frac{1}{2}}(x-3)\,dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{(6x-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right] + C = -\sqrt{6x-x^2} + C$$

De la integral 2 se identifica que la expresión $6x - x^2$ ordenada $-x^2 + 6x$ tiene la forma $ax^2 + bx$. Completando el cuadrado para $-x^2 + bx$, tenemos:

$$-x^2 + 6x = \underbrace{-x^2 + 6x + 9}_{\text{TCP}}, \text{ es decir:}$$

$$-x^2 + 6x = -(x-3)^2 + 9 = 9 - (x-3)^2$$

De lo anterior resulta: $6\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2}} = 6\int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-3)^2}}$

Aplicando la fórmula **20**, se tiene: $v^2 = (x-3)^2 \quad a^2 = 9$

$$v = (x-3) \qquad a = 3$$

$$dv = dx$$

De tal forma que: $6\int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-3)^2}} = \int 6\operatorname{arcsen}\frac{(x-3)}{3} + C$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral, se tiene:

$$\therefore \quad \int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{6x-x^2}} = -\sqrt{6x-x^2} + 6\operatorname{arcsen}\frac{(x-3)}{3} + C$$

4 Encuentra $\int \frac{(3x+2)\,dx}{19-5x+x^2}$.

Solución

Al tomar la expresión de segundo grado como variable, tenemos:

$$v = 19 - 5x + x^2$$

$$dv = (-5+2x)\,dx$$

$$dv = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)dx$$

En el numerador de la integral se debe tener $\left(x-\frac{5}{2}\right)dx$ para completar la diferencial de la variable, es decir:

$$\int \frac{(3x+2)\,dx}{19-5x+x^2} = \int \frac{3\left(x+\frac{2}{3}-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\right)dx}{19-5x+x^2} = \int \frac{3\left(x-\frac{5}{2}+\frac{2}{3}+\frac{5}{2}\right)dx}{19-5x+x^2}$$

Aplicando directamente la fórmula **3**, tenemos:

$$\int \frac{3\left(x-\frac{5}{2}+\frac{2}{3}+\frac{5}{2}\right)dx}{19-5x+x^2} = \underbrace{3\int \frac{\left(x-\frac{5}{2}\right)dx}{19-5x+x^2}}_{1} + \underbrace{3\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{2}\right)\int \frac{dx}{19-5x+x^2}}_{2}$$

Ahora, se integra cada una de las expresiones resultantes en forma individual.

De la integral 1 se identifica que:
$$v = 19 - 5x + x^2$$
$$dv = (-5x + 2x)\,dx$$
$$dv = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)dx$$

Aplicando la fórmula **5**, resulta:
$$3\int \frac{\left(x - \frac{5}{2}\right)dx}{\sqrt{19 - 5x + x^2}} = \frac{3}{2}\ln(19 - 5x + x^2) + C$$

En la integral 2 se identifica que la expresión $19 - 5x + x^2$ ordenada $x^2 - 5x + 19$ tiene la forma $ax^2 + bx + c$. Completando el cuadrado en $x^2 - 5x + 19$, se tiene:

$$x^2 + 5x + 19 = \underbrace{x^2 - 5x + \frac{25}{4}}_{\text{TCP}} + \frac{51}{4}, \text{ es decir:}$$

$$x^2 - 5x + 19 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{51}{4}$$

De lo anterior se tiene:
$$3\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{2}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{19 - 5x + x^2}} = \frac{19}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{51}{4}}}$$

Aplicando la fórmula **18**, se tiene:
$$v^2 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 \qquad a^2 = \frac{51}{4}$$
$$v = \left(x - \frac{5}{2}\right) \qquad a = \frac{\sqrt{51}}{2}$$
$$dv = dx$$

De tal forma que:

$$\frac{19}{2}\int \frac{dx}{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{51}{4}} = \frac{19}{2}\left[\frac{1}{\frac{\sqrt{51}}{2}}\arctan\frac{\left(x - \frac{5}{2}\right)}{\frac{\sqrt{51}}{2}}\right] + C = \frac{19}{\sqrt{51}}\arctan\frac{(2x-5)}{\sqrt{51}} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral, se tiene:

$$\therefore \quad \int \frac{(3x+2)\,dx}{\sqrt{19 - 5x + x^2}} = \frac{3}{2}\ln(19 - 5x + x^2) + \frac{19}{\sqrt{51}}\arctan\frac{(2x-5)}{\sqrt{51}} + C$$

5 Encuentra $\int \frac{(2t+7)}{2t^2 + 2t + 1}dt$.

Solución

En esta integral se observa que el coeficiente numérico del término $2t^2$, no es cuadrado perfecto, por lo que se recomienda su transformación. Para lograrlo sólo es necesario multiplicar y dividir la expresión integral por una misma cantidad, que por lo general, es el mismo coeficiente numérico, es decir:

$$\int \frac{(2t+7)\,dt}{2t^2 + 2t + 1}\left(\frac{2}{2}\right) = \int \frac{(4t+14)\,dt}{4t^2 + 4t + 2}$$

Tomando la expresión de segundo grado como variable, tenemos:

$$v = 4t^2 + 4t + 2$$
$$dv = (8t + 4)\,dt$$
$$dv = 2(4t + 2)\,dt$$

En el numerador de la integral para completar la diferencial de la variable se debe tener $(4t + 2)dt$, es decir:

$$\int \frac{(4t+14)\,dt}{4t^2+4t+2} = \int \frac{(4t+2+12)\,dt}{4t^2+4t+2}$$

Aplicando directamente la fórmula **3**, se tiene:

$$\int \frac{(4t+2+12)\,dt}{4t^2+4t+2} = \underbrace{\int \frac{(4t+2)\,dt}{4t^2+4t+2}}_{1} + \underbrace{\int \frac{dt}{4t^2+4t+2}}_{2}$$

Ahora, se integra cada una de las expresiones resultantes en forma individual.

En la integral 1 se identifica que:

$$v = 4t^2 + 4t + 2$$
$$dv = (8t + 4)\,dt$$
$$dv = 2(4t + 2)\,dt$$

Aplicando la fórmula **5**, resulta: $\displaystyle\int \frac{(4t+2)\,dt}{4t^2+4t+2} = \frac{1}{2}\ln(4t^2+4t+2) + C$

En la integral 2 se identifica que la expresión $4t^2 + 4t + 2$ es de la forma $ax^2 + bx + c$. Completando el cuadrado en $4t^2 + 4t + 2$, se tiene:

$$4t^2 + 4t + 2 = \underbrace{4t^2 + 4t + 1}_{\text{TCP}} + 1, \text{ es decir:}$$
$$4t^2 + 4t + 2 = (2t+1)^2 + 1$$

De lo anterior resulta: $\displaystyle 12\int \frac{dt}{4t^2+4t+2} = 12\int \frac{dt}{(2t+1)^2+1}$

Aplicando la fórmula **18**, se tiene:

$$v^2 = (2t+1)^2 \qquad a^2 = 1$$
$$v = (2t+1) \qquad a = 1$$
$$dv = 2\,dt$$

De tal forma que:

$$12\int \frac{dt}{(2t+1)^2+1} = \frac{12}{2}\left[\frac{1}{1}\arctan\frac{(2t+1)}{1}\right] + C = 6\arctan(2t+1) + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral, se tiene:

$$\therefore \quad \int \frac{(2t+7)\,dt}{2t^2+2t+1} = \frac{1}{2}\ln(4t^2+4t+2) + 6\arctan(2t+1) + C$$

EJERCICIO 9

I. En equipos de dos personas, comprueben las siguientes integrales indefinidas, reducibles a inmediatas, por sustitución algebraica.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \text{arcsen}\frac{(x+1)}{2} + C$

2. $\int \frac{dx}{5-2x+x^2} = \frac{1}{2}\arctan\frac{(x-1)}{2} + C$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \text{arcsen}(x+1) + C$

4. $\int \frac{dx}{5-x^2-4x} = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{x+5}{1-x}\right) + C$

5. $\int \frac{dx}{x^2-8x+7} = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{x-7}{x-1}\right) + C$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}} = \text{arcsen}\frac{(x+1)}{\sqrt{5}} + C$

7. $\int \frac{dx}{x^2-6x+5} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-5}{x-1}\right) + C$

8. $\int \frac{dx}{15+2x-x^2} = \frac{1}{8}\ln\left(\frac{3+x}{5-x}\right) + C$

9. $\int \frac{dx}{x^2-8x+15} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-5}{x-3}\right) + C$

10. $\int \frac{dt}{2at+t^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{t}{t+2a}\right) + C$

11. $\int \frac{dy}{1+y+y^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right) + C$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{10-4x+4x^2}} = \frac{1}{2}\ln\left[(2x-1)+\sqrt{10-4x+4x^2}\right] + C$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{5+x^2+2x}} = \ln\left[(x+1)+\sqrt{5+x^2+2x}\right] + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+8}} = \ln\left[(x-1)+\sqrt{x^2-2x+8}\right] + C$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+4x+x^2}} = \ln\left[(x+2)+\sqrt{3+4x+x^2}\right] + C$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-10-x^2}} = -\ln\left[(x-1)+\sqrt{2x-10-x^2}\right] + C$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+25}} = \ln\left[(x-4)+\sqrt{x^2-8x+25}\right] + C$

18. $\int \frac{d\theta}{\sqrt{4\theta^2+4\theta+5}} = \frac{1}{2}\ln\left[(2\theta+1)+\sqrt{4\theta^2+4\theta+5}\right]+C$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x+4}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left[(3x-1)+\sqrt{3x^2-2x+4}\right]+C$

20. $\int \frac{5\,du}{\sqrt{5+2u+u^2}} = 5\ln\left[(u+1)+\sqrt{5+2u+u^2}\right]+C$

21. $\int \sqrt{3x^2+4x+1}\,dx = \frac{(3x+2)}{2\sqrt{3}}\sqrt{3x^2+4x+1}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left[(3x+2)+\sqrt{3x^2+4x+1}\right]+C$

22. $\int \sqrt{9x^6-3x^3-1}\,x^2dx = \frac{(6x^3-1)}{36}\sqrt{9x^6-3x^3-1}-\frac{5}{72}\ln\left[\left(3x^3-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{9x^6-3x^3-1}\right]+C$

23. $\int \sqrt{4x^2-12x+7}\,dx = \frac{(2x-3)}{4}\sqrt{4x^2-12x+7}-\frac{1}{2}\ln\left[(2x-3)+\sqrt{4x^2-12x+7}\right]+C$

24. $\int \frac{(3x+8)\,dx}{\sqrt{9x^2-3x-1}} = \frac{1}{3}\sqrt{9x^2-3x-1}+\frac{17}{6}\ln\left[\left(3x-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{9x^2-3x-1}\right]+C$

25. $\int \sqrt{9x^2+12x+8}\,dx = \frac{(3x+2)}{6}\sqrt{9x^2+12x+8}-\frac{2}{3}\ln\left[(3x+2)+\sqrt{9x^2+12x+8}\right]+C$

26. $\int \sqrt{15+4x-x^2}\,dx = \frac{(x-2)}{2}\sqrt{15+4x-x^2}+\frac{19}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-2}{\sqrt{19}}\right)+C$

27. $\int \sqrt{1-x-2x^2}\,dx = \frac{(4x+1)}{8\sqrt{2}}\sqrt{1-x-2x^2}+\frac{9}{16\sqrt{2}}\operatorname{arcsen}\left(\frac{4x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$

28. $\int \sqrt{3+2z-z^2}\,dz = \frac{(z-1)}{2}\sqrt{3+2z-z^2}+2\operatorname{arcsen}\left(\frac{z-1}{2}\right)+C$

29. $\int \sqrt{2+2x-x^2}\,dx = \frac{(x-1)}{2}\sqrt{2+2x-x^2}+\frac{3}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$

30. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx = \frac{(x-1)}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$

31. $\int \sqrt{x^2+2x}\,dx = \frac{(x+1)}{2}\sqrt{x^2+2x}+\frac{1}{2}\ln\left[(x+1)+\sqrt{x^2+2x}\right]+C$

32. $\int \sqrt{3t-2t^2}\,dt = \frac{(4t-3)}{8\sqrt{2}}\sqrt{3t-2t^2}+\frac{9}{16\sqrt{2}}\operatorname{arcsen}\left(\frac{4t-3}{3}\right)+C$

33. $\int \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{x^2-9}} = \sqrt{x^2-9}+2\ln\left(x+\sqrt{x^2-9}\right)+C$

34. $\int \frac{(2x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = 2\sqrt{x^2+1}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$

35. $\int \frac{(3t-1)\,dt}{3t^2+9} = \frac{1}{2}\ln(3t^2+9)-\frac{1}{3}\arctan\frac{\sqrt{3}t}{3}+C$

36. $\int \frac{(7x-2)\,dx}{1+5x^2} = \frac{7}{10}\ln(1+5x^2) - \frac{2}{\sqrt{5}}\arctan\sqrt{5}x + C$

37. $\int \frac{(1-x)\,dx}{16-4x^2} = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4+2x}{4-2x}\right) + \ln(16-4x^2)\right] + C$

38. $\int \frac{(x+5)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = 2\sqrt{x^2+2x+5} + 4\ln\left[(x+1)+\sqrt{x^2+2x+5}\right] + C$

39. $\int \frac{(2-x)\,dx}{\sqrt{4x^2-4x-3}} = -\frac{1}{4}\sqrt{4x^2-4x-3} + \frac{3}{4}\ln\left[(2x-1)+\sqrt{4x^2-4x-3}\right] + C$

40. $\int \frac{(3x-4)\,dx}{\sqrt{1-6x-9x^2}} = -\left[\frac{1}{3}\sqrt{1-6x-9x^2} + \frac{5}{3}\ln\left[(3x+1)+\sqrt{1-6x-9x^2}\right]\right] + C$

41. $\int \frac{(x+2)\,dx}{4x-x^2} = \ln\left(\frac{x}{4-x}\right) - \frac{1}{2}\ln(4x-x^2) + C$

42. $\int \frac{x\,dx}{27+6x-x^2} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{3+x}{9-x}\right) - \frac{1}{2}\ln(27+6x-x^2) + C$

43. $\int \frac{(3t+2)\,dt}{19-5t+t^2} = \frac{3}{2}\ln(19-5t+t^2) + \frac{19}{\sqrt{51}}\arctan\left(\frac{2x-5}{\sqrt{51}}\right) + C$

44. $\int \frac{(8x-3)\,dx}{12x-4x^2-5} = \frac{9}{8}\ln\left(\frac{2x-1}{5-2x}\right) - \ln(12x-4x^2-5) + C$

45. $\int \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \sqrt{x^2-6x+5} + 5\ln\left[(x-3)+\sqrt{x^2-6x+5}\right] + C$

II. Encuentra cada una de las siguientes integrales y comprueba los resultados por diferenciación y en plenaria discute tus resultados.

1. $\int \frac{dx}{2x^2+2x+1}$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

3. $\int \frac{dx}{4x^2-12x+7}$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}}$

5. $\int \frac{dx}{x^2+2x}$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2}}$

7. $\int \frac{dx}{x^2-8x}$

8. $\int \frac{dx}{x^2-2x-3}$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{12+4x-x^2}}$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x}}$

11. $\int \frac{dx}{12x-8-4x^2}$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+13}}$

13. $\int \frac{dx}{27+6x-x^2}$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-4x+3}}$

15. $\int \frac{dx}{x^2+2x-3}$

16. $\int \sqrt{5-4x-x^2}\,dx$

17. $\int \sqrt{28-12x-x^2}\,dx$

18. $\int \sqrt{9x^2-12x+8}\,dx$

19. $\int \sqrt{2x^2+2x+5}\,dx$

20. $\int \sqrt{30+10z+z^2}\,dx$

21. $\int \sqrt{20+8y-y^2}\,dx$

22. $\int \sqrt{2x^2+7x}\,dx$

23. $\int \sqrt{x^4+6x^2+5}\,dx$

24. $\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2-8x+25}}$

25. $\int \frac{(10x-3)\,dx}{4+25x^2}$

26. $\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

27. $\int \frac{(5-x)\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$

28. $\int \frac{(2x+3)\,dx}{1+4x+5x^2}$

29. $\int \frac{(3x-5)\,dx}{3x^2+4x+1}$

30. $\int \frac{(x-7)\,dx}{\sqrt{x^2+8x+3}}$

31. $\int \frac{(x-4)\,dx}{\sqrt{x^2-5x+3}}$

32. $\int \frac{(2x-7)\,dx}{5x^2+3}$

33. $\int \frac{(x+3)\,dx}{1-x-x^2}$

34. $\int \frac{(x-2)\,dx}{2x^2+6x+5}$

35. $\int \frac{(x+1)\,dx}{3x^2+2x+1}$

36. $\int \sqrt{4x^2-4x-3}\,dx$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Solución de integrales indefinidas, reducibles a inmediatas, por sustitución trigonométrica

Para resolver integrales indefinidas que contengan un radical de la forma $\sqrt{a^2-u^2}$ o $\sqrt{u^2 \pm a^2}$ y que son reducibles a integrales inmediatas por sustitución trigonométrica, se recomienda efectuar un cambio de variable, ya que es el método más corto para integrar tales expresiones.

El cambio de la variable se realiza
1. Cuando se tiene $\sqrt{a^2-u^2}$ se hace $u = a\,\text{sen}\,z$.
2. Cuando se tiene $\sqrt{u^2+a^2}$ se hace $u = a\tan z$.
3. Cuando se tiene $\sqrt{u^2-a^2}$ se hace $u = a\sec z$.

Estas sustituciones se emplean para demostrar las fórmulas de la **18** a la **24** del formulario general de integrales inmediatas.

Es importante notar que en cada caso el signo radical desaparece, es decir:
1. $\sqrt{a^2-a^2\text{sen}^2 z} = a\sqrt{1-\text{sen}^2 z} = a\cos z$
2. $\sqrt{a^2+a^2\tan^2 z} = a\sqrt{1+\tan^2 z} = a\sec z$
3. $\sqrt{a^2\sec^2 z-a^2} = a\sqrt{\sec^2 z-1} = a\tan z$.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra $\int \frac{dx}{(5-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Solución

De la integral propuesta, tenemos que: $u^2 = x^2 \qquad a^2 = 5$

$$u = x \qquad a = \sqrt{5}$$

$$du = dx$$

Es decir: $\int \frac{dx}{(5-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{du}{(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}}$

Como se tiene $(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(a^2-u^2)^3}$, el cambio de variable que debe realizarse es: $u = a \text{ sen } z$, de donde $u^2 = a^2 \text{ sen}^2 z$ y también $du = a \cos z \, dz$.

Efectuando la sustitución en la integral, se tiene:

$$\int \frac{du}{(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{a\cos z\,dz}{(a^2-a^2\text{sen}^2 z)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{a\cos z\,dz}{[a^2(1-\text{sen}^2 z)]^{\frac{3}{2}}}$$

Utilizando la identidad trigonométrica: $\cos^2 z = 1 - \text{sen}^2 z$

Y sustituyendo en la integral resulta: $\int \frac{a\cos z\,dz}{[a^2(1-\text{sen}^2 z)]^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{a\cos z\,dz}{(a^2\cos^2 z)^{\frac{3}{2}}}$

$$= \int \frac{a\cos z\,dz}{(a\cos z)^3} = \int \frac{dz}{(a\cos z)^2} = \int \frac{dz}{a^2\cos^2 z}$$

Utilizando la identidad trigonométrica: $\frac{1}{\cos^2 z} = \sec^2 z$

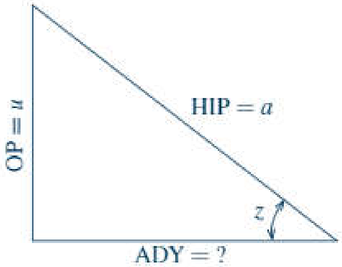
Y sustituyendo en la integral resulta: $\int \frac{dz}{a^2\cos^2 z} = \frac{1}{a^2}\int \sec^2 z\,dz$

La integral resultante se parece a la fórmula **10**, donde se identifica que: $v = z$

$$dv = dz$$

$$\left.\frac{1}{a^2}\int \sec^2 z\,dz = \frac{1}{a^2}\tan z + C \quad\right\} \text{ Resultado parcial}$$

De $u = a \text{ sen } z$, se tiene que $\text{sen } z = \frac{u}{a} = \frac{\text{OP}}{\text{HIP}}$. Al trazar un triángulo rectángulo como el que se muestra en la página 118 y aplicar el **teorema de Pitágoras** se tienen los siguientes resultados.



$$(\text{ADY})^2 = (\text{HIP})^2 - (\text{OP})^2$$

$$\text{ADY} = \sqrt{a^2 - u^2}$$

$$\therefore \quad \tan z = \frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}}$$

Sustituyendo en el resultado parcial se tiene que:

$$\frac{1}{a^2}\tan z + C = \left(\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{u}{\sqrt{a^2-u^2}}\right) + C = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}} + C$$

Al sustituir los valores originales $a = \sqrt{s}$ y $u = x$ resulta:

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{(5-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{5\sqrt{5-x^2}} + C \quad \Bigg| \quad \text{Resultado final}$$

2 ●●•Encuentra $\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2+4}}$.

Solución

De la integral propuesta, tenemos que:

$$u^2 = 9x^2 \qquad a^2 = 4$$
$$u = 3x \qquad a = 2$$
$$\frac{u}{3} = x$$
$$\frac{du}{3} = dx$$

Es decir: $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2+4}} = \int \frac{\frac{du}{3}}{\frac{u}{3}\sqrt{u^2+a^2}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}}$

Como se tiene $\sqrt{u^2+a^2}$, el cambio de variable que debe realizarse es $u = a\tan z$, de donde $u^2 = a^2\tan^2 z$ y también $du = a\sec^2 z\, dz$.

Efectuando la sustitución en la integral se tiene:

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}} = \int \frac{a\sec^2 z\,dz}{a\tan z\sqrt{a^2+\tan^2 z + a^2}} = \int \frac{\sec^2 z\,dz}{\tan z\sqrt{a^2(\tan^2 z+1)}}$$

Utilizando la identidad trigonométrica: $\sec^2 z = \tan^2 z + 1$

Y sustituyendo en la integral, resulta:

$$\int \frac{\sec^2 z\,dz}{\tan z\sqrt{a^2(\tan^2 z+1)}} = \int \frac{\sec^2 z\,dz}{\tan z\sqrt{a^2\sec^2 z}} = \int \frac{\sec^2 dz}{a\tan z\sec z} = \int \frac{\sec z\,dz}{a\tan z}$$

Utilizando las siguientes identidades trigonométricas: $\sec^2 z = \frac{1}{\cos z}$ y $\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$

Y sustituyendo en la integral, resulta:

$$\int \frac{\sec z\, dz}{a \tan z} = \frac{1}{a}\int \frac{\left(\frac{1}{\cos z}\right)dz}{\left(\frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}\right)} = \frac{1}{a}\int \frac{dz}{\operatorname{sen} z}$$

Utilizando la identidad trigonométrica: $\frac{1}{\operatorname{sen} z} = \csc z$

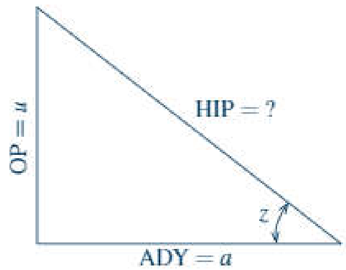
Y sustituyendo en la integral, resulta: $\frac{1}{a}\int \frac{dz}{\operatorname{sen} z} = \frac{1}{a}\int \csc z\, dz$

La integral resultante se parece a la fórmula **17**, donde se identifica que: $v = z$

$dv = dz$

$$\left.\frac{1}{a}\int \csc z\, dz = \frac{1}{a}\ln(\csc z - \cot z) + C = \frac{1}{a}\ln \tan \frac{z}{2} + C \quad \right\} \text{ Resultado parcial}$$

De $u = a \tan z$, se tiene que: $\tan z = \frac{u}{a} = \frac{\text{OP}}{\text{ADY}}$. Al trazar un triángulo rectángulo y aplicando el **teorema de Pitágoras**, resulta:



$$(\text{HIP})^2 = (\text{OP})^2 + (\text{ADY})^2$$

$$\text{HIP} = \sqrt{u^2 + a^2}$$

$$\therefore \quad \cot z = \frac{a}{u} \qquad \csc z = \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u}$$

Al sustituir en el resultado parcial, tenemos que:

$$\frac{1}{a}\ln(\csc z - \cot z) + C = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u} - \frac{a}{u}\right) + C = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{\sqrt{u^2 + a^2} - a}{u}\right) + C$$

Sustituyendo los valores originales $u^2 = 9x^2$, $u = 3x$, $a^2 = 4$ y $a = 2$ resulta:

$$\left.\therefore \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2 + 4}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{9x^2 + 4} - 2}{3x}\right) + C \quad \right\} \text{ Resultado final}$$

3 ●●• Encuentra $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-11}}$.

Solución

De la integral propuesta, tenemos que:

$$u^2 = x^2 \qquad a^2 = 11$$
$$u = x \qquad a = \sqrt{11}$$
$$du = dx$$

Es decir: $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-11}} = \int \frac{dx}{u^2\sqrt{u^2-a}}$

Como se tiene $\sqrt{u^2-a}$ el cambio de variable que debe realizarse es $u = a \sec z$, de donde $u^2 = a^2 \sec^2 z$ y también $du = a \sec z \tan z\, dz$.

Efectuando la sustitución en la integral, se tiene:

$$\int \frac{dx}{u^2\sqrt{u^2-a^2}} = \int \frac{a \sec z \tan z\, dz}{a^2 \sec^2 z\sqrt{a^2 \sec^2 z - a^2}} = \int \frac{\tan z\, \mathbf{dz}}{a \sec z\sqrt{a^2(\sec^2 z - 1)}}$$

Utilizando la identidad trigonométrica: $\tan^2 z = \sec^2 z - 1$

Y sustituyendo en la integral, resulta:

$$\int \frac{\tan z\, dz}{a \sec z\sqrt{a^2(\sec^2 z-1)}} = \int \frac{\tan z\, dz}{a \sec z\sqrt{a^2 \tan^2 z}} = \int \frac{\tan z\, dz}{a^2 \sec z \tan z} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dz}{\sec z}$$

Utilizando la identidad trigonométrica: $\cos z = \frac{1}{\sec z}$

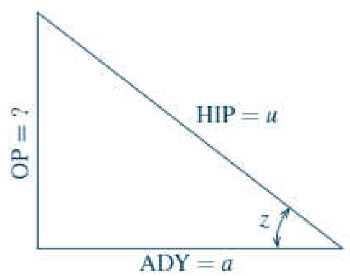
Y sustituyendo en la integral, resulta: $\frac{1}{a^2}\int \frac{dz}{\sec z} = \frac{1}{a^2}\int \cos z\, dz$

La integral resultante se parece a la fórmula **9**, donde se identifica que:

$$v = z$$
$$dv = dz$$

$$\left.\frac{1}{a^2}\int \cos z\, dz = \frac{1}{a^2}\operatorname{sen} z + C \right\} \text{Resultado parcial}$$

De $u = a \sec z$ se tiene: $\sec z = \frac{u}{a} = \frac{\text{HIP}}{\text{ADY}}$. Al trazar un triángulo rectángulo y aplicando el **teorema de Pitágoras**, resulta:



$$(\text{OP})^2 = (\text{HIP})^2 - (\text{ADY})^2$$
$$\text{OP} = \sqrt{u^2-a^2}$$

$$\therefore \quad \operatorname{sen} z = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}$$

Sustituyendo en el resultado parcial se tiene que:

$$\frac{1}{a^2}\operatorname{sen} z + C = \left(\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}\right) + C = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^2u} + C$$

Al sustituir los valores originales $u = x$ y $a = \sqrt{11}$ resulta:

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-11}} = \frac{\sqrt{x^2-11}}{11x} + C \quad \Bigg\} \text{ Resultado final}$$

4 ••• Encuentra $\int \frac{\theta^2\, d\theta}{(4-\theta^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Solución

De la integral propuesta, tenemos que: $u^2 = \theta^2 \quad a^2 = 4$

$$u = \theta \qquad a = 2$$

$$du = d\theta$$

Es decir: $\int \frac{\theta^2\, d\theta}{(4-\theta^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{u^2\, du}{(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{u^2\, du}{\sqrt{(a^2-u^2)^3}}$

Como se tiene $\sqrt{(a^2-u^2)^3}$ el cambio de variable que debe realizarse es $u = a \operatorname{sen} z$, de donde $u^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 z$ y también $du = a \cos z\, dz$.

Efectuando la sustitución en la integral se tiene:

$$\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{(a^2-u^2)^3}} = \int \frac{a^2\operatorname{sen}^2 z\, a\cos z\, dz}{\sqrt{(a^2-a^2\operatorname{sen}^2 z)}} = \int \frac{a^3\operatorname{sen}^2 z \cos z\, dz}{\sqrt{[a^2(1-\operatorname{sen}^2 z)]^3}}$$

Utilizando la identidad trigonométrica: $\cos^2 z = 1 - \operatorname{sen}^2 z$

Y sustituyendo en la integral, resulta:

$$\int \frac{a^3\operatorname{sen}^2 z\cos z\, dz}{\sqrt{[a^2(1-\operatorname{sen}^2 z)]^3}} = \int \frac{a^3\operatorname{sen}^2 z\cos z\, dz}{\sqrt{(a^2\cos^2 z)^3}} = \int \frac{a^3\operatorname{sen}^2 z\cos z\, dz}{a^3\cos^3 z} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 z\, dz}{\cos^2 z}$$

De la fórmula trigonométrica se tiene que: $\tan^2 z = \frac{\operatorname{sen}^2 z}{\cos^2 z}$

Sustituyendo en la integral, resulta: $\int \frac{\operatorname{sen}^2 z\, dz}{\cos^2 z} = \int \tan^2 z\, dz$

Utilizando la identidad trigonométrica: $\tan^2 z = \sec^2 z - 1$

Y sustituyendo en la integral, resulta: $\int \tan^2 z dz = \int (\sec^2 z - 1)\, dz = \underbrace{\int \sec^2 z\, dz}_{1} - \underbrace{\int dz}_{2}$

La integral 1 se parece a la fórmula **10**, donde se identifica que: $v = z$

$$dv = dz$$

Lo que resulta: $\int \sec^2 z\, dz = \tan z + C$

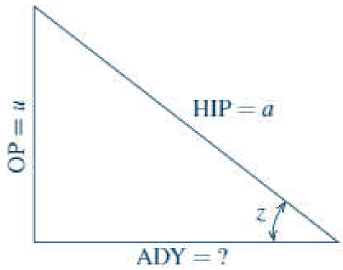
En la integral 2 aplicamos directamente la fórmula **1**, de lo que resulta: $\int dz = -z + C$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral, se tiene:

$$\left.\int \sec^2 z\,dz - \int dz = \tan z - z + C \right\} \text{ Resultado parcial}$$

De $u = a$ sen z, se tiene $\operatorname{sen} z = \frac{u}{a} = \frac{\text{OP}}{\text{HIP}}$ y también que $z = \operatorname{arcsen}\frac{u}{a}$.

Al trazar un triángulo rectángulo y aplicando el **teorema de Pitágoras**, resulta:



$$(\text{ADY})^2 = (\text{HIP})^2 - (\text{OP})^2$$

$$\text{ADY} = \sqrt{a^2 - u^2}$$

$$\therefore \quad \tan z = \frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}}$$

Sustituyendo en el resultado parcial se tiene:

$$\tan z - z + C = \frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}} - \operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + C$$

Al sustituir los valores originales $u = \theta$ y $a = 2$ resulta:

$$\left.\therefore \quad \int \frac{\theta^2 d\theta}{(4-\theta^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\theta}{\sqrt{4-\theta^2}} - \operatorname{arcsen}\frac{\theta}{2} + C \right\} \text{ Resultado final}$$

5 Encuentra $\int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{y^2 - 9}}$.

Solución

De la integral propuesta, tenemos que: $u^2 = y^2$ $\quad a^2 = 9$

$u = y \quad a = 3$

$du = dy$

Es decir: $\int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{y^2-9}} = \int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2-a^2}}$

Como se tiene $\sqrt{u^2 - a^2}$, el cambio de variable que debe realizarse es $u = a \sec z$, de donde $u^2 = a^2 \sec^2 z$ y también $du = a \sec z \tan z\, dz$.

Efectuando la sustitución en la integral se tiene:

$$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \int \frac{a^2 \sec^2 z\, a \sec z \tan z\, dz}{\sqrt{a^2 \sec^2 z - a^2}} = \int \frac{a^3 \sec^3 z \tan z\, dz}{\sqrt{a^2(\sec^2 z - 1)}}$$

Utilizando la identidad trigonométrica: $\quad \tan^2 z = \sec^2 z - 1$

Y sustituyendo en la integral, resulta:

$$\int \frac{a^3 \sec^3 z \tan z\, dz}{\sqrt{a^2(\sec^2 z - 1)}} = \int \frac{a^3 \sec^3 z \tan z\, dz}{\sqrt{a^2 \tan^2 z}} = \int \frac{a^3 \sec^3 z \tan z\, dz}{a \tan z} = a^2 \int \sec^3 z\, dz$$

— Esta integral se resuelve por el método de **integración por partes** que se analizará en el siguiente objetivo.—

EJERCICIO 10

I. Comprueba las siguientes integrales indefinidas, reducibles a inmediatas, por sustitución trigonométrica.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. $\int \frac{dx}{(7-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{7\sqrt{7-x^2}} + C$

2. $\int \frac{dz}{(z^2+6)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z}{6\sqrt{z^2+6}} + C$

3. $\int \frac{d\theta}{\theta^2\sqrt{13-\theta^2}} = -\frac{\sqrt{13-\theta^2}}{13\theta} + C$

4. $\int \frac{y^2dy}{(y^2+3)^{\frac{3}{2}}} = \ln\left(\frac{\sqrt{y^2+3}+y}{\sqrt{3}}\right) - \frac{y}{\sqrt{y^2+3}} + C$

5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{9+x^2}} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{\sqrt{9+x^2}-3}{x}\right) + C$

6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{m^2-x^2}} = \frac{1}{m}\ln\left(\frac{\sqrt{m^2-x^2}-m}{x}\right) + C$

7. $\int \frac{5x^2\,dx}{(16-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{5x}{\sqrt{16-x^2}} - 5\,\text{arcsen}\frac{x}{4} + C$

8. $\int \frac{\sqrt{x^2+25}\,dx}{x} = 5\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+25}-5}{x}\right) + \sqrt{x^2+25} + C$

9. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}} = \frac{\sqrt{x^2-4}}{4x} + C$

10. $\int \frac{dy}{y^2\sqrt{11-y^2}} = \frac{\sqrt{11-y}}{11y} + C$

11. $\int \frac{dy}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{9\sqrt{9-x^2}} + C$

12. $\int \frac{\sqrt{64-x^2}\,dx}{x} = 8\ln\left(\frac{8-\sqrt{64-x^2}}{x}\right) + \sqrt{64-x^2} + C$

13. $\int \frac{\sqrt{u^2-9}\,du}{u} = \sqrt{u^2-9} - 3\,\text{arcsen}\frac{u}{3} + C$

14. $\int \frac{dy}{y\sqrt{9y^2+16}} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{9y^2+16}-3y}{3y}\right) + C$

15. $\int \frac{dy}{x\sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{2}\text{arcsen}\frac{x}{2} + C$

16. $\int \frac{\sqrt{x^2-16}\,dx}{x} = \sqrt{x^2-16} - 4\arccos\frac{4}{x} + C$

17. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{\sqrt{u^2+a^2}-a}{u}\right) + C$

18. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}\,dx}{x^2} = \ln\left(\frac{\sqrt{4+x^2}+x}{2}\right) - \frac{\sqrt{4+x^2}}{x} + C$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-16}} = \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-16}}{4}\right) + C$

20. $\int \frac{dy}{(6-y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y}{6\sqrt{6-y^2}} + C$

II. Encuentra las primitivas de cada una de las siguientes integrales y comprueba los resultados por diferenciación y en plenaria discute tus resultados.

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}}$
2. $\int \sigma^2\sqrt{16-\sigma^2}\,d\sigma$
3. $\int \frac{\sqrt{9-y^2}}{y^2}dy$
4. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$
5. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-5}}$
6. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$
7. $\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2-4}}$
8. $\int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{16-y^2}}$
9. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{6+x^2}}$
10. $\int \frac{d\theta}{\theta\sqrt{\theta^4-16}}$
11. $\int \frac{du}{u^4\sqrt{u^2+25}}$
12. $\int \frac{dy}{(y^2+4)^{\frac{3}{2}}}$
13. $\int \frac{e^{-x}dx}{(16e^{-2x}+4)^{\frac{3}{2}}}$
14. $\int \frac{dx}{(25x^2-4)^{\frac{3}{2}}}$
15. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Solución de integrales indefinidas por el método de integración por partes en sus diferentes casos

Integración por partes

De acuerdo con la fórmula del producto para diferenciación, considerando que u y v son funciones de la misma variable independiente, se tiene que $d(uv) = v\,du + u\,dv$.

Por transposición de términos se obtiene: $u\,dv = d(uv) - v\,du$

Y al integrar se obtiene: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

La expresión anterior se denomina **fórmula de integración por partes.**

Cuando no se puede integrar directamente $u\,dv$, la fórmula de integración por partes hace que su integración dependa de dv y $v\,du$, que suelen ser formas fáciles y posibles de integración.

El método de **integración por partes** es uno de los de mayor aplicación de cálculo integral.

Para aplicar la fórmula de integración por partes en un caso dado, es necesario descomponer la diferencial dada en dos factores, es decir, en u y dv. Aunque no existen instrucciones generales que faciliten la elección de dichos factores se recomiendan los siguientes pasos para escoger los factores u y dv.

1. dx siempre es una parte de dv.
2. Debe ser posible integrar dv.
3. Cuando la expresión para integrar es el producto de dos funciones, es mejor seleccionar la de apariencia más compleja, con tal que pueda integrar como parte de dv.

EJEMPLOS

Ejemplos

Caso I

1 Encuentra $\int x \operatorname{sen} x\,dx$.

Solución

Como la expresión por integrar es el producto de dos funciones, se selecciona la de apariencia más compleja para integrarla como parte de dv, es decir:

$$\text{Sean} \quad u = x \quad \text{y} \quad dv = \operatorname{sen} x\,dx$$

$$du = dx \qquad \int dv = \int \operatorname{sen} x\,dx$$

$$v = -\cos x$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes, tenemos que:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x)\,dx$$

$$\underbrace{\int x \operatorname{sen} x\,dx}_{1} = -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

La expresión $\int \cos x\,dx$ se parece a la fórmula **9**, donde se identifica: $v = x$, $dv = dx$

Es decir: $\underbrace{\int \cos x\,dx}_{2} = \operatorname{sen} x + C$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral (1 y 2) se tiene que:

$$\therefore \quad \int x \operatorname{sen} x\,dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

Caso II

2 Encuentra $\int x \ln x \, dx$.

Solución

Como la expresión por integrar es el producto de dos funciones, se selecciona la de apariencia más compleja, para integrarla como parte de dv, es decir:

$$\text{Sean } u = x \quad \text{y} \quad dv = \ln x \, dx$$
$$du = dx \qquad \int dv = \int \ln x \, dx$$
$$v = ?$$

Nos damos cuenta que la $\int x \ln x \, dx$ no puede integrarse en forma directa, por lo que este hecho indica que no se seleccionó adecuadamente a los factores u y dv. Entonces, si:

$$u = \ln x \quad \text{y} \quad dv = x \, dx$$
$$du = \frac{dx}{x} \qquad \int dv = \int x \, dx$$
$$v = \frac{x^2}{2}$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes, tenemos que:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$
$$\int x \ln x \, dx = (\ln x)\left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{dx}{x}\right)$$
$$\underbrace{\int x \ln x \, dx}_{1} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx$$

La expresión $-\frac{1}{2}\int x \, dx$ se parece a la fórmula **4**, donde se identifica que: $u = x$, $n = 1$, $dv = dx$

Es decir: $\underbrace{-\frac{1}{2}\int x \, dx}_{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right) + C = -\frac{x^2}{4} + C$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral (1 y 2) se tiene que:

$$\therefore \quad \int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C$$

Caso III

3 Encuentra $\int x e^{2x} \, dx$.

Solución

Como la expresión por integrar es el producto de dos funciones, se selecciona la de apariencia más compleja para integrarla como parte de dv como se ve a continuación.

$$\text{Sean} \quad u = x \quad \text{y} \quad dv = e^{2x}\,dx$$
$$du = dx \qquad \int dv = \int e^{2x}\,dx$$
$$v = \frac{e^{2x}}{2}$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes, tenemos que:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$
$$\int x e^{2x}\,dx = x\left(\frac{e^{2x}}{2}\right) - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx$$
$$\underbrace{\int x e^{2x}\,dx}_{1} = \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx$$

La expresión $-\frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx$ se parece a la fórmula **7**, donde se identifica que: $v = 2x$, $dv = 2\,dx$

Es decir: $\underbrace{-\frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx}_{2} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)e^{2x} + C = -\frac{e^{2x}}{4} + C$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral (1 y 2) se tiene que:

$$\therefore \quad \int x e^{2x}\,dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C = \frac{e^{2x}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$$

Caso IV

4 Encuentra $\int x^2 a^{2x}\,dx$.

Solución

Como la expresión por integrar es el producto de dos funciones, se selecciona la de apariencia más compleja para integrarla como parte de dv, es decir:

$$\text{Sean} \quad u = x^2 \quad \text{y} \quad dv = a^{2x}dx$$
$$du = 2x\,dx \qquad \int dv = \int a^{2x}dx$$
$$v = \frac{a^{2x}}{2\ln a}$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes, tenemos que:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$
$$\int x^2 a^{2x}\,dx = x^2\left(\frac{a^{2x}}{2\ln a}\right) - \int\left(\frac{a^{2x}}{2\ln a}\right)2x\,dx$$
$$\underbrace{\int x^2 a^{2x}\,dx}_{1} = \frac{x^2 a^{2x}}{2\ln a} - \frac{1}{\ln a}\int x a^{2x}\,dx$$

Para la expresión $-\frac{1}{\ln a}\int xa^{2x}\,dx$ se aplicará nuevamente la fórmula de integración por partes, donde se identifica que: $u = x$ y $dv = a^{2x}\,dx$

$$du = dx \qquad \int dv = \int a^{2x}\,dx$$

$$v = \frac{a^{2x}}{2\ln a}$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes se tiene:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$-\frac{1}{\ln a}\int xa^{2x}\,dx = -\frac{1}{\ln a}\left[x\left(\frac{a^{2x}}{2\ln a}\right) - \int\left(\frac{a^{2x}}{2\ln a}\right)dx\right]$$

$$\underbrace{-\frac{1}{\ln a}\int xa^{2x}\,dx}_{2} = -\frac{xa^{2x}}{2(\ln a)^2} + \frac{1}{2(\ln a)^2}\int a^{2x}\,dx$$

La expresión $\frac{1}{2(\ln a)^2}\int a^{2x}\,dx$ se parece a la fórmula **6**, donde se identifica que: $v = 2x$

$$dv = 2\,dx$$

Es decir: $\frac{1}{2(\ln a)^2}\int a^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2(\ln a)^2}\right]\left(\frac{1}{2}\right)\frac{a^{2x}}{\ln a} + C$

$$\underbrace{\frac{1}{2(\ln a)^2}\int a^{2x}\,dx}_{3} = \frac{a^{2x}}{4(\ln a)^3} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral (1, 2 y 3) se tiene:

$$\therefore \quad \int x^2a^{2x}\,dx = \frac{x^2a^{2x}}{2\ln a} - \frac{x\,a^{2x}}{2(\ln a)^2} + \frac{a^{2x}}{4(\ln a)^3} + C = \frac{a^{2x}}{2\ln a}\left(x^2 - \frac{x}{\ln a} + \frac{1}{2\ln^2 a}\right) + C$$

Caso V

5 Encuentra $\int \sec^3 z\,dz$.

Solución

Esta expresión que resulta de una integral indefinida, reducible a inmediata, por sustitución trigonométrica había quedado pendiente de resolverse en el objetivo anterior.

Escribiendo la expresión $\int \sec^3 z\,dz$ como el producto de dos funciones, se tiene:

$$\int \sec^3 z\,dz = \int \sec^2 z \sec z\,dz$$

Como la expresión por integrar es el producto de dos funciones, se selecciona la de apariencia más compleja para integrarla como parte de dv, es decir:

$$\text{Sean} \quad u = \sec z \qquad \text{y} \qquad dv = \sec^2 z\,dz$$

$$du = \sec z \tan z\,dz \qquad \int dv = \int \sec^2 z\,dz$$

$$v = \tan z$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes, tenemos que:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$
$$\int \sec^2 z \sec z\,dz = \sec z \tan z - \int \tan z(\sec z \tan z)\,dz$$
$$\int \sec^2 z \sec z\,dz = \sec z \tan z - \underbrace{\int \tan^2 z \sec z\,dz}_{1}$$

Aplicando la identidad trigonométrica $\tan^2 z = \sec^2 z - 1$ en la integral 1 se tiene:

$$-\int \tan^2 z \sec z\,dz = -\int (\sec^2 z - 1)\sec z\,dz = -\underbrace{\int \sec^3 z\,dz}_{2} + \underbrace{\int \sec z\,dz}_{3}$$

La integral 3, se parece a la fórmula **16**, donde se identifica que: $v = 2x$, $dv = 2\,dx$

Es decir: $\int \sec z\,dz = \ln(\sec z + \tan z) + C$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral (1, 2 y 3) se tiene:

$$\int \sec^3 z\,dz = \sec z \tan z + \ln(\sec z + \tan z) + C - \int \sec^3 dz$$
$$\int \sec^3 z\,dz + \int \sec^3 z\,dz = \sec z \tan z + \ln(\sec z + \tan z) + C$$
$$2\int \sec^3 z\,dz = \sec z \tan z + \ln(\sec z + \tan z) + C$$
$$\int \sec^3 z\,dz = \frac{\sec z \tan z + \ln(\sec z + \tan z)}{2} + C = \frac{\sec z \tan z}{2} + \frac{\ln(\sec z + \tan z)}{2} + C$$

Caso VI

6 Encuentra $\int e^{2x} \operatorname{sen} ax\,dx$.

Solución

Como la expresión por integrar es el producto de dos funciones, se selecciona la de apariencia más compleja para integrarla como parte de *dv*, es decir:

$$\text{Sean}\quad u = e^{2x} \quad \text{y} \quad dv = \operatorname{sen} ax\,dx$$
$$du = 2e^{2x}dx \qquad \int dv = \int \operatorname{sen} ax\,dx$$
$$v = -\frac{\cos x}{a}$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes, tenemos que:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$
$$\int e^{2x} \operatorname{sen} ax\,dx = e^{2x}\left(-\frac{\cos ax}{a}\right) - \int \left(-\frac{\cos ax}{a}\right) 2e^{2x}\,dx$$
$$\underbrace{\int e^{2x} \operatorname{sen} ax\,dx}_{1} = -\frac{e^{2x}\cos ax}{a} + \frac{2}{a}\int e^{2x} \cos ax\,dx$$

Para la expresión $\frac{2}{a}\int e^{2x}\cos ax\,dx$, se aplicará nuevamente la fórmula de integración por partes, donde se identifica que:

$$u = e^{2x} \qquad \text{y} \qquad dv = \cos ax\,dx$$

$$du = 2e^{2x}dx \qquad \int dv = \int \cos ax\,dx$$

$$v = \frac{\text{sen}\,ax}{a}$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes se tiene:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\frac{2}{a}\int e^{2x}\cos ax\,dx = \frac{2}{a}\left[e^{2x}\left(\frac{\text{sen}\,ax}{a}\right) - \int\left(\frac{\text{sen}\,ax}{a}\right)2e^{2x}dx\right]$$

$$\underbrace{\frac{2}{a}\int e^{2x}\cos ax\,dx}_{2} = \frac{2e^{2x}\text{sen}\,ax}{a^2} - \frac{4}{a^2}\int e^{2x}\text{sen}\,ax\,dx$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral (1 y 2) se tiene:

$$\int e^{2x}\text{sen}\,axdx = -\frac{e^{2x}\cos ax}{a} + \frac{2e^{2x}\text{sen}\,ax}{a^2} - \frac{4}{a^2}\int e^{2x}\text{sen}\,axdx$$

$$\int e^{2x}\text{sen}\,axdx + \frac{4}{a^2}\int e^{2x}\text{sen}\,axdx = -\frac{e^{2x}\cos ax}{a} + \frac{2e^{2x}\text{sen}\,ax}{a^2}$$

$$\int e^{2x}\text{sen}\,axdx\left(1 + \frac{4}{a^2}\right) = \frac{e^{2x}}{a}\left(\frac{2\,\text{sen}\,ax}{a} - \cos ax\right) + C$$

$$\int e^{2x}\text{sen}\,axdx = \frac{\frac{e^{2x}}{a}\left(\frac{2\,\text{sen}\,ax}{a} - \cos ax\right)}{\left(1 + \frac{4}{a^2}\right)} + C = \frac{\frac{e^{2x}}{a}\left(\frac{2\,\text{sen}\,ax - a\cos ax}{a}\right)}{\left(\frac{a^2+4}{a^2}\right)} + C$$

$$\therefore \quad \int e^{2x}\text{sen}\,axdx = \frac{\frac{e^{2x}}{a^2}(2\,\text{sen}\,ax - a\cos ax)}{\left(\frac{a^2+4}{a^2}\right)} + C = \frac{e^{2x}(2\,\text{sen}\,ax - a\cos ax)}{a^2+4} + C$$

Caso VII

7 Encuentra $\int \arctan x\,dx$.

Solución

Cabe mencionar que la integral dada aparentemente no representa el producto de dos funciones; sin embargo, sí lo es. Por lo general, se recomienda seleccionar la función de apariencia más compleja para integrarla como parte de dv, no obstante, y tal como sucedió en el caso II, este consejo no siempre resulta ser el adecuado para determinar la integral.

De lo anterior se tiene que: $u = \arctan x$ y $dv = dx$

$$du = \frac{dx}{1+x^2} \qquad \int dv = \int dx$$

$$v = x$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes tenemos que:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \arctan x\,dx = (\arctan x)(x) - \int x\left(\frac{dx}{1+x^2}\right)$$

$$\underbrace{\int \arctan x\,dx}_{1} = x\arctan x - \underbrace{\int \frac{x\,dx}{1+x^2}}_{2}$$

La integral 2 se parece a la fórmula **5**, donde se identifica que: $v = 1+x^2$

$dv = 2x\,dx$

Es decir: $-\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral (1 y 2), se tiene que:

$$\therefore \int \arctan x\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Caso VIII

8 Encuentra $\int \frac{\ln(x+a)dx}{\sqrt{x+a}}$.

Solución

Tomando como ejemplo al caso II, tenemos que:

Sean $u = \ln(x+a)$ y $dv = \frac{dx}{\sqrt{x+a}}$

$$du = \frac{dx}{(x+a)} \qquad \int dv = \int \frac{dx}{\sqrt{x+a}}$$

$$v = 2\sqrt{x+a}$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes se tiene:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \frac{\ln(x+a)dx}{\sqrt{x+a}} = 2\sqrt{x+a}\,\ln(x+a) - \int 2\sqrt{x+a}\left[\frac{dx}{(x+a)}\right]$$

$$\underbrace{\int \frac{\ln(x+a)dx}{\sqrt{x+a}}}_{1} = 2\sqrt{x+a}\,\ln(x+a) - 2\underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}}}_{2}$$

En la integral 2 se aplicará la fórmula **4**, lo que resulta:

$$-2\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}} = -4\sqrt{x+a} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral (1 y 2), se tiene que:

$$\therefore \quad \frac{\ln(x+a)\,dx}{\sqrt{x+a}} = 2\sqrt{x+a}\,\ln(x+a) - 4\sqrt{x+a} + C = 2\sqrt{x+a}\,[\ln(x+a) - 2] + C$$

Aplicaciones del método de integración por partes

1. En diferenciales que contienen productos.
2. En diferenciales que contienen logaritmos.
3. En diferenciales que contienen funciones trigonométricas inversas.

EJERCICIO 11

I. Comprueba las siguientes integrales indefinidas aplicando el método de integración por partes.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. $\int x\cos x\,dx = x\,\text{sen}\,x + \cos x + C$
2. $\int \ln ax\,dx = x(\ln ax - 1) + C$
3. $\int x\sec^2 x\,dx = x\tan x + \ln(\cos x) + C$
4. $\int ze^z\,dz = e^z(x-1) + C$
5. $\int \text{sen}^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\text{sen}2\theta + C$
6. $\int \frac{\ln x\,dx}{(1+x)^2} = \frac{x}{1+x}\ln x - \ln(1+x) + C$
7. $\int x^2\ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C$
8. $\int ya^y\,dy = \frac{a^y}{\ln a}\left(y - \frac{1}{\ln a}\right) + C$
9. $\int z^n\ln z\,dz = \frac{z^{n+1}}{n+1}\left(\ln z - \frac{1}{n+1}\right) + C$
10. $\int x^2e^{-x}\,dx = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C$
11. $\int \frac{\theta e^\theta\,d\theta}{(1+\theta)^2} = \frac{e^\theta}{1+\theta} + C$
12. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\left[x^2 - \frac{2(1-x^2)}{3}\right] + C$

13. $\int xe^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$

14. $\int x\cos 2x\,dx = \frac{\cos 2x}{4} + \frac{x\,\mathrm{sen}\,2x}{2} + C$

15. $\int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x}{2}(\mathrm{sen}\,x + \cos x) + C$

16. $\int x^3 e^{x^2}\,dx = \frac{e^{x^2}}{2}(x^2 - 1) + C$

17. $\int y^2 e^{-3y}\,dy = -\frac{1}{3e^{3y}}\left(y^2 + \frac{2y}{3} + \frac{2}{9}\right) + C$

18. $\int e^{-x}\cos \pi x\,dx = \frac{(\pi\,\mathrm{sen}\,\pi x - \cos \pi x)}{e^x(\pi^2 + 1)} + C$

19. $\int y\,\mathrm{sen}\,\frac{y}{a}\,dy = -ay\cos\frac{y}{a} + a^2\mathrm{sen}\,\frac{y}{a} + C$

20. $\int x^2\mathrm{sen}\,nx\,dx = \frac{2\cos nx}{n^3} + \frac{2x\,\mathrm{sen}\,nx}{n^2} - \frac{x^2\cos nx}{n} + C$

21. $\int t\sqrt{t+1}\,dt = \frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}}\left[t - \frac{2}{5}(t+1)\right] + C$

22. $\int z\sec^2 3z\,dz = \frac{1}{3}\left[z\tan 3z + \frac{1}{3}\ln(\cos 3z)\right] + C$

23. $\int \mathrm{arcsec}\,x\,dx = x\,\mathrm{arcsec}\,x - \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + C$

24. $\int \mathrm{arcsen}\,y\,dy = y\,\mathrm{arcsen}\,y + \sqrt{1 - y^2} + C$

25. $\int \mathrm{arccot}\,x\,dx = x\,\mathrm{arccot}\,x + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$

26. $\int x\,\mathrm{arcsen}\,x^2\,dx = \frac{x^2}{2}\mathrm{arcsen}\,x^2 + \frac{\sqrt{1 - x^4}}{2} + C$

27. $\int \mathrm{sen}(\ln x)dx = \frac{x}{2}[\mathrm{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$

28. $\int \arccos 2\theta d\theta = \theta\arccos 2\theta - \frac{\sqrt{1 - 4\theta}}{2} + C$

29. $\int \sec^5 z\,dz = \frac{1}{4}\sec^3 z\tan z - \frac{3}{8}[\sec z\tan z + \ln(\sec z + \tan z)] + C$

30. $\int \mathrm{arccsc}\frac{z}{2}dz = z\,\mathrm{arccsc}\frac{z}{2} + 2\ln\left(z + \sqrt{x^2 - 4}\right) + C$

31. $\int \arctan\sqrt{y}\,dy = (y + 1)\arctan\sqrt{y} - \sqrt{y} + C$

32. $\int t^2\sqrt{1 - t}\,dt = -\frac{2}{105}(1 - t)^{\frac{3}{2}}(15t^2 + 12t + 8) + C$

33. $\int \mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,3x\,dx = \frac{1}{8}\mathrm{sen}\,3x\cos x - \frac{3}{8}\mathrm{sen}\,x\cos 3x + C$

34. $\int e^{ay}\cos 2y\,dy = \dfrac{e^{ay}(2\operatorname{sen}2y + a\cos 2x)}{a^2+4} + C$

35. $\int e^{2x}\operatorname{sen}bx\,dx = \dfrac{e^{2x}(2\operatorname{sen}bx - b\cos bx)}{4+b^2} + C$

36. $\int y^2\operatorname{arcsen}y\,dy = \dfrac{y^3}{3}\operatorname{arcsen}y + \dfrac{y^2+2}{9}\sqrt{1-y^2} + C$

II. Encuentra cada una de las siguientes integrales y comprueba los resultados por diferenciación y en plenaria discute tus resultados.

1. $\int \csc^3 x\,dx$
2. $\int e^{3\theta}\cos\dfrac{\theta}{3}\,d\theta$
3. $\int z\sec^2\dfrac{z}{2}\,dz$
4. $\int y\cos^2 2y\,dy$
5. $\int \arccos mx\,dx$
6. $\int \operatorname{arcsen}ax\,dx$
7. $\int (e^\theta + 2\theta)^2\,d\theta$
8. $\int \dfrac{x\arccos x\,dx}{\sqrt{1-x}}$
9. $\int x^3\log x\,dx$
10. $\int \operatorname{arcsen}ax\,dx$
11. $\int \arctan\dfrac{1}{x}\,dx$
12. $\int \operatorname{arcsen}\dfrac{1}{x}\,dx$
13. $\int \operatorname{arcsec}\dfrac{1}{x}\,dx$
14. $\int \dfrac{\arctan\sqrt{t}}{t^2}\,dt$
15. $\int x^3\operatorname{arccot}x\,dx$
16. $\int (a^x + x^2)^2\,dx$
17. $\int e^{-x}\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\,dx$
18. $\int \dfrac{\log x\,dx}{x}$
19. $\int e^{\frac{y}{3}}\operatorname{sen}\pi y\,dy$
20. $\int e^{-\frac{x}{2}}\cos 2x\,dx$
21. $\int e^{\frac{x}{4}}\cos\pi x\,dx$
22. $\int e^{-\frac{y}{5}}\operatorname{sen}\dfrac{\pi y}{5}\,dy$
23. $\int \arccos\sqrt{\dfrac{t}{2}}\,dt$
24. $\int \operatorname{arccsc}mx\,dx$
25. $\int \operatorname{arccot}\dfrac{x}{4}\,dx$
26. $\int \cos(\ln x)\,dx$
27. $\int (\log x)^2\,dx$
28. $\int e^{-x}\operatorname{sen}2x\,dx$
29. $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$
30. $\int \tan(\ln x)\,dx$
31. $\int (\operatorname{arcsec}x)^2\,dx$
32. $\int (\ln x)^2\,dx$
33. $\int e^{bx}\operatorname{sen}ax\,dx$
34. $\int x^2\ln x\,dx$
35. $\int \operatorname{arcverso}x\,dx$
36. $\int x\log x\,dx$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Solución de integrales indefinidas por el método de integración de funciones racionales por fracciones parciales

Integración de fracciones racionales

Una fracción racional se define como el cociente de dos funciones racionales enteras, es decir, dos polinomios en los que la variable no está afectada por exponentes negativos ni fraccionarios.

$$\text{Función racional}\left\{\quad R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}\begin{array}{l}\rightarrow \text{Polinomio (numerador)}\\ \rightarrow \text{Polinomio (denominador)}\end{array}\right.$$

Si el grado del numerador $P(x)$ es igual o mayor al del denominador $Q(x)$, tenemos una **fracción impropia** y si se divide el numerador entre el denominador se obtiene una **expresión mixta** (un polinomio y una fracción propia).

Ejemplo

$$\text{Fracción impropia o racional}\left\{\quad \frac{x^5-5x^3+7x^2-5}{x^3-8}=\underbrace{\overbrace{x^2-5}^{\text{Polinomio}}+\overbrace{\frac{15x^2-45}{x^3-8}}^{\text{Fracción propia}}}_{\text{Fracción mixta}}\right.$$

El último término es una **fracción reducida** (fracción propia) en la cual el grado del numerador $P(x)$ es menor que el grado del denominador $Q(x)$, por tanto, el problema de integrar una función racional se reduce a integrar una fracción reducida, pues integrar el otro término, que es un polinomio, puede hacerse de forma directa. Es decir:

$$\int\frac{x^5-5x^3+7x^2-5}{x^3-8}dx=\int(x^2-5)dx+\int\frac{15x^2-45}{x^3-8}dx$$

Para integrar una fracción racional, por lo general, es útil escribirla como la suma de **fracciones parciales**. Los denominadores de las fracciones parciales se obtienen factorizando el denominador $Q(x)$ como un producto de factores lineales y cuadráticos; lo anterior, es siempre posible si aplicamos el siguiente teorema algebraico: **todo polinomio con coeficientes reales puede ser expresado como un producto de factores lineales y cuadráticos cada uno de ellos con coeficientes reales**.

Podemos suponer, que si el denominador $Q(x)$ es un polinomio de grado n, entonces el coeficiente C_0 de x^n es 1 ya que si $Q(x) = C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n$, entonces si $C_0 \neq 1$ puede dividirse el numerador $P(x)$ y el denominador $Q(x)$ de la fracción racional entre el coeficiente C_0:

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)/C_0}{Q(x)/C_0}$$

Caso I

Todos los factores del denominador son de primer grado (lineales) y ninguno se repite. Este caso se trata de una descomposición en fracciones parciales de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a_1)}+\frac{B}{(x-a_2)}+\frac{C}{(x-a_3)}+\ldots+\frac{K}{(x-a_i)}+\ldots$$

Donde no debe haber dos a_i idénticas y también, donde $A, B, C, \ldots, K, \ldots$ son constantes que se van a determinar. Cabe mencionar que el número de constantes por determinar es igual al grado del denominador.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra $\int \frac{(4x-2)dx}{x^3-x^2-2x}$.

Solución

El denominador, puede ser factorizado de la siguiente forma:

$$\frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}=\frac{4x-2}{x(x^2-x-2)}=\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x+1)} \quad \mathbf{(1)}$$

La expresión (**1**) es una **identidad** para toda x (excepto $x=0, 2, -1$).
Al quitar los denominadores, se obtiene:

$$\begin{aligned}
4x-2&=A(x-2)(x+1)+B(x)(x+1)+C(x)(x-2)\\
4x-2&=A(x^2-x-2)+B(x^2+x)+C(x^2-2x)\\
4x-2&=Ax^2-Ax-2A+Bx^2+Bx+Cx^2-2Cx\\
4x-2&=(A+B+C)x^2+(B-A-2C)x-2A \qquad \mathbf{(2)}
\end{aligned}$$

La expresión (**2**) es una **identidad** que es cierta para todos los valores de x incluyendo 0, 2 y -1, es decir:

Si $x=0$ resulta:
$$\begin{aligned}
4(0)-2&=(A+B+C)(0)^2+(B-A-2C)(0)-2A\\
-2&=-2A\\
\therefore\quad A&=1
\end{aligned}$$

Si $x=2$ resulta:
$$\begin{aligned}
4(2)-2&=(A+B+C)(2)^2+(B-A-2C)(2)-2A\\
6&=4A+4B+4C+2B-2A-4C-2A\\
6&=6B\\
\therefore\quad B&=1
\end{aligned}$$

Si $x=-1$ resulta:
$$\begin{aligned}
4(-1)-2&=(A+B+C)(-1)^2+(B-A-2C)(-1)-2A\\
-6&=A+B+C-B+A+2C-2A\\
-6&=3C\\
\therefore\quad C&=-2
\end{aligned}$$

Existe otro método para determinar los valores de las constantes A, B y C, el cual, consiste en igualar los coeficientes de las mismas potencias de x en ambos miembros de la expresión (**2**) dando lugar a un sistema de tres ecuaciones.

Para obtener la primera ecuación se observa que el coeficiente de x^2 en el miembro de la derecha es $(A+B+C)$ y en el miembro de la izquierda no existe, por lo que se considera como coeficiente al cero.

$$A+B+C=0$$

Para obtener la segunda ecuación se observa que el coeficiente de x en el miembro de la derecha es $(B-A-2C)$ y en el miembro de la izquierda es 4.

$$B-A-2C=4$$

Para obtener la tercera ecuación se observa que en el miembro de la derecha sólo queda el elemento constante $-2A$ y el elemento constante en el miembro de la izquierda es -2.

$$-2A = -2$$

Al resolver el sistema de ecuaciones simultáneas resulta: $A = 1$, $B = 1$ y $C = -2$.
Sustituyendo estos valores en (**1**) se obtiene:

$$\frac{4x-2}{x^3-x^2-2x} = \frac{4x-2}{x(x^2-x-2)} = \frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{(x-2)} - \frac{2}{(x+1)}$$

Por lo tanto, la integral queda expresada como:

$$\int \frac{(4x-2)\,dx}{x^3-x^2-2x} = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{(x-2)} - 2\int \frac{dx}{(x+1)}$$

Al resolver directamente cada integral se tiene:

$$\int \frac{(4x-2)\,dx}{x^3-x^2-2x} = \ln x + \ln(x-2) - 2\ln(x+1) + C$$

Aplicando las leyes de los logaritmos se tiene:

$$\therefore \quad \int \frac{(4x-2)\,dx}{x^3-x^2-2x} = \ln \frac{x(x-2)}{(x+1)^2} + C = \ln \frac{x^2-2x}{(x+1)^2} + C$$

2 ••• Encuentra $\int \frac{(7x^2-9x-1)\,dx}{x^3-2x^2-x+2}$.

Solución

Para factorizar el denominador $x^3 - 2x^2 - x + 2$ deben econtrarse sus raíces.

Con base en el teorema algebraico se determina que una de las raíces es 2, por lo que uno de los factores es $(x - 2)$, entonces para obtener los otros factores se tiene:

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 1 \\ \hline x-2 & x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ & \underline{-x^3 + 2x^2 \qquad\quad} \\ & -x + 2 \\ & \underline{+x - 2} \\ & 0 \end{array}$$

Es decir, $(x - 2)(x^2 - 1) = (x - 2)(x - 1)(x + 1)$ que es la factorización buscada. Por lo tanto, resulta:

$$\frac{7x^2-9x-1}{x^3-2x^2-x+2} = \frac{7x^2-9x-1}{(x-2)(x-1)(x+1)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x+1)} \qquad (\mathbf{1})$$

La expresión (**1**) es una **identidad** para toda x (excepto $x = 1, 2, -1$).

Al quitar los denominadores se obtiene:

$$7x^2-9x-1 = A(x-1)(x+1) + B(x-2)(x+1) + C(x-2)(x-1)$$
$$7x^2-9x-1 = A(x^2-1) + B(x^2-x-2) + C(x^2-3x+2)$$
$$7x^2-9x-1 = (A+B+C)x^2 + (-B-3C)x - A - 2B + 2C \qquad (\mathbf{2})$$

La expresión (2) es una **identidad** que es cierta para todos los valores de x incluyendo 1, 2 y –1, es decir:

Si $x - 1$ resulta:

$$7(1)^2 - 9(1) - 1 = (A + B + C)(1)^2 + (-B - 3C)(1) - A - 2B + 2C$$
$$-3 = A + B + C - B - 3C - A - 2B + 2C$$
$$-3 = -2B$$
$$\therefore \quad B = \frac{3}{2}$$

Si $x = 2$ resulta:

$$7(2)^2 - 9(2) - 1 = (A + B + C)(2)^2 + (-B - 3C)(2) - A - 2B + 2C$$
$$9 = 4A + 4B + 4C - 2B - 6C - A - 2B + 2C$$
$$9 = 3A$$
$$\therefore \quad A = 3$$

Si $x = -1$ resulta:

$$7(-1)^2 - 9(-1) - 1 = (A + B + C)(-1)^2 + (-B - 3C)(-1) - A - 2B + 2C$$
$$15 = A + B + C - B - 3C - A - 2B + 2C$$
$$15 = 6C$$
$$\therefore \quad C = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

Utilizando otro método para determinar los valores de las constantes, se tiene que las tres ecuaciones simultáneas resultantes son: $A + B + C = 7$, $-B - 3C = -9$, $-A - 2B + 2C = -1$.

Al resolver el sistema de ecuaciones simultáneas se tiene que $A = 3$, $B = \frac{3}{2}$ y $C = \frac{5}{2}$.

Sustituyendo estos valores en expresión (1), se obtiene:

$$\frac{7x^2 - 9x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{7x^2 - 9x - 1}{(x-2)(x-1)(x+1)} = \frac{3}{(x-2)} + \frac{\frac{3}{2}}{(x-1)} + \frac{\frac{5}{2}}{(x+1)}$$

Por lo tanto, la integral queda expresada como:

$$\int \frac{(7x^2 - 9x - 1)\,dx}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = 3\int \frac{dx}{(x-2)} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{(x-1)} + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x+1)}$$

Al resolver directamente cada integral resulta:

$$\int \frac{(7x^2 - 9x - 1)\,dx}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = 3\ln(x-2) + \frac{3}{2}\ln(x-1) + \frac{5}{2}\ln(x+1) + C$$

Aplicando las leyes de los logaritmos resulta:

$$\therefore \quad \int \frac{(7x^2 - 9x - 1)\,dx}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \ln\left[(x-2)^3(x-1)^{\frac{3}{2}}(x+1)^{\frac{5}{2}}\right] + C$$

Caso II

Todos los factores del denominador son de primer grado (lineales) y algunos se repiten.

En este caso el factor $(x - a_1)$ que se repite n veces, corresponde la suma de n fracciones parciales de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a_1)^n} + \frac{B}{(x-a_1)^{n-1}} + \frac{C}{(x-a_1)^{n-2}} + \ldots + \frac{K}{(x-a_1)}$$

EJEMPLOS

1 Encuentra $\int \frac{(3x^2+5x)\,dx}{(x-1)(x+1)^2}$.

Solución

Factorizando el denominador, tenemos:

$$\frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)} \qquad \textbf{(1)}$$

La expresión **(1)** es una **identidad** para toda x (excepto $x = -1, 1$).

Al quitar los denominadores se obtiene:

$$3x^2+5x = A(x+1)^2 + B(x-1) + C(x-1)(x+1)$$
$$3x^2+5x = A(x^2+2x+1) + Bx - B + C(x^2-1)$$
$$3x^2+5x = Ax^2 + 2Ax + A + Bx - B + Cx^2 - C$$
$$3x^2+5x = (A+C)x^2 + (2A+B)x + A - B - C$$

Para determinar los valores de las constantes, se plantean las siguientes tres ecuaciones simultáneas: $A + C = 3$, $2A + B = 5$ y $A - B - C = 0$.

Al resolver el sistema de ecuaciones simultáneas resulta que $A = 2$, $B = 1$ y $C = 1$.

Sustituyendo estos valores en **(1)** se obtiene:

$$\frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{2}{(x-1)} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)}$$

Por lo tanto, la integral queda expresada como:

$$\int \frac{(3x^2+5x)\,dx}{(x-1)(x+1)^2} = 2\int \frac{dx}{(x-1)} + \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \int \frac{dx}{(x+1)}$$

Al resolver directamente cada integral se tiene:

$$\int \frac{(3x^2+5x)\,dx}{(x-1)(x+1)^2} = 2\ln(x-1) - \frac{1}{(x+1)} + \ln(x+1) + C$$

Aplicando las leyes de los logaritmos resulta:

$$\therefore \quad \int \frac{(3x^2+5x)\,dx}{(x-1)(x+1)^2} = \ln(x-1)^2(x+1) = \frac{1}{(x+1)} + C$$

2 Encuentra $\int \frac{(t^3-1)\,dt}{t^2(t-2)^3}$.

Solución

Al factorizar el denominador, tenemos:

$$\frac{(t^3-1)}{t^2(t-2)^3}=\frac{A}{t^2}+\frac{B}{t}+\frac{C}{(t-2)^3}+\frac{D}{(t-2)^2}+\frac{E}{(t-2)} \quad \textbf{(1)}$$

La expresión **(1)** es una **identidad** para toda t (excepto $t = 0, 2$).

Al quitar los denominadores se obtiene:

$$t^3-1=A(t-2)^3+B(t)(t-2)^3+C(t^2)+D(t^2)(t-2)+E(t^2)(t-2)^2$$
$$t^3-1=A(t^3-6t^2+12t-8)+B(t^4-6t^3-12t^2-8t)+Ct^2+D(t^3-2t^2)+E(t^4-4t^3+4t^2)$$
$$t^3-1=At^3-6At^2+12At-8A+Bt^4-6Bt^3+12Bt^2-8Bt+Ct^2+Dt^3-2Dt^2+Et^4-4Et^3+4Et^2$$
$$t^3-1=(B+E)t^4+(A-6B+D-4E)t^3+(-6A+12B+C-2D+4E)t^2+(12A-8B)t-8A$$

Para determinar los valores de las constantes se plantean las siguientes cinco ecuaciones simultáneas: $B+E=0$, $A-6B+D-4E=1$, $-6A+12B+C-2D+4E=0$, $12A-8B=0$ y $-8A=-1$.

Al resolver el sistema de ecuaciones simultáneas resulta:

$$A=\frac{1}{8},\ B=\frac{3}{16},\ C=\frac{7}{4},\ D=\frac{5}{4} \text{ y } E=-\frac{3}{16}.$$

Sustituyendo estos valores en **(1)** se obtiene:

$$\frac{t^3-1}{t^2(t-2)^3}=\frac{\frac{1}{8}}{t^2}+\frac{\frac{3}{16}}{t}+\frac{\frac{7}{4}}{(t-2)^3}+\frac{\frac{5}{4}}{(t-2)^2}-\frac{\frac{3}{16}}{(t-2)}$$

Por lo tanto, la integral queda expresada como:

$$\int\frac{(t^3-1)dt}{t^2(t-2)^3}=\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t^2}+\frac{3}{16}\int\frac{dt}{t}+\frac{7}{4}\int\frac{dt}{(t-2)}+\frac{5}{4}\int\frac{dt}{(t-2)^2}-\frac{3}{16}\int\frac{dt}{(t-2)}$$

Al resolver directamente cada integral resulta:

$$\int\frac{(t^3-1)dt}{t^2(t-2)^3}=-\frac{1}{8t}+\frac{3}{16}\ln t-\frac{7}{8(t-2)^2}-\frac{5}{4(t-2)}-\frac{3}{16}\ln(t-2)+C$$
$$\int\frac{(t^3-1)dt}{t^2(t-2)^3}=-\frac{1}{8t}-\frac{7}{8(t-2)^2}-\frac{5}{4(t-2)}+\frac{3}{16}\left[\ln t-\frac{3}{16}\ln(t-2)\right]+C$$

Simplificando las fracciones y aplicando las leyes de los logaritmos resulta que:

$$\therefore\quad \int\frac{(t^3-1)dt}{t^2(t-2)^3}=\frac{-11t^2+17t-4}{8t(t-2)^2}+\frac{3}{16}\ln\left(\frac{t}{t-2}\right)+C$$

Caso III

Los factores del denominador son lineales y cuadráticos (primer y segundo grados) y ninguno de los factores cuadráticos se repite.

En este caso, a todo factor cuadrático de la forma $x^2 + px + q$ le corresponde una fracción parcial de la forma:

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

El método para integrar expresiones de esta forma, es aquel en el cual la integral se reduce a inmediata por sustitución algebraica (primer y segundo métodos).

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra $\int \frac{dz}{8+z^3}$.

Solución

Al factorizar el denominador tenemos:

$$\frac{1}{8+z^3}=\frac{1}{(2+z)(4-2z+z^2)}=\frac{A}{(2+z)}+\frac{Bz+C}{(4-2z+z^2)} \quad \textbf{(1)}$$

Al quitar los denominadores se obtiene:

$$1=A(4-2z+z^2)+(Bz+C)(2+z)$$
$$1=4A-2Az+Az^2+2Bz+Bz^2+2C+Cz$$
$$1=(A+B)z^2+(2B-2A+C)z+4A+2C$$

Para determinar los valores de las constantes, se plantean las siguientes tres ecuaciones simultáneas: $A+B=0$, $2B-2A+C=0$ y $4A+2C=1$.

Del sistema de ecuaciones simultáneas resulta que $A=\frac{1}{12}$, $B=-\frac{1}{12}$ y $C=\frac{1}{3}$.

Sustituyendo estos valores en **(1)** se obtiene:

$$\frac{1}{8+z^3}=\frac{1}{(2+z)(4-2z+z^2)}=\frac{\frac{1}{12}}{(2+z)}+\frac{\left(-\frac{1}{12}\right)z+\frac{1}{3}}{(4-2z+z^2)}$$

Por lo tanto, la integral queda expresada como:

$$\int\frac{1dz}{8+z^3}=\underbrace{\frac{1}{12}\int\frac{dz}{(2+z)}}_{1}+\underbrace{\int\frac{\left[\left(-\frac{1}{12}\right)z+\frac{1}{3}\right]dz}{(4-2z+z^2)}}_{2}$$

Al resolver directamente la integral 1 resulta: $\frac{1}{12}\int\frac{dz}{(2+z)}=\frac{1}{12}\ln(2+z)+C$

Para la integral 2 se tiene:

$$\int \frac{\left[\left(-\frac{1}{12}\right)z+\frac{1}{3}\right]dz}{(4-2z+z^2)} = \underbrace{-\frac{1}{12}\int \frac{z\,dz}{(4-2z+z^2)}}_{2a} + \underbrace{\frac{1}{3}\int \frac{dz}{(4-2z+z^3)}}_{2b}$$

De la integral $2a$ se tiene:

$$v = 4-2z+z^2$$
$$dv = (-2+2z)\,dz$$
$$dv = 2(z-1)\,dz$$

En el numerador de la integral se debe tener $(z-1)\,dz$ para completar la diferencial de la variable, es decir:

$$-\frac{1}{12}\int \frac{z\,dz}{(4-2z+z^2)} = -\frac{1}{12}\int \frac{(z-1+1)\,dz}{(4-2z+z^2)} = \underbrace{-\frac{1}{12}\int \frac{(z-1)\,dz}{(4-2z+z^2)}}_{\text{I}} \underbrace{-\frac{1}{12}\int \frac{dz}{(4-2z+z^2)}}_{\text{II}}$$

De la integral I, se sabe que $dv = 2\,(z-1)\,dz$, por lo que aplicando directamente la fórmula **5** se tiene:

$$-\frac{1}{12}\int \frac{z-1dz}{(4-2z+z^2)} = \left(-\frac{1}{12}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\ln(4-2z+z^2)+C = -\frac{1}{24}\ln(4-2z+z^2)+C$$

Como las integrales $2b$ y II son iguales resulta:

$$\frac{1}{3}\int \frac{dz}{(4-2z+z^2)} - \frac{1}{12}\int \frac{dz}{(4-2z+z^2)} = \frac{1}{4}\int \frac{dz}{(4-2z+z^2)}$$

En esta última integral se identifica que al ordenar la expresión $4-2z+z^2$ en z^2-2z+4 tiene la forma az^2+bz+c. Completando el cuadrado en z^2-2z+4, se tiene:

$$z^2-2z+4 = \underbrace{z^2-2z+1}_{\text{TCP}}+3$$
$$z^2-2z+4 = (z-1)^2+3$$

Por lo anterior, resulta que: $\displaystyle \frac{1}{4}\int \frac{dz}{(4-2z+z^2)} = \frac{1}{4}\int \frac{dz}{(z-1)^2+3}$

Aplicando directamente la fórmula **18** resulta:

$$\frac{1}{4}\int \frac{dz}{(z-1)^2+3} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{(z-1)}{\sqrt{3}}\right]+C = \frac{\sqrt{3}}{12}\arctan\frac{(z-1)}{\sqrt{3}}+C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene:

$$\int \frac{dz}{8+z^3} = \frac{1}{12}\ln(2+z) - \frac{1}{24}\ln(4-2z+z^2) + \frac{\sqrt{3}}{12}\arctan\frac{(z-1)}{\sqrt{3}}+C$$

Aplicando las leyes de los logaritmos resulta que:

$$\therefore \quad \int \frac{dz}{8+z^3} = \frac{1}{24}\ln\frac{(2+z)^2}{(4-2z+z^2)} + \frac{\sqrt{3}}{12}\arctan\frac{(z-1)}{\sqrt{3}}+C$$

2 ••• Encuentra $\int \frac{(4x-2)\,dx}{x^3-x^2+2x}$.

Solución

Al factorizar el denominador, tenemos:

$$\frac{4x-2}{x^3-x^2+2x}=\frac{4x-2}{x(x^2-x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2-x+2)} \quad \mathbf{(1)}$$

Al quitar los denominadores se obtiene:

$$4x-2=A(x^2-x+2)+(Bx+C)x$$
$$4x-2=Ax^2-Ax+2A+Bx^2+Cx$$
$$4x-2=(A+B)x^2+(C-A)x+2A$$

Para determinar los valores de las constantes se plantean las siguientes tres ecuaciones simultáneas: $A+B=0$, $C-A=4$ y $2A=2$.

Al resolver el sistema de ecuaciones simultáneas resulta que $A=1$, $B=-1$ y $C=5$.

Sustituyendo estos valores en (1) se obtiene que:

$$\frac{4x-2}{x^3-x^2+2x}=\frac{4x-2}{x(x^2-x+2)}=\frac{1}{x}+\frac{-x+5}{(x^2-x+2)}$$

Por lo tanto, la integral queda expresada como:

$$\int\frac{(4x-2)dx}{(x^3-x^2+2x)}=\underbrace{\int\frac{dx}{x}}_{1}+\underbrace{\int\frac{(-x+5)dx}{(x^2-x+2)}}_{2}$$

Resolviendo directamente la integral 1, resulta: $\int\frac{dx}{x}=\ln x+C$

Para la integral 2 se tiene: $\int\frac{(-x+5)dx}{(x^2-x+2)}=\underbrace{-\int\frac{x\,dx}{(x^2-x+2)}}_{2a}+\underbrace{5\int\frac{dx}{(x^2-x+2)}}_{2b}$

De la integral 2*a* se tiene:

$$dv=x^2-x+2$$
$$dv=(2x-1)\,dx$$
$$dv=2\left(x-\frac{1}{2}\right)dx$$

En el numerador de la integral se debe tener $\left(x-\frac{1}{2}\right)dx$ para completar la diferencial de la variable, es decir:

$$-\int\frac{xdx}{(x^2-x+2)}=-\int\frac{\left(x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)dx}{(x^2-x+2)}=\underbrace{-\int\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)dx}{(x^2-x+2)}}_{\mathrm{I}}-\underbrace{\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x^2-x+2)}}_{\mathrm{II}}$$

De la integral I se sabe que $dv = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)dx$, por lo que aplicando directamente la fórmula **5** se tiene que:

$$5\int \frac{dx}{(x^2 - x + 2)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2 - x + 2)} = \frac{9}{2}\int \frac{dx}{(x^2 - x + 2)}$$

Como las integrales 2*b* y II son iguales resulta:

$$5\int \frac{dx}{(x^2 - x + 2)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2 - x + 2)} = \frac{9}{2}\int \frac{dx}{(x^2 - x + 2)}$$

En esta última integral se identifica que la expresión $x^2 - x + 2$ es de la forma $ax^2 + bx + c$. Completando el cuadrado en $x^2 - x + 2$ se tiene:

$$x^2 - x + 2 = \underbrace{x^2 - x + \frac{1}{4}}_{\text{TCP}} + \frac{7}{4}$$

$$x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

Por lo anterior, resulta: $\frac{9}{2}\int \frac{dx}{(x^2 - x + 2)} = \frac{9}{2}\int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}$

Aplicando directamente la fórmula **18**, resulta:

$$\frac{9}{2}\int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} = \frac{9}{2}\left[\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\arctan\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right] + C = \frac{9\sqrt{7}}{49}\arctan\frac{(2x-1)}{\sqrt{7}} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene:

$$\int \frac{(4x-2)\,dx}{x^3 - x^2 + 2x} = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2 - x + 2) + \frac{9\sqrt{7}}{49}\arctan\frac{(2x-1)}{\sqrt{7}} + C$$

Aplicando las leyes de los logaritmos resulta que:

$$\therefore \quad \int \frac{(4x-2)\,dx}{x^3 - x^2 + 2x} = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - x + 2}}\right) + \frac{9\sqrt{7}}{49}\arctan\frac{(2x-1)}{\sqrt{7}} + C$$

Caso IV

Los factores del denominador son lineales y cuadráticos (primer y segundo grados) y algunos de los factores cuadráticos se repiten.

En este caso, a todo factor cuadrático de la forma $x^2 + px + q$ que se repite n veces le corresponde la suma de n fracciones parciales de la forma:

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{Cx + D}{(x + px + q)^{n-1}} + \ldots + \frac{Kx + L}{x^2 + px + q}$$

El método para integrar expresiones de esta forma es aquel, en el cual, la integral se reduce a inmediata por sustitución trigonométrica. También, se recomienda el uso de la siguiente **fórmula de reducción directa**.

$$\int \frac{du}{(u^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{u}{(u^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{du}{(u^2+a^2)^{n-1}}\right]$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra $\int \frac{(x^3+3x+1)\,dx}{(x^2+1)^2}$.

Solución

Al factorizar el denominador, tenemos:

$$\frac{(x^3+3x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)} \qquad (1)$$

Al quitar los denominadores se obtiene:

$$x^3+3x+1 = Ax+B+(Cx+D)(x^2+1)$$
$$x^3+3x+1 = Ax+B+Cx^3+Cx+Dx^2+D$$
$$x^3+3x+1 = Cx^3+Dx^2+(A+C)x+B+D$$

Para determinar los valores de las constantes se plantean las siguientes cuatro ecuaciones simultáneas: $C=1, D=0, A+C=3$ y $B+D=1$.

Del sistema de ecuaciones simultáneas resulta que $A=2$, $B=1$, $C=1$ y $D=0$.

Sustituyendo estos valores en (1) se obtiene:

$$\frac{x^3+3x+1}{(x^2+1)^2} = \frac{2x+1}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{(x^2+1)}$$

Por lo tanto, la integral queda expresada como:

$$\int \frac{(x^3+3x+1)dx}{(x^2+1)^2} = \underbrace{\int \frac{(2x+1)dx}{(x^2+1)^2}}_{1} + \underbrace{\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)}}_{2}$$

De la integral 1 se tiene:

$$\int \frac{(2x+1)dx}{(x^2+1)^2} = \underbrace{\int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}}_{1a} + \underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}}_{1b}$$

Al resolver directamente la integral $1a$, resulta: $\int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{(x^2+1)} + C$

De la integral $1b$ se tiene que:

$$u^2 = x^2 \qquad a^2 = 1$$
$$u = x \qquad a = 1$$
$$du = dx$$

Es decir: $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{du}{(u^2+a^2)^2}$ $\Big\}$ Aplicando el método de sustitución trigonométrica

Como se tiene $(u^2 + a^2)^n$, el cambio de variable es: $u = a \tan z$, de donde $u^2 = a^2 \tan^2 z$ y también $du = a \sec^2 z\, dz$.

Efectuando la sustitución en la integral, tenemos que:

$$\int \frac{du}{(u^2+a^2)^2} = \int \frac{a\sec^2 dz}{(a^2\tan^2 z + a^2)^2} = \int \frac{a\sec^2 z\, dz}{\left[a^2(\tan^2 z + 1)^2\right]} = \int \frac{a\sec^2 z\, dz}{(a^2 \sec^2 z)^2}$$

$$= \int \frac{a\sec^2 z\, dz}{a^4 \sec^4 z} = \frac{1}{a^3} = \int \frac{dz}{\sec^2 z} = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 z\, dz$$

En esta integral resultante se aplica el método de integración por partes, es decir:

$$\frac{1}{a^3}\int \cos^2 z\, dz = \frac{1}{a^3}\int \cos z \cos z\, dz$$

Donde se identifica que: $u = \cos z$ y $dv = \cos z\, dz$

$$du = -\operatorname{sen} z\, dz \qquad \int dv = \int \cos z\, dz$$

$$v = \operatorname{sen} z$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes se tiene:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\frac{1}{a^3}\int \cos^2 z dz = \frac{1}{a^3}\int \cos z \cos z dz = \frac{1}{a^3}\left[\cos z \operatorname{sen} z - \int \operatorname{sen} z(-\operatorname{sen} z\, dz)\right]$$

$$= \frac{1}{a^3}\cos z \operatorname{sen} z + \frac{1}{a^3}\int \operatorname{sen}^2 z dz$$

Si en la expresión $\frac{1}{a^3}\int \operatorname{sen}^2 z\, dz$ se sustituye $\operatorname{sen}^2 z$ por la identidad $\operatorname{sen}^2 z = 1 - \cos^2 z$ resulta:

$$\frac{1}{a^3}\int \cos^2 z\, dz = \frac{1}{a^3}\cos z \operatorname{sen} z + \frac{1}{a^3}\int (1 - \cos^2 z)\, dz$$

$$\frac{1}{a^3}\int \cos^2 z\, dz = \frac{1}{a^3}\cos z \operatorname{sen} z + \frac{1}{a^3}\int dz - \frac{1}{a^3}\int \cos^2 z\, dz$$

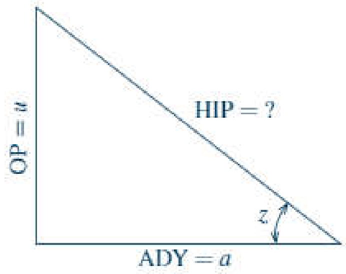
$$\frac{1}{a^3}\int \cos^2 z\, dz + \frac{1}{a^3}\int \cos^2 z\, dz = \frac{1}{a^3}\cos z \operatorname{sen} z + \frac{z}{a^3} + C$$

$$\frac{2}{a^3}\int \cos^2 z\, dz = \frac{1}{a^3}(\cos z \operatorname{sen} z + z) + C$$

$$\int \cos^2 z\, dz = \frac{\frac{1}{a^3}(\cos z \operatorname{sen} z + z)}{\frac{2}{a^3}} + C = \frac{1}{2}(\cos z \operatorname{sen} z + z) + C \quad \Big\} \text{ Resultado parcial de la integral } 1b.$$

Del cambio de variable $u = a \tan z$, tenemos que $\tan z = \frac{u}{a} = \frac{\text{OP}}{\text{ADY}}$ y $z = \arctan \frac{u}{a}$.

Al trazar un triángulo rectángulo y aplicar el **teorema de Pitágoras** resulta:



$$(\text{HIP})^2 = (\text{OP})^2 + (\text{ADY})^2$$
$$\text{HIP} = \sqrt{u^2 + a^2}$$

$$\therefore \quad \operatorname{sen} z = \frac{u}{\sqrt{u^2+a^2}} \qquad \cos z = \frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}}$$

Sustituyendo en el resultado parcial se tiene:

$$\frac{1}{2}(\cos z \operatorname{sen} z + z) + C = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}}\right)\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+a^2}}\right) + \arctan\frac{u}{a}\right] + C$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{au}{u^2+a^2}\right) + \frac{1}{2}\arctan\frac{u}{a} + C$$

Sustituyendo los valores originales $x = 4$ y $a = 1$ resulta:

$$\frac{1}{a^3}\int \cos^2 dz = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) + \frac{1}{2}\arctan x + C \quad \Big\} \text{ Resultado final de la integral } 1b.$$

También, la integral $1b$ puede resolverse usando la **fórmula de reducción directa**, es decir:

$$u^2 = x^2 \qquad a^2 = 1 \qquad n = 2$$
$$u = x \qquad a = 1$$
$$du = dx$$

Se tiene que:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{du}{(u^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{u}{(u^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{du}{(u^2+a^2)^{n-1}}\right]$$
$$= \frac{1}{2(2-1)(1)}\left[\frac{x}{(x^2+1)^{2-1}} + [2(2)-3]\int \frac{dx}{(x^2+1)^{2-1}}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2+1)}$$

En esta última integral se aplica directamente la fórmula **18** lo que resulta:

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2+1)} = \frac{1}{2}\arctan x + C$$

Por lo tanto, se demuestra que se obtiene el mismo resultado para $1b$, es decir:

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) + \frac{1}{2}\arctan x + C$$

Para la integral 2 se aplica directamente la fórmula **5**, resultando:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene que:

$$\int \frac{(x^3+3x+1)\,dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{(x^2+1)} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) + \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

$$\therefore \quad \int \frac{(x^3+3x+1)\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x-2}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

2 Encuentra $\int \frac{(y-2)\,dy}{y(y^2-4y+5)^2}$.

Solución

Al factorizar el denominador, tenemos:

$$\frac{(y-2)\,dy}{y(y^2-4y+5)^2} = \frac{A}{y} + \frac{By+C}{(y^2-4y+5)^2} + \frac{Dy+E}{y^2-4y+5} \qquad (1)$$

Al quitar los denominadores, tenemos:

$$y-2 = A(y^2-4y+5)^2 + (By+C)y + (Dy+E)(y)(y^2-4y+5)$$
$$y-2 = A(y^4+16y^2+25-8y^3+10y^2-40y) + By^2 + Cy + (Dy+E)(y-4y^2+5y)$$
$$y-2 = Ay^4+16Ay^2+25A-8Ay^3+10Ay^2-40Ay+By^2+Cy+Dy^4-4Dy^3+5Dy^2+Ey^3-4Ey^2+5Ey$$
$$y-2 = (A+D)y^4 + (-8A-4D+E)y^3 + (26A+B+5D-4E)y^2 + (-40A+C+5E)y + 25A$$

Para determinar los valores de las constantes se plantean las siguientes cinco ecuaciones simultáneas: $A+D=0$, $-8A-4D+E=0$, $26A+B+5D-4E=0$, $-40A+C+5E=1$ y $25A=2$.

Al resolver el sistema de ecuaciones simultáneas se obtiene:

$$A = -\frac{2}{25},\ B = \frac{2}{5},\ C = -\frac{3}{5},\ D = \frac{2}{25} \text{ y } E = -\frac{8}{25}$$

Sustituyendo estos valores en (1), obtenemos que:

$$\frac{(y-2)}{y(y^2-4y+5)^2} = \frac{-\frac{2}{25}}{y} + \frac{\left(\frac{2}{5}\right)y - \frac{3}{5}}{(y^2-4y+5)^2} + \frac{\left(\frac{2}{25}\right)y - \frac{8}{25}}{(y^2-4y+5)}$$

Por lo tanto, la integral queda expresada como:

$$\int \frac{(y-2)dy}{y(y^2-4y+5)^2} = -\frac{2}{25}\int\frac{dy}{y} + \int\frac{\left[\left(\frac{2}{5}\right)y - \frac{3}{5}\right]dy}{(y^2-4y+5)^2} + \int\frac{\left[\left(\frac{2}{25}\right)y - \frac{8}{25}\right]dy}{(y^2-4y+5)}$$

$$\int \frac{(y-2)dy}{y(y^2-4y+5)^2} = \underbrace{-\frac{2}{25}\int\frac{dy}{y}}_{1} + \underbrace{\frac{2}{5}\int\frac{y\,dy}{(y^2-4y+5)^2}}_{2} - \underbrace{\frac{3}{5}\int\frac{dy}{(y^2-4y+5)^2}}_{3}$$

$$+\underbrace{\frac{2}{25}\int\frac{y\,dy}{(y^2-4y+5)}}_{4} - \underbrace{\frac{8}{25}\int\frac{dy}{(y^2-4y+5)}}_{5}$$

Al resolver directamente la integral 1 resulta: $-\frac{2}{25}\int\frac{dy}{y}=-\frac{2}{25}\ln y+C$

De la integral 2, tenemos: $\frac{2}{5}\int\frac{y\,dy}{(y^2-4y+5)^2}=\frac{2}{5}\int(y^2-4y+5)^{-2}y\,dy$

Ahora se identifica:

$$v=y^2-4y+5 \qquad n=-2$$
$$dv=(2y-4)\,dy$$
$$dv=2(y-2)\,dy$$

En la integral se debe tener $(y-2)\,dy$ para completar la diferencial de la variable, es decir:

$$\frac{2}{5}\int(y^2-4y+5)^{-2}y\,dy=\frac{2}{5}\int(y^2-4y+5)^{-2}(y-2+2)dy$$
$$=\underbrace{\frac{2}{5}\int(y^2-4y+5)^{-2}(y-2)dy}_{2a}+\underbrace{\frac{4}{5}\int(y^2-4y+5)^{-2}dy}_{2b}$$

Aplicando directamente la fórmula **4** en la integral $2a$, resulta:

$$\frac{2}{5}\int(y-4y+5)(y-2)dy=\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{(y^2-4y+5)^{-2+1}}{-2+1}\right]+C=-\frac{1}{5(y^2-4y+5)}+C$$

Las integrales $2b$ y 3 son semejantes, es decir:

$$\frac{4}{5}\int\frac{dy}{(y^2-4y+5)^2}-\frac{3}{5}\int\frac{dy}{(y^2-4y+5)^2}=\frac{1}{5}\int\frac{dy}{(y^2-4y+5)^2}$$

En la integral resultante se identifica que la expresión y^2-4y+5 es de la forma ay^2+by+c. Completando el cuadrado en $y-4y+5$ se tiene:

$$y^2-4y+5=\underbrace{y^2-4+4}_{\text{TCP}}+1, \text{ es decir:}$$
$$y^2-4y+5=(y-2)^2+1$$

Por lo anterior, resulta: $\frac{1}{5}\int\frac{du}{(y^2-4y+5)^2}=\frac{1}{5}\int\frac{dy}{[(y-2)^2+1]^2}$

Aplicando la fórmula de **reducción directa** se tiene:

$$\text{Si } u^2=(y-2)^2 \qquad a^2=1 \qquad n=2$$
$$u=(y-2) \qquad a=1$$
$$du=dy$$

Es decir:

$$\frac{1}{5}\int\frac{dy}{[(y-2)^2+1]^2}=\frac{1}{5}\int\frac{du}{(u^2+a^2)^n}=\frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{u}{(u^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)\int\frac{du}{(u^2+a^2)^{n-1}}\right]$$

$$\frac{1}{5}\int\frac{dy}{[(y-2)^2+1]^2}=\left(\frac{1}{5}\right)\frac{1}{2(2-1)(1)}\left[\frac{(y-2)}{[(y-2)^2+1]^{2-1}}+[2(2)-3]\int\frac{dy}{[(y-2)^2+1]^{2-1}}\right]$$

$$\frac{1}{5}\int\frac{dy}{[(y-2)^2+1]^2}=\frac{(y-2)}{10[(y-2)^2+1]}+\frac{1}{10}\int\frac{dy}{(y-2)^2+1}$$

En esta última integral se aplica directamente la fórmula **18**, lo que resulta:

$$\frac{1}{10}\int\frac{dy}{(y-2)^2+1}=\frac{1}{10}\arctan(y-2)+C$$

Es decir: $$\frac{1}{5}\int\frac{dy}{[(y-2)^2+1]^2}=\frac{(y-2)}{10[(y-2)^2+1]}+\frac{1}{10}\arctan(y-2)+C$$

En la integral 4 se identifica:

$$v=y^2-4y+5$$
$$dv=(2y-4)\,dy$$
$$dv=2(y-2)\,dy$$

En la integral se debe tener $(y-2)\,dy$ para completar la diferencial de la variable, es decir:

$$\frac{2}{25}\int\frac{y\,dy}{(y^2-4y+5)}=\frac{2}{25}\int\frac{(y-2+2)\,dy}{(y^2-4y+5)}=\underbrace{\frac{2}{25}\int\frac{(y-2)\,dy}{(y^2-4y+5)}}_{4a}+\underbrace{\frac{4}{25}\int\frac{dy}{(y^2-4y+5)}}_{4b}$$

Aplicamos directamente la fórmula **5** en la integral 4*a*, resulta:

$$\frac{2}{25}\int\frac{(y-2)\,dy}{(y^2-4y+5)}=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{25}\right)\ln(y-4y+5)+C=\frac{1}{25}\ln(y^2-4y+5)+C$$

Como las integrales 4*b* y 5 son semejantes, es decir:

$$\frac{4}{25}\int\frac{dy}{(y^2-4y+5)}-\frac{8}{25}\int\frac{dy}{(y^2-4y+5)}=-\frac{4}{25}\int\frac{dy}{(y^2-4y+5)}$$

En la integral resultante se identifica que la expresión y^2-4y+5 es de la forma ay^2+by+c. Completando el cuadrado en y^2-4y+5 se tiene:

$$y^2-4y+5=\underbrace{y^2-4y+4}_{\text{TCP}}+1,\ \text{es decir:}$$
$$y^2-4y+5=(y-2)^2+1$$

Por lo anterior, resulta que: $$-\frac{4}{25}\int\frac{dy}{(y^2-4y+5)}=-\frac{4}{25}\int\frac{dy}{(y-2)^2+1}$$

Aplicando la fórmula **18** se tiene: $$-\frac{4}{25}\int\frac{dy}{(y-2)^2+1}=-\frac{4}{25}\arctan(y-2)+C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene que:

$$\int \frac{(y-2)\,dy}{y(y^2-4y+5)^2} = -\frac{2}{25}\ln y - \frac{1}{5(y^2-4y+5)} + \frac{(y-2)}{10[(y-2)^2+1]} + \frac{1}{10}\arctan(y-2)$$

$$+\frac{1}{25}\ln(y^2-4y+5) - \frac{4}{25}\arctan(y-2) + C$$

$$\therefore\ \int \frac{(y-2)\,dy}{y(y^2-4y+5)^2} = \frac{1}{25}\ln\left(\frac{y^2-4y+5}{y^2}\right) - \frac{3}{50}\arctan(y-2) + \frac{(y-4)}{10(y^2-4y+5)} + C$$

Al analizar el método de integración de funciones racionales se concluye que: **la integral de toda función racional cuyo denominador es posible descomponer en factores reales de primer y segundo grados puede expresarse en términos de funciones algebraicas, logarítmicas y trigonométricas inversas, es decir, en términos de las funciones elementales.**

EJERCICIO 12

I. Comprueba las siguientes integrales indefinidas, aplicando el método de integración de funciones racionales por fracciones parciales (caso I).

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. $\int \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{x-3}{x+3}+C\right)$

2. $\int \frac{(6t^2-2t-1)\,dt}{4t^3-t} = \frac{1}{4}\ln\left[\frac{t^4(2t+1)^3}{(2t-1)}\right]+C$

3. $\int \frac{(2z+3)\,dz}{z^3+z^2-2z} = \ln\left[\frac{(z-1)^{\frac{5}{3}}}{z^{\frac{3}{2}}(z+2)^{\frac{1}{6}}}\right]+C$

4. $\int \frac{(5x^2-3)\,dx}{x^3-x} = \ln x^3(x^2-1)+C$

5. $\int \frac{(y+1)\,dy}{y^3+y^2-6y} = \ln\left[\frac{(y-2)^{\frac{3}{10}}}{y^{\frac{1}{6}}(y+3)^{\frac{2}{15}}}\right]+C$

6. $\int \frac{(4x+3)\,dx}{4x^3+8x^2+3x} = -\frac{1}{2}\ln\frac{(2x+1)(2x+3)}{x^2}+C$

7. $\int \frac{(5x-2)dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\ln\left[\frac{x^4(2x+1)^3}{(2x-1)}\right]+C$

8. $\int \frac{(x^4+3x^3-5x^2-4x+17)\,dx}{x^3+x^2-5x+3} = \frac{x^2}{2}+2x-\frac{3}{(x-1)}-\ln[(x+3)^4(x-1)^2]+C$

9. $\int \frac{(x^2-3x-1)\,dx}{x^3+x^2-2x} = \ln\left[\frac{\sqrt{x}(x+2)^{\frac{3}{2}}}{(x-1)}\right]+C$

10. $\int \frac{x\,dx}{x^2-3x-4} = \frac{1}{5}\ln\left[(x+1)(x-4)^4\right]+C$

11. $\int \frac{(x^2+3x-4)\,dx}{x^2-2x-8} = x+\ln\left[(x+2)(x-4)^4\right]+C$

12. $\int \frac{(4x^3+2x^2+1)\,dx}{4x^3-x} = x+\frac{1}{2}\ln\left[\frac{(2x+1)(2x-1)^2}{x^2}\right]+C$

II. Comprueba las siguientes integrales indefinidas, aplicando el método de integración de funciones racionales por fracciones parciales (caso II).

1. $\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)^3} = \ln(x-1)+\frac{3-4x}{2(x-1)^2}+C$

2. $\int \frac{(x^4-8)\,dx}{x^3+2x^2} = \frac{x^2}{2}-2x+\frac{4}{x}+2\ln(x^2+2x)+C$

3. $\int \frac{(x^2-3)\,dx}{x^3+4x^2+5x+2} = \ln(x+2)+\frac{2}{(x+1)}+C$

4. $\int \frac{t^4dt}{(1-t)^3} = -\frac{t^2}{2}-3t-\ln(1-t)^6+\frac{8t-7}{2(1-t)^2}+C$

5. $\int \frac{z\,dz}{(z-2)^2} = \ln(z-2)-\frac{2}{(z-2)}+C$

6. $\int \frac{d\theta}{\theta^3+\theta^2} = \ln\left(\frac{\theta+1}{\theta}\right)-\frac{1}{\theta}+C$

7. $\int \frac{(x^4-x^3-x-1)\,dx}{x^3-x^2} = \frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}+2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+C$

8. $\int \frac{(5t^2+12t+1)\,dt}{t^2+3t^2-4} = \ln\left[(t-1)^2(t+2)^3\right]-\frac{1}{(t+2)}+C$

9. $\int \frac{(5x+3)\,dx}{x^2+4x+4} = 5\ln(x+2)+\frac{7}{(x+2)}+C$

10. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x+2)^2} = x-4\ln(x+2)-\frac{5}{(x+2)}+C$

11. $\int \frac{dx}{x^3+3x^2} = \frac{1}{9}\ln\left(\frac{x+3}{x}\right)-\frac{1}{3x}+C$

12. $\int \frac{(x^2-3x-7)\,dx}{(x+1)^2(2x+3)} = \frac{3}{(x+1)}-5\ln(x+1)+\frac{11}{2}\ln(2x+3)+C$

III. Comprueba las siguientes integrales indefinidas, aplicando el método de integración de funciones racionales por fracciones parciales (caso III).

1. $\int \frac{(t^3+t^2+t+2)\,dt}{t^4+3t^2+2} = \frac{1}{2}\ln(t^2+2) + \arctan t + C$

2. $\int \frac{x^2dx}{16-x^4} = \frac{1}{8}\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) - \frac{1}{4}\arctan\frac{x}{2} + C$

3. $\int \frac{(x^3+x^2+x+3)\,dx}{(x^2+1)(x^2+3)} = \ln\sqrt{x^2+3} + \arctan x + C$

4. $\int \frac{dx}{x^3+x} = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) + C$

5. $\int \frac{(x^4-2x^3+3x^2-x+3)\,dx}{x^3-2x^2+3x} = \frac{x^2}{2} + \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-2x+3}}\right) + C$

6. $\int \frac{(4x-2)\,dx}{x(x^2-x+2)} = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-x+2}}{x}\right) + 4\arctan(x-1) + C$

7. $\int \frac{(4z^2+6)\,dz}{z^3+3z} = \ln z^2(z^2+3) + C$

8. $\int \frac{(y^2+y)\,dy}{(y-1)(y^2+1)} = \ln(y-1) + \arctan y + C$

9. $\int \frac{(2x^2-8x-8)\,dx}{(x-2)(x^2+4)} = 2\ln\left(\frac{x^2+4}{x-2}\right) + C$

10. $\int \frac{(x+1)\,dx}{x^3+4x} = \frac{1}{8}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+4}\right) - \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$

11. $\int \frac{(3x^2-6x+8)\,dx}{x^3-x^2-4} = \ln[(x-2)(x^2+x+2)] - \frac{8}{\sqrt{7}}\arctan\frac{(2x+1)}{\sqrt{7}} + C$

12. $\int \frac{dt}{16t^4-1} = \frac{1}{8}\ln\left(\frac{2t-1}{2t+1}\right) - \frac{1}{4}\arctan 2t + C$

IV. Comprueba las siguientes integrales indefinidas, aplicando el método de integración de funciones racionales por fracciones parciales (caso IV).

1. $\int \frac{dx}{x^4+x^2} = -\frac{1}{x} - \arctan x + C$

2. $\int \frac{2z\,dz}{(z^2+1)(z+1)^2} = \frac{1}{(z+1)} + \arctan z + C$

3. $\int \frac{(4t^2+2t+8)\,dt}{t(t^2+2)^2} = \ln\left(\frac{t^2}{t^2+2}\right) + \frac{t}{(2t^2+4)} + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} + C$

4. $\int \frac{x^5dx}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2}{2} - 4\ln(x^2+4) - \frac{8}{(x^2+4)} + C$

5. $\displaystyle\int \frac{(y^5+4y^3)\,dy}{(y^2+2)^3} = \frac{1}{2}\ln(y^2+2) + \frac{1}{(y^2+2)^2} + C$

6. $\displaystyle\int \frac{(x^3+2x^2+5x+8)\,dx}{x(x^2+4)^2} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+4}\right) + \frac{9}{16}\arctan\frac{x}{2} + \frac{x}{8(x^2+4)} + C$

7. $\displaystyle\int \frac{6x^3dx}{(x^2+1)^2} = 3\ln(x^2+1) - \frac{3x^2}{(x^2+1)} + C$

8. $\displaystyle\int \frac{(2t^4-7t^3+28t^2-26t+41)\,dt}{(t+3)(t^2-2t+4)} = 2\ln(t+3) + \frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{(t-1)}{\sqrt{3}} + \frac{2t-11}{6(t^2-2t+4)} + C$

9. $\displaystyle\int \frac{(2x^2-x+2)\,dx}{x^5+2x^3+x} = \ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) - \frac{1}{2}\arctan x - \frac{x}{2(x^2+1)} + C$

10. $\displaystyle\int \frac{18\,dt}{(at^2+9)^2} = \frac{1}{6}\arctan\frac{2t}{t} + \frac{t}{(4t+9)} + C$

11. $\displaystyle\int \frac{(2z^2+3)\,dz}{(z^2+1)^2} = \frac{5}{2}\arctan z + \frac{z}{2(z^2+1)} + C$

12. $\displaystyle\int \frac{(x^3+x-1)\,dx}{(x^2+1)^2} = \ln\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}\arctan x - \frac{x}{2(x^2+1)} + C$

V. Encuentra la primitiva de cada una de las siguientes integrales y comprueba los resultados por diferenciación.

1. $\displaystyle\int \frac{(t-3)\,dt}{t^3+t^2}$

2. $\displaystyle\int \frac{(y^3-2)\,dy}{y^3-y^2}$

3. $\displaystyle\int \frac{(2-z^2)\,dz}{z^3+3z^2+2z}$

4. $\displaystyle\int \frac{(3-x)\,dx}{x^3+4x^2+3x}$

5. $\displaystyle\int \frac{(3t^2+7t)\,dt}{(t+1)(t+2)(t+3)}$

6. $\displaystyle\int \frac{(x^2-3)\,dx}{(x+1)^2(x+2)}$

7. $\displaystyle\int \frac{9y^2\,dy}{(2y+1)(y+2)^2}$

8. $\displaystyle\int \frac{8\,dz}{z^3-4z}$

9. $\displaystyle\int \frac{(3x+7)\,dx}{(x+3)(x+2)(x+1)}$

10. $\displaystyle\int \frac{(3y^2+11y+2)\,dy}{(y+3)(y^2-1)}$

11. $\displaystyle\int \frac{(x^4+1)\,dx}{x^3-x}$

12. $\displaystyle\int \frac{(t^2-t-5)\,dt}{t^3+5t^2}$

13. $\displaystyle\int \frac{z^2dz}{(2z+3)(4z^2-1)}$

14. $\displaystyle\int \frac{(x^4-3x^3)\,dx}{(x^2-1)(x-2)}$

15. $\displaystyle\int \frac{(5y^2-9)\,dy}{y^3-9y}$

16. $\displaystyle\int \frac{(2x^2+1)\,dx}{(x-2)^3}$

17. $\int \frac{(24x^2+10x+5)\,dx}{(2x-1)(2x+1)^2}$

18. $\int \frac{(5y^2+14y+10)\,dy}{(y+1)(y+2)}$

19. $\int \frac{(z+2)\,dz}{z^4+2z^3+z^2}$

20. $\int \frac{(2x^4+3x^3-20x-28)\,dx}{(x^2-4)(2x-1)}$

21. $\int \frac{5y\,dy}{(y+2)(y^2+1)}$

22. $\int \frac{(2x^2+x+3)\,dx}{(x+1)(x^2+1)}$

23. $\int \frac{(5x^3-4x)\,dx}{x^4-16}$

24. $\int \frac{(4y^2+2y)\,dy}{(y^2+1)(y+1)^2}$

25. $\int \frac{(2x^3+18)\,dx}{(x+3)(x^2+9)}$

26. $\int \frac{(t+10)\,dt}{t^2+2t^2+5t}$

27. $\int \frac{(x^4+3)\,dx}{(x+1)(x^2+1)}$

28. $\int \frac{(3y^3+3y+1)\,dy}{y^4+3y^2}$

29. $\int \frac{(4x^3+3x^2+18x+12)\,dx}{(x^2+4)^2}$

30. $\int \frac{(2x^3+9x)\,dx}{(x^2+3)(x^2-2x+3)}$

31. $\int \frac{(2y^2+3y+2)\,dy}{y^3+4y^2+6y+4}$

32. $\int \frac{(z+3)\,dz}{4z^4+4z^3+z^2}$

33. $\int \frac{e^{5y}dy}{(e^{2y}+1)^2}$

34. $\int \frac{(x+3)\,dx}{x^2+3x+2}$

35. $\int \frac{dx}{(x^2-4)(x^2-9)}$

36. $\int \frac{(3x^2+1)\,dx}{x^3+x^2+x}$

37. $\int \frac{(t^3+1)\,dt}{t^5+2t^3+t}$

38. $\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x}$

39. $\int \frac{(y^3+y^2-5y+15)\,dy}{(y^2+5)(y^2+2y+3)}$

40. $\int \frac{(x^4+8x^3-x^2+2x+1)\,dx}{(x^2+x)(x^3+1)}$

41. $\int \frac{(x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4)\,dx}{(x^2+2)^3}$

42. $\int \frac{(x^2+6x-1)\,dx}{x^3-7x^2+15x-9}$

43. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+3)}$

44. $\int \frac{(4y-2)\,dy}{y^3-y^2-2y}$

45. $\int \frac{(x^2+x+2)\,dx}{x^2-1}$

46. $\int \frac{(5x^2-11x+5)\,dx}{x^3-4x^2+5x-2}$

47. $\int \frac{(2t^4-2t+1)\,dt}{2t^5-t^4}$

48. $\int \frac{(3x^2-x+1)\,dx}{x^3-x^2}$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Solución de integrales indefinidas por el método de integración por sustitución de una nueva variable (método de integración por racionalización)

Las funciones algebraicas **no racionales**, es decir, las que contienen radicales no se pueden integrar en términos de funciones elementales, con la excepción de algunas cuantas. Sin embargo, en algunos casos, al sustituir una nueva variable, dichas funciones pueden transformarse en funciones equivalentes que, o son racionales o se encuentran en la lista de las formas elementales de integración.

El método de integrar una función no racional, reemplazando la variable por una nueva variable de manera que el resultado sea una función racional, se denomina **integración por racionalización**. Este método es considerado como uno de los más importantes de cálculo integral.

Caso I

Una expresión que contiene solamente potencias fraccionarias de x puede transformarse en forma racional mediante la sustitución $x = z$, siendo n el menor denominador común de los exponentes fraccionarios de x.

En este caso, tanto x, como dx y cada radical pueden expresarse en términos de la variable z.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra $\int \frac{(5x+9)\,dx}{(x-9)x^{\frac{3}{2}}}$.

Solución

Como $n = 2$ y sea $x = z^2$, entonces $x^{\frac{3}{2}} = z$ y $dx = 2z\,dz$.

Por lo anterior, tenemos: $$\int \frac{(5x+9)\,dx}{(x-9)x^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{(5z^2+9)2z\,dz}{(z^2-9)z^3} = \int \frac{(10z^3+18z)\,dz}{(z+3)(z-3)z^3}$$

Con base en el caso II del método de integración de fracciones racionales se tiene:

$$\frac{10z^3+18z}{(z+3)(z-3)z^3} = \frac{A}{(z+3)} + \frac{B}{(z-3)} + \frac{C}{z^3} + \frac{D}{z^2} + \frac{E}{z} \quad \textbf{(1)}$$

Al quitar los denominadores se obtiene:

$$10z^3+18z = A(z^3)(z-3) + B(z^3)(z+3) + C(z+3)(z=3) + D(z)(z+3)(z-3) + E(z^2)(z+3)(z-3)$$
$$10z^3+18z = A(z-3z^3) + B(z^4+3z^3) + C(z^2-9) + D(z^3-9z) + E(z^4-9z^2)$$
$$10z^3+18z = Az^4 - 3Az^3 + Bz^4 + 3Bz^3 + Cz^2 - 9C + Dz^3 - 9Dz + Ez^4 - 9Ez^2$$
$$10z^3+18z = (A+B+E)z^4 + (3B-3A+D)z^3 + (C-9E)z^2 - 9Dz - 9C$$

Para determinar los valores de las constantes se plantean las siguientes cinco ecuaciones simultáneas: $A+B+E=0$, $3B-3A+D=10$, $C-9E=0$, $-9D=18$ y $-9C=0$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas resulta que $A=-2$, $B=2$, $C=0$, $D=-2$ y $E=0$.

Sustituyendo estos valores en (**1**) se obtiene:

$$\frac{10z^3+18z}{(z+3)(z-3)z^3}=\frac{-2}{(z+3)}+\frac{2}{(z-3)}+\frac{0}{z^3}+\frac{-2}{z^2}+\frac{0}{z}$$

Por lo tanto, la integral queda expresada como:

$$\int\frac{(10z^3+18z)\,dz}{(z+3)(z-3)z^3}=-2\int\frac{dz}{(z+3)}+2\int\frac{dz}{(z-3)}-2\int\frac{dz}{z^2}$$

Al resolver directamente cada integral resulta:

$$\int\frac{(10z^3+18z)\,dz}{(z+3)(z-3)z^3}=-2\ln(z+3)+2\ln(z-3)+\frac{2}{z}+C=2\ln\left(\frac{z-3}{z+3}\right)+\frac{2}{z}+C$$

De $x=z^2$ se obtiene que $z=\sqrt{x}$ entonces:

$$\therefore\quad\int\frac{(5x+9)\,dx}{(x-9)x^{\frac{3}{2}}}=2\ln\left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}\right)+\frac{2}{\sqrt{x}}+C$$

2 ••• Encuentra $\int\frac{dx}{x^{\frac{5}{8}}-x^{\frac{1}{8}}}$.

Solución

Como $n=8$, sea $x=z^8$, entonces $x^{\frac{5}{8}}=z^5$, $x^{\frac{1}{8}}=z$ y $dx=8z^7\,dz$.

Por lo anterior, tenemos: $$\int\frac{dx}{x^{\frac{5}{8}}-x^{\frac{1}{8}}}=\int\frac{8z^7dz}{z^5-z}=\int\frac{8z^7dz}{z(z^4-1)}=8\int\frac{z^6dz}{z^4-1}$$

Al dividir, resulta: $$8\int\frac{z^6dz}{z^4-1}=8\int\left(z^2+\frac{z^2}{z^4-1}\right)dz=\underbrace{8\int z^2\,dz}_{1}+\underbrace{8\int\frac{z^2dz}{z^4-1}}_{2}$$

Al resolver directamente la integral 1 por la fórmula **4** resulta:

$$8\int z^2\,dz=\frac{8z^3}{3}+C$$

Para la integral 2 se aplica el caso III del método de integración de fracciones racionales, resultando:

$$\frac{8z^2}{z^4-1}=\frac{8}{(z^2+1)(z^2-1)}=\frac{Az+B}{(z^2+1)}+\frac{Cz+D}{(z^2-1)}\qquad(\mathbf{1})$$

Al quitar denominadores se obtiene:

$$8z^2=(Az+B)(z^2-1)+(Cz+D)(z^2+1)$$
$$8z^2=Az^3-Az+Bz^2-B+Cz^3+Cz+Dz^2+D$$
$$8z^2=(A+C)z^3+(B+D)z^2+(C-A)z+D-B$$

Para determinar los valores de las constantes se plantean las siguientes cuatro ecuaciones simultáneas: $A+C=0$, $B+D=8$, $C-A=0$ y $D-B=0$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas se obtiene que $A=0$, $B=4$, $C=0$ y $D=4$.

Sustituyendo estos valores en (1), obtenemos que:

$$\frac{8z^2}{z^4-1}=\frac{(0)z+4}{(z^2+1)}+\frac{(0)z+4}{(z^2-1)}$$

Por lo tanto, la integral 2 queda expresada como:

$$8\int\frac{z^2dz}{z^4-1}=\underbrace{4\int\frac{dz}{z^2+1}}_{2a}+\underbrace{4\int\frac{dz}{z^2-1}}_{2b}$$

Para la integral $2a$ se aplica directamente la fórmula **18**, lo que resulta:

$$4\int\frac{dz}{z^2+1}=4\arctan z+C$$

Para la integral $2b$ se aplica directamente la fórmula **19**, lo que resulta:

$$4\int\frac{dz}{z^2-1}=\frac{4}{2}\ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+C=2\ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de las integrales 1, $2a$, $2b$ se tiene:

$$8\int\frac{z^6dz}{z-1}=\frac{8z^3}{3}+4\arctan z+2\ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+C$$

De $x^{\frac{1}{8}}=z$ se obtiene que $z^3=x^{\frac{3}{8}}$, entonces:

$$\therefore\quad\int\frac{dx}{x^{\frac{5}{8}}-x^{\frac{1}{8}}}=\frac{8x^{\frac{3}{8}}}{3}+4\arctan x^{\frac{1}{8}}+2\ln\left(\frac{x^{\frac{1}{8}}-1}{x^{\frac{1}{8}}+1}\right)+C$$

Caso II

Una expresión que contiene únicamente potencias fraccionarias de $a+bx$ puede transformarse en forma racional mediante la sustitución $a+bx=z^n$, siendo n el menor denominador común de los exponentes fraccionarios de la expresión $a+bx$.

En este caso, tanto x como dx y cada radical pueden expresarse racionalmente en términos de la variable z.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra $\int x\sqrt[3]{a+x}\,dx$.

Solución

La integral propuesta también puede expresarse por: $\int x(a+x)^{\frac{1}{3}}dx$. Como $n = 3$ sea $a + x = z^3$, $x = z^3 - a$, $dx = 3z^2\,dz$ y $(a + x)^{\frac{1}{3}} = z$.

Por lo anterior, tenemos:

$$\int x(a+x)^{\frac{1}{3}}dx = \int (z^3-a)(z)(3z^2)\,dz = \int (3z^6-3az^3)\,dz = 3\underbrace{\int z^6dz}_{1} - 3a\underbrace{\int z^3dz}_{2}$$

Al resolver directamente las integrales 1 y 2 con la fórmula **4** se tiene:

$$3\int z^6\,dz - 3a\int z^3\,dz = \frac{3z^7}{7} - \frac{3az^4}{4} + C = \frac{12z^7-21az^4}{28} + C = \frac{3z^4}{28}(4z^3-7a) + C$$

De $(a + x)^{\frac{1}{3}} = z$ se obtiene que $z^4 = (a + x)^{\frac{4}{3}}$ y como $z^3 = a + x$, entonces:

$$\int x\sqrt[3]{a+x}\,dx = \frac{3(a+x)^{\frac{4}{3}}}{28}[4(a+x)-7a] + C = \frac{3(a+x)^{\frac{4}{3}}}{28}(4a+4x-7a) + C$$

$$\therefore \quad \int x\sqrt[3]{a+x}\,dx = \frac{3}{28}(a+x)^{\frac{4}{3}}(4x-3a) + C$$

2 Encuentra $\int \frac{\left(\sqrt{1+x}+1\right)dx}{\left(\sqrt{1+x}-1\right)}$.

Solución

La integral propuesta también puede expresarse por: $\int \frac{\left[(1+x)^{\frac{1}{2}}+1\right]dx}{\left[(1+x)^{\frac{1}{2}}-1\right]}$ como $n = 2$, sea $(1 + x) = z^2$, $dx = 2z\,dz$ y $(1 + x)^{\frac{1}{2}} = z$.

Por lo anterior, tenemos:

$$\int \frac{\left[(1+x)^{\frac{1}{2}}+1\right]dx}{\left[(1+x)^{\frac{1}{2}}-1\right]} = \int \frac{(z+1)(2z)\,dz}{(z-1)} = 2\int \frac{(z^2+z)\,dz}{(z-1)}$$

Al dividir resulta:

$$2\int \frac{(z^2+z)\,dz}{(z-1)} = 2\int \left[z+2+\frac{2}{(z-1)}\right]dz = 2\underbrace{\int z\,dz}_{1} + 4\underbrace{\int dz}_{2} + 4\underbrace{\int \frac{dz}{(z-1)}}_{3}$$

Al resolver directamente la integral 1 con la fórmula **4**, resulta:

$$2\int z\,dz = z^2 + C$$

Aplicando la fórmula **1** directamente en la integral 2 se tiene:

$$4\int dz = 4z + C$$

Al resolver directamente la integral 3 por la fórmula **5**, resulta:

$$4\int \frac{dz}{(z-1)} = 4\ln(z-1) + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene:

$$2\int \frac{(z^2+z)dz}{(z-1)} = z^2 + 4z + 4\ln(z-1) + C$$

Dado que $z = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ y $z^2 = (1+x)$, entonces resulta:

$$\therefore \int \frac{(\sqrt{1+x}+1)dx}{(\sqrt{1+x}-1)} = (1+x) + 4\sqrt{1+x} + 4\ln\left(\sqrt{1+x}-1\right) + C$$

EJERCICIO 13

I. Comprueba las siguientes integrales indefinidas, aplicando el método de integración por racionalización.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. $\int \frac{dt}{t\sqrt{1-t}} = \ln\left(\frac{1-\sqrt{1-t}}{1+\sqrt{1-t}}\right) + C$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{6+x-x^2}} = \text{arcsen}\left(\frac{2x-1}{5}\right) + C$

3. $\int \frac{dt}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})} = 2\ln(1+\sqrt{t}) + C$

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x+1}} = \ln\left(\frac{\sqrt{4x+1}-1}{\sqrt{4x+1}+1}\right) + C$

5. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx = 2\sqrt{x} - 2\arctan\sqrt{x} + C$

6. $\int \frac{\sqrt{t}\,dt}{t^{\frac{3}{4}}+1} = \frac{4}{3}t^{\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}\ln\left(t^{\frac{3}{4}}+1\right) + C$

7. $\int \frac{dy}{(y+1)^{\frac{3}{2}}(y+1)^{\frac{1}{2}}} = 2\arctan\sqrt{y+1} + C$

8. $\int \frac{dy}{y^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{4}}} = 2\sqrt{y} + 4y^{\frac{1}{4}} + \ln\left(y^{\frac{1}{4}}-1\right)^4 + C$

9. $\int x^5\sqrt{1-x^3}\,dx=-\frac{2}{45}(1-x^3)^{\frac{3}{2}}(2+3x^3)+C$

10. $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+2}+2}\right)+C$

11. $\int \frac{dx}{(x+1)^{\frac{1}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{4}}}=2\sqrt{x+1}-4(x+1)^{\frac{1}{4}}+4\ln\left[1+(x+1)^{\frac{1}{4}}\right]+C$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}=\ln\left(2\sqrt{x^2-x+1}+2x-1\right)+C$

13. $\int t^5\sqrt{t^2+4}\,dt=\frac{1}{105}(t^2+4)^{\frac{3}{2}}(15t^4-48t^2+128)+C$

14. $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{1+x^{\frac{1}{3}}}=\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+2x^{\frac{1}{2}}-6x^{\frac{1}{6}}+6\arctan\left(x^{\frac{1}{6}}\right)+C$

15. $\int \frac{x\,dx}{3+x^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-3x+18\sqrt{x}-54\ln\left(3+\sqrt{x}\right)+C$

16. $\int \frac{dt}{\sqrt{2t}-\sqrt{t+4}}=2\sqrt{2t}+2\sqrt{t+4}+4\sqrt{2}\ln\left[\frac{(2\sqrt{2}-\sqrt{t+4})(\sqrt{t}-2)}{t-4}\right]+C$

17. $\int \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}dx}{1-x}=-2\sqrt{1+x}+2\sqrt{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+x}+2}{1-x}\right)+C$

18. $\int \frac{du}{1+\sqrt[3]{u+a}}=\frac{3}{2}(u+a)^{\frac{2}{3}}-3(u+a)^{\frac{1}{3}}+3\ln\left(1+\sqrt[3]{u+a}\right)+C$

19. $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^3+2x^2-3x}=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+1}}\right)-\frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\sqrt{\frac{x}{3}}+C$

20. $\int \frac{(x+5)\,dx}{(x+4)(x+2)^{\frac{1}{2}}}=2\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{x+2}{2}}+C$

II. Encuentra cada una de las siguientes integrales y comprueba los resultados por diferenciación y en plenaria discute tus resultados.

1. $\int \frac{dt}{t-t^{\frac{4}{3}}}$

2. $\int \frac{dx}{x(1-\sqrt[3]{x})}$

3. $\int \frac{x^2dx}{(4x+1)^{\frac{5}{2}}}$

4. $\int \frac{y\,dy}{(2y+3)^{\frac{4}{3}}}$

5. $\int \frac{\left(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{3}}\right)dt}{6t^{\frac{1}{4}}}$

6. $\int \frac{(x+3)dx}{(x+5)(x+4)^{\frac{1}{2}}}$

7. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}}$

8. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

9. $\int \frac{dx}{(x+2)(x+1)^{\frac{1}{2}}}$

10. $\int \frac{t\,dt}{(a+bt)^{\frac{3}{2}}}$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}\left[9+(2x)^{\frac{1}{3}}\right]}$

12. $\int \frac{dx}{(x+1)^{\frac{1}{4}}-(x+1)^{\frac{5}{4}}}$

13. $\int \frac{dt}{(t-2)^{\frac{1}{2}}-(t-2)^{\frac{3}{4}}}$

14. $\int \frac{dx}{x+2\sqrt{x}+5}$

15. $\int \frac{(t+2)\,dt}{t\sqrt{t-3}}$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Autoevaluación

1. Encuentra cada una de las siguientes integrales indefinidas por el método de sustitución algebraica y comprueba los resultados por diferenciación.

a) $\dfrac{t^2-1}{\sqrt[3]{t^3-3t+16}}$

b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}$

c) $\displaystyle\int \frac{a^x}{1+a^x}dx$

2. Encuentra cada una de las siguientes integrales por el método de sustitución trigonométrica y comprueba los resultados por diferenciación.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}}$

b) $\displaystyle\int \frac{a^3 dz}{\sqrt{4-9z^2}}$

c) $\displaystyle\int \frac{t}{1+t^4}dt$

3. Encuentra cada una de las siguientes integrales por el método de integración por partes y comprueba los resultados por diferenciación.

a) $\displaystyle\int 3w\cos 2w dw$

b) $\displaystyle\int \frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}{x}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{4e^{3t}}{1+e^{2t}}dt$

4. Encuentra cada una de las siguientes integrales por el método de integración de funciones racionales por fracciones parciales y comprueba los resultados por diferenciación.

a) $\int \frac{2m^2-3m+1}{m^3-6m^2+8m}dm$

b) $\int \frac{w^2+w+3}{w-2}dw$

c) $\int \frac{x+8}{x6-2x^4+x^2}dx$

5. Encuentra cada una de las siguientes integrales por el método de integración por racionalización y comprueba los resultados por diferenciación.

a) $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(1+\sqrt{x})}$

b) $\int \frac{dt}{\sqrt{3-t}+\sqrt{(3-t)^3}}$

c) $\int \frac{\cos^3 z}{\operatorname{sen}^z z}$

UNIDAD 3

Integración de funciones trigonométricas

Evaluación diagnóstica

1. Completa las siguientes identidades trigonométricas.

   a) $\operatorname{sen} mu \cos mu =$

   b) ________________ $= -\frac{1}{2}\cos(m+n)u + \frac{1}{2}\cos(m-n)u$

   c) $\cos mu \cos mu =$

   d) ________________ $= -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(m+n)u - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(m-n)u$

2. Completa las siguientes fórmulas de integración directa.

   a) $\int \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nu\, du =$

   b) $\int$ ________________ $= -\frac{\cos(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\cos(m-n)u}{2(m-n)} + C$

   c) $\int \operatorname{sen} mu \cos nu\, du =$

   d) $\int$ ________________ $= -\frac{\operatorname{sen}(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)u}{2(m-n)} + C$

Integración de funciones trigonométricas

Propósito de la unidad

Que el estudiante:

- Conozca la forma de integrar fácilmente diferenciales trigonométricas al transformarlas en integrales inmediatas.
- Utilice identidades trigonométricas para poder aplicar las fórmulas del formulario general de integrales inmediatas.
- Maneje los diferentes casos para la integración de funciones trigonométricas.
- Realice comprobaciones de integrales utilizando los distintos casos de la integración de funciones trigonométricas.

Competencias disciplinares

1. Construye e interpreta modelos deterministas mediante la aplicación de problemas algebraicos y geométricos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos y analíticos, mediante lenguaje verbal y matemático.
8. Interpreta tablas, gráficos, mapas, textos con símbolos matemáticos y científicos.

Contenidos que aborda la unidad

Contenidos conceptuales

- Integración de productos de potencias impares de senos y cosenos
- Integración de productos de potencias pares de senos y cosenos (por medio de ángulos múltiplos)
- Integración de productos de funciones seno y coseno con diferentes argumentos en la misma variable
- Integración de potencias de la función tangente o cotangente
- Integración de potencias de la función secante o cosecante
- Integración de productos de potencias de tangentes y secantes o cotangentes y cosecantes

Contenidos procedimentales

- Distinguirá y utilizará la identidad trigonométrica adecuada para transformar una diferencial trigonométrica en una integral inmediata.
- Identificará y aplicará el caso adecuado para la integración de funciones trigonométricas.
- Resolverá y comprobará integrales de funciones trigonométricas utilizando los diversos casos.

Contenidos actitudinales

- Colaborará con sus compañeros al resolver problemas.
- Respeto al trabajar en clase.
- Aprenderá a valorar el trabajo de sus compañeros al resolver problemas.
- Contribuirá con ideas de manera crítica y acciones responsables a la hora de trabajar en equipo.

Integración de productos de potencias impares de senos y cosenos

Algunas diferenciales trigonométricas pueden integrarse fácilmente transformándolas en integrales inmediatas por medio de reducciones trigonométricas sencillas.

Caso I

Integrales de la forma $\int \text{sen}^m u\,du$, $\int \cos^n u\,du$ o $\int \text{sen}^m u \cos^n u\,du$, donde el valor de m o n son enteros independientes, pero alguno de los dos es impar y positivo.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra $\int \text{sen}^3 ax\,dx$.

Solución

La integral propuesta tiene la forma $\int \text{sen}^m u\,du$, en donde $m = 3$ y satisface la condición del caso I.

Al factorizar el integrando se tiene: $\int \text{sen}^3 ax\,dx = \int \text{sen}^2 ax\,\text{sen}\,ax\,dx.$

Aplicando la identidad $\text{sen}^2 ax = 1 - \cos^2 ax$ resulta:

$$\int \text{sen}^2 ax\,\text{sen}\,ax\,dx = \int (1 - \cos^2 ax)\,\text{sen}\,ax\,dx$$

Multiplicando se tiene:

$$\int (1 - \cos^2 ax)\,\text{sen}\,ax\,dx = \underbrace{\int \text{sen}\,ax\,dx}_{1} - \underbrace{\int \cos^2 ax\,\text{sen}\,ax\,dx}_{2}$$

Al resolver directamente la integral 1 por medio de la fórmula **8** resulta:

$$\int \text{sen}\,ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$$

La integral 2 tiene la forma $\int \text{sen}^m u \cos^n u\,du$, en donde $n = 1$ y satisface la condición del caso I. Para su solución se identifica:

$$v = \cos ax$$
$$dv = -a\,\text{sen}\,ax\,dx$$

Aplicando la fórmula **4** en la integral 2, resulta:

$$-\int \cos^2 ax\,\text{sen}\,ax\,dx = -\left(-\frac{1}{a}\right)\left[\frac{(\cos ax)^{2+1}}{2+1}\right] + C = \frac{\cos^3 ax}{3a} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene que:

$$\therefore \quad \int \text{sen}^3 ax\,dx = \frac{\cos^3 ax}{3a} - \frac{\cos ax}{a} + C$$

2 Encuentra $\int \text{sen}^3 5x \cos 5x\, dx$.

Solución

La integral propuesta tiene la forma $\int \text{sen}^m u \cos^n u\, du$, en donde $m = 3$ y satisface la condición del caso I. Para su solución se identifica:

$$v = \text{sen}\, 5x \qquad n = 3$$
$$dv = 5\cos 5x\, dx$$

Aplicando directamente la fórmula **4** resulta:

$$\therefore \quad \int \text{sen}^3 5x \cos 5x\, dx = \frac{1}{5}\left[\frac{(\text{sen}\, 5x)^{3+1}}{3+1}\right] + C = \frac{\text{sen}^4 5x}{20} + C$$

3 Encuentra $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\text{sen}^4 x}$.

Solución

Al factorizar el numerador del integrando, tenemos:

$$\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\text{sen}^4 x} = \int \frac{\cos^2 x \cos x\, dx}{\text{sen}^4 x}$$

Aplicando la identidad trigonométrica $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$ resulta:

$$\int \frac{\cos^2 x \cos x\, dx}{\text{sen}^4 x} = \int \frac{(1 - \text{sen}^2 x)\cos x\, dx}{\text{sen}^4 x}$$

Multiplicando se tiene:

$$\int \frac{(1 - \text{sen}^2 x)\cos x\, dx}{\text{sen}^4 x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\text{sen}^4 x} - \int \frac{\text{sen}^2 x \cos x\, dx}{\text{sen}^4 x}$$

$$\int \frac{(1 - \text{sen}^2 x)\cos x\, dx}{\text{sen}^4 x} = \int \underbrace{\text{sen}^{-4} x \cos x\, dx}_{1} - \int \underbrace{\text{sen}^{-2} x \cos x\, dx}_{2}$$

La integral 1 tiene la forma $\int \text{sen}^m u \cos^n u\, du$, en donde $n = 1$ y satisface la condición del caso I. Para su solución se identifica: $v = \text{sen}\, x \qquad n = -4$

$$dv = \cos x\, dx$$

Aplicando directamente la fórmula **4** resulta:

$$\int \text{sen}^{-4} x \cos x\, dx = \frac{(\text{sen}\, x)^{-4+1}}{-4+1} + C = -\frac{1}{3\text{sen}^3 x} + C$$

La integral 2 tiene la forma $\int \text{sen}^m u \cos^n u\, du$, en donde $n = 1$ y satisface la condición del caso I. Para su solución se identifica: $v = \text{sen}\, x \qquad n = -2$

$$dv = \cos x\, dx$$

Aplicando directamente la fórmula **4** resulta:

$$-\int \text{sen}^{-2} x \cos x\, dx = -\frac{(\text{sen}\, x)^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{1}{\text{sen}\, x} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene que:

$$\therefore \quad \int \frac{\cos^3 x\,dx}{\operatorname{sen}^4 x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{3\operatorname{sen}^3 x} + C$$

Utilizando la identidad trigonométrica $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$, el resultado final también puede expresarse como:

$$\therefore \quad \int \frac{\cos^3 x\,dx}{\operatorname{sen}^4 x} = \csc x - \frac{\csc x}{3} + C$$

4 Encuentra $\int \cos^4 x \operatorname{sen}^3 x\,dx$.

Solución

Esta integral tiene la forma $\int \operatorname{sen}^m u \cos^n u\,du$, en donde $m = 3$ y satisface la condición del caso I. Para su solución se factoriza la función $\operatorname{sen}^3 x$ del integrando resultando:

$$\int \cos^4 x \operatorname{sen}^3 x\,dx = \int \cos^4 x \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x\,dx$$

Utilizando la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ resulta:

$$\int \cos^4 x \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x\,dx = \int \cos^4 x\,(1 - \cos^2 x) \operatorname{sen} x\,dx$$

Multiplicando se tiene:

$$\int \cos^4 x(1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x\,dx = \underbrace{\int \cos^4 x \operatorname{sen} x\,dx}_{1} - \underbrace{\int \cos^6 x \operatorname{sen} x\,dx}_{2}$$

Al resolver directamente las integrales 1 y 2 por medio de la fórmula **4** resulta:

$$\int \cos^4 x \operatorname{sen} x\,dx = -\frac{\cos^5 x}{5} + C \text{ y } -\int \cos^6 x \operatorname{sen} x\,dx = \frac{\cos^7 x}{7} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene que:

$$\therefore \quad \int \cos^4 x \operatorname{sen}^3 x\,dx = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C$$

5 Encuentra $\int \cos^5 z\,dz$.

Solución

La integral propuesta tiene la forma $\int \cos^n u\,du$, en donde $n = 5$ y satisface la condición del caso I. Al factorizar el integrando, tenemos:

$$\int \cos^5 z\,dz = \int (\cos^2 z)^2 \cos z\,dz$$

Utilizando la identidad trigonométrica $\cos^2 z = 1 - \operatorname{sen}^2 z$ resulta:

$$\int (\cos^2 z)^2 \cos z\,dz = \int (1 - \operatorname{sen}^2 z)^2 \cos z\,dz$$

Desarrollando el binomio al cuadrado, se tiene:

$$\int (1 - \operatorname{sen}^2 z)^2 \cos z\,dz = \int (1 - 2\operatorname{sen}^2 z + \operatorname{sen}^4 z) \cos z\,dz$$

Multiplicando se tiene:

$$\int (1-2\operatorname{sen}^2 z + \operatorname{sen}^4 z)\cos z\,dz = \underbrace{\int \cos z\,dz}_{1} - 2\underbrace{\int \operatorname{sen}^2 z \cos z\,dz}_{2} + \underbrace{\int \operatorname{sen}^4 z \cos z\,dz}_{3}$$

Al resolver directamente la integral 1 por medio de la fórmula **9** resulta:

$$\int \cos z\,dz = \operatorname{sen} z + C$$

Las integrales 2 y 3 tienen la forma $\int \operatorname{sen}^m u \cos^n u\,du$, en donde $n = 1$ y ambas integrales satisfacen la condición del caso I.

Al resolver directamente las integrales 2 y 3 por medio de la fórmula **4** resulta:

$$-2\int \operatorname{sen}^2 z \cos z\,dz = -\frac{2\operatorname{sen}^3 z}{3} + C \text{ y } \int \operatorname{sen}^4 z \cos z\,dz = \frac{\operatorname{sen}^5 z}{5} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene:

$$\therefore \quad \int \cos^5 z\,dz = \operatorname{sen} z - \frac{2\operatorname{sen}^3 z}{3} + \frac{\operatorname{sen}^5 z}{5} + C$$

6 ●●• Encuentra $\int \frac{\operatorname{sen}^5\theta}{\sqrt{\cos\theta}}\,d\theta$.

Solución

Al factorizar el numerador del integrando tenemos:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^5\theta}{\sqrt{\cos\theta}}\,d\theta = \int \frac{(\operatorname{sen}^2\theta)^2 \operatorname{sen}\theta\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}$$

Utilizando la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ resulta:

$$\int \frac{(\operatorname{sen}^2\theta)^2 \operatorname{sen}\theta\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta}} = \int \frac{(1-\cos^2\theta)^2 \operatorname{sen}\theta\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}$$

Desarrollando el binomio al cuadrado se tiene:

$$\int \frac{(1-\cos^2\theta)^2 \operatorname{sen}\theta\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta}} = \int \frac{(1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}$$

Multiplicando se tiene:

$$\int \frac{(1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta}} = \int \frac{\operatorname{sen}\theta\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta}} - 2\int \frac{\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta}} + \int \frac{\cos^4\theta \operatorname{sen}\theta\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}$$

$$= \underbrace{\int (\cos\theta)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\theta\,d\theta}_{1} - \underbrace{2\int \cos^{\frac{3}{2}}\theta \operatorname{sen}\theta\,d\theta}_{2} + \underbrace{\int \cos^{\frac{7}{2}}\theta \operatorname{sen}\theta\,d\theta}_{3}$$

Las integrales 1, 2 y 3 tienen la forma $\int \operatorname{sen}^m u \cos^n u\,du$, en donde $m = 1$ y todas las integrales satisfacen la condición del caso I.

Al resolver directamente las integrales 1, 2 y 3 por medio de la fórmula **4** resulta:

$$\int (\cos\theta)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\theta\,d\theta = -2\sqrt{\cos\theta} + C$$

$$-2\int \cos^{\frac{3}{2}}\theta \operatorname{sen}\theta\,d\theta = -\frac{4\cos^{\frac{5}{2}}\theta}{5} + C \text{ y } \int \cos^{\frac{7}{2}}\theta \operatorname{sen}\theta\,d\theta = -\frac{2\cos\theta}{9} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral, se tiene que:

$$\therefore \int \frac{\operatorname{sen}^5\theta\, d\theta}{\sqrt{\cos\theta}} = -2\sqrt{\cos\theta} + \frac{4\cos^{\frac{5}{2}}\theta}{5} - \frac{2\cos^{\frac{9}{2}}\theta}{9} + C$$

7 Encuentra $\int \frac{\cot y\, dy}{\sqrt{\operatorname{sen} y}}$.

Solución

Aplicando la identidad trigonométrica $\cot y = \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}$ resulta:

$$\int \frac{\cot y\, dy}{\sqrt{\operatorname{sen} y}} = \int \frac{\frac{\cos y}{\operatorname{sen} y} dy}{\sqrt{\operatorname{sen} y}} = \int \frac{\cos y\, dy}{\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} y} = \int \operatorname{sen}^{-\frac{3}{2}} y \cos y\, dy$$

La integral resultante tiene la forma $\int \operatorname{sen}^m u \cos^n u\, du$, en donde $n = 1$ y satisface la condición del caso I.

Al resolver directamente la integral por medio de la fórmula **4** resulta:

$$\int \operatorname{sen}^{-\frac{3}{2}} y \cos y\, dy = -\frac{2}{\sqrt{\operatorname{sen} y}} + C$$

$$\therefore \int \frac{\cot y\, dy}{\sqrt{\operatorname{sen} y}} = -\frac{2}{\sqrt{\operatorname{sen} y}} + C$$

EJERCICIO **14**

I. Comprueba las siguientes integrales de productos de potencias impares de senos y cosenos (caso I).

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. $\int \cos^3 x\, dx = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$
2. $\int \cos^3 x \operatorname{sen}^3 x\, dx = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{sen}^6 x}{6} + C$
3. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos z\, dz = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$
4. $\int \cos^5 nt\, dt = \frac{\operatorname{sen} nt}{n} - \frac{\operatorname{sen}^3 nt}{3n} + C$
5. $\int \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$
6. $\int \operatorname{sen}^3 mx\, dx = \frac{\cos^3 mx}{3m} - \frac{\cos mx}{m} + C$
7. $\int \cos^3 2y \operatorname{sen} 2y\, dy = -\frac{\cos^4 2y}{8} + C$
8. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x\, dx = \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} + C$
9. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^2 x} dx = \sec x + \cos x + C$
10. $\int \operatorname{sen} 2\theta \cos 2\theta\, d\theta = -\frac{\cos^2 2\theta}{4} + C$

11. $\int \operatorname{sen}^5\theta\, d\theta = -\cos\theta + \frac{2\cos^3\theta}{3} - \frac{\cos^3\theta}{3} + C$

12. $\int \frac{\cos^5 x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} x}} dx = \frac{3\operatorname{sen}^{\frac{2}{3}} x}{2} - \frac{3\operatorname{sen}^{\frac{8}{3}} x}{4} + \frac{3\operatorname{sen}^{\frac{14}{3}} x}{14} + C$

13. $\int \cos^3 \frac{x}{2} dx = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2} - \frac{2\operatorname{sen}^3 \frac{x}{2}}{3} + C$

14. $\int \cos^3 \frac{x}{a} \operatorname{sen}^2 \frac{x}{a} dx = \frac{a\operatorname{sen}^3 \frac{x}{a}}{3} - \frac{a\operatorname{sen}^5 \frac{x}{a}}{5} + C$

15. $\int \operatorname{sen}^3 mx \cos^2 mx\, dx = -\frac{\cos^3 mx}{3m} + \frac{\cos^5 mx}{5m} + C$

16. $\int \operatorname{sen}^5 (a+bx)\, dx = -\frac{\cos(a+bx)}{b} + \frac{2\cos^3(a+bx)}{3b} - \frac{\cos^5(a+bx)}{5b} + C$

17. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 2y\, dy}{\sqrt[3]{\cos 2y}} = -\frac{3\cos^{\frac{2}{3}} 2y}{4} + \frac{3\cos^{\frac{8}{3}} 2y}{16} + C$

18. $\int \frac{\operatorname{sen}^5 2x\, dx}{\sqrt{\cos 2x}} = -\sqrt{\cos 2x} + \frac{2\cos^{\frac{5}{2}} 2x}{5} - \frac{\cos^{\frac{9}{2}} 2x}{9} + C$

19. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^5 x\, dx = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{2\operatorname{sen}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} + C$

20. $\int \operatorname{sen}^3 3t \cos^5 3t\, dt = \frac{\operatorname{sen}^4 3x}{12} - \frac{\operatorname{sen}^6 3x}{9} + \frac{\operatorname{sen}^8 3x}{24} + C$

II. Encuentra cada una de las siguientes integrales y comprueba los resultados por diferenciación y en plenaria discute tus respuestas.

1. $\int \frac{\tan x\, dx}{\sqrt{\cos x}}$

2. $\int \frac{\cos^3 3x\, dx}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} 3x}}$

3. $\int \frac{\operatorname{sen}^5 x\, dx}{\sqrt[3]{\cos x}}$

4. $\int \frac{\cos^5 2x\, dx}{\sqrt{\operatorname{sen} 2x}}$

5. $\int \operatorname{sen}^7 3x\, dx$

6. $\int \cos^7 2x\, dx$

7. $\int \cos^5 mx\, dx$

8. $\int \operatorname{sen}^5\theta \cos\theta\, d\theta$

9. $\int \sqrt{\cos x}\, \operatorname{sen}^3 x\, dx$

10. $\int \sqrt{\operatorname{sen} 2x}\, \cos^3 2x\, dx$

11. $\int \operatorname{sen}^2 t \cos^5 t\, dt$

12. $\int \operatorname{sen}^3 \frac{x}{2}\, dx$

13. $\int \cos^3 2\theta \operatorname{sen}^5 2\theta\, d\theta$

14. $\int \operatorname{sen} nt \cos nt\, dt$

15. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x\, dx}{\cos^4 x}$

16. $\int \frac{\cos^3 2x\, dx}{\operatorname{sen}^2 2x}$

17. $\int \sqrt[3]{\cos 2y} \operatorname{sen}^3 2y\, dy$

18. $\int \sqrt[3]{\operatorname{sen} x} \cos^3 x\, dx$

19. $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^5 x\, dx$

20. $\int \operatorname{sen}^7 \frac{x}{3}\, dx$

21. $\int \operatorname{sen}^7 x \cos^3 x\, dx$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Integración de productos de potencias pares de senos y cosenos (por medio de ángulos múltiplos)

Caso II

Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m u\, du$, $\int \cos^n u\, du$ o $\int \operatorname{sen}^m u \cos^n u\, du$, donde el valor de m y n son enteros pares y positivos.

Es necesario tener presente que cuando m o n son números pares positivos, el mejor método de solución es el del **caso** I.

En este **caso** II, la expresión diferencial trigonométrica dada puede transformarse mediante sustituciones trigonométricas, en una integral inmediata que contiene los senos y cosenos de ángulos múltiplos.

Identidades trigonométricas por aplicar

1. $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

1a. $\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} = \operatorname{sen} x \cos x$

2. $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

3. $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra $\int \operatorname{sen}^2 ax\, dx$.

Solución

La integral propuesta tiene la forma $\int \operatorname{sen}^m u\, du$, en donde $m = 2$ y satisface la condición del caso II.

Utilizando la identidad trigonométrica: $\operatorname{sen}^2 ax = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2ax$ resulta:

$$\int \operatorname{sen}^2 ax\, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2ax\right) dx$$

Al multiplicar se obtiene:

$$\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2ax\right)dx=\underbrace{\frac{1}{2}\int dx}_{1}-\underbrace{\frac{1}{2}\int\cos 2ax\,dx}_{2}$$

Al resolver directamente la integral 1 por medio de la fórmula **1** resulta:

$$\frac{1}{2}\int dx=\frac{x}{2}+C$$

Aplicando la fórmula **9** en la integral 2 resulta:

$$-\frac{1}{2}\int\cos 2ax\,dx=-\frac{\operatorname{sen}2ax}{4a}+C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene que:

$$\therefore\quad\int\operatorname{sen}^2 ax\,dx=\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen}2ax}{4a}+C$$

2 ••• Encuentra $\int\cos^4\frac{x}{2}dx$.

Solución

La integral propuesta tiene la forma $\int\cos^n u\,du$, en donde $n=4$ y satisface la condición del caso II.

Al factorizar el integrando tenemos: $\int\left(\cos^4\frac{x}{2}\right)dx=\int\left(\cos^2\frac{x}{2}\right)^2dx$

Aplicando la fórmula $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x$ resulta:

$$\int\left(\cos^2\frac{x}{2}\right)^2dx=\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x\right)^2dx$$

Desarrollando el binomio al cuadrado, se tiene:

$$\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x\right)^2dx=\int\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\cos^2 x\right)dx$$

Multiplicando se obtiene:

$$\int\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\cos^2 x\right)dx=\underbrace{\frac{1}{4}\int dx}_{1}+\underbrace{\frac{1}{2}\int\cos x\,dx}_{2}+\underbrace{\frac{1}{4}\int\cos^2 x\,dx}_{3}$$

Al resolver directamente la integral 1 por medio de la fórmula **1** se tiene:

$$\frac{1}{4}\int dx=\frac{x}{4}+C$$

Aplicando la fórmula **9** en la integral 2 resulta:

$$\frac{1}{2}\int\cos x\,dx=\frac{\operatorname{sen}x}{2}+C$$

Para la integral 3, se aplica la fórmula $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$ lo que resulta:

$$\frac{1}{4}\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$

Multiplicando se obtiene:

$$\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \underbrace{\frac{1}{8}\int dx}_{3a} + \underbrace{\frac{1}{8}\int \cos 2x\,dx}_{3b}$$

Al resolver directamente la integral $3a$ por medio de la fórmula **1** resulta:

$$\frac{1}{8}\int dx = \frac{x}{2} + C$$

Aplicando la fórmula **9** en la integral $3b$ tenemos:

$$\frac{1}{8}\int \cos 2x\,dx = \frac{\operatorname{sen} 2x}{16} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene que:

$$\therefore \quad \int \cos^4 \frac{x}{2}dx = \frac{x}{4} + \frac{\operatorname{sen} x}{2} + \frac{x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{16} + C = \frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{sen} x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{16} + C$$

3 ●●· Encuentra $\int \operatorname{sen}^6 z\,dz$.

Solución

Observamos que la integral dada, tiene la forma $\int \operatorname{sen}^m u\,du$, donde $m = 6$ y satisface la condición del caso II.

Al factorizar el integrando, tenemos: $\int \operatorname{sen}^6 z\,dz = \int (\operatorname{sen}^2 z)^3 dz$.

Aplicando la fórmula $\operatorname{sen}^2 z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2z$ resulta:

$$\int (\operatorname{sen}^2 z)^3\,dz = \int\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos z\right)^3 dz$$

Desarrollando el binomio al cubo, se tiene:

$$\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2z\right)^3 dz = \int\left(\frac{1}{8} - \frac{3}{8}\cos 2z + \frac{3}{8}\cos^2 2z - \frac{1}{8}\cos^3 2z\right)dz$$

Multiplicando se obtiene:

$$\int\left(\frac{1}{8} - \frac{3}{8}\cos 2z + \frac{3}{8}\cos^2 2z - \frac{1}{8}\cos^3 2z\right)dz = \underbrace{\frac{1}{8}\int dz}_{1} - \underbrace{\frac{3}{8}\int \cos 2z\,dz}_{2}$$
$$+ \underbrace{\frac{3}{8}\int \cos^2 2z\,dz}_{3} - \underbrace{\frac{1}{8}\int \cos^3 2z\,dz}_{4}$$

Al resolver directamente la integral 1 por medio de la fórmula **1** resulta:

$$\frac{1}{8}\int dz = \frac{z}{8} + C$$

Aplicando la fórmula **9** en la integral 2 resulta:

$$-\frac{3}{8}\int \cos 2z\, dz = -\frac{3\operatorname{sen} 2z}{16} + C$$

Para la integral 3 se aplica la fórmula: $\cos^2 2z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4z$, resultando:

$$\frac{3}{8}\int \cos^2 2z\, dz = \frac{3}{8}\int\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4z\right)dz$$

Multiplicando se obtiene:

$$\int\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4z\right)dz = \underbrace{\frac{3}{16}\int dz}_{3a} + \underbrace{\frac{3}{16}\int \cos 4z\, dz}_{3b}$$

Al resolver directamente la integral 3*a* por medio de la fórmula **1** resulta:

$$\frac{3}{16}\int dz = \frac{3z}{16} + C$$

Aplicando la fórmula **9** en la integral 3*b* resulta:

$$\frac{3}{16}\int \cos 4z\, dz = \frac{3\operatorname{sen} 4z}{64} + C$$

La integral 4 tiene la forma $\int \cos^n u\, du$, en donde $n = 3$ y satisface la condición del caso I.

Al factorizar el integrando tenemos: $-\frac{1}{8}\int \cos^3 2z\, dz = -\frac{1}{8}\int \cos^2 2z \cos 2z\, dz$

Aplicando la identidad trigonométrica $\cos^2 2z = 1 - \operatorname{sen}^2 2z$ resulta:

$$-\frac{1}{8}\int \cos^2 2z \cos 2z\, dz = -\frac{1}{8}\int (1 - \operatorname{sen}^2 2z)\cos 2z\, dz$$

Multiplicando se obtiene:

$$-\frac{1}{8}\int (1 - \operatorname{sen}^2 2z)\cos 2z\, dz = \underbrace{-\frac{1}{8}\int \cos 2z\, dz}_{4a} + \underbrace{\frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2z \cos 2z\, dz}_{4b}$$

Al resolver directamente la integral 4*a* por medio de la fórmula **9** resulta:

$$-\frac{1}{8}\int \cos 2z\, dz = -\frac{\operatorname{sen} 2z}{16} + C$$

Aplicando la fórmula **4** en la integral 4*b* se tiene:

$$\frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2z \cos 2z\, dz = \frac{\operatorname{sen}^3 2z}{18} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene que:

$$\int \operatorname{sen}^6 z\,dz = \frac{z}{8} - \frac{3\operatorname{sen}2z}{16} + \frac{3z}{16} + \frac{3\operatorname{sen}4z}{64} - \frac{\operatorname{sen}2z}{16} + \frac{\operatorname{sen}^3 2z}{48} + C$$

$$\therefore \quad \int \operatorname{sen}^6 dz = \frac{5z}{16} - \frac{\operatorname{sen}2z}{4} + \frac{3\operatorname{sen}4z}{64} + \frac{\operatorname{sen}^3 2z}{48} + C$$

4 ••• Encuentra $\int \operatorname{sen}^2 ax \cos^2 ax\,dx$.

Solución

La integral propuesta tiene la forma $\int \operatorname{sen}^m u \cos^n u\,du$, en donde $m = n = 2$ y satisface la condición del caso II.

Aplicando las fórmulas $\operatorname{sen}^2 ax = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2ax$ y $\cos^2 ax = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2ax$ resulta:

$$\int \operatorname{sen}^2 ax \cos^2 ax\,dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2ax\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2ax\right)dx$$

Al multiplicar y simplificar se tiene:

$$\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2ax\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2ax\right)dx = \underbrace{\frac{1}{4}\int dx}_{1} - \underbrace{\frac{1}{4}\int \cos^2 2ax\,dx}_{2}$$

Al resolver directamente la integral 1 por medio de la fórmula **1** se obtiene:

$$\frac{1}{4}\int dx = \frac{x}{4} + C$$

Para la integral 2 se aplica la fórmula $\cos^2 z\,ax = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4ax$ lo que resulta:

$$-\frac{1}{4}\int \cos^2 2ax = -\frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4ax\right)dx$$

Multiplicando se obtiene:

$$-\frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4ax\right)dx = \underbrace{-\frac{1}{8}\int dx}_{2a} - \underbrace{\frac{1}{8}\int \cos 4ax\,dx}_{2b}$$

Al resolver directamente la integral $2a$ por medio de la fórmula **1** se tiene:

$$-\frac{1}{8}\int dx = -\frac{x}{8} + C$$

Aplicando la fórmula **9** en la integral $2b$ resulta:

$$-\frac{1}{8}\int \cos 4ax\,dx = -\frac{\operatorname{sen}4ax}{32a} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene que:

$$\therefore \quad \int \operatorname{sen}^2 ax \cos^2 ax\, dx = \frac{x}{4} - \frac{x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 4ax}{32a} + C = \frac{x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 4ax}{32a} + C$$

Nota: Esta integral $\int \operatorname{sen}^2 ax \cos^2 ax\, dx$, también puede resolverse por medio de la fórmula $\operatorname{sen}^2 ax \cos^2 ax = \frac{\operatorname{sen}^2 2ax}{4}$, es decir:

$$\int \operatorname{sen}^2 ax \cos^2 ax\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 2ax\, dx}{4}$$

Aplicando la fórmula $\operatorname{sen}^2 2ax = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4ax$ resulta:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 2ax}{4} = \int \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4ax\right) dx$$

Multiplicando se obtiene:

$$\frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4ax\right) dx = \underbrace{\frac{1}{8}\int dx}_{1} - \underbrace{\frac{1}{8}\int \cos 4ax\, dx}_{2}$$

Al resolver directamente la integral 1 por medio de la fórmula **1** se tiene:

$$\frac{1}{8}\int dx = \frac{x}{8} + C$$

Aplicando la fórmula **9** en la integral 2 resulta:

$$-\frac{1}{8}\int \cos 4ax\, dx = -\frac{\operatorname{sen} 4ax}{32a} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene que:

$$\therefore \quad \int \operatorname{sen}^2 ax \cos^2 ax\, dx = \frac{x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 4ax}{32a} + C$$

5 ••• Encuentra $\int \operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}\, d\theta$.

Solución

La integral dada tiene la forma $\int \operatorname{sen}^m u \cos^n u\, du$, donde $m = 4$ y $n = 2$ y satisface la condición del caso II.

Al factorizar la función $\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}$ del integrando tenemos:

$$\int \operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}\, d\theta = \int \left(\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}\right)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}\, d\theta$$

Aplicando las fórmulas $\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\theta$ y $\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta$ resulta:

$$\int\left(\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)^2\cos^2\frac{\theta}{2}\,d\theta=\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\theta\right)^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta\right)d\theta$$

Desarrollando el binomio al cuadrado se tiene:

$$\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\theta\right)^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta\right)d\theta=\int\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{4}\cos^2\theta\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta\right)d\theta$$

Al multiplicar y simplificar se obtiene:

$$\int\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{4}\cos^2\theta\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta\right)d\theta=\underbrace{\frac{1}{8}\int d\theta}_{1}-\underbrace{\frac{1}{8}\int\cos\theta\,d\theta}_{2}$$
$$-\underbrace{\frac{1}{8}\int\cos^2\theta\,d\theta}_{3}+\underbrace{\frac{1}{8}\int\cos^3\theta\,d\theta}_{4}$$

Al resolver directamente la integral 1 por medio de la fórmula 1 resulta:

$$\frac{1}{8}\int d\theta=\frac{\theta}{8}+C$$

La integral 4 tiene la forma $\int\cos^n u\,du$, donde $n=3$ y satisface la condición del caso I.

Al factorizar el integrando se tiene: $\frac{1}{8}\int\cos^3\theta\,d\theta=\frac{1}{8}\int\cos^2\theta\cos\theta\,d\theta$

Aplicando la identidad trigonométrica $\cos^2\theta=1-\operatorname{sen}^2\theta$ resulta:

$$\frac{1}{8}\int\cos^2\theta\cos\theta\,d\theta=\frac{1}{8}\int(1-\operatorname{sen}^2\theta)\cos\theta\,d\theta$$

Multiplicando se obtiene:

$$\frac{1}{8}\int(1-\operatorname{sen}^2\theta)\cos\theta\,d\theta=\underbrace{\frac{1}{8}\int\cos\theta\,d\theta}_{4a}-\underbrace{18\int\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta}_{4b}$$

Como las integrales 2 y 4a son opuestas, se anulan.

Para la integral 3 se aplica la fórmula $\cos^2\theta=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta$ de lo que resulta:

$$-\frac{1}{8}\int\cos^2\theta\,d\theta=-\frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$

Multiplicando se obtiene:

$$-\frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta=-\underbrace{\frac{1}{16}\int d\theta}_{3a}-\underbrace{\frac{1}{16}\int\cos 2\theta\,d\theta}_{3b}$$

Al resolver directamente la integral 3*a* por medio de la fórmula **1** se obtiene:

$$-\frac{1}{16}\int d\theta = -\frac{\theta}{16} + C$$

Aplicando la fórmula **9** en la integral 3*b* resulta:

$$-\frac{1}{16}\int \cos 2\theta\, d\theta = -\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{32} + C$$

Para la integral 4*b* se aplica la fórmula **4** lo que se tiene:

$$-\frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2\theta \cos\theta\, d\theta = -\frac{\operatorname{sen}^3\theta}{24} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene que:

$$\therefore \quad \int \operatorname{sen}^4\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\, d\theta = \frac{\theta}{8} - \frac{\theta}{16} - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{32} - \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{24} + C = \frac{\theta}{16} - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{32} - \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{24} + C$$

6 ••• Encuentra $\int (1+\cos t)^3\, dt$.

Solución

Desarrollando el binomio al cubo, tenemos:

$$\int (1+\cos t)^3\, dt = \int (1 + 3\cos t + 3\cos^2 t + \cos^3 t)\, dt$$

Multiplicando se obtiene:

$$\int (1 + 3\cos t + 3\cos^2 t + \cos^3 t)\, dt = \underbrace{\int dt}_{1} + \underbrace{3\int \cos t\, dt}_{2} + \underbrace{3\int \cos^2 t\, dt}_{3} + \underbrace{\int \cos^3 t\, dt}_{4}$$

Al resolver directamente la integral 1 por medio de la fórmula **1** resulta:

$$\int dt = t + C$$

Aplicando la fórmula **9** en la integral 2 resulta: $3\int \cos t\, dt = 3 \operatorname{sen} t + C$

La integral 3 tiene la forma $\int \cos^n u\, du$ donde $n = 2$ y satisface la condición del caso II.

Aplicando la fórmula $\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t$ resulta:

$$3\int \cos^2 t = 3\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt$$

Multiplicando se obtiene:

$$3\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt = \underbrace{\frac{3}{2}\int dt}_{3a} + \underbrace{\frac{3}{2}\int \cos 2t\, dt}_{3b}$$

Al resolver directamente la integral 3*a* por medio de la fórmula **1** se tiene:

$$\frac{3}{2}\int dt = \frac{3t}{2} + C$$

Aplicando la fórmula **9** en la integral $3b$ resulta:

$$\frac{3}{2}\int \cos 2t\,dt = \frac{3\operatorname{sen} 2t}{4} + C$$

La integral 4 tiene la forma $\int \cos^n u\,du$, donde $n = 3$ y satisface la condición del caso I.

Al factorizar el integrando, tenemos: $\int \cos^3 t\,dt = \int \cos^2 t \cos t\,dt$

Aplicando la identidad trigonométrica $\cos^2 t = 1 - \operatorname{sen}^2 t$ resulta:

$$\int \cos^2 t \cos t\,dt = \int (1 - \operatorname{sen}^2 t)\cos t\,dt$$

Multiplicando se obtiene:

$$\int (1 - \operatorname{sen}^2 t)\cos t\,dt = \underbrace{\int \cos t\,dt}_{4a} - \underbrace{\int \operatorname{sen}^2 t \cos t\,dt}_{4b}$$

Al resolver directamente la integral $4b$ por medio de la fórmula **9** resulta:

$$\int \cos t\,dt = \operatorname{sen} t + C$$

Aplicando la fórmula **4** en la integral $4b$ se tiene:

$$-\int \operatorname{sen}^2 t \cos t\,dt = -\frac{\operatorname{sen}^3 t}{3} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene que:

$$\int (1+\cos)^3\,dt = t + 3\operatorname{sen} t + \frac{3t}{2} + \frac{3\operatorname{sen} 2t}{4} + \operatorname{sen} t - \frac{\operatorname{sen}^3 t}{3} + C$$

$$\therefore \quad \int (1+\cos t)^3 = \frac{5t}{2} + 4\operatorname{sen} t + \frac{3\operatorname{sen} 2t}{4} - \frac{\operatorname{sen}^3 t}{3} + C$$

7 ••• Encuentra $\int \left(\sqrt{\operatorname{sen} 2y} - \cos 2y\right)^2 dy$.

Solución

Desarrollando el binomio al cuadrado tenemos:

$$\int \left(\sqrt{\operatorname{sen} 2y} - \cos 2y\right)^2 dy = \int (\operatorname{sen} 2y - 2\operatorname{sen}^{\frac{1}{2}} 2y \cos 2y + \cos^2 2y)\,dy$$

Multiplicando se obtiene:

$$\int (\operatorname{sen} 2y - 2\operatorname{sen}^{\frac{1}{2}} 2y \cos 2y + \cos^2 2y)\,dy = \underbrace{\int \operatorname{sen} 2y\,dy}_{1} - \underbrace{2\int \operatorname{sen}^{\frac{1}{2}} 2y \cos 2y\,dy}_{2} + \underbrace{\int \cos^2 2y\,dy}_{3}$$

Aplicando la fórmula **8** en la integral 1 resulta:

$$\int \operatorname{sen} 2y\,dy = -\frac{\cos 2y}{2} + C$$

La integral 2 tiene la forma $\int \operatorname{sen}^m u \cos^n u\,du$, donde $n = 1$ y satisface la condición del caso I.

Al resolver directamente la integral 2 por medio de la fórmula **4** resulta:

$$-2\int \operatorname{sen}^{\frac{1}{2}} 2y \cos 2y\,dy = -\frac{2\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} 2y}{3} + C$$

La integral 3 tiene la forma $\int \cos^n u\, du$, donde $n = 2$ y satisface la condición del caso II.

Aplicando la fórmula $\cos^2 2y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4y$ resulta:

$$\int \cos^2 2y\, dy = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4y\right) dy$$

Multiplicando se obtiene:

$$\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4y\right) dy = \underbrace{\frac{1}{2}\int dy}_{3a} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \cos 4y\, dy}_{3b}$$

Al resolver directamente la integral $3a$ por medio de la fórmula **1** resulta:

$$\frac{1}{2}\int dy = \frac{y}{2} + C$$

Aplicando la fórmula **9** en la integral $3b$, resulta:

$$\frac{1}{2}\int \cos 4y\, dy = \frac{\operatorname{sen} 4y}{8} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene que:

$$\therefore \quad \int \left(\sqrt{\operatorname{sen} 2y} - \cos 2y\right)^2 dy = \frac{y}{2} - \frac{\cos 2y}{2} - \frac{2\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} 2y}{3} + \frac{\operatorname{sen} 4y}{8} + C$$

EJERCICIO 15

I. En equipo, comprueben las siguientes integrales de productos de potencias pares de senos y cosenos (caso II).

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. $\int \cos^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$

2. $\int \operatorname{sen}^2 y\, dy = \frac{y}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2y}{4} + C$

3. $\int \operatorname{sen}^4 z\, dz = \frac{3z}{8} - \frac{\operatorname{sen} 2z}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4z}{32} + C$

4. $\int \cos^4 x\, dx = \frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + C$

5. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx = \frac{x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + C$

6. $\int \operatorname{sen}^6 ax\, dx = \frac{5x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + \frac{3\operatorname{sen} 4ax}{64a} + \frac{\operatorname{sen}^3 2ax}{48a} + C$

7. $\int \cos^6 2x\,dx = \frac{5x}{16} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{8} + \frac{3\operatorname{sen} 8x}{128} - \frac{\operatorname{sen}^3 4x}{96} + C$

8. $\int \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}\,dx = \frac{x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{16} + C$

9. $\int \operatorname{sen}^4 ay\,dy = \frac{3y}{8} - \frac{\operatorname{sen} 2ay}{4a} + \frac{\operatorname{sen} 4ay}{32a} + C$

10. $\int \cos^2 3x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 6x}{12} + C$

11. $\int \cos^4 ax\,dx = \frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + \frac{\operatorname{sen} 4ax}{32a} + C$

12. $\int \operatorname{sen}^4 2x \cos^4 2x\,dx = \frac{3x}{128} - \frac{\operatorname{sen} 8x}{256} + \frac{\operatorname{sen} 16x}{2048} + C$

13. $\int \operatorname{sen}^2 z \cos^6 z\,dz = \frac{5z}{128} + \frac{\operatorname{sen}^3 2z}{48} - \frac{\operatorname{sen} 4z}{128} - \frac{\operatorname{sen} 8z}{1024} + C$

14. $\int \left(\sqrt{\cos\theta} - 2\operatorname{sen}\theta\right)^2 d\theta = 2\theta + \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} 2\theta + \frac{8\cos^{\frac{3}{2}}\theta}{3} + C$

15. $\int \operatorname{sen}^4 t \cos^2 t\,dt = \frac{t}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4t}{64} - \frac{\operatorname{sen}^3 2t}{48} + C$

16. $\int (2 - \operatorname{sen} x)^2\,dx = \frac{9x}{2} + 4\cos x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$

17. $\int \operatorname{sen}^2 2x \cos^4 2x\,dx = \frac{x}{16} + \frac{\operatorname{sen}^3 4x}{96} - \frac{\operatorname{sen} 8x}{128} + C$

18. $\int (\operatorname{sen}^2 z + \cos z)^2\,dz = \frac{7z}{8} + \frac{2\operatorname{sen}^3 z}{3} + \frac{\operatorname{sen} 4z}{32} + C$

II. Encuentra la primitiva de cada una de las siguientes integrales y comprueba los resultados por diferenciación y en plenaria discute tus resultados.

1. $\int \operatorname{sen}^6 mx\,dx$

2. $\int \operatorname{sen}^2 3x\,dx$

3. $\int \cos^4 ax\,dx$

4. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,dx$

5. $\int \operatorname{sen}^4 \frac{x}{a} \cos^2 \frac{x}{a}\,dx$

6. $\int \operatorname{sen}^6 2x \cos^6 2x\,dx$

7. $\int (1+\operatorname{sen} x)^3\, dx$

8. $\int \left(\sqrt{\operatorname{sen} ax} - \cos ax\right)^2 dx$

9. $\int \left(\sqrt{\cos 2y} - 2\operatorname{sen} 2y\right)^2 dy$

10. $\int (3-\cos t)^2\, dt$

11. $\int (\cos^2 x + \operatorname{sen} x)^2\, dx$

12. $\int \operatorname{sen}^2 \pi x \cos^2 \pi x\, dx$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Integración de productos de funciones seno y coseno con diferentes argumentos en la misma variable

Caso III

Integrales de la forma $\int \operatorname{sen} mu \cos nu\, du$, $\int \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nu\, du$, $\int \cos mu \cos nu\, du$ y $\int \cos mu \operatorname{sen} nu\, du$, donde m y n son enteros tales que $m > n$.

En este caso, la integral trigonométrica dada se puede transformar, mediante sustituciones trigonométricas, en una intégral inmediata que contiene la suma o diferencia de senos y cosenos.

Identidades trigonométricas por aplicar

1. $\operatorname{sen} mu \cos nu = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(m+n)u + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(m-n)u$
2. $\operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nu = -\frac{1}{2}\cos(m+n)u + \frac{1}{2}\cos(m-n)u$
3. $\cos mu \cos nu = \frac{1}{2}\cos(m+n)u + \frac{1}{2}\cos(m-n)u$
4. $\cos mu \operatorname{sen} nu = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(m+n)u - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(m-n)u$

Fórmulas de integración directa

1. $\int \operatorname{sen} mu \cos nu\, du = -\frac{\cos(m+n)u}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)u}{2(m-n)} + C$
2. $\int \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nu\, du = -\frac{\operatorname{sen}(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)u}{2(m-n)} + C$
3. $\int \cos mu \cos nu\, du = \frac{\operatorname{sen}(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)u}{2(m-n)} + C$
4. $\int \cos mu \operatorname{sen} nu\, du = -\frac{\cos(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\cos(m-n)u}{2(m-n)} + C$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra $\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x\, dx$.

Solución

Se debe ordenar el argumento de la integral propuesta, es decir:

$$\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x\, dx = \int \cos 5x \operatorname{sen} 3x\, dx$$

Ahora, la integral tiene la forma $\int \cos mu \operatorname{sen} nu\, du$, donde $m = 5$ y $n = 3$ y satisface la condición del caso III.

a) **Solución por sustitución trigonométrica**

Aplicando la identidad 1, $\cos mu \operatorname{sen} nu = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(m+n)u - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(m-n)u$ resulta:

$$\int \cos 5x \operatorname{sen} 3x\, dx = \int \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}(5+3)x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(5-3)x\right] dx$$

Multiplicando se obtiene:

$$\int \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}(5+3)x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(5-3)x\right] dx = \underbrace{\frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 8x\, dx}_{1} - \underbrace{\frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2x\, dx}_{2}$$

Aplicando la fórmula 8 en las integrales 1 y 2, resulta:

$$\frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 8x\, dx = -\frac{\cos 8x}{16} + C \text{ y } -\frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2x\, dx = \frac{\cos 2x}{4} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene que:

$$\therefore \quad \int \operatorname{sen} 3x \cos 5x\, dx = -\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4} + C$$

b) **Solución por fórmula de integración directa**

Aplicando la fórmula 4 de integración directa resulta:

$$\int \cos 5x \operatorname{sen} 3x\, dx = -\frac{\cos(5+3)x}{2(5+3)} + \frac{\cos(5-3)x}{2(5-3)} + C$$

$$\therefore \quad \int \operatorname{sen} 3x \cos 5x\, dx = -\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4} + C$$

2 Encuentra $\int \operatorname{sen} 4z \operatorname{sen} 3z\, dz$.

Solución

La integral propuesta tiene la forma $\int \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nu\, du$, donde $m = 4$ y $n = 3$ y satisface la condición del caso III.

a) **Solución por sustitución trigonométrica**

Aplicando la identidad **2**, $\operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nu = -\frac{1}{2}\cos(m+n)u + \frac{1}{2}\cos(m-n)u$ resulta:

$$\int \operatorname{sen}4z \operatorname{sen}3z\,dz = \int\left[-\frac{1}{2}\cos(4+3)z + \frac{1}{2}\cos(4-3)z\right]dz$$

Multiplicando se obtiene:

$$\int\left[-\frac{1}{2}\cos(4+3)z + \frac{1}{2}\cos(4-3)z\right]dz = \underbrace{-\frac{1}{2}\int \cos7z\,dz}_{1} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \cos z\,dz}_{2}$$

Aplicando la fórmula **9** en las integrales 1 y 2 resulta:

$$-\frac{1}{2}\int \cos7z\,dz = -\frac{\operatorname{sen}7z}{14} + C \text{ y } \frac{1}{2}\int \cos z\,dz = \frac{\operatorname{sen} z}{2} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene que:

$$\therefore \quad \int \operatorname{sen}4z \operatorname{sen}3z\,dz = -\frac{\operatorname{sen}7z}{14} + \frac{\operatorname{sen} z}{2} + C$$

b) **Solución por fórmula de integración directa**

Aplicando la fórmula **2** de integración directa resulta:

$$\int \operatorname{sen}4z \operatorname{sen}3z\,dz = -\frac{\operatorname{sen}(4+3)z}{2(4+3)} + \frac{\operatorname{sen}(4-3)z}{2(4-3)} + C$$

$$\therefore \quad \int \operatorname{sen}4z \operatorname{sen}3z\,dz = -\frac{\operatorname{sen}7z}{14} + \frac{\operatorname{sen} z}{2} + C$$

3 ••• Encuentra $\int \cos 4t \cos 2t\,dt$.

Solución

La integral propuesta tiene la forma $\int \cos mu \cos nu\,du$, donde $m = 4$ y $n = 1$ y satisface la condición del caso III.

a) **Solución por sustitución trigonométrica**

Aplicando la identidad **3**, $\cos mu \cos nu = \frac{1}{2}\cos(m+n)u + \frac{1}{2}\cos(m-n)u$ resulta:

$$\int \cos4t \cos t\,dt = \int\left[\frac{1}{2}\cos(4+1)t + \frac{1}{2}\cos(4-1)t\right]dt$$

Multiplicando se obtiene:

$$\int\left[\frac{1}{2}\cos(4+1)t + \frac{1}{2}\cos(4-1)t\right]dt = \underbrace{\frac{1}{2}\int \cos5t\,dt}_{1} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \cos3t\,dt}_{2}$$

Aplicando la fórmula **9** en las integrales 1 y 2 resulta:

$$\frac{1}{2}\int \cos5t\,dt = \frac{\operatorname{sen}5t}{10} + C \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}\int \cos3t\,dt = \frac{\operatorname{sen}3t}{6} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene que:

$$\therefore \quad \int \cos 4t \cos t \, dt = \frac{\operatorname{sen} 5t}{10} + \frac{\operatorname{sen} 3t}{6} + C$$

b) **Solución por fórmula de integración directa**

Aplicando directamente la fórmula **3** resulta:

$$\int \cos 4t \cos t \, dt = \frac{\operatorname{sen}(4+1)t}{2(4+1)} + \frac{\operatorname{sen}(4-1)t}{2(4-1)} + C$$

$$\therefore \quad \int \cos 4t \cos t \, dt = \frac{\operatorname{sen} 5t}{10} + \frac{\operatorname{sen} 3t}{6} + C$$

4 Encuentra $\int \operatorname{sen} 7y \cos 3y \, dy$.

Solución

La integral propuesta tiene la forma $\int \operatorname{sen} mu \cos nu \, du$, donde $m = 7$ y $n = 3$ y satisface la condición del caso III.

a) **Solución por sustitución trigonométrica**

Aplicando la identidad **1**, $\operatorname{sen} mu \cos nu = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(m+n)u + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(m-n)u$ resulta:

$$\int \operatorname{sen} 7y \cos 3y \, dy = \int \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}(7+3)y + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(7-3)y\right] dy$$

Multiplicando se obtiene:

$$\int \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}(7+3)y + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(7-3)y\right] dy = \underbrace{\frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 10y \, dy}_{1} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 4y \, dy}_{2}$$

Aplicando la fórmula **8** en las integrales 1 y 2, resulta:

$$\frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 10y \, dy = -\frac{\cos 10y}{20} + C \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 4y \, dy = -\frac{\cos 4y}{8} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene que:

$$\therefore \quad \int \operatorname{sen} 7y \cos 3y \, dy = -\frac{\cos 10y}{20} - \frac{\cos 4y}{8} + C$$

b) **Solución por fórmula de integración directa**

Aplicando directamente la fórmula **1** resulta:

$$\int \operatorname{sen} 7y \cos 3y \, dy = -\frac{\cos(7+3)y}{2(7+3)} - \frac{\cos(7-3)y}{2(7-3)} + C$$

$$\therefore \quad \int \operatorname{sen} 7y \cos 3y \, dy = -\frac{\cos 10y}{20} - \frac{\cos 4y}{8} + C$$

Solución de integrales combinando los casos II y III

EJEMPLO

Ejemplo 1 • Encuentra $\int (\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 6x)^2\, dx$.

Solución

Desarrollando el binomio al cuadrado tenemos:

$$\int (\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 6x)^2\, dx = \int (\operatorname{sen}^2 2x - 2\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 6x + \operatorname{sen}^2 6x)\, dx$$

Multiplicando se obtiene:

$$\int (\operatorname{sen}^2 2x - 2\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 6x + \operatorname{sen}^2 6x)\, dx = \underbrace{\int \operatorname{sen}^2 2x\, dx}_{1} - \underbrace{2\int \operatorname{sen} 6x \operatorname{sen} 2x\, dx}_{2} + \underbrace{\int \operatorname{sen}^2 6x\, dx}_{3}$$

La integral 1 tiene la forma $\int \operatorname{sen}^m u\, du$, donde $m = 2$ y satisface la condición del caso II.

Aplicando la fórmula $\operatorname{sen}^2 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x$ resulta:

$$\int \operatorname{sen}^2 2x\, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$

Multiplicando se obtiene:

$$\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx = \underbrace{\frac{1}{2}\int dx}_{1a} - \underbrace{\frac{1}{2}\int \cos 4x\, dx}_{1b}$$

Al resolver directamente la integral $1a$ por medio de la fórmula **1** resulta:

$$\frac{1}{2}\int dx = \frac{x}{2} + C$$

Aplicando la fórmula **9** en la integral $1b$ resulta:

$$-\frac{1}{2}\int \cos 4x\, dx = -\frac{\operatorname{sen} 4x}{8} + C$$

La integral 2 tiene la forma $\int \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nu\, du$, donde $m = 6$ y $n = 2$ y satisface la condición del caso III.
Aplicando directamente la fórmula **2** resulta:

$$-2\int \operatorname{sen} 6x \operatorname{sen} 2x\, dx = -2\left[-\frac{\operatorname{sen}(6+2)x}{2(6+2)} + \frac{\operatorname{sen}(6-2)x}{2(6-2)}\right] + C$$

$$-2\int \operatorname{sen} 6x \operatorname{sen} 2x\, dx = \frac{\operatorname{sen} 8x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + C$$

La integral 3 tiene la forma $\int \operatorname{sen} u\, du$, donde $m = 2$ y satisface la condición del caso II.

Aplicando la fórmula $\operatorname{sen}^2 6x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 12x$ resulta:

$$\int \operatorname{sen}^2 6x\, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 12x\right) dx$$

Multiplicando se obtiene:

$$\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 12x\right) dx = \underbrace{\frac{1}{2}\int dx}_{3a} - \underbrace{\frac{1}{2}\int \cos 12x\, dx}_{3b}$$

Al resolver directamente la integral $3a$ por medio de la fórmula **1** resulta:

$$\frac{1}{2}\int dx = \frac{x}{2} + C$$

Aplicando la fórmula **9** en la integral $3b$ resulta:

$$-\frac{1}{2}\int \cos 12x\, dx = -\frac{\operatorname{sen} 12x}{24} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene que:

$$\int (\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 6x)^2\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 8x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 12x}{24} + C$$

$$\therefore \quad \int (\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 6x)^2\, dx = x - \frac{3\operatorname{sen} 4x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 8x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 12x}{24} + C$$

EJERCICIO 16

I. Comprueba las siguientes integrales de productos de funciones seno y coseno con diferentes argumentos en la misma variable (caso III).

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. $\int \cos 2x \operatorname{sen} 4x\, dx = -\frac{\cos 6x}{12} - \frac{\cos 2x}{4} + C$

2. $\int \cos\theta \cos 2\theta\, d\theta = \frac{\operatorname{sen} 3\theta}{6} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{2} + C$

3. $\int \cos 3x \cos 2x\, dx = \frac{\operatorname{sen} 5x}{10} + \frac{\operatorname{sen} x}{2} + C$

4. $\int \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 4t\, dt = -\frac{\operatorname{sen} 5t}{10} + \frac{\operatorname{sen} 3t}{6} + C$

5. $\int \operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 3x\, dx = -\frac{\operatorname{sen} 7x}{14} + \frac{\operatorname{sen} x}{2} + C$

6. $\int \operatorname{sen} 2y \cos 3y\, dy = -\frac{\cos 5y}{10} + \frac{\cos y}{2} + C$

7. $\int \operatorname{sen} ax \cos bx\, dx = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + C$

8. $\int \cos mx \operatorname{sen} nx\, dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C$

9. $\int (\operatorname{sen} x + \cos 2x)^2\, dx = x + \cos x - \frac{\cos 3x}{3} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{8} + C$

10. $\int (\cos y + 2\cos 2y)^2\, dx = \frac{5y}{2} + 2\operatorname{sen} y + \frac{\operatorname{sen} 4y}{2} + \frac{2\operatorname{sen} 3y}{3} + \frac{\operatorname{sen} 2y}{4} + C$

11. $\int (\cos 2z - \operatorname{sen} 3z)^2\, dz = z + \frac{\operatorname{sen} 4z}{8} - \cos z - \frac{\cos 5z}{5} - \frac{\operatorname{sen} 6z}{12} + C$

12. $\int (\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} x)^2\, dx = x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} - \frac{\operatorname{sen} 6x}{6} - \frac{\operatorname{sen} 10x}{20} + C$

II. Encuentra cada una de las siguientes integrales y comprueba los resultados por diferenciación y en plenaria discute tus resultados.

1. $\int \operatorname{sen} 6x \operatorname{sen} 4x\, dx$
2. $\int \cos 8y \cos 5y\, dy$
3. $\int \operatorname{sen} 4t \cos 6t\, dt$
4. $\int \cos x \cos 3x\, dx$
5. $\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x\, dx$
6. $\int \operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 7x\, dx$
7. $\int (\operatorname{sen} 3z - \operatorname{sen} 2z)^2\, dz$
8. $\int (\cos nx - \operatorname{sen} mx)^2\, dx$
9. $\int (\operatorname{sen} by - \cos ay)^2\, dy$
10. $\int (3\cos x + 2\cos 5x)^2\, dx$
11. $\int (\operatorname{sen} 4\theta + 3\operatorname{sen} \theta)^2\, d\theta$
12. $\int (2\cos 6x + \cos 2x)^2\, dx$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Integración de potencias de la función tangente o cotangente

Caso IV

Integrales de la forma $\int \tan^n u\, du$ o $\int \cot^n u\, du$, donde n es un entero positivo.

En este caso, la integral trigonométrica dada se puede transformar en una integral inmediata mediante sustituciones trigonométricas sencillas.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra $\int \tan^3 2z\, dz$.

Solución

La integral propuesta tiene la forma $\int \tan^n u\, du$, donde $n = 3$ y satisface la condición del caso IV.

Al factorizar el integrando tenemos: $\int \tan^3 2z\, dz = \int \tan^2 2z \tan 2z\, dz$.

Aplicando la identidad $\tan^2 2z = \sec^2 2z - 1$ resulta:

$$\int \tan^2 2z \tan 2z\, dz = \int (\sec^2 2z - 1)\tan 2z\, dz$$

Multiplicando se obtiene:

$$\int (\sec^2 2z - 1)\tan 2z\, dz = \underbrace{\int \tan 2z \sec^2 2z\, dz}_{1} - \underbrace{\int \tan 2z\, dz}_{2}$$

Al resolver directamente la integral 1 por medio de la fórmula **4** resulta:

$$\int \tan 2z \sec^2 2z\, dz = \frac{\tan^2 2z}{4} + C$$

Aplicando la fórmula **14** en la integral 2 resulta:

$$-\int \tan 2z\, dz = \frac{1}{2}\ln \cos 2z + C = -\frac{1}{2}\ln \sec 2z + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene que:

$$\therefore \quad \int \tan^3 2z\, dz = \frac{\tan^2 2z}{4} + \frac{1}{2}\ln \cos 2z + C = \frac{\tan^2 2z}{4} + \frac{1}{2}\ln \sec 2z + C$$

2 Encuentra $\int \cot^5 \frac{x}{2} dx$.

Solución

La integral dada tiene la forma $\int \cot^n u\, du$, donde $n = 5$ y satisface la condición del caso IV.

Al factorizar el integrando tenemos: $\int \cot^5 \frac{x}{2} dx = \int \cot^3 \frac{x}{2} \cot^2 \frac{x}{2} dx$.

Aplicando la identidad $\cot^2 \frac{x}{2} = \cot^2 \frac{x}{2} - 1$ resulta:

$$\int \cot^3 \frac{x}{2} \cot^2 \frac{x}{2} dx = \int \cot^3 \frac{x}{2}\left(\csc^2 \frac{x}{2} - 1\right) dx$$

Multiplicando se obtiene:

$$\int \cot^3 \frac{x}{2}\left(\csc^2 \frac{x}{2} - 1\right) dx = \underbrace{\int \cot^3 \frac{x}{2} \csc^2 \frac{x}{2} dx}_{1} - \underbrace{\int \cot^3 \frac{x}{2} dx}_{2}$$

Aplicando la fórmula **4** en la integral 1 resulta:

$$\int \cot^3\frac{x}{2}\csc^2\frac{x}{2}\,dx = -\frac{\cot^4\frac{x}{2}}{2}+C$$

La integral 2 tiene la forma $\int \cot^n u\,du$, donde $n = 3$ y satisface la condición del caso IV.

Para su solución se factoriza el integrando de lo que resulta:

$$-\int \cot^3\frac{x}{2}\,dx = -\int \cot^3\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}\,dx$$

Aplicando la identidad $\cot^2\frac{x}{2}\,dx = \csc^2\frac{x}{2}-1$ resulta:

$$-\int \csc^2\frac{x}{2}\csc\frac{x}{2}\,dx = -\int\left(\csc^2\frac{x}{2}-1\right)\cot\frac{x}{2}\,dx$$

Multiplicando se obtiene:

$$-\int\left(\csc^2\frac{x}{2}-1\right)\cot\frac{x}{2}\,dx = -\underbrace{\int \cot\frac{x}{2}\csc^2\frac{x}{2}\,dx}_{2a}+\underbrace{\int \cot\frac{x}{2}\,dx}_{2b}$$

Aplicando la fórmula **4** en la integral $2a$ resulta:

$$-\int \cot\frac{x}{2}\csc^2\frac{x}{2}\,dx = \cot^2\frac{x}{2}+C$$

Al resolver directamente la integral $2b$ por medio de la fórmula **15** resulta:

$$\int \cot\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\operatorname{sen}\frac{x}{2}+C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral, tenemos que:

$$\therefore\quad \int \cot^5\frac{x}{2}\,dx = -\frac{\cot^4\frac{x}{2}}{2}+\cot^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\operatorname{sen}\frac{x}{2}+C$$

3 ••• Encuentra $\int \tan^4 ax\,dx$.

Solución

La integral propuesta tiene la forma $\int \tan^n u\,du$, donde $n = 4$ y satisface la condición del caso IV.

Al factorizar el integrando tenemos: $\int \tan^4 ax\,dx = \int \tan^2 ax\tan^2 ax\,dx$

Aplicando la identidad $\tan^2 ax = \sec^2 ax - 1$ resulta:

$$\int \tan^2 ax\tan^2 ax\,dx = \int \tan^2 ax(\sec^2 ax-1)\,dx$$

Multiplicando se obtiene: $\int \tan^2 ax(\sec^2 ax - 1)\,dx = \underbrace{\int \tan^2 ax \sec^2 ax\,dx}_{1} - \underbrace{\int \tan^2 ax\,dx}_{2}$

Al resolver directamente la integral 1 por medio de la fórmula **4** resulta:

$$\int \tan^2 ax \sec^2 ax\,dx = \frac{\tan^3 ax}{3a} + C$$

La integral 2 tiene la forma $\int \tan^n u\,du$, donde $n = 2$ y satisface la condición del caso IV.

Para su solución se aplica la identidad $\tan^2 ax = \sec^2 ax - 1$ lo que resulta:

$$-\int \tan^2 ax\,dx = -\int (\sec^2 ax - 1)\,dx$$

Multiplicando se obtiene: $-\int (\sec^2 ax - 1)\,dx = -\underbrace{\int \sec^2 ax\,dx}_{2a} + \underbrace{\int dx}_{2b}$

Aplicando la fórmula **10** en la integral $2a$ resulta:

$$-\int \sec^2 ax\,dx = -\frac{\tan ax}{a} + C$$

Al resolver directamente la integral $2b$ por medio de la fórmula **1** resulta:

$$\int dx = x + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral, tenemos que:

$$\therefore \quad \int \tan^4 ax\,dx = \frac{\tan^3 ax}{3a} - \frac{\tan ax}{a} + x + C$$

4 ●●·Encuentra $\int \cot^6 3\theta\,d\theta$.

Solución

La integral dada tiene la forma $\int \cot^n u\,du$, donde $n = 6$ y satisface la condición del caso IV.

Al factorizar el integrando tenemos: $\int \cot^6 3\theta\,d\theta = \int \cot^4 3\theta \cot^2 3\theta\,d\theta$

Aplicando la identidad $\cot^2 3\theta = \csc^2 3\theta - 1$ resulta:

$$\int \cot^4 3\theta \cot^2 3\theta\,d\theta = \int \csc^4 3\theta \cot^2 3\theta - 1\,d\theta$$

Multiplicando se obtiene $\int \cot^4 3\theta(\cot^2 3\theta - 1)d\theta = \underbrace{\int \cot^4 3\theta \csc^2 3\theta\,d\theta}_{1} - \underbrace{\int \cot^4 3\theta\,d\theta}_{2}$

Al resolver directamente la integral 1 por medio de la fórmula **4** resulta:

$$\int \cot^4 3\theta \csc^2 3\theta\,d\theta = -\frac{\cot^5 3\theta}{15} + C$$

La integral 2 tiene la forma $\int \cot^n u\,du$, donde $n = 4$ y satisface la condición del caso IV.

Para su solución se factoriza el integrando lo que resulta:

$$-\int \cot^4 3\theta\, d\theta = -\int \cot^2 3\theta \cot^2 3\theta\, d\theta$$

Aplicando la identidad $\cot^2 3\theta = \csc^2 3\theta - 1$ resulta:

$$-\int \cot^2 3\theta \cot^2 3\theta\, d\theta = -\int \cot^2 3\theta(\csc 3\theta - 1)\, d\theta$$

Multiplicando se obtiene:

$$-\int \cot^2 3\theta(\csc 3\theta - 1)\, d\theta = \underbrace{-\int \cot^2 3\theta \csc^2 3\theta\, d\theta}_{2a} + \underbrace{\int \cot^2 3\theta\, d\theta}_{2b}$$

Al resolver directamente la integral $2a$ por medio de la fórmula **4** resulta:

$$-\int \cot^2 3\theta \csc^2 3\theta\, d\theta = \frac{\cot^3 3\theta}{9} + C$$

La integral $2b$ tiene la forma $\int \cot^n u\, du$, donde $n = 2$ y satisface la condición del caso IV. Para su solución se aplica la identidad $\cot^2 3\theta = \csc^2 3\theta - 1$ lo que resulta:

$$\int \cot^2 3\theta\, d\theta = \int (\csc^2 3\theta - 1)\, d\theta$$

Multiplicando se obtiene: $\int (\csc^2 3\theta - 1)\, d\theta = \underbrace{\int \csc^2 3\theta\, d\theta}_{\text{I}} - \underbrace{\int d\theta}_{\text{II}}$

Al resolver directamente la integral I por medio de la fórmula **11** resulta:

$$\int \csc^2 3\theta\, d\theta = -\frac{\cot 3\theta}{3} + C$$

Aplicando la fórmula **1** en la integral II resulta: $-\int d\theta = -\theta + C$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene que:

$$\therefore \quad \int \cot^6 3\theta\, d\theta = -\frac{\cot^5 3\theta}{15} + \frac{\cot^3 3\theta}{9} - \frac{\cot 3\theta}{3} - \theta + C$$

5 ••• Encuentra $\int \frac{dx}{\cot^2 x}$.

Solución

Aplicando la identidad $\int \frac{1}{\cot^2 x} = \tan^2 x$, resulta $\int \frac{dx}{\cot^2 x} = \int \tan^2 x\, dx$

La integral resultante tiene la forma $\int \tan^n u\, du$, donde $n = 2$ y satisface la condición del caso IV.

Aplicando la identidad $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ resulta:

$$\int \tan^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\, dx$$

Multiplicando se obtiene: $$\int (\sec^2 x - 1)\, dx = \underbrace{\int \sec^2 x\, dx}_{1} - \underbrace{\int dx}_{2}$$

Al resolver directamente la integral 1 por medio de la fórmula **10** resulta:

$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$$

Aplicando la fórmula **1** en la integral 2 resulta:

$$-\int dx = -x + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene que:

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{\cot^2 x} = \tan x - x + C$$

EJERCICIO 17

I. Comprueba las siguientes integrales de potencias de la función tangente o cotangente (caso IV).

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. $\int \tan^3\theta\, d\theta = \frac{\tan^2\theta}{2} + \ln\cos\theta + C$

2. $\int \cot^3 \frac{z}{3}\, dz = -\frac{3\cot^2 \frac{z}{3}}{2} - 3\ln \operatorname{sen}\frac{z}{3} + C$

3. $\int \tan^5 3x\, dx = \frac{\tan^4 3x}{12} - \frac{\tan^2 3x}{6} + \frac{1}{3}\ln\sec 3x + C$

4. $\int \cot^5 at\, dt = -\frac{\cot^4 at}{4a} + \frac{\cot^2 at}{2a} + \frac{1}{a}\ln \operatorname{sen} at + C$

5. $\int \frac{dy}{\cot^4 y} = \frac{\tan^3 y}{3} + \tan y + y + C$

6. $\int \tan^6 2x\, dx = \frac{\tan^5 2x}{10} - \frac{\tan^3 2x}{6} + \frac{\tan 2x}{2} - x + C$

7. $\int \frac{dx}{\tan^3 x} = -\frac{\cot^2 x}{2} - \ln \operatorname{sen} x + C$

8. $\int \cot^6 \frac{x}{2} dx = -\frac{2\cot^5 \frac{x}{2}}{5} + \frac{2\cot^3 \frac{x}{2}}{3} - 2\cot^3 \frac{x}{2} - x + C$

9. $\int \tan^3 5x\, dx = \frac{\tan^2 5x}{10} + \frac{1}{5} \ln \cos 5x + C$

10. $\int \cot^4 3z\, dz = -\frac{\cot^3 3z}{9} + \frac{\cot 3z}{3} + z + C$

II. En equipo de dos personas, encuentren cada una de las siguientes integrales y comprueben los resultados por diferenciación.

1. $\int \tan^4 \frac{x}{2} dx$
2. $\int \cot^6 2t\, dt$
3. $\int \cot^3 (a - bx)\, dx$
4. $\int \cot^8 \theta\, d\theta$
5. $\int (\cot^3 z + \cot^5 z)\, dz$
6. $\int (1 + \cot x)^3\, dx$
7. $\int (1 + \tan\theta)^3\, d\theta$
8. $\int \left(\frac{\tan x}{\cot x}\right)^3 dx$
9. $\int \left(\frac{\cot\theta}{\tan\theta}\right)^2 d\theta$
10. $\int (\tan 2x - \cot 2x)^2\, dx$
11. $\int (\cot bt - \tan bt^4)^3\, dt$
12. $\int (\tan^2 my + \tan^4 my)\, dy$
13. $\int \tan^5 (m + nx)\, dx$
14. $\int \tan^7 x\, dx$
15. $\int (\cot^2 2x + \cot^4 2x)\, dx$
16. $\int (\tan^3\theta + \tan^5\theta)\, d\theta$
17. $\int \frac{\csc^4 x}{\cot^2 x} dx$
18. $\int \frac{\sec^4 x}{\tan^2 x} dx$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Integración de potencias de la función secante o cosecante

Caso V

Integrales de la forma $\int \sec^n u\, du$ o $\int \csc^n u\, du$, donde n es un número entero positivo y par.

En este caso, la integral trigonométrica dada se puede transformar en una integral inmediata mediante sustituciones trigonométricas sencillas.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra $\int \sec^6 ax\,dx$.

Solución

La integral propuesta tiene la forma $\int \sec^n u\,du$, donde $n = 6$ y satisface la condición del caso V.

Al factorizar el integrando tenemos: $\int \sec^6 ax\,dx = \int (\sec^2 ax)^2 \sec^2 ax\,dx$

Aplicando la identidad $\sec^2 ax = 1 + \tan^2 ax$ resulta:

$$\int (\sec^2 ax)^2 \sec^2 ax\,dx = \int (1+\tan^2 ax)^2 \sec^2 ax\,dx$$

Desarrollando el binomio al cuadrado tenemos:

$$\int (1+\tan^2 ax)^2 \sec^2 ax\,dx = \int (1+2\tan^2 ax+\tan^4 ax)\sec^2 ax\,dx$$

Multiplicando se obtiene:

$$\int (1+2\tan^2 ax+\tan^4 ax)\sec^2 ax\,dx = \underbrace{\int \sec^2 ax\,dx}_{1} + \underbrace{2\int \tan^2 ax\sec^2 ax\,dx}_{2} + \underbrace{\int \tan^4 ax\sec^2 ax\,dx}_{3}$$

Al resolver directamente la integral 1 por medio de la fórmula **10** resulta:

$$\int \sec^2 ax\,dx = \frac{\tan ax}{a} + C$$

Aplicando la fórmula **4** en las integrales 2 y 3 resulta:

$$2\int \tan^2 ax\sec^2 ax\,dx = \frac{2\tan^3 ax}{3a} + C \qquad \int \tan^4 ax\sec^2 ax\,dx = \frac{\tan^5 ax}{5a} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene que:

$$\therefore \quad \int \sec^6 ax\,dx = \frac{\tan ax}{a} + \frac{2\tan^3 ax}{3a} + \frac{\tan^5 ax}{5a} + C$$

2 Encuentra $\int \csc^4 2z\,dz$.

Solución

La integral dada tiene la forma $\int \csc^n u\,du$, donde $n = 4$ y satisface la condición del caso V.

Al factorizar el integrando tenemos: $\int \csc^4 2z\,dz = \int \csc^2 2z\csc^2 2z\,dz$

Aplicando la identidad $\csc^2 2z = 1 + \cot^2 2z$ resulta:

$$\int \csc^2 2z\csc^2 2z\,dz = \int \csc^2 2z(1+\cot^2 2z)\,dz$$

Multiplicando se obtiene:

$$\int \csc^2 2z(1+\cot^2 2z)\,dz = \underbrace{\int \csc^2 2z\,dz}_{1} + \underbrace{\int \cot^2 2z \csc^2 dz}_{2}$$

Aplicando la fórmula **11** en la integral 1 resulta:

$$\int \csc^2 2z\,dz = -\frac{\cot 2z}{2} + C$$

Al resolver directamente la integral 2 por medio de la fórmula **4** resulta:

$$\int \cot^2 2z \csc^2 2z\,dz = -\frac{\cot^3 2z}{6} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene que:

$$\therefore \quad \int \csc^4 2z\,dz = -\frac{\cot 2z}{2} - \frac{\cot^3 2z}{6} + C$$

3 Encuentra $\int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$.

Solución

Aplicando la identidad $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} = \csc^2\theta$ resulta:

$$\int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \int \csc^2\theta\,d\theta$$

La integral resultante tiene la forma $\int \csc^n u\,du$, donde $n = 2$ y satisface la condición del caso V. Aplicando la fórmula **11** en dicha integral, resulta:

$$\therefore \quad \int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \int \csc^2\theta\,d\theta = -\cot\theta + C$$

EJERCICIO 18

I. Comprueba las siguientes integrales de potencias de la función secante o cosecante (caso V).

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas	
Competencias disciplinares	

1. $\int \csc^4 \frac{t}{4}\,dt = -4\cot\frac{t}{4} - \frac{4\cot^3 \frac{1}{4}}{3} + C$

2. $\int \sec^6 x\,dx = \tan x + \frac{2\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + C$

3. $\int \csc^6 \frac{z}{2}\,dz = -2\cot\frac{z}{2} - \frac{4\cot^3\frac{z}{2}}{3} - \frac{2\cot^5\frac{z}{2}}{5} + C$

4. $\int \sec^4 \frac{y}{2} dy = \frac{2\tan^3 \frac{y}{2}}{3} + 2\tan\frac{y}{2} + C$

5. $\int \sec^4 2\theta \, d\theta = \frac{\tan 2\theta}{2} + \frac{\tan^3 2\theta}{6} + C$

6. $\int \csc^6 z \, dz = -\cot z - \frac{2\cot^3 z}{3} - \frac{\cot^5 z}{5} + C$

7. $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C$

8. $\int \frac{dz}{\cos^6 z} = \frac{\tan^5 z}{5} + \frac{2\tan^3 z}{3} + \tan z + C$

9. $\int \csc^2 \frac{3x}{2} dx = -\frac{2\cot \frac{3x}{2}}{3} + C$

10. $\int \sec^2(a - bx)\, dx = -\frac{\tan(a - bx)}{b} + C$

II. Encuentra cada una de las siguientes integrales y comprueba los resultados por diferenciación y en plenaria discute tus resultados.

1. $\int (\sec x + \csc x)^2 \, dx$
2. $\int (\sec^2 x - \csc^2 x)^2 \, dx$
3. $\int (\csc^2\theta + \sec^2\theta)^3 \, d\theta$
4. $\int (\text{sen}^2 x - \csc^2 x)^2 \, dx$
5. $\int (\cos^2 x + \sec^2 x)^2 \, dx$
6. $\int \csc^4 3z \, dx$
7. $\int \sec^4 my \, dy$
8. $\int \csc^8 x \, dx$
9. $\int \sec^8 x \, dx$
10. $\int t^2 \sec^2 t^3 \, dt$
11. $\int \csc^4 6x \, dx$
12. $\int \sec^6 4x \, dx$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Integración de productos de potencias de tangentes y secantes o cotangentes y cosecantes

Caso VI

Integrales de la forma $\int \tan^m u \sec^n u\, du$ o $\int \cot^m u \csc^n u\, du$, donde n es un número entero positivo par y m es un número positivo impar.

En este caso, la integral trigonométrica dada puede integrarse de forma inmediata mediante reducciones trigonométricas sencillas.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra $\int \tan^4 3x \sec^2 3x\, dx$.

Solución

La integral propuesta tiene la forma $\int \tan^m u \sec^n u\, du$, donde $n = 2$ y satisface la condición del caso VI.

Aplicando directamente la fórmula **4** en dicha integral resulta:

$$\therefore \quad \int \tan^4 3x \sec^2 3x\, dx = \frac{\tan^5 3x}{15} + C$$

2 Encuentra $\int \cot^5 2z \csc^2 2z\, dz$.

Solución

La integral dada tiene la forma $\int \cot^m u \csc^n u\, du$, donde $m = 5$ y $n = 2$ y ambos valores satisfacen la condición del caso VI.

Aplicando directamente la fórmula **4** en dicha integral resulta:

$$\therefore \quad \int \cot^5 2z \csc^2 2z\, dz = -\frac{\cot^6 2z}{12} + C$$

3 Encuentra $\int \tan^3\theta \sec^{\frac{5}{2}}\theta\, d\theta$.

Solución

La integral propuesta tiene la forma $\int \tan^m u \sec^n u\, du$, donde $m = 3$ y satisface la condición del caso VI.

Al factorizar en el integrando tenemos:

$$\int \tan^3\theta \sec^{\frac{5}{2}}\theta\, d\theta = \int \tan^2\theta \sec^{\frac{5}{2}}\theta \tan\theta\, d\theta$$

Aplicando la identidad $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$ resulta:

$$\int \tan^2\theta \sec^{\frac{5}{2}}\theta \tan\theta\, d\theta = \int (\sec^2\theta - 1)\sec^{\frac{5}{2}}\theta \tan\theta\, d\theta$$

Multiplicando se obtiene:

$$\int (\sec^2 - 1)\sec^{\frac{5}{2}}\theta \tan\theta\, d\theta = \underbrace{\int \sec^{\frac{9}{2}}\theta \tan\theta\, d\theta}_{1} - \underbrace{\int \sec^{\frac{5}{2}}\theta \tan\theta\, d\theta}_{2}$$

Al factorizar la función **secante** en la integral 1 se tiene:

$$\int \sec^{\frac{9}{2}}\theta \tan\theta\, d\theta = \int \sec^{\frac{7}{2}}\theta \sec\theta \tan\theta\, d\theta$$

Aplicando directamente la fórmula **4** resulta:

$$\int \sec^{\frac{7}{2}}\theta \sec\theta \tan\theta\, d\theta = \frac{2\sec^{\frac{9}{2}}\theta}{9} + C$$

Al factorizar la función **secante** en la integral 2 se tiene:

$$\int \sec^{\frac{5}{2}}\theta \tan\theta\, d\theta = -\int \sec^{\frac{3}{2}}\theta \sec\theta \tan\theta\, d\theta$$

Aplicando directamente la fórmula **4** resulta:

$$-\int \sec^{\frac{3}{2}}\theta \sec\theta \tan\theta\, d\theta = -\frac{2\sec^{\frac{5}{2}}\theta}{5} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene que:

$$\therefore \quad \int \tan^3\theta \sec^{\frac{5}{2}}\theta\, d\theta = \frac{2\sec^{\frac{9}{2}}\theta}{9} - \frac{2\sec^{\frac{5}{2}}\theta}{5} + C$$

4 ●●· Encuentra $\int \cot^3 mx \csc mx\, dx$.

Solución

La integral dada tiene la forma $\int \cot^m u \csc^n u\, du$, donde $m = 3$ y satisface la condición del caso VI.

Al factorizar en el integrando tenemos:

$$\int \cot^3 mx \csc mx\, dx = \int \cot^2 mx \csc mx \cot mx\, dx$$

Aplicando la identidad $\cot^2 mx = \csc^2 mx - 1$ resulta:

$$\int \cot^2 mx \csc mx \cot mx\, dx = \int (\csc^2 mx - 1) \csc mx \cot mx\, dx$$

Multiplicando se obtiene:

$$\int (\csc^2 mx - 1) \csc mx \cot mx\, dx = \underbrace{\int \csc^3 mx \cot mx\, dx}_{1} - \underbrace{\int \csc mx \cot mx\, dx}_{2}$$

Al factorizar la función **cosecante** en la integral 1 tenemos:

$$\int \csc^3 mx \cot mx\, dx = \int \csc^2 mx \csc mx \cot mx\, dx$$

Aplicando directamente la fórmula **4** resulta:

$$\int \csc^2 mx \csc mx \cot mx\, dx = -\frac{\csc^3 mx}{3m} + C$$

Al resolver directamente la integral 2 por medio de la fórmula **13** resulta:

$$-\int \csc mx \cot mx\, dx = \frac{\csc mx}{m} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene que:

$$\therefore \quad \int \cot^3 mx \csc mx\, dx = -\frac{\csc^3 mx}{3m} + \frac{\csc mx}{m} + C$$

5 Encuentra $\int \frac{\text{sen}^2 t\, dt}{\cos^4 t}$.

Solución

Al factorizar en el denominador de la integral dada tenemos:

$$\int \frac{\text{sen}^2 t\, dt}{\cos^4 t} = \int \frac{\text{sen}^2 t\, dt}{\cos^2 t \cos^2 t}$$

Aplicando las identidades $\frac{\text{sen}^2 t}{\cos^2 t} = \tan^2 t$ y $\frac{1}{\cos^2 t} = \sec^2 t$ resulta:

$$\int \frac{\text{sen}^2 t dt}{\cos^2 t \cos^2 t} = \int \tan^2 t \sec^2 t\, dt$$

La integral resultante tiene la forma $\int \tan^m u \sec^n u\, du$, donde $n = 2$ y satisface la condición del caso VI.

Aplicando directamente la fórmula **4** en dicha integral resulta:

$$\therefore \quad \int \frac{\text{sen}^2 t dt}{\cos^4 t} = \int \tan^2 t \sec^2 t\, dt = \frac{\tan^3 t}{3} + C$$

6 Encuentra $\int \frac{dx}{\text{sen}^4 3x \cos^2 3x}$.

Solución

Aplicando las identidades $\frac{1}{\text{sen}^4 3x} = \csc^4 3x$ y $\frac{1}{\cos^2 3x} = \sec^2 3x$ resulta:

$$\int \frac{dx}{\text{sen}^4 3x \cos^2 3x} = \int \csc^4 3x \sec^2 3x\, dx$$

Al factorizar la función **cosecante** de la integral tenemos:

$$\int \csc^4 3x \sec^2 3x dx = \int (\csc^2 3x)^2 \sec^2 3x\, dx$$

Aplicando la identidad $\csc^2 3x = 1 + \cot^2 3x$ resulta:

$$\int (\csc^2 3x)^2 \sec^2 3x\,dx = \int (1+\cot^2 3x)^2 \sec^2 3x\,dx$$

Desarrollando el binomio al cuadrado se tiene:

$$\int (1+\cot^2 3x)^2 \sec^2 3x\,dx = \int (1+2\cot^2 3x+\cot^4 3x)\sec^2 3x\,dx$$

Multiplicando se obtiene:

$$\int (1+2\cot^2 3x+\cot^4 3x)\sec^2 3x\,dx = \underbrace{\int \sec^2 3x\,dx}_{1} + \underbrace{2\int \cot^2 3x \sec^2 3x\,dx}_{2} + \underbrace{\int \cot^4 3x \sec^2 3x\,dx}_{3}$$

Aplicando la fórmula **10** en la integral 1 resulta: $\int \sec^2 3x\,dx = \frac{\tan 3x}{3} + C$

Aplicando las identidades $\cot^2 3x = \frac{\cos^2 3x}{\operatorname{sen}^2 3x}$ y $\sec^2 3x = \frac{1}{\cos^2 3x}$ en la integral 2 se tiene:

$$2\int \cot^2 3x \sec^2 3x\,dx = 2\int \left(\frac{\cos^2 3x}{\operatorname{sen}^2 3x}\right)\left(\frac{1}{\cos^2 3x}\right)dx$$

Al simplificar resulta: $2\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 3x}$

Aplicando la identidad $\frac{1}{\operatorname{sen}^2 3x} = \csc^2 3x$ resulta, $2\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 3x} = 2\int \csc^2 3x\,dx$.

Al resolver directamente la integral resultante por medio de la fórmula **11** resulta:

$$2\int \csc^2 3x\,dx = -\frac{2\cot 3x}{3} + C$$

Aplicando las identidades $\cot^4 3x = \frac{\cos^4 3x}{\operatorname{sen}^4 3x}$ y $\sec^2 3x = \frac{1}{\cos^2 3x}$ en la integral 3 se tiene:

$$\int \cot^4 3x \sec^2 3x\,dx = \int \left(\frac{\cos^4 3x}{\operatorname{sen}^4 3x}\right)\left(\frac{1}{\cos^2 3x}\right)dx$$

Al simplificar resulta: $\int \frac{\cos^2 3x\,dx}{\operatorname{sen}^4 3x}$

Al factorizar en el denominador de la integral resultante se tiene:

$$\int \frac{\cos^2 3x\,dx}{\operatorname{sen}^4 3x} = \int \frac{\cos^2 3x dx}{\operatorname{sen}^2 3x \operatorname{sen}^2 3x}$$

Aplicando las identidades $\dfrac{\cos^2 3x}{\text{sen}^2 3x} = \cot^2 3x$ y $\dfrac{1}{\text{sen}^2 3x} = \csc^2 3x$ resulta:

$$\int \frac{\cos^2 3x dx}{\text{sen}^2 3x \,\text{sen}^2 3x} = \int \cot^2 3x \csc^2 3x\, dx$$

La integral resultante tiene la forma $\int \cot^m u \csc^n u\, du$, donde $n = 2$ y satisface la condición del caso VI.

Aplicando directamente la fórmula **4** en dicha integral se tiene:

$$\int \cot^2 3x \csc^2 3x\, dx = -\frac{\cot^3 3x}{9} + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene que:

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{\text{sen}^4 3x \cos^2 3x} = \frac{\tan 3x}{3} - \frac{2\cot 3x}{3} - \frac{\cot^3 3x}{9} + C$$

7 ••• Encuentra $\displaystyle\int \frac{\sec^4 x\, dx}{\tan^3 x}$.

Solución

Al factorizar en el numerador de la integral dada tenemos:

$$\int \frac{\sec^4 x\, dx}{\tan^3 x} = \int \frac{\sec^2 x \sec^2 x\, dx}{\tan^3 x}$$

Aplicando la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ resulta:

$$\int \frac{\sec^2 x \sec^2 x\, dx}{\tan^3 x} = \int \frac{(1+\tan^2 x)\sec^2 x\, dx}{\tan^3 x}$$

Multiplicando se obtiene:

$$\int \frac{(1+\tan^2 x)\sec^2 x\, dx}{\tan^3 x} = \int \frac{\sec^2 x\, dx}{\tan^3 x} + \int \frac{\tan^2 x \sec^2 x\, dx}{\tan^3 x} = \underbrace{\int \tan^{-3} x \sec^2 x\, dx}_{1} + \underbrace{\int \frac{\sec^2 x\, dx}{\tan x}}_{2}$$

Aplicando la fórmula **4** en la integral 1 resulta:

$$\int \tan^{-3} x \sec^2 x\, dx = -\frac{1}{2\tan^2 x} + C = -\frac{\cot^2 x}{2} + C$$

Al resolver directamente la integral 2 por medio de la fórmula **5** se tiene:

$$\int \frac{\sec^2 x\, dx}{\tan x} = \ln \tan x + C$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral se tiene que:

$$\therefore \quad \int \frac{\sec^4 x\, dx}{\tan^3 x} = -\frac{\cot^2 x}{2} + \ln \tan x + C$$

EJERCICIO 19

I. En equipo de dos personas, comprueben las siguientes integrales de productos de potencias de tangentes y secantes o cotangentes y cosecantes (caso VI).

Escribe los números correspondientes	
Competencias genéricas	
Competencias disciplinares	

1. $\int \tan^n x \sec^4 x\, dx = \frac{\tan^{n+1} x}{n+1} + \frac{\tan^{n+3} x}{n+3} + C$

2. $\int \frac{\tan^3 x\, dx}{\sqrt{\sec x}} = \frac{2\sec^{\frac{3}{2}} x}{3} + 2\sqrt{\cos x} + C$

3. $\int \left(\frac{\tan ax}{\cos ax}\right)^4 dx = \frac{\tan^5 ax}{5a} + \frac{\tan^7 ax}{7a} + C$

4. $\int \left(\frac{\csc bt}{\tan bt}\right)^2 dt = -\frac{\cot^3 bt}{3b} + C$

5. $\int \left(\frac{\csc az}{\cot az}\right)^4 dx = \frac{\tan^3 az}{3a} + \frac{\tan az}{a} + C$

6. $\int \frac{\cos^4 z\, dz}{\operatorname{sen}^6 z} = -\frac{\cot^5 z}{5} + C$

7. $\int \tan^4 t \sec^4 t\, dt = \frac{\tan^7 t}{7} + \frac{\tan^5 t}{5} + C$

8. $\int \cot^3\theta \cot\theta\, d\theta = -\frac{\cot^4\theta}{4} - \frac{\cot^6\theta}{6} + C$

9. $\int \cot^3 y \csc^3 y\, dy = -\frac{\csc^5 y}{5} + \frac{\csc^3 y}{3} + C$

10. $\int \tan\theta \sqrt{\sec\theta}\, d\theta = 2\sqrt{\sec\theta} + C$

11. $\int \frac{\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta\, d\theta}{\cos^{\frac{11}{2}}\theta} = \frac{2\tan^{\frac{5}{2}}\theta}{5} + \frac{2\tan^{\frac{9}{2}}\theta}{9} + C$

12. $\int \cot^3 x \csc^5 x\, dx = -\frac{\csc^7 x}{7} + \frac{\csc^5 x}{5} + C$

13. $\int \tan^3 ax \sec^4 ax\, dx = \frac{\tan^4 ax}{4a} + \frac{\tan^6 ax}{6a} + C$

14. $\int \tan^3 2z \sec 2z\, dz = \frac{\sec^3 2z}{6} - \frac{\sec 2z}{2} + C$

15. $\int \tan^3 \frac{\theta}{3} \sec^3 \frac{\theta}{3}\, d\theta = \frac{3\sec^5 \frac{\theta}{3}}{5} - \sec^3 \frac{\theta}{3} + C$

16. $\int \left(\frac{\sec mx}{\tan mx}\right)^4 dx = -\frac{\cot^3 mx}{3m} - \frac{\cot mx}{m} + C$

17. $\int \tan^2\theta \sec^3\theta \, d\theta = \frac{\sec^3\theta \tan\theta}{4} - \frac{\sec\theta\tan\theta}{8} - \frac{\ln(\sec\theta + \tan\theta)}{8} + C$

18. $\int \tan^3 2y \sec^3 2y \, dy = \frac{\sec^5 2y}{10} - \frac{\sec^3 2y}{6} + C$

19. $\int \cot mx \csc^4 mx \, dx = -\frac{\cot^2 mx}{2m} - \frac{\cot^4 mx}{4m} + C$

20. $\int \tan^{\frac{3}{2}} mx \sec^4 mx \, dx = \frac{2\tan^{\frac{5}{2}} mx}{5m} + \frac{2\tan^{\frac{9}{2}} mx}{9m} + C$

II. Encuentra cada una de las siguientes integrales y comprueba los resultados por diferenciación y en plenaria discute tus resultados.

1. $\int \frac{\csc^4 x \, dx}{\cot^3 x}$

2. $\int \frac{dx}{\cos^4 3x \operatorname{sen}^2 3x}$

3. $\int \frac{\cos^2 t \, dt}{\operatorname{sen}^4 t}$

4. $\int \tan^3 ax \sec ax \, dx$

5. $\int \cot^3\theta \csc^{\frac{5}{2}}\theta \, d\theta$

6. $\int \tan^5 2t \sec^2 2t \, dt$

7. $\int \cot^4 3y \csc^4 3y \, dy$

8. $\int \cot^n x \csc^4 x \, dx$

9. $\int \cot^3 \frac{x}{3} \csc^3 \frac{x}{3} \, dx$

10. $\int \frac{\cos^{\frac{3}{2}} x \, dx}{\operatorname{sen}^{\frac{11}{2}} x}$

11. $\int \frac{\operatorname{sen}^4 x \, dx}{\cos^6 x}$

12. $\int \cot^2\theta \csc^3\theta \, d\theta$

13. $\int \frac{\cot^3 x \, dx}{\sqrt{\csc x}}$

14. $\int \tan mx \sec^4 mx \, dx$

15. $\int \tan^5\theta \sec^5\theta \, d\theta$

16. $\int \cot^3 2y \csc 2y \, dy$

17. $\int \cot^{\frac{3}{2}} az \csc^4 az \, dz$

18. $\int \cot^4 x \csc^4 x \, dx$

19. $\int \cot x \sqrt{\csc x} \, dx$

20. $\int \tan^3 x \sec^4 x \, dx$

21. $\int \cot^5 2x \csc^2 2x \, dx$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Autoevaluación

1. Encuentra cada una de las siguientes integrales indefinidas utilizando la integración de productos de potencias impares de senos y cosenos. Comprueba los resultados por diferenciación.

   a) $\int \cos^7 z dz$

   b) $\int \cos^9 x dx$

   c) $\int \operatorname{sen}^{11} w dw$

2. Encuentra cada una de las siguientes integrales indefinidas utilizando la integración de productos de potencias pares de senos y cosenos. Comprueba los resultados por diferenciación.

   a) $\int \operatorname{sen}^{22} x dx$

   b) $\int \cos^8 t dt$

   c) $\int \operatorname{sen}^6 \cos^6 m dm$

3. Encuentra cada una de las siguientes integrales y comprueba los resultados por diferenciación.

a) $\int \frac{\csc^8 w}{\cot^4 w} dw$

b) $\int \left(\frac{\tan t}{\cot t}\right) dt$

c) $\int \frac{\tan^5 x}{\sqrt{\sec x}} dt$

4. Completa las siguientes identidades trigonométricas:

a) $\cos^2 x =$

b) ____________ $= \operatorname{sen} x \cos x$

c) $\operatorname{sen}^2 \theta =$

d) ____________ $= 2 \operatorname{sen} z \cos z$

UNIDAD 4

Aplicaciones de cálculo integral

Evaluación diagnóstica

1. Determina una función cuya primera derivada sea $4x^3 - 2x - 1$ y sea igual a 3 cuando $x = 2$.

2. Determina la $\int_{-1}^{1} 6x^3 + 2xdx$.

3. Determina el área limitada por la elipse $3x^2 + 2x^2 = 15$, el eje de las x y las ordenadas $x = -2$ y $x = 1$.

4. Empleando la fórmula de los trapecios, calcula el área aproximada para la curva $y = \sqrt{9x - 1}$, dividiendo desde $x = 5$ y $x = 12$ en catorce intervalos. Compara el resultado obtenido efectuando la integración directa.

5. Determina el área de la superficie limitada por el círculo $\varphi = a \cos \theta$ y las rectas $\theta = 30$ y $\theta = 45$.

Aplicaciones de cálculo integral

Propósito de la unidad

Que el estudiante:

- Conozca datos o las leyes necesarias para determinar la constante de integración.
- Conozca el teorema sobre la diferencial del área bajo una curva y el teorema sobre la integral definida.
- Aplique los pasos para el cálculo de una integral definida.
- Identifique las fórmulas para determinar el área bajo una curva con respecto a los ejes cartesianos.
- Conozca la representación geométrica de una integral.
- Aplique la fórmula de los trapecios y la fórmula de Simpson para la integración aproximada.
- Aplique el teorema fundamental del cálculo integral para la obtención de áreas planas y volúmenes.

Competencias disciplinares

1. Construye e interpreta modelos deterministas mediante la aplicación de problemas algebraicos y geométricos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos con situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos y analíticos, mediante lenguaje verbal y matemático.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
8. Interpreta tablas, gráficos, mapas, textos con símbolos matemáticos y científicos.

Contenidos que aborda la unidad

Contenidos conceptuales

- Cálculo de la constante de integración
- Cálculo de la integral definida
- Cálculo del área bajo una curva dada
- Integración aproximada (fórmula de los trapecios y fórmula de Simpson)
- Obtención de áreas planas por integración, cuando la diferencial de área es una función cartesiana
- Obtención de áreas planas por integración, cuando la diferencial de área es una función polar
- Obtención de volúmenes de sólidos de revolución por integración
- Obtención de volúmenes de sección transversal
- Obtención de centros de gravedad de superficies planas
- Cálculo de la presión ejercida por un fluido sobre superficies verticales
- Cálculo del trabajo realizado por una fuerza variable

Contenidos procedimentales

- Determinará la constante de integración por medio de condiciones iniciales o de su significado físico.
- Utilizará las fórmulas para el cálculo del área bajo una curva.
- Aplicará las fórmulas para la integración aproximada.
- Comprenderá el significado del signo negativo delante de un área.
- Resolverá problemas aplicando teorema fundamental del cálculo integral.

Contenidos actitudinales

- Colaborará con sus compañeros al resolver problemas.
- Respeto al trabajar en clase.
- Aprenderá a valorar el trabajo de sus compañeros al resolver problemas.
- Contribuirá con ideas de manera crítica y acciones responsables a la hora de trabajar en equipo.

Cálculo de la constante de integración

Determinación de la constante de integración por medio de condiciones iniciales

Para determinar el valor de la constante de integración c, se toman en cuenta los siguientes datos básicos:

a) Derivada de la función. (DF)
b) Valor de la variable. (VV)
c) Valor correspondiente de la función. (VCF)

EJEMPLOS

1 Determina una función cuya primera derivada sea $3x^2 - 4x + 1$ y sea igual a -9 cuando $x = -1$.

Solución

	DF	VV	VCF
Como datos tenemos:	$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x + 1$	$x = -1$	$y = -9$

Al integrar se tiene: $\int dy = \int (3x^2 - 4x + 1)dx$

$$y = x^3 - 2x^2 + x + C$$

Al sustituir en la expresión resultante, el valor de la variable y el valor correspondiente de la función, se tiene:

$$y = x^3 - 2x^2 x + C$$
$$-9 = (-1)^3 - 2(-1)^2 + (-1) + C$$
$$-9 = -1 - 2 - 1 + C, \text{ de donde, } C = -5.$$

$\therefore$ La función buscada es $y = x^3 - 2x^2 + x - 5$.

2 Determina una función cuya primera derivada sea $\cos x + \operatorname{sen} x$ y sea igual a 2 cuando $x = \frac{\pi}{2}$.

Solución

	DF	VV	VCF
Como datos tenemos:	$\frac{dy}{dx} = \cos x + \operatorname{sen} x$	$x = \frac{\pi}{2} = 90°$	$y = 2$

Al integrar se tiene: $\int dy = \int (\cos x + \operatorname{sen} x)dx$

$$y = \operatorname{sen} x - \cos x + C$$

Al sustituir en la expresión resultante, el valor de la variable y el valor correspondiente de la función, se tiene:

$$y = \operatorname{sen} x - \cos x + C$$
$$2 = \operatorname{sen} 90° - \cos 90° + C$$
$$2 = 1 - 0 + C, \text{ de donde, } C = 1.$$

$\therefore$ La función buscada es $y = \operatorname{sen} x - \cos x + 1$.

3 Encuentra una función cuya primera derivada sea $\frac{1}{x^2+a^2}$ y sea igual a $\frac{\pi}{2a}$ cuando $x=a$.

Solución

	DF	VV	VCF
Como datos tenemos:	$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2+a^2}$	$x=a$	$y=\frac{\pi}{2a}$

Al integrar se tiene: $\int dy=\int\frac{dx}{x^2+a^2}$

$$y=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

Al sustituir en la expresión resultante, el valor de la variable y el valor correspondiente de la función se tiene:

$$y=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$
$$\frac{\pi}{2a}=\frac{1}{a}\arctan\frac{a}{a}+C$$
$$\frac{\pi}{2a}=\frac{\pi}{4a}+C,\ \text{de donde, } C=\frac{\pi}{4a}.$$

$\therefore$ La función buscada es $y=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+\frac{\pi}{4a}$.

4 Determina una función cuya primera derivada sea $3te^{2t^2}$ y sea igual a 4 cuando $t=0$.

Solución

	DF	VV	VCF
Como datos tenemos:	$\frac{ds}{dt}=3t\,e^{2t^2}$	$t=0$	$s=4$

Al integrar se tiene: $\int ds=\int 3t\,e^{2t^2}\,dt$

$$s=\frac{3e^{2t^2}}{4}+C$$

Al sustituir en la expresión resultante, el valor de la variable y el valor correspondiente de la función se tiene:

$$s=\frac{3e^{2t^2}}{4}+C$$
$$4=\frac{3e^{2(0)^2}}{4}+C$$
$$4=\frac{3}{4}+C,\ \text{de donde, } C=\frac{13}{4}.$$

$\therefore$ La función buscada es $s=\frac{3e^{2t^2}}{4}+\frac{13}{4}$.

5 Se tiene $dy = (4x + 2)\,dx$, $y = 17$ cuando $x = 2$. Determina el valor de y cuando $x = 5$.

Solución

Al integrar $dy = (4x + 2)\,dx$ se tiene:

$$\int dy = \int (4x+2)\,dx$$
$$y = 2x^2 + 2x + C$$

Al sustituir en la expresión resultante, el valor de la variable y el valor correspondiente de la función se tiene:

$$y = 2x^2 + 2x + C$$
$$17 = 2(2)^2 + 2(2) + C$$
$$17 = 8 + 4 + C, \text{ de donde, } C = 5.$$

Ahora se necesita conocer el valor de y cuando $x = 5$, lo que resulta:

$$y = 2x^2 + 2x + C$$
$$y = 2(5)^2 + 2(5) + 5$$
$$y = 50 + 10 + 5$$
$$y = 65$$

$\therefore$ Cuando $x = 5$, el valor de y es 65.

Determinación de la constante de integración por medio de su significado geométrico

Para determinar la constante de integración a partir del significado geométrico, se toma en cuenta la relación del cálculo integral y diferencial con la geometría analítica.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación de la curva cuya tangente en cada punto de la pendiente es $5x$ y que pasa por el punto $A(2,3)$.

Solución

Dado que la pendiente de la tangente a una curva en un punto cualquiera es $\frac{dy}{dx}$, se tiene, por hipótesis que $\frac{dy}{dx} = 5x$ al integrar, resulta:

$$\int dy = \int 5x\,dx$$
$$y = \frac{5x^2}{2} + C$$

Dado que la curva pasa por el punto $A(2,3)$, se tiene que:

$$y = \frac{5x^2}{2} + C$$
$$3 = \frac{5(2)^2}{2} + C$$
$$3 = 10 + C, \text{ de donde, } C = -7.$$

$\therefore$ La ecuación de la curva es $y = \frac{5x^2}{2} - 7$, que representa a una parábola.

2 Determina la ecuación de la familia de curvas tales que la pendiente de la tangente en un punto cualquiera tiene el valor de 3.

Solución

Dado que la pendiente de la tangente a una curva en un punto cualquiera es $\frac{dy}{dx}$, se tiene, por hipótesis que:

$\frac{dy}{dx} = 3$ lo que al integrar, resulta:
$$\int dy = \int 3\,dx$$
$$y = 3x + C$$

La ecuación de una recta queda determinada completamente si se conocen dos condiciones independientes. Por ejemplo, dos de sus puntos o uno de sus puntos y su dirección.

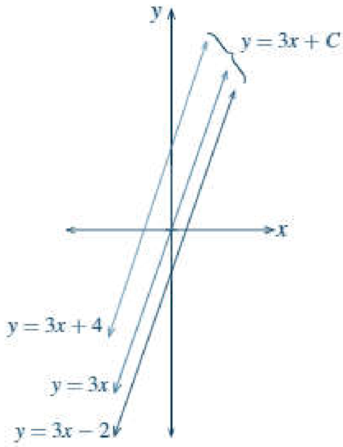
Una recta que cumple sólo una condición no es una recta única, por lo que existe una infinidad de rectas que satisfacen dicha condición y éstas tienen una propiedad común.

La totalidad de las rectas que cumplen con una única condición geométrica, se denominan **familias de líneas rectas** o **haz de rectas**.

Al tomar C un valor particular, se obtiene la ecuación de cualquiera de las rectas que forman la familia.

Si se da diferentes valores a C, por ejemplo 4, 0 y -2, entonces se tienen las siguientes ecuaciones:

$$y = 3x + 4 \qquad y = 3x \qquad y = 3x - 2$$



Cuyos lugares geométricos representan a una familia o haz de rectas, como se muestra en la figura de la derecha.

En la ecuación $y = 3x + C$, la constante de integración representa al segmento que la recta determina sobre el eje y.

$\therefore$ La ecuación $y = 3x + C$ representa la totalidad de rectas que forman una familia o haz de rectas paralelas y que tienen la propiedad común de que su pendiente es 3.

3 La ecuación diferencial que determina cierta curva es $y'' = x$. Encuentra la ecuación $y = f(x)$ de la curva si se sabe que pasa por el punto $A(3, 0)$ y tiene en ese punto la pendiente igual a $\frac{7}{2}$.

Solución

Se encuentra la primera derivada de la expresión:
$$y'' = x$$
$$\int d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \int x\,dx$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} + C$$

Dado que la curva pasa por el punto $A(3,0)$ y en ese punto tiene una pendiente igual a $\frac{7}{2}$, resulta:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{2}+C$$
$$\frac{7}{2}=\frac{(3)^2}{2}+C$$
$$\frac{7}{2}=\frac{9}{2}+C,\ \text{de donde, } C=-1.$$

Se integra la expresión $dy=\left(\frac{x^2}{2}-1\right)dx$, lo que resulta: $\int dy=\int\left(\frac{x^2}{2}-1\right)dx$

$$y=\frac{x^3}{6}-x+C$$

Dado que en la curva pasa por el punto $A(3,0)$, se tiene:

$$y=\frac{x^3}{6}-x+C$$
$$0=\frac{(3)^3}{6}-(3)+C$$
$$0=\frac{27}{6}-3+C,\ \text{de donde, } C=-\frac{9}{6}.$$

$\therefore$ La ecuación buscada es $y=\frac{x^3}{6}-x-\frac{3}{2}$ o $6y=x^3-6x-9$.

Determinación de la constante de integración por medio de su significado físico

Para determinar la constante de integración a partir del significado físico, se toman en cuenta las leyes que rigen el movimiento rectilíneo.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Dada la relación $v = a + bt$ entre la velocidad y el tiempo. Encuentra la relación entre la distancia (s) y el tiempo (t), si $s = 2$ cuando $t = 1$.

Solución

Dado que la derivada del espacio con respecto al tiempo es la velocidad en un instante cualquiera, es decir, $v=\frac{ds}{dt}$. Al sustituir en la relación dada, se tiene:

$$v=a+bt$$
$$\frac{ds}{dt}=a+bt$$

Al integrar, resulta: $\int ds = \int (a + bt)\,dt$

$$s = at + \frac{bt^2}{2} + C$$

Al sustituir en la expresión resultante el valor de la variable y el valor correspondiente de la función, resulta:

$$s = at + \frac{bt^2}{2} + C$$

$$2 = a(1) + \frac{b(1)^2}{2} + C$$

$$2 = a + \frac{b}{2} + C, \text{ de donde, } C = 2 - a - \frac{b}{2}.$$

La relación entre la distancia y el tiempo es: $s = at + \frac{bt^2}{2} + 2 - a - \frac{b}{2}$

$$s = at - a + \frac{bt^2}{2} - \frac{b}{2} + C$$

$$\therefore \quad s = a(t-1) + \frac{b}{2}(t^2 - 1) + 2$$

2 La aceleración de cierto cuerpo en movimiento está expresada por $\alpha = 4 - t^2$. Encuentra la relación entre la velocidad y el tiempo, si $v = 2$ cuando $t = 3$.

Solución

Dado que la aceleración se define como la rapidez de variación de la velocidad con respecto al tiempo, es decir, $\alpha = \frac{dv}{dt}$. Al sustituir en la relación dada, se tiene:

$$\alpha = 4 - t^2$$

$$\frac{dv}{dt} = 4 - t^2$$

Al integrar, resulta: $\int dv = \int (4 - t^2)\,dt$

$$v = 4t - \frac{t^3}{3} + C$$

Al sustituir en la expresión resultante el valor de la variable y el valor correspondiente de la función resulta:

$$v = 4t - \frac{t^3}{3} + C$$

$$2 = 4(3) - \frac{(3)^3}{3} + C$$

$$2 = 12 - 9 + C, \text{ de donde, } C = -1.$$

$\therefore$ La relación entre la velocidad y el tiempo es $v = 4t - \frac{t^3}{3} - 1$.

3 La aceleración de cierto cuerpo en movimiento está expresada por $\alpha = -32$. Encuentra la relación entre la distancia y el tiempo, si $s = 0$, y $v = 20$ cuando $t = 0$.

Solución

Dado que $\alpha = \dfrac{dv}{dt}$, al sustituir en la relación dada se tiene:

$$\alpha = -32$$
$$\frac{dv}{dt} = -32$$

Al integrar, resulta:

$$\int dv = \int -32\,dt$$
$$v = -32t + C$$

Al sustituir en la expresión resultante $t = 0$ y $v = 20$, se tiene:

$$v = -32t + C$$
$$20 = -32(0) + C$$
$$20 = -0 + C, \text{ de donde, } C = 20.$$

$\therefore$ La relación entre la velocidad y el tiempo es $v = -32t + 20$.

Como $v = \dfrac{ds}{dt}$, al sustituir en la relación anterior, se tiene:

$$v = -32t + 20$$
$$\frac{ds}{dt} = -32t + 20$$

Integrando, resulta:

$$\int ds = \int (-32t + 20)\,dt$$
$$s = -16t^2 + 20t + C$$

Al sustituir en la expresión resultante $t = 0$ y $s = 0$, se tiene:

$$s = -16t^2 + 20t + C$$
$$0 = -16(0)^2 + 20(0) + C$$
$$0 = -0 + 0 + C, \text{ de donde, } C = 0.$$

$\therefore$ La relación entre la velocidad y el tiempo es $s = -16t^2 + 20t$.

4 ¿Con qué velocidad chocará una piedra en el suelo si se deja caer desde lo alto de una torre de 104 metros de altura?

Solución

Dado que la aceleración está definida como $\alpha = \dfrac{dv}{dt}$, al integrar, resulta:

$$\frac{dv}{dt} = \alpha$$
$$\int dv = \int \alpha\,dt$$
$$v = \alpha t + C$$

Si la velocidad inicial (v_0) es $v = v_0$ cuando $t = 0$, entonces se tiene:

$$v = \alpha t + C$$
$$v_0 = \alpha(0) + C$$
$$v_0 = 0 + C, \text{ de donde, } C = v_0.$$

$\therefore$ La ecuación resultante es $v = \alpha t + v_0$. (1)

Como $v = \frac{ds}{dt}$, sustituyendo en la ecuación anterior se tiene:

$$v = \alpha t + v_0$$

$$\frac{ds}{dt} = \alpha t + v_0$$

Al integrar, resulta: $\int ds = \int (\alpha t + v_0)\,dt$

$$s = \frac{\alpha t^2}{2} + v_0 t + C$$

Si la distancia inicial (s_0) es $s = s_0$ cuando $t = 0$, entonces se tiene:

$$s = \frac{\alpha t^2}{2} + v_0 t + C$$

$$s_0 = \frac{\alpha(0)^2}{2} + v_0(0) + C$$

$$s_0 = 0 + 0 + C, \text{ de donde, } C = s_0.$$

$\therefore$ La ecuación resultante es $s = \frac{\alpha t^2}{2} + v_0 t + s_0$. **(2)**

Al sustituir en **1** y **2** los valores $\alpha = g$, $v_0 = 0$, $s_0 = 0$ y $s = h$, se obtienen las leyes del movimiento de un cuerpo que cae en el vacío partiendo del reposo, es decir:

$$v = \alpha t + v_0 \quad \textbf{(1)} \qquad s = \frac{\alpha t^2}{2} + v_0 t + s_0 \quad \textbf{(2)}$$

$$v = gt + 0 \qquad h = \frac{gt^2}{2} + (0)t + 0$$

—Sea g la gravedad y h la altura.

$$\therefore \quad v = gt \qquad \therefore \quad h = \frac{1}{2}gt^2$$

Despejando de **(1)** a t, resulta: $v = gt$

$$t = \frac{v}{g}$$

Al sustituir en **(2)** se tiene: $h = \frac{1}{2}gt^2$

$$h = \frac{1}{2}g\left(\frac{v}{g}\right)^2 = \frac{1}{2}g\left(\frac{v^2}{g^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{v^2}{g}$$

Despejando con respecto a v, resulta: $h = \frac{1}{2}\frac{v^2}{g}$

$$2gh = v^2$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{2gh} \quad \textbf{(3)}$$

Al sustituir los datos del problema dado, en **(3)** resulta:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.8\ \text{m/s}^2)(104\ \text{m})}$$

$$v = \sqrt{2038.4\ \text{m}^2/\text{s}^2}$$

$$v = 45.149\ \text{m/s}$$

$\therefore$ La velocidad con que la piedra chocará contra el suelo es de 45.149 m/s.

5 Un tren parte de una estación de ferrocarril. Si su aceleración es de $0.006t + 0.15$ m/s^2, ¿qué distancia recorrerá en 20 segundos?

Solución

Al sustituir $\alpha = \dfrac{dv}{dt}$ en la expresión $\alpha = 0.006t + 0.15$, resulta:

$$\frac{dv}{dt} = 0.006t + 0.15$$

Al integrar, tenemos: $\int dv = \int (0.006t + 0.15)\,dt$

$$v = 0.003t^2 + 0.15t + C$$

Si la velocidad inicial (v_0) es $v = v_0$ cuando $t = 0$, entonces se tiene:

$$v = 0.003t^2 + 0.15t + C$$
$$v_0 = 0.003(0)^2 + 0.15(0) + C$$
$$v_0 = 0 + 0 + C,\ \text{de donde, } C = v_0.$$

$\therefore$ La ecuación resultante es $v = 0.003t^2 + 0.15t + v_0$.

Al sustituir $v = \dfrac{ds}{dt}$ en la ecuación anterior se tiene:

$$\frac{ds}{dt} = 0.003t^2 + 0.15t + v_0$$

Al integrar resulta que: $\int ds = \int (0.003t^2 + 0.15t + v_0)\,dt$

$$s = 0.001t^3 + \frac{0.15t^2}{2} + v_0 t + C$$

Si la distancia inicial (s_0) es $s = s_0$ cuando $t = 0$, se tiene:

$$s = 0.001t^3 + \frac{0.15t^2}{2} + v_0 t + C$$
$$s_0 = 0.001(0)^3 + \frac{0.15(0)^2}{2} + v_0(0) + C$$
$$s_0 = 0 + 0 + 0 + C,\ \text{de donde, } C = s_0.$$

$\therefore$ La ecuación resultante es

$$s = 0.001t^3 + \frac{0.15t^2}{2} + v_0 t + s_0.$$

Al sustituir en la ecuación anterior, los valores de $v_0 = 0$, $s_0 = 0$ y $t = 20$ s, se tiene que:

$$s = 0.001t^3 + \frac{0.15t^2}{2} + v_0 t + s_0$$
$$s = 0.001(20)^3 + \frac{0.15t^2}{2} + v_0 t + s_0$$
$$s = 8 + 30 + 0 + 0 = 38\,\text{m}$$

$\therefore$ La distancia que recorre el tren a los 20 segundos de su partida es 38 metros.

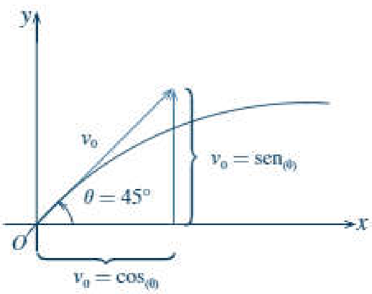
6 •• Un proyectil se dispara contra una pared vertical situada a una distancia de 147 metros. La velocidad inicial es de 49 m/s y $\theta = 45°$ el ángulo de tiro. Despreciando la resistencia del aire, determina la altura del impacto del proyectil en la pared.

Solución

Considerando el plano xy como el plano del movimiento, el eje x como horizontal y y como vertical y suponemos que el proyectil parte del origen O, como se muestra en la figura.

En este caso solo la fuerza de la gravedad influye en el proyectil, es decir, la aceleración es cero en el sentido horizontal y $-g$ en el sentido vertical.

$$\theta = \frac{dv_x}{dt} = 0 \quad \text{y} \quad \theta = \frac{dv_y}{dt} = -g$$



Al integrar, se tiene:

$$\int dv_x = \int 0\,dt \quad \text{y} \quad \int dv_y = \int -g\,dt$$

$$v_x = C_1 \qquad\qquad v_y = -gt + C_2$$

Si la componente horizontal de la velocidad inicial es $x = v_0 \cos\theta$ y la componente vertical de la velocidad inicial es $y = v_0 \,\text{sen}\,\theta$.

Como $C_1 = v_0\cos\theta$ y $C_2 = v_0\text{sen}\,\theta$, entonces,

$$v_x = v_0\cos\theta \text{ y } v_y = -gt + v_0\text{sen}\,\theta$$

Dado que $v_x = \dfrac{dx}{dt}$ y $v_y = \dfrac{dy}{dt}$, al sustituir respectivamente en las ecuaciones anteriores resulta:

$$v_x = v_0\cos\theta \qquad\qquad v_y = -gt + v_0\text{sen}\,\theta$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0\cos\theta \qquad\qquad \frac{dy}{dt} = -gt + v_0\text{sen}\,\theta$$

Al integrar, se obtiene: $\displaystyle\int dx = \int v_0\cos\theta\,dt \qquad \int dy = \int(-gt + v_0\text{sen}\,\theta)\,dt$

$$x = v_0\cos\theta \cdot t + C \qquad\qquad y = -\frac{gt^2}{2} + v_0\text{sen}\,\theta \cdot t + C$$

Si $t = 0$, y $y = 0$, tenemos que:

$$x = v_0\cos\theta \cdot t + C \qquad\qquad y = -\frac{9t^2}{2} + v_0\text{sen}\,\theta \cdot t + C$$

$$0 = v_0\cos\theta(0) + C \qquad\qquad 0 = -\frac{9(0)^2}{2} + v_0\text{sen}\,\theta(0) + C$$

De donde: $C = 0$ $\qquad\qquad C = 0$

Por tanto, las ecuaciones resultantes son:

$$x = v_0 \cos\theta \cdot t \quad (1) \qquad\qquad y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \cos\theta \cdot t \quad (2)$$

Despejando de (1) t resulta: $x = v_0 \cos\theta \cdot t$

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

Al sistituir en (2) se tiene:

$$y = -\frac{1}{2}gt + v_0 \cos\theta \cdot t$$

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2 + v_0 \cos\theta\left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)$$

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\theta}\right) + x\frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{v_0 \cos\theta} \qquad\qquad y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\theta} + x\tan\theta \quad (3)$$

La ecuación resultante representa a una parábola y es la ecuación de la trayectoria del proyectil. Al sustituir los datos originales en (3) resulta:

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\theta} + x\tan\theta$$

$$y = -\frac{(9.8)(147)^2}{2(49)^2 \cos^2 45°} + (147)\tan 45°$$

$$y = -\frac{(9.8)(21609)}{2(2401)(0.5)} + (147)(1)$$

$$y = -\frac{211768.2}{2401} + 147 = -88.2 + 147$$

$$y = 58.8 \text{ metros.}$$

$\therefore$ La altura del impacto del proyectil en la pared es de 58.8 metros.

EJERCICIO 20

I. Las siguientes expresiones se han obtenido al derivar ciertas funciones. En grupo y con asesoría de su profesor, en cada caso, encuentren la función para los valores dados de la variable y de la función.

Escribe los números correspondientes
Competencias genéricas
Competencias disciplinares

	DF	VV	VCF	Solución
1.	$\frac{dy}{dx} = x - 3$	$x = 2$	$y = 9$	$y = \frac{x^2}{2} - 3x + 13$
2.	$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x + 5$	$x = 1$	$y = 12$	$y = x^3 - x^2 + 5x + 7$
3.	$\frac{dx}{dy} = y^3 - 4y$	$y = 2$	$x = 0$	$x = \frac{y^4}{4} - 2y^2 + 4$

4. $\frac{ds}{dt}=\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}$	$t=4$	$s=0$	$s=\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}+2\sqrt{t}-\frac{28}{3}$
5. $\frac{dy}{dx}=\cot x-\csc^2 x$	$x=\frac{\pi}{2}$	$y=3$	$y=\ln(\operatorname{sen} x)+\cot x+3$
6. $\frac{dy}{dx}=\sec^2 x+\tan x$	$x=0°$	$y=5$	$y=\tan x-\ln(\cos x)+5$
7. $\frac{dy}{dz}=3+z-5z^2$	$z=6$	$y=-20$	$y=304+3z+\frac{z^2}{2}-\frac{5z^3}{3}$
8. $\frac{ds}{dt}=\frac{1}{t}-\frac{1}{2-t}$	$t=1$	$s=0$	$s=\ln(2t-t^2)$
9. $\frac{dy}{dx}=x^3-b^2x$	$x=2$	$y=0$	$y=\frac{x^4}{4}-b^2\left(\frac{x^2+4}{2}\right)-4$
10. $\frac{dz}{dy}=5y^3+2y+4$	$y=2$	$z=10$	$z=\frac{5y^4}{4}+y^2+4y-22$

II. Encuentra la ecuación de la familia de curvas tales que la pendiente de la tangente en un punto cualquiera tenga el valor que se indica.

1. $\frac{dy}{dx}=x$	$y=\frac{x^2}{2}+C$ (parábolas)
2. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y}$	$\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{3}+C$ (parábolas semicúbicas)
3. $\frac{dy}{dx}=3x^2$	$y=x^3+C$ (parábolas cúbicas)
4. $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$	$y^2-x^2=C$ (hipérbolas equiláteras)
5. $\frac{dy}{dx}=\frac{b^2x}{a^2y}$	$a^2y^2-b^2x^2=C$ (hipérbolas)
6. $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$	$a^2y^2+b^2x^2=C$ (elipses)
7. $\frac{dy}{dx}=\frac{1+x}{1-y}$	$x^2+y^2+2x-2y=C$ (circunferencias)
8. $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$	$x^2+y^2=C$ (circunferencias)

III. En cada uno de los siguientes problemas, determina la ecuación de la curva cuya pendiente en un punto cualquiera es la función dada de las coordenadas y pasa por el punto particular indicado.

1. $\frac{dy}{dx} = x;\ A(1,1)$ $\quad 2y = x^2 + 1$
2. $\frac{dy}{dx} = -xy;\ A(0,2)$ $\quad y = 2e^{-\frac{x^2}{2}}$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{h-x}{y-k};\ B(0,0)$ $\quad x^2 + y^2 - 2hx - 2ky = 0$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2};\ B(1,1)$ $\quad x \ln y = -1 + x$
5. $\frac{dy}{dx} = \frac{4xy}{4x^2-15};\ C(2,1)$ $\quad 4x^2 - y^2 = 15$
6. $\frac{dy}{dx} = 2xy;\ C(3,1)$ $\quad \ln y = x^2 - 9$
7. $\frac{dy}{dx} = y\sqrt{x};\ A(4,1)$ $\quad 3\ln y = 2(x\sqrt{x} - 8)$
8. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y+1};\ B(0,1)$ $\quad (y+1)^2 = (x+1)^2 + 3$

IV. En equipo de dos personas, resuelvan los siguientes problemas.

1. Se dan $dy = \cos 2x\, dx$, $y = 6$ cuando $x = \frac{\pi}{2}$. Encuentra el valor de y cuando $x = \frac{3\pi}{4}$.
2. Se dan $ds = t\sqrt{1+4t}\, dt$, $s = 0$ cuando $t = 0$. Encuentra el valor de s cuando $t = 2$.
3. Se dan $dy = x\sqrt{100 - x^2}\, dx$, $y = 0$ cuando $x = 0$. Encuentra el valor de y cuando $x = 8$.
4. Se dan $dy = (1 + 2x)dx$, $y = 7$ cuando $x = 1$. Encuentra el valor de y cuando $x = 3$.
5. Se dan $dA = \sqrt{2px}\, dx$, $A = \frac{p^2}{3}$ cuando $x = \frac{p}{2}$. Encuentra el valor de A cuando $x = 2p$.
6. En cada punto de cierta curva $y'' = \frac{12}{x^3}$. Determina la ecuación de la curva si se sabe que pasa por el punto $B(1,0)$ y que en ese punto es tangente a la recta $6x + y = 6$.
7. En cada punto de cierta curva $y'' = \frac{1}{x}$. La curva pasa por el punto $A(1,0)$ con inclinación de 135°. Determina su ecuación.
8. En cada punto de cierta curva $y'' = \frac{3}{\sqrt{x+3}}$. Determina la ecuación de la curva si se sabe que pasa por el punto $C(1,1)$ y que en dicho punto tiene una inclinación de 45°.
9. Determina la ecuación de la curva cuya pendiente en un punto cualquiera es $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ y pasa por el punto $A(3,4)$.

10. Determina la ecuación de la curva cuya pendiente en un punto cualquiera es $\frac{dy}{dx} = 2x$ y que pasa por el punto $C(1,4)$.

11. Determina la ecuación de la curva cuya pendiente en un punto cualquiera es $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2+4}$ y que pasa por el punto $B(1,2)$.

12. Determina la ecuación de la curva cuya pendiente en un punto cualquiera es $\frac{dy}{dx} = x\cos^2 y$ y que pasa por el punto $A\left(4, \frac{\pi}{4}\right)$.

13. Determina la ecuación de la curva cuya pendiente en un punto cualquiera es $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2+x}{3+y}}$ y que pasa por el punto $E(2,6)$.

14. Determina la ecuación de la curva cuya pendiente en un punto cualquiera es $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$ y que pasa por el punto $D(1,9)$.

15. Determina la ecuación de la curva cuya pendiente en un punto cualquiera es $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}$ y que pasa por el punto $A(1,4)$.

V. Resuelve los siguientes problemas, aplicando el significado físico de la constante de integración y en plenaria discute tus resultados.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. Dada la relación $v = t^2 + \frac{1}{t^2}$. Encuentra la relación s y t, si $s = 8$ cuando $t = 4$.
2. Dada la relación $v = \sqrt{t-1}$. Encuentra la relación s y t, si $s = 4$ cuando $t = 2$.
3. La aceleración está expresada por $\alpha = \frac{1}{t^2} - t$. Encuentra la relación entre v y t, si $v = 4$ cuando $t = 6$.
4. La aceleración está expresada por $\alpha = 3t\sqrt{t}$. Encuentra la relación entre v y t, si $v = 6$ cuando $t = 9$.
5. La aceleración está expresada por $\alpha = -16 \cos 2t$. Encuentra la relación entre s y t, si $s = 1$ y $v = 30$ cuando $t = 1$.
6. La aceleración expresada por $\alpha = 4 - t$. Encuentra la relación entre s y t, si $s = 2$ y $v = 40$ cuando $t = 2$.
7. ¿Con qué velocidad chocará una piedra en el suelo si se deja caer desde lo alto de un edificio de 40 metros de altura?
8. Una piedra se dejó caer desde un globo que ascendía con una velocidad de 5 m/s. La piedra llegó al suelo en 8 s. ¿Qué altura tenía el globo cuando se dejó caer la piedra?
9. Una pelota se lanza del suelo hacia arriba. En un segundo llega hasta una altura de 25 metros. ¿Cuál será la máxima altura alcanzada?
10. Un cuerpo que se desliza hacia abajo sobre cierto plano inclinado está sujeto a una aceleración de 1.2 m/s^2. Si se pone en movimiento hacia arriba en el mismo plano con una velocidad de 1.8 m/s. Determina:

    a) La distancia a la que llegará en t segundos.

    b) La distancia a la que llegará antes de deslizarse hacia atrás.

11. En un cuarto a 20° de temperatura se observa que un líquido tiene una temperatura de 70°, después de 5 minutos, es de 60°. Se supone que la rapidez de enfriamiento es proporcional a la diferencia entre las temperaturas del líquido y del cuarto, determina la temperatura del líquido 30 minutos después de la primera observación.

12. Un cuerpo se lanza desde lo alto de una torre con un ángulo de 45° por arriba del plano horizontal; cae al suelo en 5 segundos en un punto cuya distancia horizontal del pie de la torre es igual a la altura de ésta. Determina la altura de la torre.

13. Un móvil parte del origen de coordenadas y después de t segundos la componente x de su velocidad es $t^2 - 4$ y la componente y es $4t$. Determina:

    a) la posición del móvil después de t segundos.

    b) la distancia recorrida en la trayectoria.

    c) la ecuación de la trayectoria.

14. Un proyectil se dispara contra una pared vertical situada a una distancia de 380 metros. La velocidad inicial es de 95 m/s.

    a) Si $\alpha = 45°$, determina la altura del impacto del proyectil en la pared.

    b) Determina α de manera que el impacto del proyectil sea en la base de la pared.

    c) Determina α de manera que el proyectil llegue a la pared a la altura de 47.5 metros.

    d) Determina α para la máxima altura del impacto en la pared y calcula esa altura.

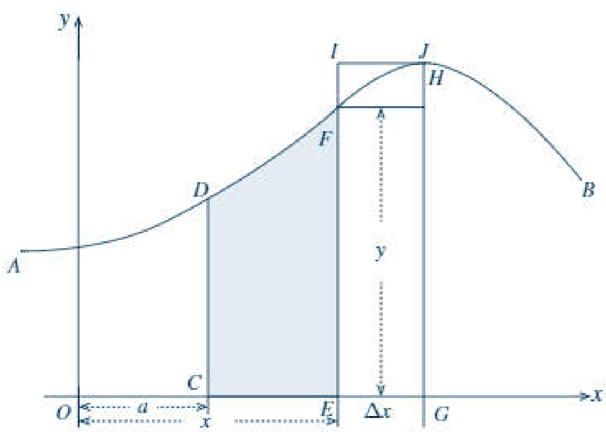
15. Una partícula se mueve en el plano xy de manera que los componentes de la velocidad paralelos al eje de las x y al eje de las y son, k_y y k_x respectivamente. Demuestra que la trayectoria es una hipérbola equilátera.

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Cálculo de la integral definida

Diferencial del área bajo una curva

Considerando la función $\phi(x)$ y sea $y = \phi(x)$ la ecuación de la curva AB.



Con base en la figura de la página 228, sea CD la ordenada fija, EF la ordenada variable y A la medida del área $CEFD$. Cuando x toma un incremento pequeño Δx, A toma un incremento $\Delta A (= EGJF)$.

Al completar los rectángulos $EGHF$ y $EGJI$, se observa que:

área $EGHF <$ área $EGJF <$ área $EGJI$, es decir, $EF(\Delta x) < \Delta A < GJ(\Delta x)$. Al dividir entre Δx, se tiene:

$$EF < \frac{\Delta A}{\Delta x} < GJ$$

Si $\Delta x \to 0$, entonces, puesto que EF queda fija y GJ tiende hacia EF como límite (dado que y es una función continua de x), se tiene que:

$$\frac{dA}{dx} = y(= EF)$$

Empleando diferenciales, se tiene:

$$dA = y\,dx$$

Teorema sobre la diferencial del área bajo una curva

La diferencial del área limitada por una curva cualquiera, el eje de las x, una ordenada fija y una ordenada variable es igual al producto de la ordenada variable por la diferencial de la abscisa correspondiente.

La integral definida

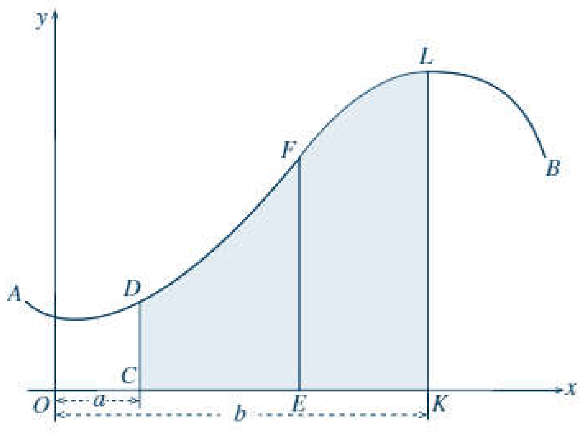
Del teorema anterior se deduce que si la curva AB es el lugar geométrico de $y = \phi(x)$, entonces $dA = y\,dx$; es decir, $dA = \phi(x)\,dx$, donde dA es la diferencial del área entre la curva, el eje de las x y dos ordenadas.

Al integrar, se tiene: $\int dA = \int \phi(x)\,dx$

$$A = f(x) + C$$

Para determinar el valor de la constante de integración C, se observa que $A = 0$ cuando $x = a$. Al sustituir estos valores en la integral obtenida, se tiene:

$$A = f(x) + C$$
$$0 = f(a) + C, \text{ de donde, } C = -f(a).$$



Por tanto, se tiene que:

$$A = f(x) - f(a)$$

De acuerdo con la figura de la página 229, se tiene que el área $CKLD$ cuando $x = b$ es área $CKLD = f(b) - f(a)$.

Teorema sobre la integral definida

La diferencia de los valores de $\int y\,dx$ para $x = a$ y $x = b$ da el área limitada por la curva cuya ordenada es y, el eje de las x y las ordenadas que corresponden a $x = a$ y $x = b$. Simbólicamente se tiene:

$$\int_a^b y\,dx$$ que se lee: **la integral desde *a* hasta *b* de *y dx*.**

La operación anterior se denomina **integración entre límites**, donde ***a*** es el límite **inferior** y ***b*** es el límite **superior**.

Por tanto, la expresión $\int_a^b y\,dx$ se llama **integral definida**.

Cálculo de una integral definida

Pasos para su solución:

1. Integrar la expresión diferencial dada.
2. Reemplazar la variable en esta integral indefinida, primero por el límite superior, después por el inferior y restar el segundo resultado del primero, es decir:

$$\therefore \quad \int_a^b y\,dx = [f(x)+C]_a^b = [f(b)+C]-[f(a)+C] = f(b)-f(a)$$

No es necesario tomar en cuenta la constante de integración puesto que siempre desaparece en la sustracción.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la $\int_2^5 x^3\,dx$.

Solución

Al integrar la expresión diferencial dada por medio de la fórmula **4**, se obtiene:

$$\int_2^5 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_2^5$$

Al sustituir la variable por los límites resulta:

$$\left[\frac{x^4}{4}\right]_2^5 = \frac{(5)^4}{4} - \frac{(2)^4}{4} = \frac{625}{4} - \frac{16}{4} = 152.25$$

$$\therefore \quad \int_2^5 x^3\,dx = 152.25$$

2 ●•·Determina la $\int_1^e \frac{dx}{x}$.

Solución

Al integrar la expresión diferencial dada por medio de la fórmula **5**, se tiene:

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^e$$

Al sustituir la variable por los límites resulta:

$$[\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

$$\therefore \quad \int_1^e \frac{dx}{x} = 1$$

3 ●•·Determina la $\int_0^r \frac{rdx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$.

Solución

Al integrar la expresión diferencial dada por medio de la fórmula **20**, se tiene:

$$\int_0^r \frac{rdx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \left[r \operatorname{arcsen} \frac{x}{r}\right]_0^r$$

Al sustituir la variable por los límites resulta:

$$\left[r \operatorname{arcsen} \frac{x}{r}\right]_0^r = r \operatorname{arcsen} \frac{r}{r} - r \operatorname{arcsen} \frac{0}{r} = r(90^\circ) - 4(0^\circ) = \frac{r\pi}{2}$$

$$\therefore \quad \int_0^r \frac{rdx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r\pi}{2}$$

4 ●•·Determina la $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta$.

Solución

Al integrar la expresión diferencial dada por medio de la fórmula **9**, se tiene:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta = [\operatorname{sen}\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Al sustituir la variable por los límites resulta:

$$[\operatorname{sen}\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 = 1 - 0 = 1$$

$$\therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta = 1$$

5 Determina la $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4\theta\, d\theta$.

Solución

La integral tiene la forma $\int \sec^n u\, du$, en donde $n = 4$ y satisface la condición del caso V (integración de potencias de la función secante o cosecante).

Al factorizar el integrando, se tiene: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2\theta \sec^2\theta\, d\theta$.

Al aplicar la identidad trigonométrica $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ resulta:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2\theta \sec^2\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2\theta(1+\tan^2\theta)\, d\theta$$

Al multiplicar se tiene:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2\theta(1+\tan^2\theta)\, d\theta = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2\theta d\theta}_{1} + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta \sec^2\theta\, d\theta}_{2}.$$

Aplicando en 1 y 2, las fórmulas **10** y **14** respectivamente resulta:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4\theta\, d\theta = \left[\tan\theta + \frac{\tan^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

Al sustituir la variable por los límites, resulta:

$$\left[\tan\theta + \frac{\tan^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\tan\frac{\pi}{4} + \frac{\tan^3\frac{\pi}{4}}{3}\right) - \left(\tan 0 + \frac{\tan^3 0}{3}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{3}\right) - (0+0) = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4\theta\, d\theta = \frac{4}{3}$$

Cambio de límites correspondiente a un cambio de variable

Cuando se integra por sustitución de una variable (método de integración por racionalización) a veces es algo laborioso volver a transformar el resultado en función de la primera variable. Sin embargo, cuando se integra entre límites se puede evitar el procedimiento de regresar a la primera variable, cambiando los límites de tal manera que correspondan a la nueva variable.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la $\int_0^{16} \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{1+x^{\frac{3}{4}}}$.

Solución

Como $n = 4$, sea $x = z^4$; entonces $x^{\frac{1}{2}} = z^2, x^{\frac{3}{4}} = z^3$, $dx = 4z^3\,dz$. Para cambiar los límites, se observa que cuando $x = 0$, $z = 0$ y $x = 16$, $z = 2$.

Por lo anterior, tenemos: $\int_0^{16} \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{1+x^{\frac{3}{4}}} = \int_0^2 \frac{z^2(4z^3dz)}{1+z^3} = 4\int_0^2 \frac{z^5dz}{1+z^3}$.

Al dividir, se tiene:

$$\begin{array}{r|l} & z^2 \\ 1+z^3 & z^5 \\ & \underline{-z^5 - z^2} \\ & -z^2 \end{array} \qquad \therefore \quad \frac{z^5}{1+z^3} = z^2 - \frac{z^2}{1+z^3}$$

Ahora, se tiene que:

$$4\int_0^2 \frac{z^5dz}{1+z^3} = 4\int_0^2\left(z^2 - \frac{z^2}{1+z^3}\right)dz = \underbrace{4\int_0^2 z^2\,dz}_{1} - \underbrace{4\int_0^2 \frac{z^2dz}{1+z^3}}_{2}$$

En las integrales 1 y 2, se aplican las fórmulas **4** y **5** respectivamente lo que resulta:

$$4\int_0^2 z^2\,dz - 4\int_0^2 \frac{z^2dz}{1+z^3} = \left[\frac{4z^3}{3} - \frac{4}{3}\ln(1+z^3)\right]_0^2$$

Al sustituir la variable por los límites, se tiene:

$$\left[\frac{4z^3}{3} - \frac{4}{3}\ln(1+z^3)\right]_0^2 = \left[\frac{4(2)^3}{3} - \frac{4}{3}\ln[1+(2)^3]\right] - \left[\frac{4(0)^2}{3} - \frac{4}{3}\ln[1+(0)^3]\right]$$

$$= \left(\frac{32}{3} - \frac{4}{3}\ln 9\right) - \left(0 - \frac{4}{3}\ln 1\right) \approx 7.7370$$

$$\therefore \quad \int_0^{16} \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{1+x^{\frac{3}{4}}} = 7.7370$$

2 Determina la $\int_3^{29} \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}+3}$.

Solución

Como $n = 3$, sea $x - 2 = z^3$; entonces $(x-2)^{\frac{2}{3}} = z^2$ y $dx = 3z^2\,dz$. Para cambiar los límites, se observa que cuando $x = 3$, $z = 1$ y $x = 29$, $z = 3$.

Por lo anterior, tenemos: $\int_3^{29} \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}+3} = \int_1^3 \frac{z^2(3z^2dz)}{z^2+3} = 3\int_1^3 \frac{z^4dz}{z^2+3}$

Al dividir, se tiene:

$$\begin{array}{r|l} & z^2-3 \\ \hline z^2+3 & z^4 \\ & -z^4-3z^2 \\ \hline & -3z^2 \\ & +3z^2+9 \\ \hline & 9 \end{array}$$

$\therefore \quad \frac{z^4}{z^2+3} = z^4 - 3 + \frac{9}{z^2+3}$

Ahora, se tiene que:

$$3\int_1^3 \frac{z^4dz}{z^2+3} = 3\int_1^3\left(z^2-3+\frac{9}{z^2+3}\right)dz = \underbrace{3\int_1^3 z^2\,dz}_{1} - \underbrace{9\int_1^3 dz}_{2} + \underbrace{27\int_1^3 \frac{dz}{z^2+3}}_{3}$$

En las integrales 1, 2 y 3 se aplican las fórmulas **4**, **1** y **18** respectivamente lo que resulta:

$$3\int_1^3 z^2\,dz - 9\int_1^3 dz + 27\int_1^3 \frac{dz}{z^2+3} = \left[z^3 - 9z + \frac{27}{\sqrt{3}}\arctan\frac{z}{\sqrt{e}}\right]_1^3$$

Al sustituir la variable por los límites, resulta:

$$\left[z^3 - 9z + \frac{27}{\sqrt{3}}\arctan\frac{z}{\sqrt{3}}\right]_1^3 = \left[(3)-9(3)+\frac{27}{\sqrt{3}}\arctan\frac{z}{\sqrt{3}}\right] - \left[(1)^3 - 9(1) + \frac{27}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

$$\left[z^3 - 9z + \frac{27}{\sqrt{3}}\arctan\frac{z}{\sqrt{3}}\right]_1^3 = \left[27-27+\frac{27}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] - \left[1-9+\frac{27}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \frac{9}{\sqrt{3}}\pi - 1 + 9 - \frac{9}{2\sqrt{3}}\pi = 8 + \frac{9}{2\sqrt{3}}\pi = 8 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$$

$$= 16.16209714$$

$$\therefore \quad \int_3^{29} \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}+3} = 16.16209714$$

EJERCICIO **21**

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

I. Comprueba las siguientes integrales definidas.

1. $\int_1^4 z^2\,dz = 21$
2. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} y\,dy = 2$
3. $\int_0^a \frac{dv}{a^2+v^2} = \frac{\pi}{4a}$
4. $\int_0^a (a^2x - x^3)\,dx = \frac{a^4}{4}$

5. $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{9-4x^2} = 0.1341$

6. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{e^{3x}} = 0.3167$

7. $\int_{3}^{11} \sqrt{2t+3}\, dt = 32.6666$

8. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\operatorname{sen} 2\theta} = 0.5493$

9. $\int_{0}^{2\pi} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} d\theta = 4$

10. $\int_{-1}^{1} (2t^2 - t^3) dt = \frac{4}{3}$

11. $\int_{1}^{4} \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2$

12. $\int_{0}^{2} \frac{t^3 dt}{1+t} = 1.5680$

13. $\int_{0}^{a} \left(\sqrt{a} - \sqrt{z}\right)^2 dz = \frac{a^2}{6}$

14. $\int_{0}^{4} \frac{v^2 dv}{1+v} = 5.6094$

15. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta = \frac{1}{12}$

16. $\int_{0}^{e} \ln x\, dx = 1$

17. $\int_{0}^{\pi} \sqrt{2+2\cos x}\, dx = 4$

18. $\int_{0}^{1} \frac{d\theta}{e^{3\theta}} = 0.3167$

19. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{3-2x}} = 0.7320$

20. $\int_{-1}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = -0.8813$

21. $\int_{2}^{3} \frac{2x dx}{1+x^2} = 0.6931$

22. $\int_{-2}^{2} \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{4}\pi$

23. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{\csc x} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

24. $\int_{-2}^{3} \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}} = 4.9904$

II. Comprueba las siguientes integrales definidas por medio del cambio de límites correspondientes a un cambio de la variable.

1. $\int_{0}^{16} \frac{t^{\frac{1}{4}} dt}{1+t^{\frac{1}{2}}} = \frac{8}{3} + 4\arctan^2$

2. $\int_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 1.8027$

3. $\int_{1}^{4} \frac{x\, dx}{\sqrt{2+4x}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

4. $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2x}\left(9+\sqrt[3]{2x}\right)} = 3 - 9\arctan\frac{1}{3}$

5. $\int_{0}^{3} \frac{dy}{(y+2)\sqrt{1+y}} = 2\arctan 2 - \frac{\pi}{2}$

6. $\int_{1}^{64} \frac{dx}{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = 5.31$

7. $\int_{0}^{1} \frac{t^{\frac{3}{2}} dt}{t+1} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}$

8. $\int_{8}^{27} \frac{dx}{x - x^{\frac{1}{3}}} = 1.4712$

III. Encuentra el valor de cada una de las siguientes integrales definidas y en plenaria discute tus resultados.

1. $\int_1^3 \sqrt{3x+1}\,dx$
2. $\int_0^1 t\left(1-\sqrt{t}\right)^2 dt$
3. $\int_0^3 \frac{dz}{\sqrt{z+1}}$
4. $\int_4^8 \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-15}}$
5. $\int_0^a \sqrt{a^2-v^2}\,dv$
6. $\int_{-1}^2 x(1-x^2)\,dx$
7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{3+\cos 2\theta}$
8. $\int_3^4 \frac{dx}{25-x^2}$
9. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\tan\theta+2}$
10. $\int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{25-4x^2}}$
11. $\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+16}}$
12. $\int_0^4 \frac{dt}{\sqrt{9-2t}}$
13. $\int_0^2 (2+t)\,dt$
14. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2\theta-1}{\cos 2\theta+1}\,d\theta$
15. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} z\,dz}{\cos^2 z-5\cos z+4}$
16. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \operatorname{sen} 3x\,dx$
17. $\int_0^1 \frac{xdx}{e^{x^2}}$
18. $\int_1^5 \frac{dt}{\sqrt{2t-1}}$
19. $\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx$
20. $\int_1^{64} \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x}\right)dx$
21. $\int_4^5 x^2\sqrt{x-4}\,dx$
22. $\int_1^2 \frac{t\,dt}{\sqrt{5-t}}$
23. $\int_{-1}^1 \frac{(x^3-6x^2+12x+5)dx}{(x-2)^3}$
24. $\int_{-2}^2 \frac{x\,dx}{x-3}$
25. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$
26. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$
27. $\int_0^1 \frac{z^2dz}{1+z^2}$
28. $\int_{-1}^2 \frac{t^2dt}{2+t}$
29. $\int_{-5}^5 2x\sqrt[3]{x^2+2}\,dx$
30. $\int_{-3}^3 (x^6-3x)\,dx$
31. $\int_{-3}^2 \frac{(3x^3-24x^2+48x+5)dx}{x^2-8x+16}$
32. $\int_1^2 \frac{(x^3+2x^2+2)dx}{(x+1)^2}$
33. $\int_0^{15} \frac{x\,dx}{(x+1)^{\frac{3}{4}}}$
34. $\int_1^3 \frac{x\,dx}{(3x^2-1)^3}$
35. $\int_{-2}^0 3t\sqrt{4-t^2}\,dt$
36. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\cos x\,dx$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Cálculo del área bajo una curva dada

Para determinar el área de una curva con respecto al eje x entre las ordenadas $x = a$ y $x = b$ se utiliza la fórmula:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx$$

donde se sustituye el valor de y en términos de x obtenido de la ecuación de la curva dada.

Para determinar el área bajo una curva con respecto al eje y entre las abscisas $y = a$ y $y = b$, se utiliza la fórmula:

$$\text{Área} = \int_a^b x\,dy$$

donde se sustituye el valor de x en términos de y obtenido de la ecuación de la curva dada.

EJEMPLOS

Ejemplos

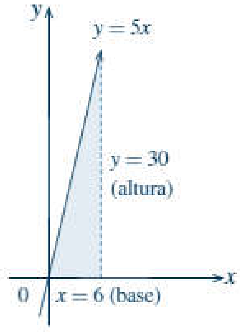
1 Calcula por integración el área del triángulo limitado por la recta $y = 5x$, el eje de las x y la ordenada $x = 6$. Comprueba el resultado determinando el área como la mitad del producto de la base por la altura.

Solución

Al sustituir en la fórmula $\int_a^b y\,dx$ y aplicar directamente la fórmula **4**, resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_0^6 5x\,dx = \left[\frac{5x^2}{2}\right]_a^b = \frac{5(6)^2}{2} - \frac{5(0)^2}{2} = 90$$

Para su comprobación, gráficamente se tiene:



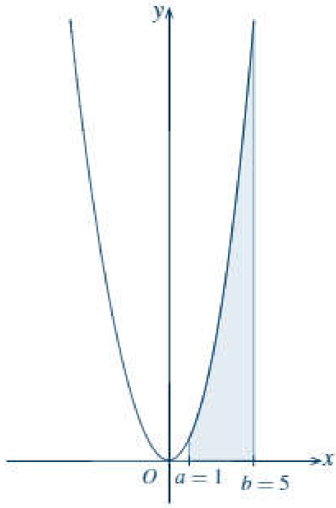
Al aplicar la fórmula: $\text{Área} = \dfrac{(\text{base})(\text{altura})}{2}$

Y sustituyendo los datos, resulta:

$$\text{Área} = \frac{(\text{base})(\text{altura})}{2} = \frac{(6)(30)}{2} = \underset{\text{L.C.D.D.}}{90}$$

∴ El área del triángulo limitado por la recta $y = 5x$, el eje de la x y la ordenada $x = 6$, es de 90 unidades cuadradas.

2 Determina el área limitada por la parábola $y = x^2$, el eje de las x y las ordenadas $x = 1$ y $x = 5$.



Solución

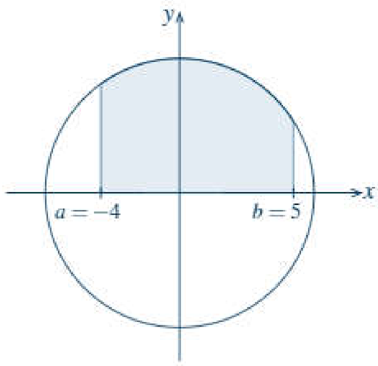
Al sustituir en la fórmula $\int_a^b y\,dx$ y aplicar directamente la fórmula **4**, resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_1^5 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^5$$

$$\text{Área} = \frac{(5)^3}{3} - \frac{(1)^3}{3} = 41\frac{1}{3}$$

$\therefore$ El área limitada por la parábola $y = x^2$, el eje de las x y las ordenadas $x = 1$ y $x = 5$, es de $41\frac{1}{3}$ unidades cuadradas.

3 Determina el área limitada por el círculo $x^2 + y^2 = 36$, el eje de las x y las ordenadas $x = -4$ y $x = 5$.



Solución

Al despejar y de la ecuación dada, tenemos: $y = \sqrt{36 - x^2}$.

Al sustituir en la fórmula $\int_a^b y\,dx$ y aplicar directamente la fórmula **23**, resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_{-4}^5 \sqrt{36 - x^2}\,dx = \left[\frac{x}{2}\sqrt{36 - x^2} + \frac{36}{2}\operatorname{arcsen}\frac{-x}{6}\right]_{-4}^5$$

$$\text{Área} = \frac{5}{2}\sqrt{36 - (5)^2} + 18\operatorname{arcsen}\frac{5}{6} - \frac{(-4)}{2}\sqrt{36 - (-4)^2} - 18\operatorname{arcsen}\frac{-4}{6}$$

$$\text{Área} \approx 8.2915 + 18(0.9851) + 8.9442 - 18(-0.7297) \approx 48.1025$$

El área calculada debe ser menor que la del área del semicírculo, que se calcula simplemente como:

$$\text{Área del semicírculo} = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{(3.1416)(36)}{2} \approx 56.486$$

$\therefore$ El área limitada por el círculo $x^2 + y^2 = 36$, el eje de las x y las ordenadas $x = -4$ y $x = 5$, es aproximadamente de 48.1025 unidades cuadradas.

4 Determina el área de la superficie limitada por la curva $xy = k^2$, el eje de las x y las ordenadas $x = a$ y $x = b$.

Solución

Al despejar y de la ecuación dada, tenemos: $y = \frac{k^2}{x}$

Al sustituir en la fórmula $\int_a^b y\,dx$ y aplicar directamente la fórmula **5**, resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_a^b \frac{k^2}{x}dx = \left[k^2 \ln x\right]_a^b = k^2 \ln b - k^2 \ln a = k^2(\ln b - \ln a) = k^2 \ln \frac{b}{a}$$

$\therefore$ El área de la superficie limitada por la curva $xy = k^2$, el eje de las x y las ordenadas $x = a$ y $x = b$, es $k^2 \ln \frac{b}{a}$ unidades cuadradas.

5 Determina el área de la superficie limitada por la curva $y^2 = 4x$, el eje de las y y las abscisas $y = 0$ y $y = 4$.

Solución

Al despejar x de la ecuación dada, se tiene: $x = \frac{y^2}{4}$

Al sustituir en la fórmula $\int_a^b x\,dy$ y aplicar directamente la fórmula **4**, resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b x\,dy = \int_0^4 \frac{y^2}{a}dy = \left[\frac{y^3}{12}\right]_0^4 = \frac{(4)^3}{12} - \frac{(0)^3}{12} = 5\frac{1}{3}$$

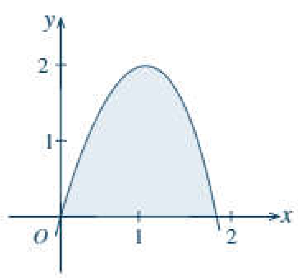
$\therefore$ El área de la superficie limitada por la curva $y^2 = 4x$, el eje de las y y las abscisas $y = 0$ y $y = 4$, es $5\frac{1}{3}$ unidades cuadradas.

6 Bosqueja la curva $y = 2\text{sen}\frac{\pi x}{2}$ y determina el área de una arcada.

Solución

Primero se trazan los rasgos de la curva $y = 2\text{ sen}\frac{\pi x}{2}$, es decir:

x	y
0	0
0.5	1.4142
1	2
1.5	1.4142
2	0



En la tabla se observa que los límites de la **arcada** son $x = 0$ y $x = 2$.

Al sustituir en la fórmula $\int_a^b y\,dx$ y aplicar directamente la fórmula **8**, resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_0^2 2\,\text{sen}\frac{\pi x}{2}\,dx = \left[-\frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$\text{Área} = -\frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi(2)}{2} + \frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi(0)}{2} = -\frac{4}{\pi}\cos\pi + \frac{4}{\pi}\cos 0 = \frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi} = \frac{8}{\pi}$$

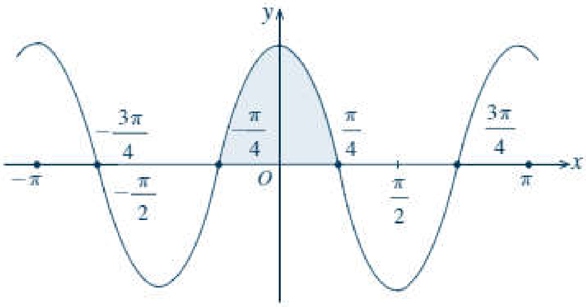
$\therefore$ El área para una arcada de la curva $y = 2\,\text{sen}\dfrac{\pi x}{2}$ es de $\dfrac{8}{\pi}$ unidades cuadradas.

7 Bosqueja la curva $y = \cos 2x$ y determina el área de una arcada.

Solución

Primero se trazan los rasgos de la curva $y = \cos 2x$, es decir:

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y	1	0	–1	0	1	0	–1	0	1



En la tabla se observa que los límites de la arcada son: $x = -\dfrac{\pi}{4}$ y $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Al sustituir en la fórmula $\int_a^b y\,dx$ y aplicar directamente la fórmula **9**, resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx = \left[\frac{1}{2}\,\text{sen}\,2x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\text{sen}2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\text{sen}2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$\therefore$ El área de una arcada de la curva $y = \cos 2x$ es de 1 unidad cuadrada.

Cálculo del área cuando las ecuaciones de la curva se dan en forma paramétrica

Por lo general, las coordenadas x y y de un punto de una curva se expresan como funciones de una tercera variable, por ejemplo t y se denomina **parámetro**. Dadas las ecuaciones de la curva $x = f(t)$, $y = \phi(t)$ expresadas en forma paramétrica, en donde cada valor de t da un valor de x y un valor de y, dando lugar a un punto de la curva.

Por lo anterior, tenemos que: $\quad x = f(t) \qquad y = \phi(t)$

$$dx = f'(t)dt$$

donde, área $= \int_a^b y dx = \int_{t_1}^{t_2} \phi(t) f'(t) dt$.

Se observa que $t = t_1$ cuando $x = a$ y $t = t_2$ cuando $x = b$.

EJEMPLOS

Ejemplos

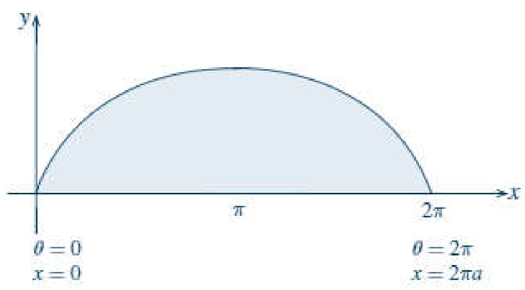
1 Determina el área de la superficie limitada por una arcada de la cicloide $x = a\,(\theta - \text{sen}\,\theta)$, $y = a\,(1 - \cos\theta)$ y el eje de las x.

Solución

Primero se trazan los rasgos de la cicloide, es decir:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
x	0	0.0235	0.0782	0.1811	0.5707	1.2283	1.6490	2.1179	3.1416	4.1651	4.6340	5.0547	5.7123	6.1019	6.2048	6.2595	6.2832
y	0	0.1340	0.2929	0.5	1	1.5	1.7071	1.8660	2	1.8660	1.7071	1.5	1	0.5	0.2929	0.1340	0

Nota: para tabular y graficar, se considera el valor de $a = 1$.



Como $y = a\,(1 - \cos\theta)$ y $x = a\,(\theta - \text{sen}\,\theta)$, tenemos que $dx = a\,(1 - \cos\theta)\,d\theta$; de la tabla se observa que los límites de la arcada son $x = 0$ y $x = 2\pi$.

Al sustituir en la fórmula $\int_a^b y\,dx$, se obtiene:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_0^{2\pi} a(1-\cos\theta)a(1-\cos\theta)\,d\theta = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$\text{Área} = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta = \underbrace{a^2\int_0^{2\pi}d\theta}_{1} - \underbrace{2a^2\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta}_{2} + \underbrace{a^2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta}_{3}$$

Para las integrales 1, 2 y 3, se aplican respectivamente las fórmulas **1**, **9** y el **caso** II para la integración de productos de potencias pares de senos y cosenos por medio de ángulos múltiplos, lo que resulta:

$$a^2\int_0^{2\pi}d\theta - 2a^2\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta + a^2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \left[a^2\theta - 2a^2\text{sen}\,\theta + \frac{a^2\theta}{2} + \frac{a^2\text{sen}\,2\theta}{4}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \left[a^2(2\pi) - 2a^2\text{sen}\,2\pi + \frac{a(2\pi)}{2} + \frac{a^2\text{sen}\,4x}{4}\right] - \left[a^2(0) - 2a^2\text{sen}(0) + \frac{a^2(0)}{2} + \frac{a^2\text{sen}\,2(0)}{4}\right]$$

$$\text{Área} = 3a^2\pi$$

$\therefore$ El área de una arcada de la curva **cicloide** es de $3a^2\pi$ unidades cuadradas.

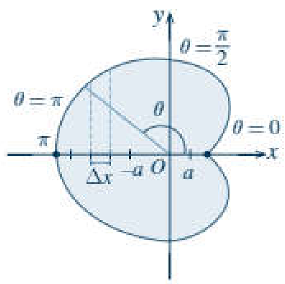
2 Determina el área de las **cardioide** $x = a\,(2\cos\theta - \cos 2\theta)$ y $y = a\,(2\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,2\theta)$.

Solución

Primero se trazan los rasgos de la **cardioide**, es decir:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
x	1	1.232	1.5	1	–0.5	–2.232	–3	–2.232	–0.5	1	1.5	1.232	1
y	0	0.134	0.866	2	2.598	0	0	–1.866	–2.598	–2	–0.866	–0.134	0

Nota: para tabular y graficar, se considera el valor de $a = 1$.



Como $y = a\,(2\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,2\theta)$ y $x = a\,(2\cos\theta - \cos 2\theta)$, se tiene que $dx = 2a\,(\text{sen}\,2\theta - \text{sen}\,\theta)\,d\theta$; de la gráfica, se observa que cuando θ varía de derecha a izquierda, el área que describe la **cardioide** es el doble del área comprendida de 0 a π. Por lo anterior anteponemos -2 a la forma del área.

Al sustituir en la fórmula $-2\int_a^b y\,dx$, se obtiene:

$$\text{Área} = -2\int_a^b y\,dx = -2\int_0^x a(2\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}2\theta)2a(\operatorname{sen}2\theta - \operatorname{sen}\theta)\,d\theta$$

$$\text{Área} = \int_0^\pi (-8a^2\operatorname{sen}2\theta\operatorname{sen}\theta + 8a^2\operatorname{sen}^2\theta + 4a^2\operatorname{sen}^2 2\theta - 4a^2\operatorname{sen}2\theta\operatorname{sen}\theta)\,d\theta$$

$$\text{Área} = \underbrace{-12a^2\int_0^\pi \operatorname{sen}2\theta\operatorname{sen}\theta\,d\theta}_{1} + \underbrace{8a^2\int_0^\pi \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta}_{2} + \underbrace{4a^2\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 2\theta\,d\theta}_{3}$$

Para resolver la integral 1, se aplicar el método de integración de productos de funciones seno y coseno con diferentes argumentos en la misma variable **caso** III; utilizando la fórmula **2** de integración directa de dicho caso, tenemos:

$$-12a^2\int_0^\pi \operatorname{sen}2\theta\operatorname{sen}\theta\,d\theta = [2a^2\operatorname{sen}3\theta - 6a^2\operatorname{sen}\theta]_0^\pi$$

Para resolver las integrales 2 y 3, se aplica el método de integración de productos de potencias pares de senos y cosenos, por medio de ángulos múltiplos **caso** II; utilizando las fórmulas trigonométricas $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta$ y $\operatorname{sen}^2 2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4\theta$, respectivamente, resulta:

$$8a^2\int_0^\pi \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = 8a^2\int_0^\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta = [4a^2\theta - 2a^2\operatorname{sen}2\theta]_0^\pi$$

$$4a^2\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 2\theta\,d\theta = 4a^2\int_0^\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4\theta\right)d\theta = \left[2a^2\theta - \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}4\theta\right]_0^\pi$$

Al escribir de forma unificada los resultados correspondientes, tenemos:

$$\text{Área} = \left[2a^2\theta + 4a^2\theta - 6a^2\operatorname{sen}\theta - 2a^2\operatorname{sen}2\theta + 2a^2\operatorname{sen}3\theta - \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}4\theta\right]_0^\pi$$

$$\text{Área} = \left[6a^2(\pi) - 6a^2\operatorname{sen}(\pi) - 2a^2\operatorname{sen}2(\pi) + 2a^2\operatorname{sen}3(\pi) - \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}4(\pi)\right]$$
$$-\left[6a^2(0) - 6a^2\operatorname{sen}(0) - 2a^2\operatorname{sen}2(0) + 2a^2\operatorname{sen}3(0) - \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}4(0)\right] = 6a^2\pi$$

$\therefore$ El área de la cardioide es de $6a^2\pi$ unidades cuadradas.

EJERCICIO 22

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

I. En grupo y con asesoría de su profesor, determinen el área de la superficie limitada por la curva dada, el eje de las *x* y las ordenadas dadas.

1. $y = 9 - x^2;\ x = 0,\ x = 3$
2. $y = x^2 + x + 1;\ x = 2,\ x = 3$
3. $y = x^3;\ x = 0,\ x = 4$
4. $y = 2x + 3x^2 + x^3;\ x = -3,\ x = 3$

5. $y=\frac{1}{x^2}+2x;\ x=1,\ x=4$
6. $y=x^2+4x+5;\ x=1,\ x=4$
7. $y=x^3+1;\ x=-2,\ x=2$
8. $y=x^2+x-6;\ x=0,\ x=4$
9. $y=x\sqrt{x+1};\ x=0,\ x=3$
10. $y=x+2;\ x=-3,\ x=4$
11. $y=x\sqrt{x^2+5};\ x=0,\ x=2$
12. $y=\frac{1}{(x+2)^3};\ x=-1,\ x=3$
13. $y=4x-x^2;\ x=1,\ x=3$
14. $y=4x+x^2;\ x=-4,\ x=-2$
15. $y=x^4;\ x=-2,\ x=1$
16. $y=x^3;\ x=1,\ x=2$
17. $y=x^2-2x;\ x=2,\ x=7$
18. $y=x^2\sqrt{x-4};\ x=4,\ x=5$
19. $y=\frac{1}{3+x^2};\ x=-1,\ x=2$
20. $y=x^2-2x+3;\ x=-2,\ x=1$

II. En equipo de dos personas, determinen el área de la superficie limitada por la curva dada, el eje de las *y* y las abscisas dadas.

1. $y=4-x^2;\ y=0,\ y=3$
2. $x^2=4y+16;\ y=-2,\ y=0$
3. $x^2=9-y;\ y=0,\ y=8$
4. $2x^2=y^3;\ y=0;\ y=2$
5. $x^2+4y=0;\ y=-1;\ y=0$
6. $ax=y\sqrt{a^2-y^2};\ y=0,\ y=a$
7. $x=\frac{10}{\sqrt{y+4}};\ y=0,\ y=5$
8. $xy=k^2;\ y=a,\ y=b$
9. $x=9y-y^3;\ y=0,\ y=3$
10. $xy=8;\ y=1,\ y=4$
11. $y^3=a^2x;\ y=0,\ y=a$
12. $ay^2=x^3;\ y=0,\ y=a$
13. $x=\frac{1}{y^2}-y;\ y=2,\ y=3$
14. $x=y\sqrt{y+5};\ y=-1,\ y=4$
15. $x=y^3;\ y=1,\ y=3$
16. $x=\frac{1}{\sqrt{y}};\ y=1,\ y=4$
17. $x=\sqrt{y^2-4};\ y=-5,\ y=-3$
18. $x=\ln y;\ y=1,\ y=e$
19. $x=\frac{1}{25-y^2};\ y=3,\ y=5$
20. $x=\sqrt{1+3y};\ y=1,\ y=8$

III. Resuelve los siguientes problemas y en plenaria discute tus resultados.

1. Calcula por integración el área del triángulo limitado por la recta $y=3x$, el eje de las x y la ordenada $x=5$. Comprueba el resultado, obteniendo el área como la mitad del producto de la base por la altura.
2. Calcula por integración el área del trapecio limitado por la recta $5x-8y+40=0$, el eje de las x y las ordenadas $x=-6$ y $x=-1$. Comprueba el resultado obteniendo el área como la semisuma de las bases por la altura.

3. Calcula el área limitada por la parábola $y = (x - 1)^2$, el eje de las x y las ordenadas $x = 1$ y $x = 5$.
4. Calcula el área limitada por el círculo $x^2 + y^2 = 16$, el eje de las x y las ordenadas $x = -3$ y $x = 2$.
5. Calcula el área limitada por la elipse $3x^2 + 4y^2 = 108$, el eje de las x y las ordenadas $x = -3$ y $x = 3$.
6. Calcula el área limitada por la elipse $x^2 + 3y^2 = 6$, el eje de las x y las ordenadas $x = -2$ y $x = 2$.
7. Calcula el área limitada por la hipérbola equilátera $y = \frac{1}{x}$, eje de las x y las ordenadas $x = 1$ y $x = 3$.
8. Calcula el área limitada por la parábola $y = x^2 = 2x$, el eje de las x y las ordenadas $x = 0$ y $x = 2$.
9. Calcula el área limitada por la parábola $y = 4 - x^2$, el eje de las x y las ordenadas $x = -1$ y $x = 1$.
10. Calcula el área limitada por el círculo $x^2 + y^2 = r^2$, el eje de las x y las ordenadas $x = 0$ y $x = r$.
11. Determina el área de la superficie limitada por la **catenaria** $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{n}} + e^{-\frac{x}{n}}\right)$ el eje de las x y las rectas $x = a$ y $x = -a$.

IV. Bosqueja cada una de las siguientes curvas y determina el área de una arcada.

1. $y = \operatorname{sen}\frac{x}{2}$
2. $y = 2\cos x$
3. $y = 2\cos\frac{\pi\theta}{2}$
4. $y = \operatorname{sen} 2x$
5. $y = \tan x \sec^2 x$
6. $y = \sec\theta$
7. $y = x^2 \operatorname{sen} 3x$
8. $y = \frac{1}{3 + \cos 2x}$
9. $y = \sqrt{\operatorname{sen} x + 1}\cos x$
10. $y = \cos\theta \operatorname{sen}\theta$

V. Determina el área para las siguientes curvas, cuyas ecuaciones se expresan en forma paramétrica.

1. Determina el área de la **hipocicloide** $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sec^3\theta$, siendo θ el parámetro.
2. Determina el área de la superficie limitada por una arcada de la curva **compañera de la cicloide** $x = a\theta$, $y = a(1 - \cos\theta)$.
3. Determina el área de la superficie limitada por una arcada de la **cicloide** $x = \theta - \operatorname{sen}\theta$, $y = 1 - \cos\theta$ y el eje de las x.
4. Determina el área de la **cardioide** $x = 2\cos\theta - \cos 2\theta$, $y = 2\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} 2\theta$.
5. Determina la $\int_3^6 xy\,dx$, siendo $x = 6\cos\theta$, $y = 2\operatorname{sen}\theta$.

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Integración aproximada (fórmula de los trapecios y fórmula de Simpson)

Representación geométrica de una integral

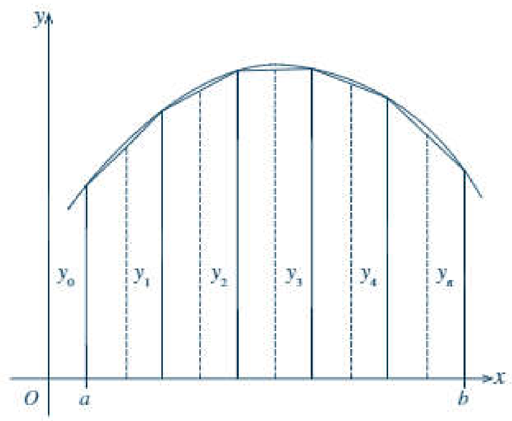
Hasta este tema la integral definida se ha presentado como una expresión para determinar el área. Lo anterior, no significa que siempre toda integral definida represente un área, puesto que la interpretación física del resultado depende siempre de la naturaleza de las magnitudes que representen la variable de la abscisa (x) y la variable ordenada (y).

Considerando (x, y) como las coordenadas de un punto fijo, la integral $\int_a^b y\,dx$ representa realmente un área. Si suponemos que la ordenada representa la **velocidad** de un punto móvil y la abscisa correspondiente representa al **tiempo** cuando el punto tiene dicha velocidad; entonces su representación gráfica es la de una curva que describe la velocidad del movimiento y el área bajo ella entre dos ordenadas representa la **distancia recorrida en el intervalo de tiempo limitante**.

Por lo anterior, se deduce que el valor de la integral que representa el área es igual al valor que representa la distancia; de igual manera, toda integral definida cuyo significado sea volumen, superficie, masa, fuerza, etcétera, puede ser representada geométricamente por un área.

Fórmula de los trapecios

La aplicación de la fórmula de los trapecios es útil cuando la integral $\int_a^b f(x)dx$ sea difícil de obtener o no se pueda realizar en términos de funciones elementales.



El valor numérico exacto de $\int_a^b f(x)\,dx$ es la medida del área de la superficie limitada por la curva $y = f(x)$, el eje de las x y las ordenadas $x = a$ y $x = b$. El valor de esa área puede determinarse, aproximadamente, sumando trapecios, tal y como se explica en la figura de la derecha.

Se divide el segmento $b - a$ del semieje Ox en n partes iguales, donde Δx es la longitud de cada parte, es decir:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Sean las abscisas sucesivas de los puntos de división de la función:

$$x_0 = a, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n = b$$

Se trazan en estos puntos las ordenadas correspondientes de la curva $y = f(x)$, donde $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3), \ldots, y_n = f(x_n)$.

Se unen las extremidades de las ordenadas consecutivas con líneas rectas (cuerdas); de esta manera se formarán trapecios. Dado que el área de un trapecio es igual a la semisuma de las bases por la altura, se tiene que:

$\frac{1}{2}(y_0 + y_1)\Delta x =$ área del primer trapecio, $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)\Delta x =$ área del segundo trapecio,..., $\frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)\Delta x =$ área del enésimo trapecio.

Al sumar, se obtiene la fórmula del área de todos los trapecios, es decir:

$$\text{Área total} = \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)\Delta x$$

Es necesario tomar en cuenta que cuanto mayor sea el número de intervalos (cuanto más pequeño sea Δx), más se aproximará el área total de los trapecios al área bajo la curva.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Empleando la fórmula de los trapecios, calcula el área aproximada para la curva $y = x^2$, dividiendo desde $x = 2$ hasta $x = 8$ en seis intervalos. Compara el resultado obtenido efectuando la integración directa.

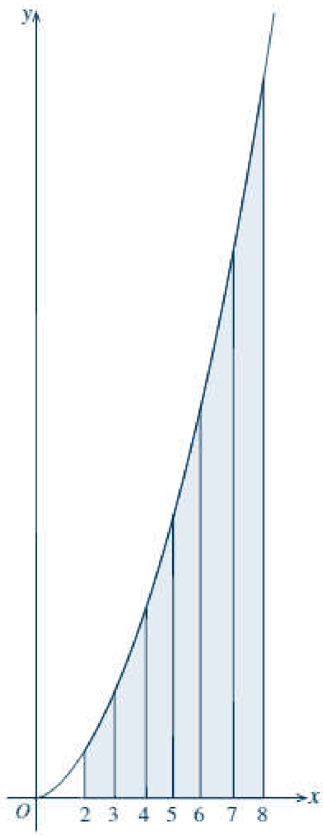
Solución

Se determina primero la longitud de cada intervalo, es decir:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{8-2}{6} = 1$$

A partir de la curva $y = x^2$, se construye la siguiente tabla para los valores de las abscisas sucesivos de tamaño $\Delta x = 1$, a partir de $x = 2$ a $x = 8$.

x	2	3	4	5	6	7	8
y	4	9	16	25	36	49	64



Los valores obtenidos se sustituyen en la fórmula de los trapecios, resultando:

$$\text{Área total} = \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)\Delta x$$

$$\text{Área total} = \left[\frac{1}{2}(4) + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + \frac{1}{2}(64)\right](1)$$

$$\text{Área total} = 169$$

$\therefore$ Por la fórmula de los trapecios, el área aproximada para la curva $y = x^2$ es de 169 unidades cuadradas.

Al realizar la integración directa (aplicando la fórmula 4) resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_2^8 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^8$$

$$\text{Área} = \left[\frac{(8)^3}{3}\right] - \left[\frac{(2)^3}{3}\right]$$

$$\text{Área} = 170\frac{2}{3} - 2\frac{2}{3} = 168$$

∴ Por integración directa, el área bajo la curva $y = x^2$ es de 168 unidades superficie.

Comparando resultados (ver figura de la página 247), observamos que: $169 \approx 168$

2 Empleando la fórmula de los trapecios, calcula el área aproximada para la curva $x^2 + y^2 = 64$, dividiendo desde $x = 4$ hasta $x = 8$ en ocho intervalos. Compara el resultado obtenido, efectuando la integración directa.

Solución

Se determina la longitud de cada intervalo, tenemos: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{8-4}{8} = 0.5$

De la ecuación $x^2 + y^2 = 64$, se despeja con respecto a y, resultando $y = \sqrt{64 - x^2}$, para la cual se construye la siguiente tabla para los valores de abscisas sucesivos de tamaño $\Delta x = 0.5$, a partir de $x = 4$ a $x = 8$.

x	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8
y	6.928	6.614	6.244	5.809	5.291	4.663	3.872	2.783	0

Los valores obtenidos se sustituyen en la fórmula de los trapecios lo que resulta:

$$\text{Área total} = \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)\Delta x$$

$$\text{Área total} = \left[\frac{1}{2}(6.928) + 6.614 + 6.244 + 5.809 + 5.291 + 4.663 + 3.872 + 2.783 + \frac{1}{2}(0)\right](0.5) = 19.37$$

∴ Por la fórmula de los trapecios, el área aproximada de la curva $x^2 + y^2 = 64$ es de 19.37 unidades cuadradas.

Efectuando la integración directa (aplicando la fórmula **23**) resulta:

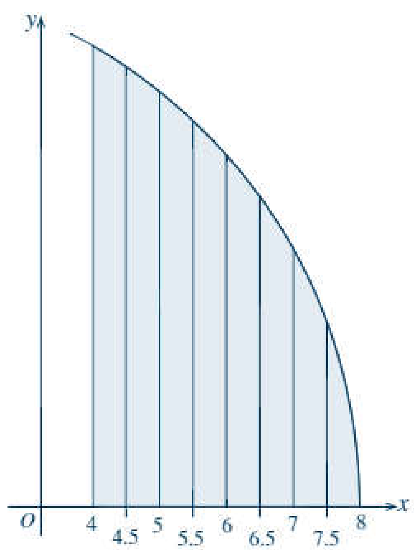
$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_4^8 \sqrt{64 - x^2}\,dx$$

$$\text{Área} = \left[\frac{x}{2}\sqrt{64 - x^2} + 32\operatorname{arcsen}\frac{x}{8}\right]_4^8$$

$$\text{Área} = \left(\frac{8}{2}\sqrt{64 - (8)^2} + 32\operatorname{arcsen}\frac{8}{8}\right) - \left(\frac{4}{2}\sqrt{64 - (4)^2} + 32\operatorname{arcsen}\frac{4}{8}\right)$$

$$\text{Área} = 19.653$$

∴ Por la integración directa, el área bajo la curva $x^2 + y^2 = 64$ es de 19.653 unidades de superficie.



Comparando resultados (ver figura de la derecha), observamos que $19.37 \approx 19.653$.

3 ●●• Empleando la fórmula de los trapecios, calcula el área aproximada de la curva $xy = 1$, dividiendo desde $x = 3$ hasta $x = 10$ en siete intervalos. Compara el resultado obtenido, efectuando la integración directa.

Solución

Se determina primero la longitud de cada intervalo, se tiene: $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-3}{7} = 1$

De la ecuación $xy = 1$, se despeja con respecto a y, resultando $y = \frac{1}{x}$ para la cual se construye la siguiente tabla para los valores de abscisa sucesivos de tamaño $\Delta x = 1$, a partir de $x = 3$ a $x = 10$.

x	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0.333	0.25	0.2	0.166	0.142	0.125	0.111	0.1

Los valores obtenidos se sustituyen en la fórmula de los trapecios lo que resulta:

$$\text{Área total} = \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)\Delta x$$

$$\text{Área total} = \left[\frac{1}{2}(0.333) + 0.25 + 0.2 + 0.166 + 0.142 + 0.125 + 0.111 + \frac{1}{2}(0.1)\right](1) = 1.2100$$

$\therefore$ Por la fórmula de los trapecios, el área aproximado para la curva $xy = 1$ es de 1.2100 unidades cuadradas.

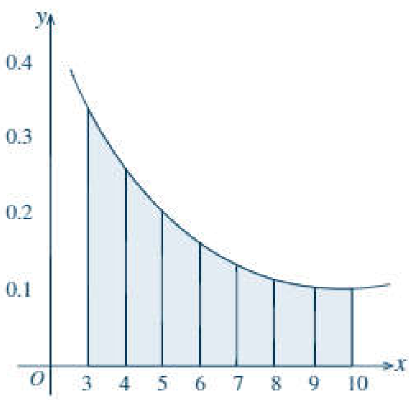
Al realizar la integración directa (aplicando la fórmula **5**), resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_3^{10} \frac{dx}{x} = [\ln x]_3^{10}$$

$$\text{Área} = \ln 10 - \ln 3 = 1.2039$$

$\therefore$ Por integración directa, el área bajo la curva $xy = 1$ es de 1.2039 unidades cuadradas.

Comparando resultados (ver figura de la derecha), observamos que $1.2100 \approx 1.2039$.



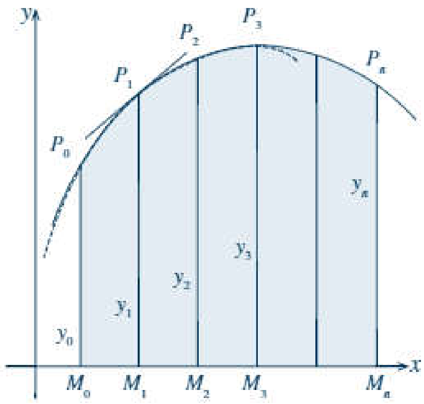
Fórmula de Simpson o parabólica

Al unir los extremos de las ordenadas sucesivas con arcos de parábolas y sumar las áreas bajo dichos arcos, se obtiene una mayor aproximación del área bajo una curva.

Una parábola con eje vertical puede hacerse pasar por tres puntos cualesquiera de una curva, una serie de arcos parabólicos se aproximará lo más posible a la curva dada que la línea punteada formada por las cuerdas que dan lugar a los trapecios.

La ecuación de dicha parábola tiene la forma $y = ax^2 + 2bx + c$, donde los valores de las constantes a, b y c pueden determinarse de manera que esta parábola pase por tres puntos dados.

Se divide el intervalo desde $x = a = OM_0$ hasta $x = b = OM_n$ en un número n (par) de partes iguales, cada una de tamaño Δx. Para cada serie de tres puntos sucesivos P_0, P_1, P_2; P_2, P_3, P_4; P_4, P_5, P_6; etcétera, se trazan arcos de parábolas con ejes verticales. Las ordenadas de dichos puntos son $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$, tal y como se indica en la figura de la derecha.



Sustituyendo el área $M_0 P_0 P_n M_n$ por una serie de **tiras parabólicas dobles** como $M_0 P_0 P_1 P_2 M_2$, cuyo extremo superior es en cada caso, un arco parabólico cuya ecuación es $y = ax^2 + 2bx + c$. El área de cada tira se obtiene empleando la fórmula:

$$\text{Área} = \frac{h}{3}(y + 4y' + y'')$$

Para la primera tira parabólica, se tiene que $h = \Delta x$, $y = y_0$, $y' = y_1$, $y'' = y_2$; así, su área es:

$$M_0P_0P_1P_2M_2 = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

De la misma manera, se tiene que para la:

Segunda tira parabólica: $M_2P_2P_3P_4M_4 = \dfrac{\Delta x}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$.

Tercer tira parabólica: $M_4P_4P_5P_6M_6 = \dfrac{\Delta x}{3}(y_4 + 4y_5 + y_6), \ldots,$

Última tira parabólica: $M_{n-2}P_{n-2}P_{n-1}P_nM_n = \dfrac{\Delta x}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$.

Al sumar el área de cada una de las tiras parabólicas, se obtiene la **fórmula de Simpson**, donde n es par; es decir:

$$\text{Área total} = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + y_n)$$

Al igual que en la fórmula de los trapecios, cuanto mayor sea el número de partes en que se divide $M_0 M_n$, más se aproximará el resultado al área bajo la curva.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Empleando la fórmula de Simpson, calcula el área aproximada para la curva $y = x^3$, dividiendo desde $x = 2$ hasta $x = 10$ en ocho intervalos. Compara el resultado obtenido, aplicando la fórmula de los trapecios y efectúa la integración directa.

Solución

Se determina primero la longitud de cada intervalo, se tiene: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{10-2}{8} = 1$

Para la curva $y = x^3$, se construye la siguiente tabla para los valores de abscisa sucesivos de tamaño $\Delta x = 1$, a partir de $x = 2$ a $x = 10$.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Los valores obtenidos se sustituyen en la fórmula de Simpson lo que resulta:

$$\text{Área total} = \left(\frac{\Delta x}{3} y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + y_n\right)$$

$$\text{Área total} = \frac{1}{3}[8 + 4(27) + 2(64) + 4(125) + 2(216) + 4(343) + 2(512) + 4(729) + 1000] = 2496$$

$\therefore$ Por la fórmula de Simpson, el área aproximada de la curva $y = x^3$, es de 2496 unidades cuadradas.

Comprobando a partir de la fórmula de los trapecios resulta:

$$\text{Área total} = \left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n\right)\Delta x$$

$$\text{Área total} = \left[\frac{1}{2}(8) + 27 + 64 + 125 + 216 + 343 + 512 + 729 + \frac{1}{2}(1000)\right](1) = 2520$$

$\therefore$ Por la fórmula de los trapecios, el área aproximada para la curva $y = x^3$, es de 2520 unidades cuadradas.

Al efectuar la integración directa (aplicando la fórmula 4), resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_2^{10} x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_2^{10} = \frac{(10)^4}{4} - \frac{(2)^4}{4} = 2500 - 4 = 2496$$

$\therefore$ Por integración directa, el área bajo la curva $y = x^3$ es de 2496 unidades cuadradas.

Comparando resultados, se observa que por la fórmula de Simpson y por integración directa se obtiene el mismo resultado; asimismo, se observa que por la fórmula de Simpson se obtiene una mayor aproximación del área que por la fórmula de los trapecios.

2 Empleando la fórmula de Simpson, calcula el área aproximada para la curva $y = x\sqrt{25 - x^2}$, dividiendo desde $x = 0$ hasta $x = 4$ en cuatro intervalos. Compara el resultado obtenido, aplicando la fórmula de los trapecios y efectúa la integración directa.

Solución

Se determina primero la longitud de cada intervalo, se tiene: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{4-0}{4} = 1$

De la curva $y = x\sqrt{25 - x^2}$, se construye la siguiente tabla para los valores de abscisa sucesivos de tamaño $\Delta x = 1$, a partir de $x = 0$ a $x = 4$.

x	0	1	2	3	4
y	0	4.898	9.165	12	12

Los valores obtenidos se sustituyen en la fórmula de Simpson, resultando:

$$\text{Área total} = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + y_n)$$

$$\text{Área total} = \frac{1}{3}[0 + 4(4.898) + 2(9.165) + 4(12) + 12] = 32.640$$

∴ Por la fórmula de Simpson, el área aproximada de la curva $y = x\sqrt{25 - x^2}$ es de 32.640 unidades cuadradas.

Comprobando a partir de la fórmula de los trapecios, resulta:

$$\text{Área total} = \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1} + y_n\right)\Delta x$$

$$\text{Área total} = \left[\frac{1}{2}(0) + 4.898 + 9.165 + 12 + \frac{1}{2}(12)\right](1) = 32.063$$

∴ Por la fórmula de los trapecios, el área aproximada para la curva $y = x\sqrt{25 - x^2}$ es de 32.063 unidades cuadradas.

Al efectuar la integración directa (aplicando la fórmula **4**) resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_0^4 x\sqrt{25 - x^2}\,dx = -\left[\frac{(25 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^4 = -9 + 41.666 = 32.666$$

∴ Por integración directa, el área bajo la curva $y = x\sqrt{25 - x^2}$ es de 32.666 unidades cuadradas.

Comparando resultados, se observa que por la fórmula de Simpson se aproxima mucho al resultado obtenido por integración directa; mientras que por la fórmula de los trapecios existe desviación del resultado real.

3 ••• Empleando la fórmula de Simpson, calcula el área aproximada para la curva $y = \sqrt{2 - \cos^2 \theta}$, dividiendo desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{\pi}{2}$ en seis intervalos. Compara el resultado obtenido, aplicando la fórmula de los trapecios.

Solución

La longitud de cada intervalo es: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{\frac{\pi}{2} - 0}{6} = \dfrac{\pi}{12}$

De la curva $y = \sqrt{2 - \cos^2 \theta}$, se construye la siguiente tabla para los valores de abscisa sucesivos de tamaño $\Delta x = \frac{\pi}{12}$ a partir de $\theta = 0$ a $\theta = \frac{\pi}{12}$.

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
y	1	1.032	1.118	1.224	1.322	1.390	1.414

Los valores obtenidos se sustituyen en la fórmula de Simpson, resultando:

$$\text{Área total} = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + y_n)$$

$$\text{Área total} = \frac{\frac{\pi}{12}}{3}[1 + 4(1.032) + 2(1.118) + 4(1.224) + 2(1.322) + 4(1.390) + 1.414] = 1.9092$$

$\therefore$ Por la fórmula de Simpson, el área aproximada de la curva $y = \sqrt{2 - \cos^2 \theta}$ es de 1.9092 unidades cuadradas.

Comprobando a partir de la fórmula de los trapecios resulta:

$$\text{Área total} = \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)\Delta x$$

$$\text{Área total} = \left[\frac{1}{2}(1) + 1.032 + 1.118 + 1.224 + 1.322 + 1.390 + \frac{1}{2}(1.414)\right]\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1.9093$$

$\therefore$ Por la fórmula de los trapecios, el área aproximada de la curva $y = \sqrt{2 - \cos^2 \theta}$ es de 1.9093 unidades cuadradas.

Comparando resultados, se observa que ambos son muy aproximados entre sí.

EJERCICIO 23

I. Empleando la fórmula de los trapecios, calcula el área aproximada de las siguientes integrales, dividiendo sus límites en el número *n* de intervalos indicados. Compara el resultado obtenido, efectuando la integración directa *(siempre que sea posible)* y en plenaria discute tus resultados.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. $\int_1^6 \sqrt{x^2 + 3x}\, dx; n = 5$
2. $\int_2^5 \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2 + 5}}; n = 3$
3. $\int_3^8 x\sqrt{4 + x^2}\, dx; n = 5$
4. $\int_2^9 \frac{x\, dx}{\sqrt{64 - x^2}}; n = 7$
5. $\int_4^{10} \frac{4\, dx}{x}; n = 6$
6. $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2 + 1}; n = 4$
7. $\int_0^\pi \sqrt{\cos\theta + 1}\, d\theta; n = 4$
8. $\int_2^4 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{10 + x^2}}; n = 4$
9. $\int_2^{\frac{\pi}{2}} \sec^4 \theta\, d\theta; n = 3$

II. Empleando la fórmula de Simpson, calcula el área aproximada de las siguientes integrales, dividiendo sus límites en el número *n* de intervalos indicados. Compara los resultados obtenidos, aplicando la fórmula de los trapecios y efectúa la integración directa *(siempre que sea posible)* y en plenaria discute tus resultados.

1. $\int_2^8 \frac{t\, dt}{\sqrt{t^3 + 3}}; n = 6$
2. $\int_0^3 \sqrt{x + 16}\, dx; n = 6$
3. $\int_2^5 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^3 + 1}}; n = 6$

4. $\int_0^4 \frac{dz}{\sqrt{z^3+4}}; n=4$

5. $\int_1^5 \sqrt{126-x^3}\,dx; n=4$

6. $\int_0^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx; n=4$

7. $\int_3^6 \frac{u\,du}{u^2+4}; n=6$

8. $\int_2^8 \sqrt{64-x^2}\,dx; n=6$

9. $\int_3^7 \frac{dz}{\sqrt{64-z^2}}; n=4$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Obtención de áreas planas por integración, cuando la diferencial de área es una función cartesiana

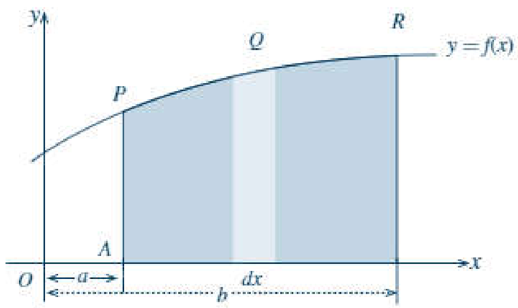
Introducción

El área entre una curva $y=f(x)$, el eje de las x y las ordenadas correspondientes $x=a$ y $x=b$, está dada por la fórmula:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx$$

La fórmula anterior es fácil de recordar, puesto que el elemento de área es un rectángulo como BQ (figura de la derecha) de base dx y altura y.

El área buscada $ACRP$ es el límite de la suma de todos esos rectángulos (tiras) ubicados entre las ordenadas AP y CR.

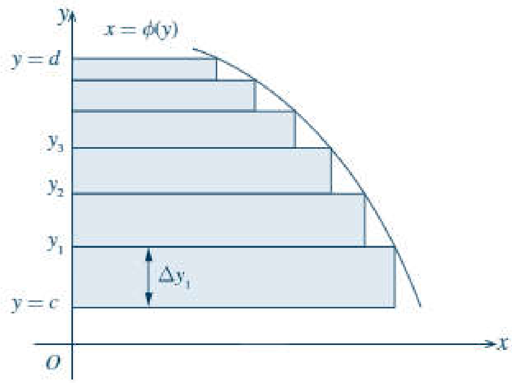


El teorema fundamental del cálculo integral se aplica para el cálculo del área de la superficie limitada por la curva $x=\phi(y)$, el eje de las y y las líneas horizontales $y=c$ y $y=d$.

Primer paso

Se construyen los n rectángulos como se indica en la figura de la derecha.

Naturalmente, el área buscada es el límite de la suma de las áreas de estos rectángulos cuando su número tiende a infinito y la altura de cada uno tiende a cero.



Segundo paso

Las alturas se representan por Δy_1, Δy_2, Δy_3, etcétera, en cada intervalo. Se toma un punto en el extremo superior y se designan las ordenadas de dichos puntos por y_1, y_2, y_3, etcétera. Por lo anterior, las bases son $\phi(y_1)$, $\phi(y_2)$, $\phi(y_3)$, etcétera.

Por tanto, la suma de las áreas de los rectángulos es:

$$\phi(y_1)\Delta y_1 + \phi(y_2)\Delta y_2 + \phi(y_3)\Delta y_3 + \ldots + \phi(y_n)\Delta y_n = \sum_{i=1}^{n}\phi(y_i)\Delta y_i$$

Tercer paso

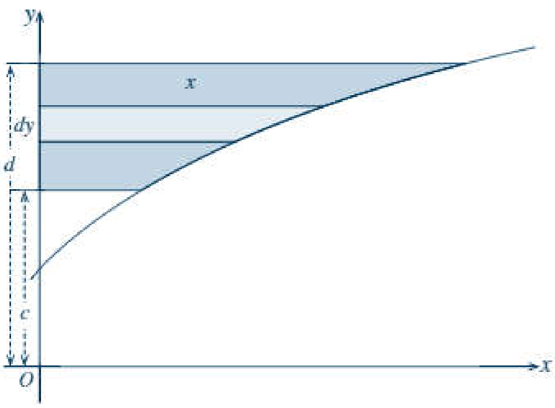
Por el teorema fundamental del cálculo integral se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\phi(y_i)\Delta y_i = \int_c^d \phi(y)\,dy$$

Entonces, el área entre una curva dada, el eje de las y y las líneas horizontales $y = c$ y $y = d$, está dada por la fórmula:

$$\text{Área} = \int_c^d x\,dy$$

La fórmula anterior es fácil de recordar, si se piensa en el límite de la suma de todos los rectángulos horizontales (tiras) contenidos en el área buscada, ya que x y dy son la base y la altura, respectivamente, de un rectángulo cualquiera (figura de la derecha).



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula el área de la superficie limitada por la curva $y = xe^x$, el eje de las x y la recta $x = 4$.

Solución

Sustituyendo en la fórmula $\int_a^b y\,dx$ y aplicar el método de integración por partes, resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_0^4 xe^x\,dx = \left[e^x(x-1)\right]_0^4 = [e^4(4-1)] - [e^0(0-1)] = 3e^4 + 1 = 164.8$$

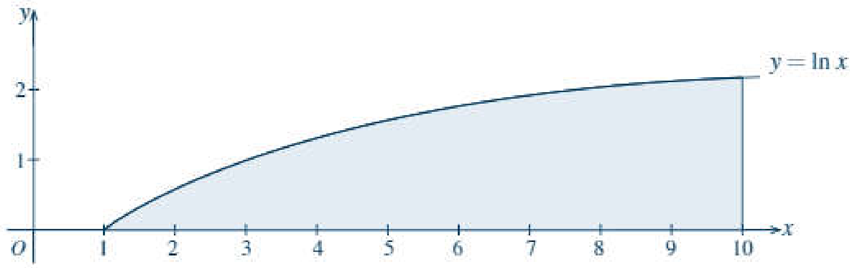
$\therefore$ El área de la superficie limitada por la curva $y = xe^x$, el eje de las x y la recta $x = 4$, es de 164.8 unidades cuadradas.

2 Calcula el área de la superficie limitada por la curva $y = \ln x$, el eje de las x y la recta $x = 10$.

Solución

Al construir la gráfica de la curva $y = \ln x$, tenemos:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	0	0.693	1.098	1.386	1.609	1.791	1.945	2.079	2.197	2.302



Al sustituir en la fórmula $\int_a^b y\,dx$ y aplicando el método de integración por partes, resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_1^{10} \ln x\,dx = [x(\ln x - 1)]_1^{10} = [10(\ln 10 - 1)] - [1(\ln 1 - 1)] = 14.0258$$

$\therefore$ El área de la superficie limitada por la curva $y = \ln x$, el eje de las x y la recta $x = 10$, es de 14.0258 unidades cuadradas.

3 Calcula el área de la superficie limitada por la curva $x = 9y - y^3$, el eje de las y y las rectas $y = 0$ y $y = 3$.

Solución

Al sustituir en la fórmula $\int_c^d y\,dx$ y aplicando la fórmula **4**, resulta:

$$\text{Área} = \int_c^d x\,dy = \int_0^3 (9y - y^3)\,dy = \left[\frac{9y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_0^3 = \frac{81}{4} = 20.25$$

$\therefore$ El área de la superficie limitada por la curva $x = 9y - y^3$, el eje de la y y las rectas $y = 0$ y $y = 3$, es de 20.25 unidades cuadradas.

Significado del signo negativo delante de un área

En la fórmula $\int_a^b y\,dx$, a es menor que b ($a < b$). Dado que ahora se interpreta el primer miembro como el límite de la suma de n términos que resultan de $y_i\,\Delta_i$ haciendo $i = 1, 2, 3,\ldots, n$; entonces cuando y sea negativo cada término de esa suma será negativo y $\int_a^b y\,dx$ resultará con signo negativo. Lo anterior, significa que el área está debajo del eje de las x.

EJEMPLOS

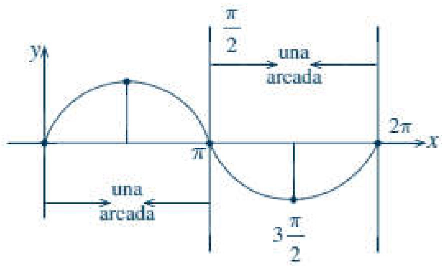
Ejemplos

1 Calcula el área de una arcada de la **sinusoide** $y = \text{sen } x$.

Solución

Al hacer la gráfica de la curva **sinusoide**, se obtiene:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	1	0	–1	0



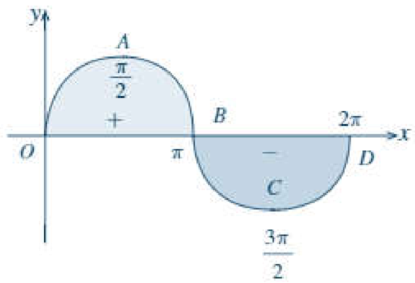
Al sustituir en la fórmula $\int_a^b y\,dx$ y aplicando la fórmula **8**, resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_0^{\pi} \text{sen}\,x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi} = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$$

Al cambiar los límites de la arcada se tiene:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen}\,x\,dx = [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} = (-\cos 2\pi) - (-\cos\pi) = -1 - 1 = -2$$

El área de una **arcada** de la **sinusoide** $y = \text{sen } x$ es:



$$\underset{(OAB)}{\text{Área}} = \int_0^{\pi} \text{sen}\,x\,dx = 2 \quad \left\{ \text{Área ubicada por arriba del eje } x. \right.$$

$$\underset{(BCD)}{\text{Área}} = \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen}\,x\,dx = -2 \quad \left\{ \text{Área ubicada por abajo del eje } x. \right.$$

2 Calcula el área limitada por la curva $x = 3 + \cos\theta$, $y = 4\,\text{sen}\,\theta$.

Solución

Primero se trazan los rasgos de la curva dada, es decir:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
x	4	3.866	3.5	3	2.5	2.134	2	2.134	2.5	3	3.5	3.866	4
y	0	2	3.464	4	3.464	2	0	–2	–3.464	–4	–3.464	–2	0

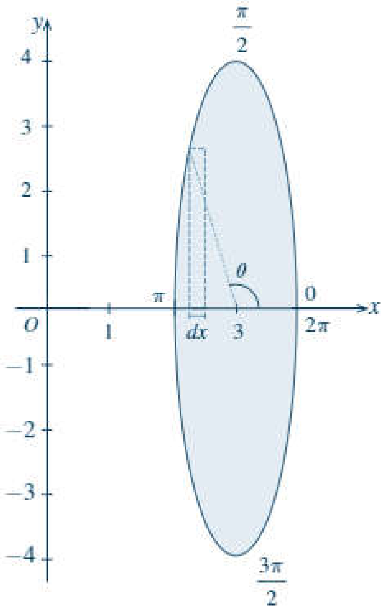
Como $y = 4\,\text{sen}\,\theta$ y $x = 3 + \cos\theta$, se tiene que $dx = -\text{sen}\,\theta\,d\theta$; de la gráfica se observa que cuando θ varía de derecha a izquierda, el área que describe la curva dada es el doble del área comprendida de 0 a π. Por lo anterior, anteponemos -2 a las ecuaciones dadas.

Al sustituir en la fórmula del área, tenemos:

$$\text{Área} = -2\int_a^b y\,dx$$

$$\text{Área} = -2\int_0^{\pi} (4\,\text{sen}\,2\theta)(-\text{sen}\,\theta)\,d\theta$$

$$\text{Área} = 8\int_0^{\pi} \text{sen}^2\,\theta\,d\theta$$



Para resolver la integral resultante, se aplica el método de integración de productos de potencias pares de senos y cosenos, por medio de ángulos múltiplos (**caso II**); utilizando la identidad trigonométrica $\text{sen}^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta$, lo que resulta:

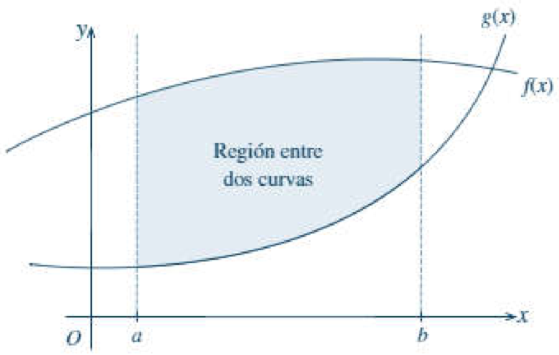
$$\text{Área} = \int_0^{\pi} \text{sen}^2\,d\theta = 8\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta = [4\theta - 2\,\text{sen}\,2\theta]_0^{\pi} = 4\pi$$

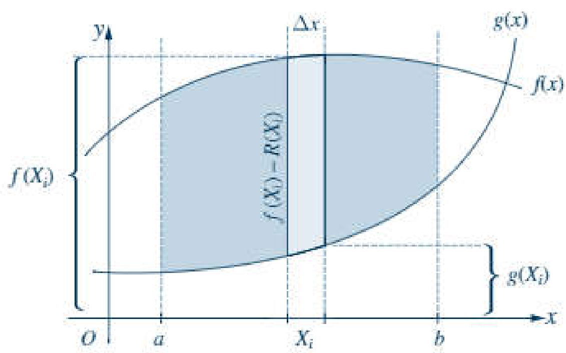
$\therefore$ El área limitada por las curvas $x = 3 + \cos\theta$, $y = 4\,\text{sen}\,\theta$ es de 4π unidades cuadradas.

Área limitada por dos curvas

Extendamos la aplicación de la integral definida del cálculo del área bajo una curva al del área de una región limitada por dos curvas.

Se considera la región acotada por las dos curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y las dos rectas $x = a$ y $x = b$ (figura a la izquierda) y se supone que las dos funciones f y g son continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$ y que $f(x) \geq g(x)$ para toda x en $[a,b]$.





El intervalo cerrado $[a,b]$ se divide en n subintervalos cada uno de ellos de longitud Δx y se traza un **rectángulo representativo** de ancho Δx y altura $f(x_i) - g(x_i)$, donde x_i está en el i-ésimo subintervalo (figura a la derecha).

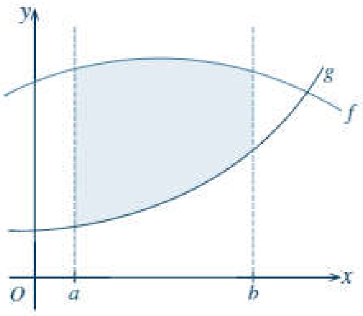
El área del rectángulo representativo es: $\Delta A = [f(x_1) - g(x_1)]\Delta x$.

La suma de las áreas de los n rectángulos graficados es: $\sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - g(x_i)]\Delta x$

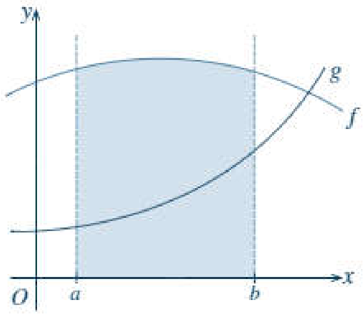
Por tanto, el área de la región comprendida entre dos curvas, es:

$$\text{Área} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - g(x_i)]\Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

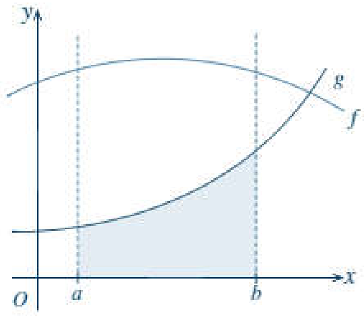
Si f y g están por encima del eje x podemos interpretar el área de la región comprendida entre sus gráficas simplemente como el área bajo f menos el área bajo g (ver figuras siguientes).



Área de la región comprendida entre f y g.



Área de la región bajo f.



Área de la región bajo g.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula el área de la región acotada por las dos curvas $y = x^2 + 2$ y $y = -x$ y las dos rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Solución

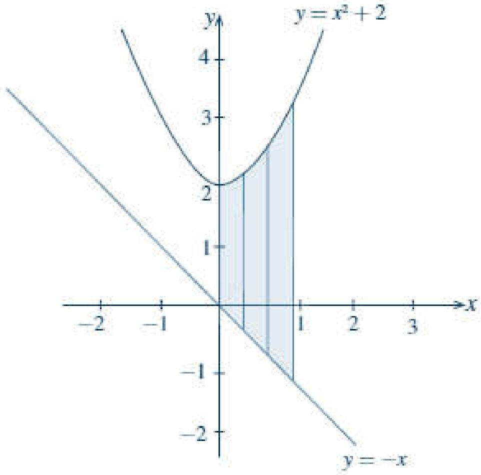
Al elaborar la gráfica correspondiente se obtiene:

Para $y = x^2 + 2$

x	−1	0	1
y	3	2	3

Para $y = -x$

x	−1	0	1
y	1	0	−1



Tomando a $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = -x$, tenemos que $f(x) \geq g(x)$ para toda x en el intervalo cerrado $[0,1]$.

Al aplicar la fórmula para el área entre dos curvas, tenemos:

$$\text{Área} = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

$$\text{Área} = \int_0^1 [(x+2) - (-x)]dx = \int_0^1 (x^2 + x + 2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1 = \frac{17}{6} \approx 2.833$$

∴ El área de la región limitada por las dos curvas $y = x + 2$ y $y = -x$ y las dos rectas $x = 0$ y $x = 1$, es de $\frac{17}{6}$ unidades cuadradas.

2 ●●Calcula el área de la región acotada por la curva $g(x) = 2 - x^2$ y la recta $f(x) = x$.

Solución

Para este problema, los límites a y b están determinados por los puntos de intersección de las curvas f y g. Para encontrarlos, es necesario igualar ambas ecuaciones entre sí y resolver para x, es decir:

$$\begin{array}{ccc} x = -x^2 & x+2=0 & x-1=0 \\ x^2+x-2=0 & x=-2 & x=1 \\ (x+2)(x-1)=0 & & \end{array}$$

Para elaborar la gráfica se tiene:

x	−2	−1	0	1	2
g(x)	−2	1	2	1	−2
f(x)	−2	−1	0	1	2

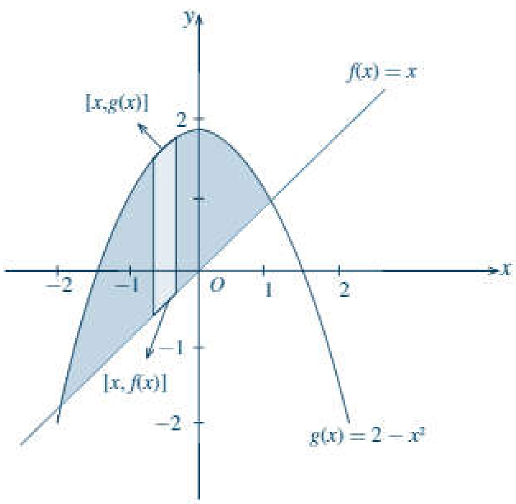
Como $f(x) \leq g(x)$ en el intervalo cerrado $[-2,1]$ resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$$

$$\text{Área} = \int_{-2}^1 [(2-x^2) - x]dx$$

$$\text{Área} = \int_{-2}^1 (2-x^2-x)\,dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^1$$

$$\text{Área} = \left[2(1) - \frac{(1)^3}{3} - \frac{(1)^2}{2}\right] - \left[2(-2) - \frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2}\right] = \frac{9}{2} = 4.5$$



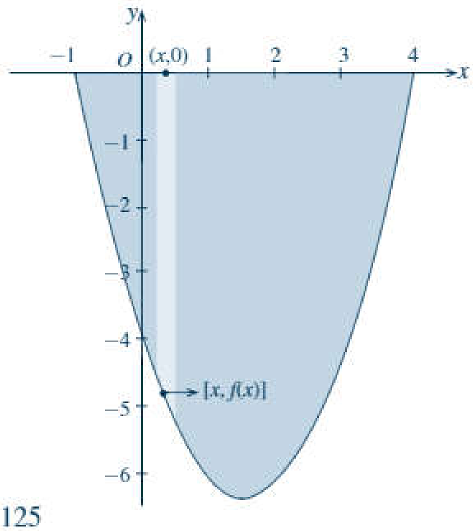
∴ El área de la región limitada por la curva $g(x) = 2 - 2x$ y la recta $f(x) = x$, es de 4.5 unidades cuadradas.

3 Calcula el área de la región limitada por $y = x - 3x - 4$ y el eje x.

Solución

Para elaborar la gráfica correspondiente se tiene:

x	–1	0	1	2	3	4
y	0	4	–6	–6	–4	0



Como $y = x^2 - 3x - 4$ interseca al eje x en $x = -1$ y en $x = 4$, también $x^2 - 3x - 4 \leq 0$ para toda x en el intervalo cerrado.

$$\text{Área} = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \int_{-1}^4 [0 - (x^2 - 3x - 4)]dx$$

$$\text{Área} = \int_{-2}^4 (-x^2 + 3x + 4)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x\right]_{-1}^4$$

$$\text{Área} = \left[-\frac{(4)^3}{3} + \frac{3(4)^2}{2} + 4(4)\right] - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{3(-1)^2}{2} + 4(-1)\right] = \frac{125}{6}$$

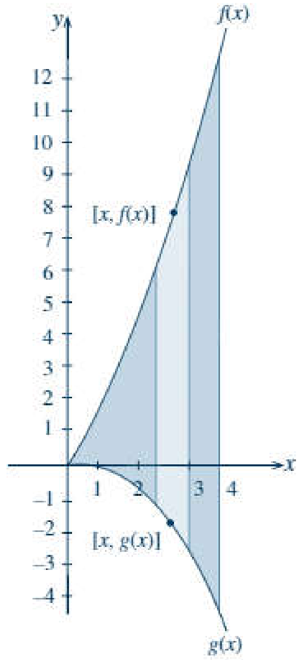
$\therefore$ El área de la región acotada por $y = x^2 - 3x - 4$ y el eje x es de $\frac{125}{6}$ unidades cuadradas.

4 Calcula el área de la superficie limitada por la curva $y = x(1 \pm \sqrt{x})$ y la recta $x = 4$.

Solución

De la curva $y = x(1 \pm \sqrt{x})$, se hace $f(x) = x(1 + \sqrt{x})$ y $g(x) = (1 - \sqrt{x})$ cuya representación gráfica es:

x	0	1	2	3	4
f(x)	0	2	4.8	8.2	12
g(x)	0	0	–0.82	–2.2	–4



$$\text{Área} = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_0^4 [x(1 + \sqrt{x}) - x(1 - \sqrt{x})]dx$$

$$\text{Área} = \int_0^4 \left(x + x^{\frac{3}{2}} - x + x^{\frac{3}{2}}\right)dx = 2\int_0^4 x^{\frac{3}{2}}\,dx = \left[\frac{4x^{\frac{5}{2}}}{5}\right]_0^4$$

$$\text{Área} = \frac{4(4)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{4(0)^{\frac{5}{2}}}{5} = \frac{128}{5}$$

$\therefore$ El área de la superficie limitada por la curva $y = x(1 \pm \sqrt{x})$ y la recta $x = 4$, es de $\frac{128}{5}$ unidades cuadradas.

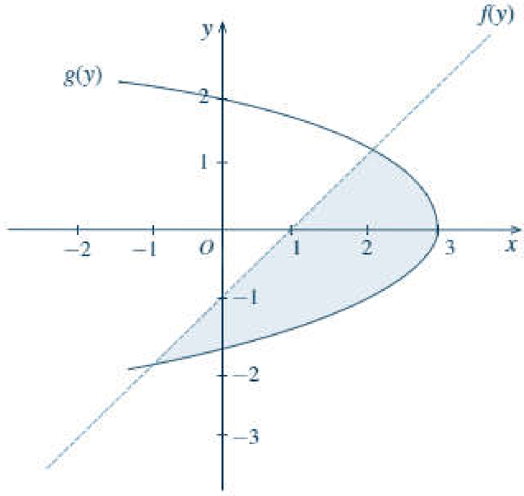
5 Calcula el área de la región comprendida entre $x = 3 - y^2$ y $y = x - 1$.

Solución

Gráficamente, tenemos:

$x = 3 - y^2$	
y	x
* –2	–1
–1	2
0	3
* 1	2
2	–1

$y = x - 1$	
y	x
–2	–3
* –1	–2
0	–1
1	0
* 2	1
3	2



*Indica los puntos de intersección.

Al observar la gráfica, se comprende que se requieren de dos integrales respecto a la variable x para calcula el área, es decir, es necesario emplear rectángulos verticales.

Si se integra con respecto a y, es decir, si empleamos rectángulos horizontales, se tiene que $g(y) = 3 - y^2$ y $f(y) = y + 1$. Como estas dos curvas se intersecan en $y = -2$ y en $y = 1$, en este intervalo $f(y) \leq g(y)$, por lo que se tiene:

$$\text{Área} = \int_c^d [g(x) - f(x)]dy = \int_{-2}^{1} [(3 - y^2) - (y + 1)]dy = \int_{-2}^{1} (2 - y - y^2)dy = \left[2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{1}$$

$$\text{Área} = \left[2(1) - \frac{(1)^2}{2} - \frac{(1)^3}{3}\right] - \left[2(-2) - \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3}\right] = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 4 + 2 - \frac{8}{3} = \frac{9}{2}$$

$\therefore$ El área de la región comprendida entre $x = 3 - y^2$ y $y = x - 1$, es de $\frac{9}{2}$ unidades cuadradas.

Nota: es necesario aclarar, que por lo general para determinar el área entre dos curvas hay que aplicar, para rectángulos verticales, la siguiente fórmula:

$$\text{Área} = \int_{x_1}^{x_2} (\text{curva superior}) - (\text{curva inferior})\,dx \quad \} \text{ En la variable } x.$$

Para rectángulos horizontales, se aplica la siguiente fórmula:

$$\text{Área} = \int_{y_1}^{y_2} (\text{curva a la derecha}) - (\text{curva a la izquierda})\,dy \quad \} \text{ En la variable } y.$$

donde (x_1,y_1), (x_2,y_2) son, o bien, puntos adyacentes de intersección de las dos curvas o puntos sobre ciertas líneas del contorno.

Área limitada por dos curvas al intersecarse en más de dos puntos

Cuando dos curvas se cortan en **más** de dos puntos, para determinar el área de la región comprendida entre ellas, se tienen que buscar **todos** los puntos de intersección y comprobar en cada intervalo precisado por las curvas, cuál de ellas está por encima de la otra.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula el área de la región acotada por las curvas $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ y $g(x) = 3x - x^2 - 1$.

Solución

Primero se determinan los puntos de intersección de las dos curvas dadas, para ello se igualan ambas funciones, lo que resulta:

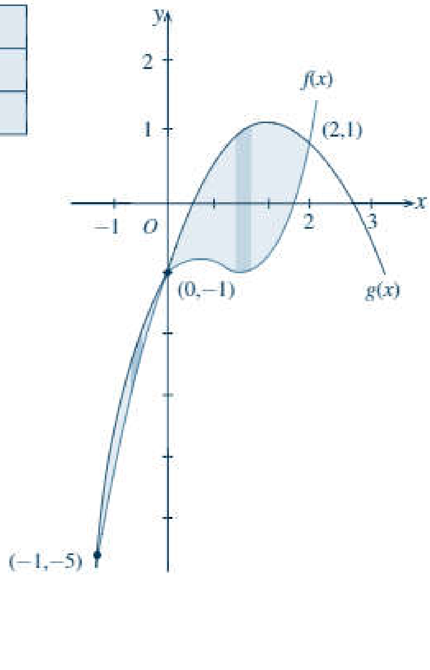
$$x^3 - 2x^2 + x - 1 = 3x - x^2 - 1 \qquad x(x^2 - x - 2) = 0$$

$$x^3 - 2x^2 + x - 1 - 3x + x^2 + 1 = 0 \qquad x(x-2)(x+1) = 0$$

$$x^3 - x^2 - 2x = 0 \qquad \therefore \quad x = 0, \quad x = 2 \quad \text{y} \quad x = -1.$$

Para elaborar la gráfica correspondiente se tiene:

x	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
f(x)	−5	−2.125	−1	−0.875	−1	−0.625	1
g(x)	−5	−2.75	−1	0.25	1	1.25	1



Como $f(x) \geq g(x)$ para toda x en el intervalo cerrado $[-1,0]$, pero también $g(x) \geq f(x)$ para toda x en el intervalo cerrado $[0,2]$.

Por lo anterior, se requieren dos integrales para determinar el área total, es decir, una integral para el intervalo $[-1,0]$ y otra para el intervalo $[0,2]$.

$$\text{Área total} = \int_{-1}^{0}[f(x) - g(x)]dx + \int_{0}^{2}[g(x) - f(x)]dx$$

$$\text{Área total} = \int_{-1}^{0}[(x^3 - 2x^2 + x - 1) - (3x - x^2 - 1)]dx + \int_{0}^{2}[(3x - x^2 - 1) - (x^3 - 2x^2 + x - 1)]dx$$

$$\text{Área total} = \int_{-1}^{0}(x^3 - x^2 - 2x)dx + \int_{0}^{2}(2x + x^2 - x^3)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{2} + \left[x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2}$$

$$\text{Área total} = -\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)+\left(4+\frac{8}{3}-4\right)=\frac{37}{12}$$

$\therefore$ El área de la región limitada por las curvas $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ y $g(x) = 3x - x^2 - 1$, es de $\frac{37}{12}$ unidades cuadradas.

2 ●●• Calcula el área de la región acotada por las curvas $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ y $g(x) = x^2 - 4x$.

Solución

Primero se determinan los puntos de intersección entre las curvas, para ello se igualan ambas funciones entre sí y se resuelve para x, lo que resulta:

$$x^3-6x^2+8x=x^2-4x \qquad x(x-4)(x-3)=0 \qquad x-3=0 \qquad x-4=0$$

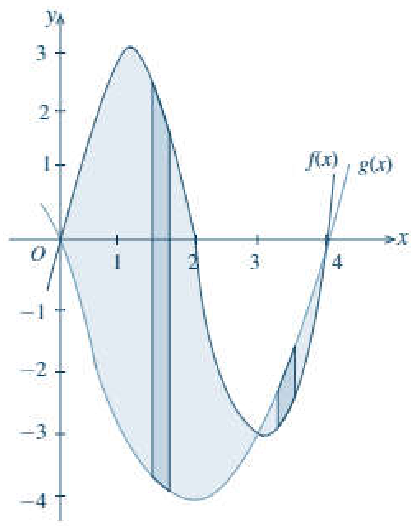
$$x^3-6x^2+8x-x^2+4x=0 \qquad x=0 \qquad x=3 \qquad x=4$$

$$x^3-7x^2+12x=0$$

$$x(x^2-7x+12)=0$$

Gráficamente, tenemos:

x	0	1	2	3	3.5	4
f(x)	0	3	0	−3	−2.625	0
g(x)	0	−3	−4	−3	−1.75	0



$\therefore$ Los puntos de intersección son: (0,0), (3,−3) y (4,0).

Como $f(x) \geq g(x)$ para toda x en el intervalo cerrado [0,3], pero también $g(x) \geq f(x)$ para toda x en el intervalo cerrado [3,4].

Por lo anterior, se requieren dos integrales para encontrar el área total, es decir, una integral para el intervalo [0,3] y otra para el intervalo [3,4].

$$\text{Área total} = \int_0^3 [f(x)-g(x)]dx + \int_3^4 [g(x)-f(x)]dx$$

$$\text{Área total} = \int_0^3 [(x^3-6x^2+8x)-(x^2-4x)]dx + \int_3^4 [(x^2-4x)-(x^3-6x^2+8x)]dx$$

$$\text{Área total} = \int_0^3 (x^3-7x^2+12x)dx + \int_3^4 (7x^2-12x-x^3)dx$$

$$\text{Área total} = \int_0^3 [f(x)-g(x)]dx + \int_3^4 [g(x)-f(x)]dx$$

$$\text{Área total} = \int_0^3 [(x^3-6x^2+8x)-(x^2-4x)]dx + \int_3^4 [(x^2-4x)-(x^3-6x^2+8x)]dx$$

$$\text{Área total} = \int_0^3 (x^3-7x^2+12x)dx + \int_3^4 (7x^2-12x-x^3)dx$$

$$\text{Área total} = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{3} - 6x^2\right]_0^3 + \left[\frac{7x^3}{3} - 6x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_3^4$$

$$\text{Área total} = \left(\frac{81}{4} - 63 + 54\right) + \left(\frac{448}{3} - 96 - 64\right) - \left(63 - 54 - \frac{81}{4}\right)$$

$$\text{Área total} = \frac{81}{4} - 63 + 54 + \frac{448}{3} - 96 - 64 - 63 + 54 + \frac{81}{4} = \frac{71}{6}$$

$\therefore$ El área de la región limitada por las curvas $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ y $g(x) = x^2 - 4x$ es de $\frac{71}{6}$ unidades cuadradas.

EJERCICIO 24

I. Resuelve los siguientes problemas y en plenaria discute tus resultados.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. Determina el área de la superficie limitada por la curva $y = (x - 2)^2$, el eje de las x y las ordenadas $x = 0$ y $x = 4$.
2. Calcula el área de la región comprendida entre la curva $y = \sqrt{x}$, el eje de las x y las ordenadas $x = 1$ y $x = 4$.
3. Determina el área de la superficie acotada por la curva $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}}$, el eje de las x y las ordenadas $x = -4$ y $x = 4$.
4. Calcula el área de la región comprendida entre la curva $y = x\sqrt{x^2 + 5}$, el eje de la x y la recta $x = 2$.
5. Determina el área de la superficie limitada por la hipérbola $xy = 9$, el eje de las x y las ordenadas $x = 3$ y $x = 6$.
6. Calcula el área de la superficie limitada por la parábola $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}$ y los ejes de coordenadas.
7. Determina el área total de la hipocicloide $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{4}$.
8. Calcula el área de la región comprendida entre la parábola $y = 6 + 4x - x^2$ y la cuerda que une los puntos $(-2,-6)$ y $(4,6)$.
9. Determina el área de la superficie limitada por la parábola semicúbica $y^3 = x^2$ y la cuerda que une los puntos $(-1,1)$ y $(8,4)$.
10. Calcula el área de la superficie acotada por la curva $x^2y = x^2 - 1$ y las rectas $y = 1$, $x = 1$ y $x = 4$.
11. Determina el área de la superficie limitada por la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 25$, el eje de las x y una recta trazada del origen al punto $(4,3)$ de la curva.
12. Calcula el área de la superficie acotada por la parábola $y = 4 - x^2$ donde $x = -2$ a $x = 2$.
13. Determina el área de la superficie encerrada por el lazo de la curva $4y^2 = x^2(4 - x)$.
14. Calcula el área de la región encerrada por el lazo de la curva $y^2 = x(x - 2)^2$.
15. Determina el área de la superficie encerrada por el lazo de la curva $y^2 = x^2(9 - x)$.

II. En equipo de dos personas, determinen las áreas de las superficies acotadas por las siguientes curvas. Para cada problema traza la gráfica correspondiente.

1. $y^2 = 2px, x^2 = 2py$
2. $y^2 = ax, x^2 = by$
3. $y^2 = x^2(x^2 - 1), x = 2$
4. $y^2 = x^3 - x^2, x = 2$
5. $x^2 - y^2 = a^2, x = 2a$
6. $x^2 - 4y^2 = 4, x = 6$
7. $y = x^3 - 3x, x = y$
8. $y^2 = 6x, x^2 = 6y$
9. $y^2 = 4x, 2x - y = 4$
10. $y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 4x$
11. $y^2 = 4x, x = 12 + 2y - y^2$
12. $y = 6x - x^2, x = y$
13. $y^2 = 4x, 2x - y = 4$
14. $y = 4 - x^2, x = 1 - \frac{y}{4}$

III. Los ejes coordenados y las coordenadas del punto $A(1,1)$ forman un cuadrado. Calcula la razón de la mayor a la menor de las áreas en las que es dividido por cada una de las siguientes curvas.

1. $y = x^4$
2. $y = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}$
3. $y = xe^{x-1}$
4. $y = \tan \frac{\pi x}{4}$
5. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 2$
6. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1$

IV. Para cada una de las siguientes curvas, calcula el área de la región del primer cuadrante acotada por el arco de curva que va desde el eje de las y hasta la primera intersección con el eje de las x.

1. $y = e^x \operatorname{sen} x$
2. $y = \operatorname{sen}(x + 1)$
3. $y = e^{\frac{x}{2}} \cos 2x$
4. $y^2 = (4 - x)^3$
5. $y = x^3 - 8x^2 + 15x$
6. $y = 4e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\pi x}{2}$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

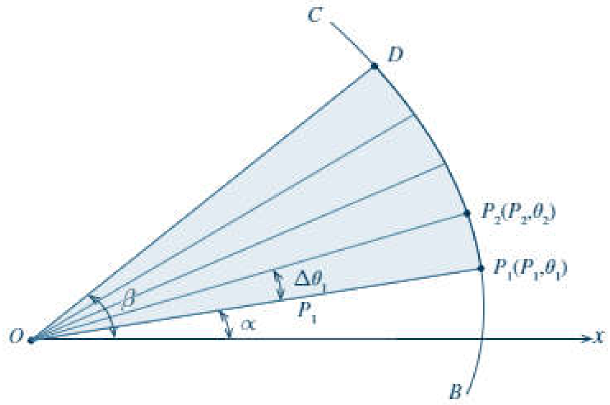
Obtención de áreas planas por integración, cuando la diferencial de área es una función polar

Introducción

Se trata de determinar el área acotada por una curva y dos de sus **radios vectores**.

Supongamos que la ecuación de la curva se representa por $\varphi = f(\theta)$ y los dos radios vectores por OP_1 y OD (figura de la página 267). Sean también α y β los ángulos que forman dichos radios vectores y el eje polar.

Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral, tenemos:



Primer paso

Con base en la figura anterior, el área pedida es el límite de la suma de los sectores circulares construidos.

Segundo paso

Sean los ángulos centrales de los sectores $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$, $\Delta\theta_3$, etcétera, y sus radios φ_1, φ_2, φ_3, etcétera. Entonces la suma de las áreas de los sectores es:

$$\frac{1}{2}\varphi_1^2\Delta\,\theta_1+\frac{1}{2}\varphi_2^2\Delta\,\theta_2+\frac{1}{2}\varphi_3^2\Delta\,\theta_3+\ldots+\frac{1}{2}\varphi_n^2\Delta\,\theta_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\varphi_i^2\Delta\,\theta_i$$

Lo anterior, se debe a que el área de un sector circular es igual a $\frac{1}{2}$ **radio por arco**, entonces el área del primer sector es igual a $\left(\frac{1}{2}\varphi_1\right)(\varphi_1\Delta\theta_1)=\frac{1}{2}\varphi_1^2\Delta\theta_1$.

Tercer paso

Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral, resulta:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\varphi_i^2\Delta\theta_i=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}\varphi^2\,d\theta$$

Por lo anterior, el área **barrida** por el radio vector de la curva cuando pasa de la posición OP, a la posición OD, está dada por la fórmula:

$$\text{Área}=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi^2\,d\theta$$

Sustituyéndose de la ecuación de la curva el valor de φ en términos de θ.

Por tanto, el elemento de área para $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi^2\,d\theta$ en un sector circular de radio φ y ángulo central $d\theta$.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el área de la superficie limitada por el círculo $\varphi = a \cos \theta$ y las rectas $\theta = 0$ y $\theta = 60$.

Solución

Sustituyendo directamente en la fórmula de área, tenemos:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \varphi^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{60^\circ} (a\cos\theta)^2\, d\theta = \frac{a^2}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta\, d\theta$$

Al aplicar la identidad trigonométrica $\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$ se tiene:

$$\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta = \underbrace{\frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta}_{1} + \underbrace{\frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2\theta\, d\theta}_{2}$$

Integrando directamente 1 y 2 por las fórmulas **1** y **9**, respectivamente, resulta:

$$\frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta + \frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2\theta\, d\theta = \left[\frac{a^2\theta}{4} + \frac{a^2 \operatorname{sen} 2\theta}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta + \frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2\theta\, d\theta = \left[\frac{a^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{4} + \frac{a^2 \operatorname{sen} 2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{8}\right] - \left[\frac{a^2(0)}{4} + \frac{a^2 \operatorname{sen} 2(0)}{8}\right]$$

$$\frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta + \frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2\theta\, d\theta = \frac{a^2\pi}{12} + \frac{a^3\sqrt{3}}{16} = 0.37a^2$$

$\therefore$ El área de la superficie limitada por el círculo $\varphi = a \cos \theta$ y las rectas $\theta = 0$ y $\theta = 60^\circ$, es de $0.37a^2$ unidades cuadradas.

2 Determina el área total de la superficie limitada por la curva $\varphi = a \operatorname{sen} 2\theta$.

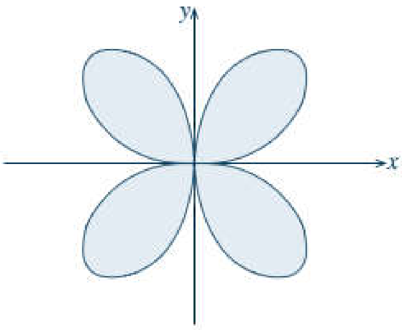
Solución

Para elaborar la curva dada se tiene:

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
φ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{23\pi}{12}$	2π
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Nota: para tabular y graficar, consideramos el valor de $a = 1$.



Rosa de cuatro hojas

Puesto que $\varphi = 0$ cuando θ varía desde 0 a $\frac{\pi}{2}$, describiendo el área de una hoja, por lo que el área total es igual a cuatro veces el área de dicha hoja.

Sustituyendo en la fórmula del área, tenemos:

$$\text{Área total} = 4\left(\frac{1}{2}\right)\int_{\alpha}^{\beta}\varphi^2\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\operatorname{sen}2\theta)^2\,d\theta = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2 2\theta\,d\theta$$

Al aplicar la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2 2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4\theta$ se tiene:

$$2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2 2\theta\,d\theta = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4\theta\right)d\theta = \underbrace{a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta}_{1} - \underbrace{a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4\theta\,d\theta}_{2}$$

Integrando 1 y 2 directamente por las fórmulas **I** y **9**, respectivamente, resulta:

$$a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta - a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4\theta\,d\theta = \left[a^2\theta - \frac{a^2\operatorname{sen}4\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[a^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{a^2\operatorname{sen}4\left(\frac{\pi}{2}\right)}{4}\right)\right] - \left[a^2(0) - \frac{a^2\operatorname{sen}4(0)}{4}\right] = \frac{a^2\pi}{2}$$

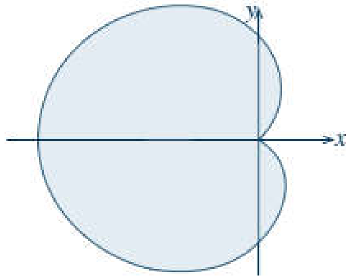
$\therefore$ El área total de la superficie limitada por la curva $\varphi = a$ sen 2θ es de $\frac{a^2\pi}{2}$ unidades cuadradas.

3 ●•Determina el área de la superficie encerrada por la curva $\varphi = a\,(1 - \cos\theta)$.

Solución

Para elaborar la curva dada se tiene:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
φ	0	0.134	0.292	0.5	1	1.5	1.707	1.866	2	1.866	1.707	1.5	1	0.5	0.292	0.134	0



Cardioide

Puesto que la curva es simétrica con respecto al eje x, el área de la superficie encerrada por la curva $\varphi = a\,(1 - \cos\theta)$ para cuando θ varía desde 0 hasta 2π, es dos veces el área que describe el radio vector desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$.

Sustituyendo en la fórmula del área, tenemos:

$$\text{Área encerrada} = 2\left(\frac{1}{2}\right)\int_{\alpha}^{\beta}\varphi^2\,d\theta = \int_0^{\pi}[a(1-\cos\theta)]^2\,d\theta = \int_0^{\pi}a^2(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$\text{Área encerrada} = \underbrace{a^2\int_0^{\pi}d\theta}_{1} - \underbrace{2a^2\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta}_{2} + \underbrace{a^2\int_0^{\pi}\cos^2\theta\,d\theta}_{3}$$

Integrando 1 y 2 directamente por las fórmulas **1** y **9**, respectivamente, resulta:

$$a^2\int_0^{\pi}d\theta - 2a^2\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta = \left[a^2\theta - 2a^2\operatorname{sen}\theta\right]_0^{\pi}$$

Para la integral 3, aplicamos la identidad trigonométrica $\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$, tenemos:

$$a^2\int_0^{\pi}\cos^2 d\theta = a^2\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta = \underbrace{\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}d\theta}_{3a} + \underbrace{\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\cos 2\theta\,d\theta}_{3b}$$

Integrando $3a$ y $3b$ directamente por las fórmulas **1** y **9**, respectivamente, resulta:

$$\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}d\theta + \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\cos 2\theta\,d\theta = \left[\frac{a^2\theta}{2} + \frac{a^2\operatorname{sen}2\theta}{4}\right]_0^{\pi}$$

Al escribir de forma unificada el resultado de cada integral, tenemos que:

$$\text{Área encerrada} = \left[a^2\theta - 2a^2\operatorname{sen}\theta + \frac{a^2\theta}{2} + \frac{a^2\operatorname{sen}2\theta}{4}\right]_0^{\pi}$$

$$\text{Área encerrada} = \left[\frac{3a^2\theta}{2} - 2a^2\text{sen}\,\theta + \frac{a^2\text{sen}\,2\theta}{4}\right]_0^{\pi}$$

$$\text{Área encerrada} = \left[\frac{3a^2(\pi)}{2} - 2a^2\text{sen}\,(\pi) + \frac{a^2\text{sen}\,2(\pi)}{4}\right] - \left[\frac{3a^2(0)}{2} - 2a^2\text{sen}(0) + \frac{a^2\text{sen}\,2(0)}{4}\right]$$

$$\text{Área encerrada} = \frac{3a^2}{2}$$

$\therefore$ El área de la superficie encerrada por la curva $\varphi = a\,(1 - \cos\theta)$ es de $\frac{3a^2}{2}$ unidades cuadradas.

EJERCICIO 25

I. Resuelve los siguientes problemas y en plenaria discute tus resultados.

Escribe los números correspondientes	
Competencias genéricas	
Competencias disciplinares	

1. Determina el área de la superficie encerrada por cada una de las siguientes curvas.

a) $\varphi = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$

b) $\varphi = 3 + \cos 3\theta$

c) $\varphi = \text{sen}^2\frac{\theta}{2}$

d) $\varphi = 2 - \cos\theta$

e) $\varphi^2 = 4\,\text{sen}\,2\theta$

f) $\varphi^2 = a\cos 3\theta$

g) $\varphi^2 = \frac{1}{2} + \cos 2\theta$

h) $\varphi^2 = 2 + \text{sen}\,3\theta$

i) $\varphi^2 = a\,\text{sen}\,n\theta$

j) $\varphi^2 = \cos 3\theta - 2\cos\theta$

k) $\varphi^2 = \cos 3\theta - \cos\theta$

l) $\varphi^2 = a\cos\theta + b\,\text{sen}\,\theta$

2. Calcula el área de la superficie limitada por la parábola $\varphi = \frac{a}{1+\cos\theta}$ y las rectas $\theta = 0$ y $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

3. Calcula el área de la superficie limitada por la parábola $\varphi = a\sec^2\frac{\theta}{2}$ que interseca entre la curva y el lado recto, es decir, la cuerda trazada por el foco, perpendicular al eje de simetría.

4. Calcula el área de la superficie limitada por $\varphi^2 = a^2\,\text{sen}\,4\theta$.

5. Calcula las áreas de las superficies limitadas por las siguientes curvas y las rectas dadas.

a) $\varphi = \tan\theta + \sec\theta;\ \theta = 0,\ \theta = \frac{\pi}{4}$

b) $\varphi = e^{\frac{\theta}{2}};\ \theta = \frac{\pi}{4},\ \theta = \frac{\pi}{2}$

c) $\varphi = a\,\text{sen}\,\theta + b\cos\theta;\ \theta = 0,\ \theta = \frac{\pi}{2}$

d) $\varphi = \tan\theta;\ \theta = 0,\ \theta = \frac{\pi}{4}$

6. Calcula el área del lazo interior de la disectriz $\varphi = a\,(1-2\cos\theta)$.
7. Calcula el área de la superficie interior al círculo $3\varphi = \sqrt{3}\cos 2\theta$ y al bucle de la curva $\varphi = \cos 2\theta$ desde $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$ hasta $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.
8. Calcula el área total de la curva $\varphi^2 = a^2 \cos 2\theta$.
9. Determina el área en común que tienen los siguientes pares de curvas.

   a) $\varphi^2 = \cos 2\theta,\ \varphi^2 = \operatorname{sen} 2\theta$

   b) $\varphi = \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta,\ \varphi^2 = \cos 2\theta$

   c) $\varphi = 1 - \cos\theta,\ \varphi = \operatorname{sen}\theta$

   d) $\varphi = 3\cos\theta,\ \varphi = 1 + \cos\theta$

   e) $\varphi = \sqrt{2}\cos\theta,\ \varphi^2 = \sqrt{3}\operatorname{sen} 2\theta$

   f) $\varphi = \sqrt{6}\cos\theta,\ \varphi = \sqrt{9}\cos 2\theta$

   g) $\varphi^2 = 2\cos 2\theta,\ \varphi = 1$

   h) $\varphi = 1 + \cos\theta,\ \varphi = 1$

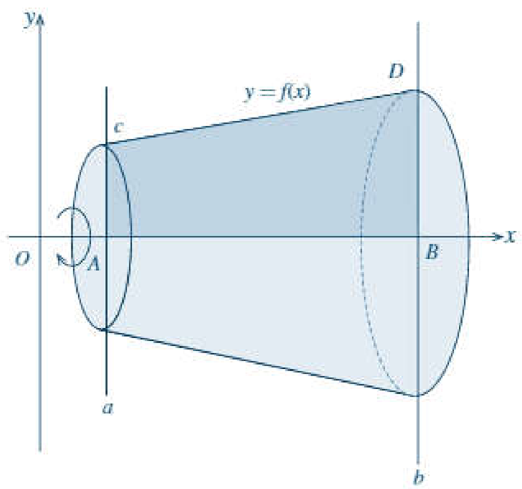
10. Calcula el área de la superficie interior al círculo $3\varphi = \sqrt{6}\operatorname{sen} 2\theta$ y al bucle de la curva $\varphi^2 = \cos 2\theta$ desde $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$ hasta $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.
11. La cara de un travesaño arqueado es la región acotada por la curva $\varphi^2 = 4\cos 2\theta$. ¿Cuánto material se necesita para cubrir la cara de dicho travesaño?
12. Determina el área limitada por un rizo de la curva $\varphi = a\operatorname{sen} n\theta$, donde n es un número entero positivo.

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Obtención de volúmenes de sólidos de revolución por integración

Introducción

Sea V el volumen del sólido de revolución que se genera haciendo girar una superficie plana $ABCD$ alrededor del eje x, siendo la ecuación de la curva plana CD, $y = f(x)$ (figura de la derecha).



Primer paso

Dividiendo el segmento AB en n partes, cuyas longitudes sean $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \ldots, \Delta x_n$ y haciendo pasar por cada punto de división un plano perpendicular al eje de las x. Dichos planos dividirán el sólido en n placas circulares. Si dentro de la superficie plana $ABCD$ se construyen rectángulos con las bases $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \ldots, \Delta x_n$ entonces cada rectángulo genera un cilindro de revolución cuando la superficie plana $ABCD$ se hace girar.

De esta forma se obtiene un cilindro correspondiente a cada una de las placas circulares. (En la figura inferior, se observa que $n = 4$ y se ven dos cilindros). El límite de la suma de estos n cilindros ($n \to +\infty$) es el volumen buscado.

Segundo paso

Sean $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ las ordenadas de la curva CD en los puntos de división en el eje de las x. Entonces el volumen del cilindro generado por la superficie del rectángulo $AEFC$ es $\pi y_1{}^2\ \Delta x_1$, y la suma de los volúmenes de todos estos cilindros es:

$$\pi y_1^2 \Delta x_1 + \pi y_2^2 \Delta x_2 + \pi y_3^2 \Delta x_3 + \ldots + \pi y_n^2 \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} \pi y_1^2 \Delta x_1$$

Tercer paso

Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral (teniendo como límites $OA = a$ y $OB = b$), resulta:

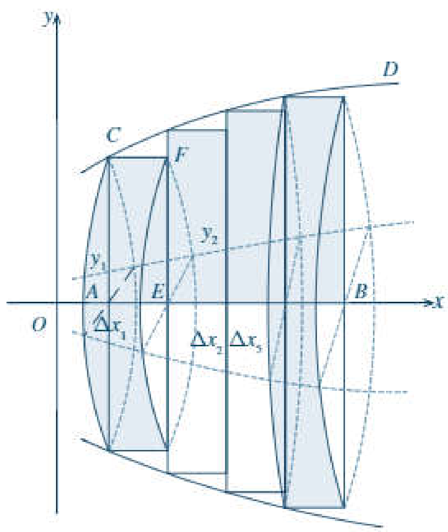
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi y_i^2 \Delta x_i = \int_a^b \pi y^2\, dx$$

Por lo tanto, el volumen que se genera haciendo girar alrededor del eje de las x la superficie limitada por la curva, el eje de las x y las ordenadas $x = a$ y $x = b$ está dado por la fórmula:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2\, dx$$

En la que se ha de sustituir, deducido de la ecuación de la curva dada, el valor de y en términos de x.

Esta ecuación $V_x = \pi \int_a^b y^2\, dx$ es fácilmente comprensible si consideramos una rebanada o placa delgada del sólido formado por dos planos perpendiculares al eje de revolución y observamos esta placa circular como, aproximadamente, un cilindro de altura dx y base de área πy^2. Evidentemente, el volumen de un tal cilindro es $\pi y^2\, dx$. Dicho cilindro es el elemento de volumen buscado.



De la misma manera, cuando Oy es el eje de revolución de la fórmula del volumen es: $V_y = \pi \int_a^b y^2\, dy$.

En la que se ha de sustituir, deducido de la ecuación de la curva dada, el valor de x en función de y.

Si las ecuaciones de la curva CD de la figura de la derecha se dan en forma paramétrica, $x = f(t)$, $y = \phi(t)$, entonces se debe sustituir en $V_x = \pi \int_a^b y^2\, dx$ los valores $y = \phi(t)$, $dx = f'(t)\, dt$ y cambiar los límites en t_1 y t_2, si $t = t_1$, cuando $x = a$, $t = t_2$ cuando $x = 0$.

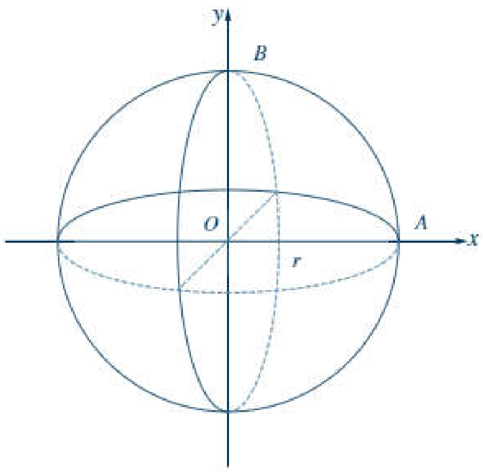
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula el volumen de la esfera que se genera haciendo girar el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ alrededor de un diámetro.

Solución

Gráficamente, tenemos:



Dado que $y^2 = r^2 - x^2$ y que el volumen buscado es dos veces el volumen dado por OAB.

Como OX es el eje de revolución, tenemos que:

$$V_x = 2\pi \int_a^b y^2\,dx$$

$$V_x = 2\pi \int_a^b (r^2 - x^2)\,dx = \left[2\pi r^2 x - \frac{2\pi x^3}{3}\right]_0^r$$

$$V_x = 2\pi r^2(r) - \frac{2\pi(r)^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

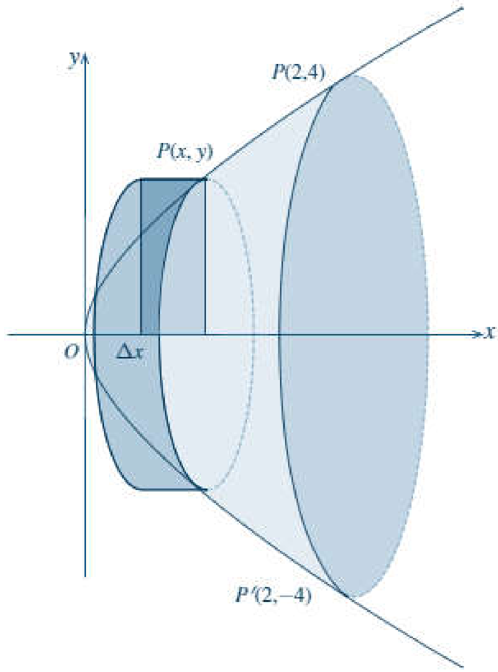
$\therefore$ El volumen de la esfera que se genera haciendo girar el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ alrededor de un diámetro es $\frac{4\pi r^3}{3}$ unidades cúbicas.

2 Determina el volumen generado en la rotación del área del primer cuadrante limitada por la parábola $y^2 = 8x$ y la ordenada correspondiente a $x = 2$ con respecto al eje x.

Solución

Gráficamente, tenemos:

x	0	1	2
y	0	±2.82	±4



Dividiendo el área mediante franjas verticales, cuando el rectángulo genérico gire alrededor del eje x se produce un disco de radio y, de altura Δx y de volumen $\pi y^2\,\Delta x$. La suma de los volúmenes de los n discos, correspondientes a los n rectángulos siendo el volumen pedido:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_a^2 8x\,dx = [4\pi x^2]_0^2 = 16\pi$$

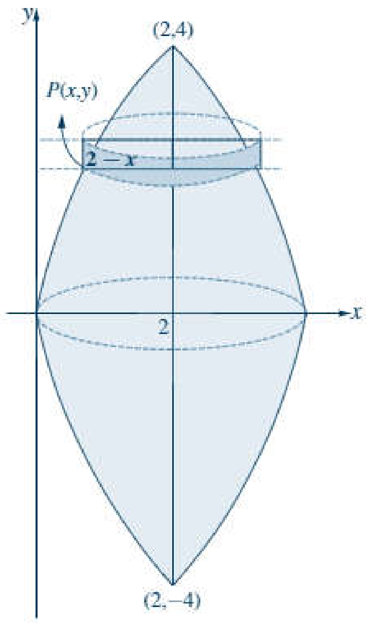
$\therefore$ El volumen generado en la rotación del área del primer cuadrante limitada por la parábola $y^2 = 8x$ y la ordenada correspondiente a $x = 2$ con respecto al eje x, es de 16π unidades cúbicas.

3 Determina el volumen generado al girar el área limitada por la parábola $y^2 = 8x$ alrededor de la ordenada correspondiente a $x = 2$.

Solución

Gráficamente, tenemos:

x	0	1	2
y	0	±2.82	±4



Dividiendo el área mediante franjas horizontales, cuando el rectángulo genérico gire alrededor del eje y se produce un disco de radio $2 - x$, de altura Δy y de volumen $\pi(2 - x)^2 \Delta y$.

El volumen buscado es dos veces el volumen engendrado por $y^2 = 8x$, es decir:

$$V_y = 2\pi \int_a^b x^2\, dy = 2\pi \int_0^4 (2-x)^2\, dy$$

$$V_y = 2\pi \int_0^4 \left(2 - \frac{y^2}{8}\right)^2 dy = 2\pi \int_0^4 \left(4 - \frac{4y^2}{8} + \frac{y^4}{6^4}\right)^2 dy$$

$$V_y = 8\pi \int_0^4 dy - \pi \int_0^4 y^2\, dy + \frac{\pi}{32} \int_0^4 y^4\, dy$$

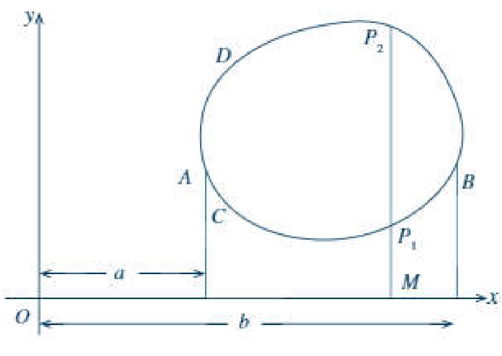
$$V_y = \left[8\pi y - \frac{\pi y^3}{3} + \frac{\pi y^5}{160}\right]_0^4 = 32\pi - \frac{64\pi}{3} + \frac{1024\pi}{160} = \frac{256\pi}{15}$$

∴ El volumen generado al girar el área limitada por la parábola $y^2 = 8x$ alrededor de la ordenada correspondiente a $x = 2$, es de $\dfrac{256\pi}{15}$ unidades cúbicas.

Volumen de un sólido de revolución hueco

Cuando una superficie plana gira alrededor de un eje situado en el mismo plano, y este eje no corta a la superficie, se forma un sólido de revolución hueco.

Considerando el siguiente ejemplo, el sólido que se obtiene haciendo girar alrededor del eje de las x el recinto $ACBDA$ de la figura de la derecha.



Haciendo pasar por el sólido un sistema de planos equidistantes perpendiculares al eje de revolución Ox. Siendo Δx la distancia entre uno y otro. Entonces, el sólido se divide en placas circulares huecas de espesor Δx. Si uno de los planos que dividen el sólido pasa por M, la placa circular hueca con una base en este plano es, aproximadamente, un cilindro circular hueco cuyos radios interior y exterior son, respectivamente, MP_1 $(= y_1)$ y MP_2 $(= y_2)$. Por lo tanto, su volumen es $\pi(y_2^2 - y_1^2)\,\Delta x$. Sean n cilindros huecos, siendo $b - a = n\,\Delta x$. El límite de la suma de estos n cilindros huecos cuando $n \to \infty$ es el volumen del sólido de revolución hueco. Entonces:

$$V_x = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx \quad (\text{siendo } y_2 > y_1)$$

El elemento de volumen en $V_x = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx$ es un cilindro hueco con radio interior y_1, radio exterior y_2 y altura Δx. Los radios y_1 y y_2 son funciones de $x(= OM)$ que se obtienen de las ecuaciones de las curvas que limitan (o **la ecuación de la curva que limita**) a la superficie que gira.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula el volumen del sólido anular (**toro** o **argolla**) que se forma al hacer girar un círculo de radio a alrededor de un eje situado en su plano y exterior al círculo, que dista de su centro b unidades, siendo $b > a$.

Solución

Sea la ecuación del círculo: $x^2 + (y - b)^2 = a^2$

Siendo el eje x el de revolución y despejando y resulta:

$$\begin{aligned} x^2 + (y-b)^2 &= a^2 \\ (y-b)^2 &= a^2 - x^2 \\ \pm\sqrt{(y-b)^2} &= \pm\sqrt{a^2-x^2} \\ (y-b) &= \pm\sqrt{a^2-x^2} \end{aligned} \qquad \therefore \qquad \begin{aligned} y_1 &= b - \sqrt{a^2-x^2} \\ y_2 &= b + \sqrt{a^2-x^2} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la fórmula del volumen se obtiene:

$$V_x = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx = \pi \int_{-a}^{a} \left[\left(b + \sqrt{a^2-x^2}\right)^2 - \left(b - \sqrt{a^2-x^2}\right)^2\right] dx$$

$$V_x = \pi \int_{-a}^{a} \left[\left(b^2 + 2b\sqrt{a^2-x^2} + a^2 - x^2\right) - \left(b^2 - 2b\sqrt{a^2-x^2} + a^2 - x^2\right)\right] dx$$

$$V_x = \pi \int_{-a}^{a} \left(b^2 + 2b\sqrt{a^2-x^2} + a^2 - x^2 - b^2 + 2b\sqrt{a^2-x^2} - a^2 + x^2\right) dx$$

$$V_x = \pi \int_{-a}^{a} 4b\sqrt{a^2-x^2}\,dx = 4b\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

Aplicando la fórmula 23 se obtiene:

$$V_x = 4b\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx = 4b\pi \left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}\right]_{-a}^{a}$$

$$V_x = \left[2b\,\pi x\sqrt{a^2-x^2} + 2a^2 b\pi \operatorname{arcsen}\frac{x}{a}\right]_{-a}^{a}$$

$$V_x = \left[2b\pi(a)\sqrt{a^2-(a)^2} + 2a^2b\pi \operatorname{arcsen}\frac{a}{a}\right] - \left[2b\pi(-a)\sqrt{a^2-(-a)^2} + 2a^2b\pi \operatorname{arcsen}\left(\frac{-a}{a}\right)\right]$$

$$V_x = 2ab\pi(0) + 2a^2b\pi\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2ab\pi(0) - 2a^2b\pi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = a^2b\pi^2 + a^2b\pi^2 = 2a^2b\pi^2$$

∴ El volumen del sólido anular que se forma al hacer girar su círculo de radio a alrededor del eje x que diste de su centro b unidades, es $2a^2b\pi^2$ unidades cúbicas.

Un sólido de revolución puede dividirse en **cáscaras cilíndricas** haciendo pasar por él un sistema de cilindros circulares cuyo eje común es el eje de revolución. Si el área $ACBD$ de la figura de la página 275 gira alrededor del eje y, puede obtenerse:

$$V_y = 2\pi\int_a^b (y_2 - y_1)x\,dx. \text{ Siendo } OM = x, MP_1 = y_1,\ MP_2 = y_2$$

El elemento de volumen es ahora una **cáscara cilíndrica** de radio r, altura $y_2 - y_1$ y espesor Δx.

2 ••• Calcula el volumen del sólido engendrado haciendo girar alrededor del eje x, la superficie limitada por los siguientes lugares geométricos: $ay^2 = x^3$, $y = 0$, $x = a$.

Solución

Siendo el eje x el de revolución y despejando y de $ay^2 = x^3$ resulta:

$$ay^2 = x^3$$

$$y^2 = \frac{x^3}{a}$$

$$y_2 = \sqrt{\frac{x^3}{a}}$$

Dudo que $y_1 = 0$, sustituyendo en la fórmula de volumen se tiene:

$$V_x = \pi\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)dx = \pi\int_0^a \left[\left(\sqrt{\frac{x^3}{a}}\right)^2 - 0\right]dx = \pi\int_0^a \left(\frac{x^3}{a}\right)dx$$

$$V_x = \frac{\pi}{a}\int_0^a x^3\,dx = \frac{\pi}{a}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^a = \frac{(a)^4\pi}{4a} = \frac{a^3\pi}{4}$$

∴ El volumen del sólido engendrado haciendo girar alrededor del eje x la superficie limitada por $ay^2 = x^3$, $y = 0$, es de $\dfrac{a^3\pi}{4}$ unidades cúbicas.

3 Calcula el volumen del sólido que se engendra haciendo girar alrededor del eje y, la superficie limitada por los siguientes lugares geométricos: $2y^2 = x^3$, $y = 0$, $x = 2$.

Solución

Siendo el eje y el de revolución y despejando y de $2y^2 = x^3$, resulta:

$$2y^2 = x^3$$
$$y^2 = \frac{x^3}{2}$$
$$y_2 = \sqrt{\frac{x^3}{2}}$$

Puesto que $y_1 = 0$, sustituyendo en la fórmula de volumen se tiene:

$$V_y = 2\pi\int_a^b (y_2 - y_1)x\,dx = 2\pi\int_0^2\left(\sqrt{\frac{x^3}{2}} - 0\right)x\,dx = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}\int_0^2 x^{\frac{5}{2}}\,dx$$

$$V_y = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}\left[\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}\right]_0^2 = \left[\frac{4\pi x^{\frac{7}{2}}}{7\sqrt{2}}\right]_0^2 = \frac{4\pi(2)^{\frac{7}{2}}}{7\sqrt{2}} = \frac{4\pi(8)}{7} = \frac{32\pi}{7}$$

$\therefore$ El volumen del sólido engendrado haciendo girar alrededor del eje y la superficie limitada por $2y^2 = x^3$, $y = 0$, es de $\frac{32\pi}{7}$ unidades cúbicas.

EJERCICIO 26

I. En grupo y con asesoría de su profesor, calculen el volumen del sólido engendrado haciendo girar alrededor del eje x, la superficie limitada por los siguientes lugares geométricos:

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$
2. Una arcada de $y = \operatorname{sen} x$
3. Una arcada de $y = \cos 2x$
4. La hipocicloide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$
5. $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 5$
6. $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 1$
7. La bruja $(x^2 + 4a^2)\,y = 8a^3$, $y = 0$
8. $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$
9. $y = x^2 - 6x$, $y = 0$
10. $9x^2 + 16y^2 = 144$
11. $y^2 = (2 - x)^3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$
12. $y^2(4 + x^2) = 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = +\infty$
13. $(x - 1)\,y = 2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 5$
14. $y^2(2a - x) = x^3$, $y = 0$, $x = a$

II. Calcula el volumen del sólido que se engendra haciendo girar alrededor del eje y, la superficie limitada por los siguientes lugares geométricos:

1. $y = e^x, y = 0, x = 0$
2. $9x^2 + 16y^2 = 144$
3. $y = x^3, y = 0, x = 2$
4. $y^2 = 9 - x, x = 0$
5. $x^2 = 16 - y, y = 0$
6. $y^2 = ax, y = 0, x = a$
7. $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$
8. $ay^2 = x^3, y = 0, x = a$

III. Determina el volumen generado en la rotación del área comprendida entre la curva correspondiente y el eje x con respecto a las siguientes rectas:

1. $y = 4x - x^2; y = 3$
2. $y^2 = x^3; x = 4$
3. $y = 9 - x^2; y = x + \frac{33}{4}$
4. $xy = 6; x + y = 7$
5. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1; x + y = 1$
6. $y = 3x - x^2; y = x$
7. $y = x^2; y = x$
8. $y = 2 + 3x - x^2; y = -4$
9. $y = 4x - x^2; y = 6$
10. $y = x^2 + 1; -y + 3 = 0$

IV. Resuelve los siguientes problemas y en plenaria discute tus resultados.

1. Calcula el volumen que se engendra si la superficie limitada por la curva $y = \sec\frac{\pi x}{2}$, el eje de las x y las rectas $x = \pm\frac{1}{2}$ gira alrededor del eje de las x.
2. Calcula el volumen del sólido engendrado haciendo girar una arcada de la cicloide $x = a(\theta - \text{sen}\,\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ alrededor de su base Ox.
3. Si la arcada del problema anterior gira alrededor del eje y, ¿cuál es el volumen?
4. Dada la curva $x = t^2$, $y = 4t - t^3$, determina:
   a) El área del lazo.
   b) El volumen del sólido engendrado por la superficie interior del lazo, cuando gira alrededor del eje x.
5. Gira alrededor de cada eje la superficie limitada por las dos parábolas $y^2 = 9x$ y $y^2 = 7 - x$. Calcula los volúmenes respectivos.
6. Gira alrededor del eje polar la parte de la cardioide, $r = 4 + 4\cos\theta$, que está entre las rectas $\theta = 0$ y $\theta = 90°$. Calcula el volumen.
7. El área debajo de la curva $y = e^x\,\text{sen}\,x$, desde $x = 0$ hasta $x = 180°$, gira alrededor del eje de las x. Calcula el volumen del sólido que se genera.
8. Calcula por integración el volumen del cono truncado que se engendra haciendo girar alrededor del eje x la superficie limitada por las rectas: $y = 6 - x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 4$. Comprueba el resultado por la fórmula geométrica.

9. Calcula el volumen del esferoide achatado que se engendra haciendo girar alrededor del eje y la superficie limitada por la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

10. Utilizando las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide $x=a\cos^3\theta$, $y=a\,\text{sen}^3\theta$. Calcula el volumen del solido que se engendra haciéndola girar alrededor del eje x.

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

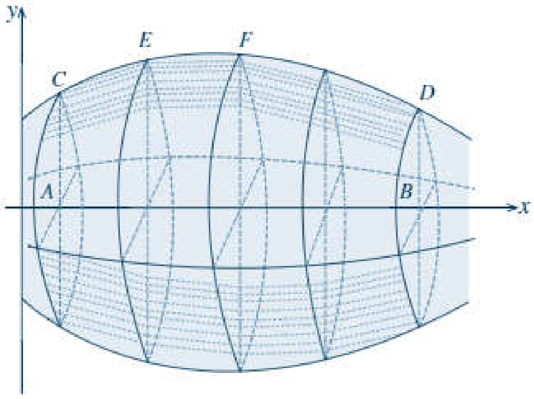
Obtención de volúmenes de sección transversal

Áreas de superficies de revolución

La superficie de revolución está engendrada haciendo girar alrededor del eje x del arco CD de la curva $y=f(x)$, tal y como se muestra en la siguiente figura. Se quiere medir el área de dicha superficie, utilizando el teorema fundamental del cálculo integral.

Primer paso

Dividiendo el intervalo AB en subintervalos Δx_1, Δx_2, Δx_3, etcétera y levantando ordenadas en los puntos de división. Trazando las cuerdas CE, EF, etcétera, de la curva. Cuando la curva gira, cada cuerda engendra la superficie lateral de un tronco de cono de revolución. El área de la superficie de revolución se define como el límite de la suma de las áreas laterales de dichos conos truncados.

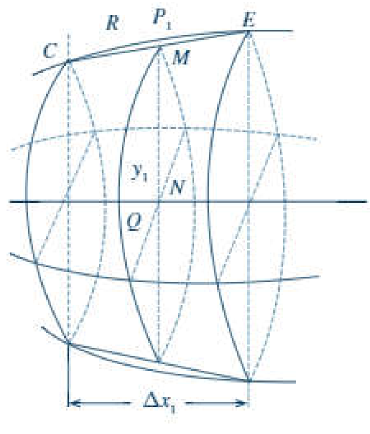


Segundo paso

Con el fin de tener mayor claridad de comprensión, tracemos el primer tronco de cono en tamaño más grande (figura inferior). Siendo M el punto medio de la cuerda CE. Entonces:

$$\text{Área lateral} = 2\pi\,(NM)(CE)$$

donde el área lateral de un tronco de cono de revolución es igual a la circunferencia de la sección media multiplicada por el lado del tronco. Para aplicar el teorema fundamental del cálculo integral, es necesario expresar este producto como función de la abscisa de algún punto del intervalo Δx_1. Empleando el teorema del valor medio, obtenemos la longitud de la cuerda CE, es decir:



$$CE=\left[1+f'(x_1)^2\right]^{\frac{1}{2}}\Delta x_1 \quad \textbf{(1)}$$

Si x_1 es la abscisa del punto $P_1\,(x_1,y_1)$, del arco CE, donde la tangente es paralela a la cuerda CE. Sea R el punto en que la recta horizontal trazada por M corta $QP_1\,(y_1)$, designemos $RP_1=\xi_1$, entonces:

$$NM=y_1-\xi_1 \qquad \textbf{(2)}$$

Sustituyendo (**1**) y (**2**) en la ecuación del área lateral se tiene:

$$\text{Área lateral} = 2\pi(y_1 - \xi_1)\left[1 + f'(x_1)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x_1 \qquad \text{(Primer tronco de cono)}$$

De la misma manera:

$$\text{Área lateral} = 2\pi(y_2 - \xi_2)\left[1 + f'(x_2)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x_2 \qquad \text{(Segundo cono truncado)}$$

Continuando sucesivamente resulta:

$$\text{Área lateral} = 2\pi(y_n - \xi_n)\left[1 + f'(x_n)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x_n \qquad \text{(Último tronco del cono)}$$

Por lo tanto, la suma de las áreas laterales de los conos truncados, se escribe:

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi(y_i - \xi_i)\left[1 + f'(x_1)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi y_i\left[1 + f'(x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x_i - 2\pi\sum_{i=1}^{n} \xi_i\left[1 + f'(x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x_i$$

Tercer paso

Al emplear los límites $OA = a$ y $OB = b$ y aplicar el teorema fundamental del cálculo integral en la siguiente suma, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi y_i\left[1 + f'(x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x_i = \int_a^b 2\pi y\left[1 + f'(x)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx$$

El límite para $-2\pi\sum_{i=1}^{n} \xi\left[1 + f'(x_i)\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x_i$ cuando $n \to +\infty$ es igual a cero.

El área de la superficie de revolución generada haciendo girar el arco CD alrededor del eje x viene dada por la fórmula:

$$S_x = 2\pi\int_a^b y\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx$$

donde S_x representa el área buscada.

La fórmula anterior también se puede escribir como: $S = 2\pi\int_a^b y\,ds$

Cuando el eje y es el de giro empleamos la fórmula: $S_y = 2\pi\int_c^d x\,ds$

Para las fórmulas, $S = 2\pi\int_a^b y\,ds$ y $S_y = 2\pi\int_c^d x\,ds$, ds puede tomar cualquiera de las tres siguientes formas.

$$ds = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad dx = \left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad dy = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$$

De las tres formas anteriores, emplearemos la primera o la segunda, según sea la variable independiente que hayamos elegido; la tercera, si la curva dada está definida por ecuaciones paramétricas. Para utilizar cualquiera de las fórmulas para determinar el área de las superficies de revolución, es necesario calcular primero el valor de ds.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 El arco de la parábola cúbica $9y = x^3$, comprendido entre $x = 0$ y $x = 2$, gira alrededor del eje x. Determina el área de la superficie de revolución que se engendra.

Solución

Primero se calcula la derivada de la función dada lo que resulta:

$$9y = x^3 \qquad y = \frac{x^3}{9} \qquad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{9} = \frac{x^2}{3}$$

Entonces el valor de ds es:

$$ds = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx = \left[1 + \left(\frac{x^2}{3}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx = \left(1 + \frac{x^4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \left(\frac{9 + x^4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\therefore \quad ds = \frac{1}{3}(9 + x^4)^{\frac{1}{2}} dx$$

Sustituyendo en la fórmula del área se tiene:

$$S_x = 2\pi \int_a^b y\, ds = 2\pi \int_0^2 \left(\frac{x^3}{9}\right)\left[\frac{1}{3}(9 + x^4)^{\frac{1}{2}}\right] dx = \frac{2\pi}{27}\int_0^2 (9 + x^4)^{\frac{1}{2}} x^3\, dx$$

$$S_x = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2\pi}{27}\right)\left[\frac{(9 + x^4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \left[\frac{\pi}{81}(9 + x^4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2$$

$$S_x = \frac{\pi}{81}[9 + (2)^4]^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{81}[9 + (0)^4]^{\frac{3}{2}} = \frac{125\pi}{81} - \frac{27\pi}{81} = \frac{98\pi}{81}$$

$\therefore$ El área de la superficie de revolución que se engendra por el arco de la parábola cúbica $9y = x^3$, comprendido entre $x = 0$ y $x = 2$, y que gira alrededor del eje x, es $= \frac{98\pi}{81}$ unidades cuadradas.

2 Determina el área de la superficie de revolución engendrado haciendo girar alrededor del eje x la cicloide cuyas ecuaciones paramétricas son $x = a(\theta - \text{sen}\ \theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$.

Solución

Primero se calcula la diferencial de la cicloide, resultando:

$$x = a(\theta - \text{sen}\ \theta) \qquad y = a(1 - \cos\theta)$$
$$dx = a(1 - \cos\theta)\, d\theta \qquad dy = a\ \text{sen}\ \theta\, d\theta$$

Entonces el valor de ds es:

$$ds = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = \left[(a(1 - \cos\theta)d\theta)^2 + (a\,\text{sen}\,\theta\, d\theta)\right]^{\frac{1}{2}} = \left[a^2(1 - \cos\theta)^2 d^2\theta + a^2\text{sen}^2\theta\, d^2\theta\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$ds = \left(a^2\left[(1 - \cos\theta)^2 + \text{sen}^2\theta\right]d^2\theta\right)^{\frac{1}{2}} = a(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta$$

Por la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ tenemos:

$$ds = a(1-2\cos\theta+1)^{\frac{1}{2}}\,d\theta = a(2-2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta = a\sqrt{2}(1-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta$$

Sustituyendo en la fórmula del área, tenemos:

$$S_x = 2\pi\int_a^b y\,ds = 2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos\theta)a\sqrt{2}(1-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta = 2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^{\frac{3}{2}}\,d\theta$$

Aplicando la identidad trigonométrica $2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} = 1-\cos\theta$ tenemos:

$$S_x = 2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^{\frac{3}{2}}\,d\theta = 2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}\left(2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{3}{2}}d\theta$$

$$S_x = 2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)^3}\,d\theta = 2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}\sqrt{8\operatorname{sen}^6\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$

$$S_x = 2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}2\sqrt{2}\operatorname{sen}^3\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8\pi a^2\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^3\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

Aplicando el método de integración para productos de potencias impares de senos y cosenos (**caso I**), resulta:

$$S_x = 8\pi a^2\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^3\frac{\theta}{2}\,d\theta = \left[-16\pi a^2\cos\frac{\theta}{2} + \frac{16\pi a^2\cos^3\frac{\theta}{2}}{3}\right]_0^{2\pi}$$

$$S_x = \left[-16\pi a^2\cos\frac{(2\pi)}{2} + \frac{16\pi a^2\cos^3\frac{(2x)}{2}}{3}\right] - \left[-16\pi a^2\cos\frac{(0)}{2} + \frac{16\pi a^2\cos^3\frac{(0)}{2}}{3}\right]$$

$$S_x = \left[-16\pi a^2(-1) + \frac{16\pi a^2(-1)}{3}\right] - \left[-16\pi a^2(1) + \frac{16\pi a^2(1)}{3}\right]$$

$$S_x = 16\pi a^2 - \frac{16\pi a^2}{3} + 16\pi a^2 - \frac{16\pi a^2}{3} = 32\pi a^2 - \frac{32\pi a^2}{3} = \frac{64\pi a^2}{3}$$

$\therefore$ El área de la superficie de revolución engendrada haciendo girar alrededor del eje x la cicloide $x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$, es $\dfrac{64\pi a^2}{3}$ unidades cuadradas.

3 ••• Calcula el área de la superficie que se engendra cuando el arco de la parábola $y = x^2$, desde $y = 0$ a $y = 2$, gira alrededor del eje y.

Solución

Primero se calcula la derivada de la función dada, resultando:

$$y = x^2 \qquad \therefore \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$
$$x = \sqrt{y}$$

Entonces el valor de ds es:

$$ds = \left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dy = \left[1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dy = \left(1 + \frac{1}{4y}\right)^{\frac{1}{2}} dy$$

$$ds = \left(\frac{4y+1}{4y}\right)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4y+1}{y}}dy$$

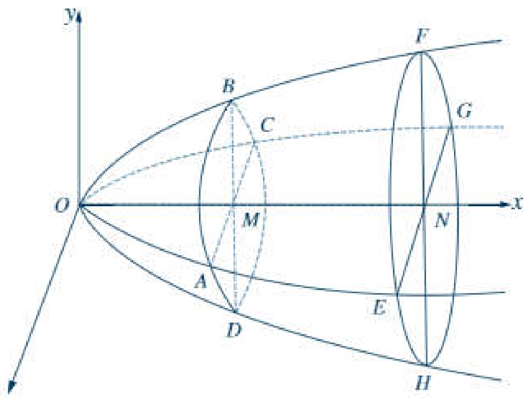
Sustituyendo en la fórmula del área, tenemos:

$$S_y = 2\pi \int_c^d x\, ds = 2\pi \int_0^2 \sqrt{y}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4y+1}{y}}\right) dy = \pi \int_0^2 \sqrt{4y+1}\, dy$$

$$S_y = \left[\frac{\pi(4y+1)^{\frac{3}{2}}}{6}\right]_0^2 = \frac{\pi[4(2)+1]^{\frac{3}{2}}}{6} - \frac{\pi[4(0)+1]^{\frac{3}{2}}}{6} = \frac{27\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{3}$$

$\therefore$ El área de la superficie que se engendra cuando el arco de la parábola $y = x^2$, desde $y = 0$ a $y = 2$, gira alrededor del eje y, es de $\dfrac{16\pi}{3}$ unidades cuadradas.

Volúmenes de sección transversal



Considerando la figura de la derecha, todas las secciones transversales por planos perpendiculares al eje x son círculos. Si $OM = x$, $MB = y$, entonces el área de la sección transversal $ABCD = \pi y^2 = \pi\,[\phi(x)]^2$, si $y = \phi(x)$ es la ecuación de la curva engendradora OBF. Por tanto, el área de la sección transversal por cualquier plano perpendicular a Ox es una función de su distancia $(= x)$ al punto O.

Siempre que sea posible expresar el área de una sección cualquiera del sólido, que sea perpendicular a una recta fija (como el eje x), como función de su distancia de un punto fijo (como el origen O).

Al dividir un sólido en n rebanadas, cada una de espesor Δx, por secciones equidistantes perpendiculares al eje x.

Sea EDF una cara de una de las rebanadas y sea $ON = x$ (figura de la página 285). Entonces, por hipótesis:

$$\text{Área } (EDF) = A(x)$$

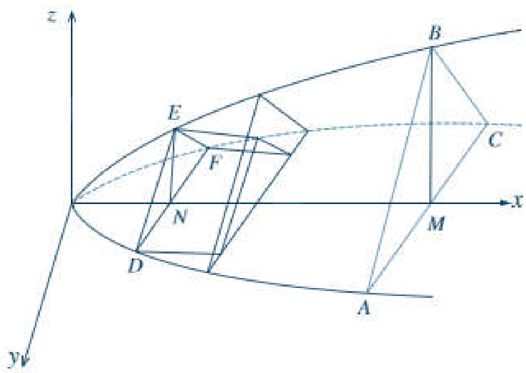
El volumen de esta rebanada es igual, aproximadamente a, área $(EDF)\,\Delta x = A(x)\,\Delta x$ (base $\times$ altura).

Entonces, $\sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x_i$, representa la suma de los volúmenes de todos esos prismas.

Es cierto que el volumen pedido es el límite de esta suma; por tanto, y de acuerdo con el teorema fundamental del cálculo integral, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x_i = \int_{\alpha}^{\beta} A(x)dx, \text{ por lo tanto, resulta:}$$

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} A(x)dx$$



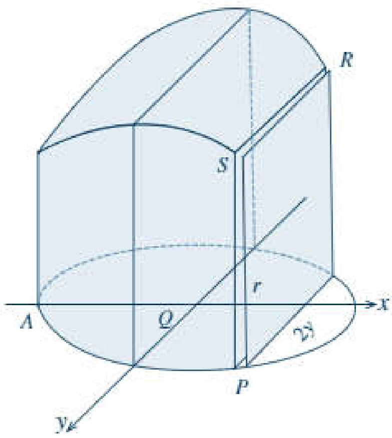
El elemento de volumen es un prisma (otras veces es un cilindro) cuya altura es dx y cuya base tiene de área $A(x)$. Es decir, $dv = A(x)\,dx$.

Si las secciones son perpendiculares al eje y el volumen, viene dado por $V = \int_{\gamma}^{\delta} A(y)dy$ donde $A(y)$ es el área de la sección en y.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 La base de un sólido es un círculo de 5 cm de radio. Todas las secciones perpendiculares a un diámetro fijo de la base son cuadrados. Calcula el volumen del sólido.



Solución

Sea la base el círculo $x^2 + y^2 = 25$ en el plano xy y Ox el diámetro fijo (figura de la derecha). Con base al enunciado la sección $PSRQ$ perpendicular a Ox es un cuadrado, cuya área es $4y^2$, si $PQ = 2y$. De la ecuación $x^2 + y^2 = 25$, se tiene que $y^2 = 25 - x^2$; el área de la sección $PSRQ$ que se representa por $A(x)$ es igual a $4y^2$, es decir, $4(25 - x^2)$.

Aplicando la fórmula de volumen se tiene:

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} A(x)dx = \int_{-5}^{5} 4(25 - x^2)dx$$

$$V = 100\int_{-5}^{5} dx - 4\int_{-5}^{5} x^2\,dx = \left[100x - \frac{4x^3}{3}\right]_{-5}^{5}$$

$$V = \left[100(5) - \frac{4(5)^3}{3}\right] - \left[100(-5) - \frac{4(-5)^3}{3}\right] = 500 - \frac{500}{3} + 500 - \frac{500}{3} = \frac{2000}{3}$$

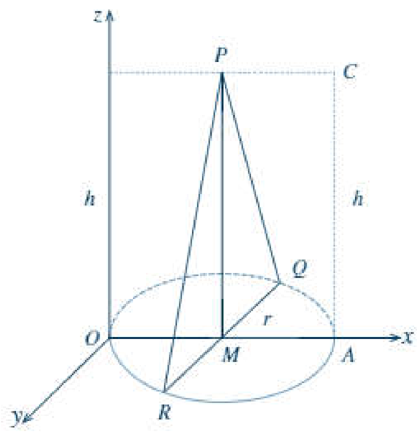
$\therefore$ El volumen del sólido es $\frac{2000}{3}$ cm^3.

2 •• Calcula el volumen de un **conoide recto** de 12 cm de altura (h), cuya base es el círculo $x^2 + y^2 = 8x$ de 4 cm de radio (r).

Solución

Dada en la figura de la derecha, considera una sección PQR perpendicular al eje Ox, siendo dicha sección un triángulo isósceles, donde $RM = y$, es decir:

$$RM = \sqrt{8x + x^2}$$



Dicho valor se obtiene de la ecuación $x^2 + y^2 = 8x$ que representa a la circunferencia $ORAQ$.

De la sección PQR se observa que la base $RQ = 2y = 2\sqrt{8x - x^2}$ y la altura $MP = h = 12$ cm, entonces el área de dicha sección es:

$$A(x) = \frac{(\text{base})(\text{altura})}{2} = \frac{\left(2\sqrt{8x - x^2}\right)(12)}{2} = 12\sqrt{8x - x^2}$$

Aplicando la fórmula de volumen se tiene:

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} A(x)\,dx = \int_0^{2r} 12\sqrt{8x - x^2}\,dx = 12\int_0^8 \sqrt{8x - x^2}\,dx$$

Aplicando en la integral resultante el primer método para resolver integrales reducibles a inmediatas por sustitución algebraica, resulta:

$$V = 12\int_0^8 \sqrt{8x - x^2}\,dx = 12\left[\frac{(x-4)}{2}\sqrt{8x - x^2} + 8\operatorname{arcsen}\right]_0^8$$

$$V = 12\left[\frac{(8-4)}{2}\sqrt{8(8) - (8)^2} + 8\operatorname{arcsen}\frac{(8-4)}{4}\right] - 12\left[\frac{(0-4)}{2}\sqrt{8(0) - (0)^2} + 8\operatorname{arcsen}\frac{(0-4)}{4}\right]$$

$$V = 12(8)\operatorname{arcsen}(1) - 12(8)\operatorname{arcsen}(-1) = 96\left(\frac{\pi}{2}\right) + 96\left(\frac{\pi}{2}\right) = 96\pi$$

$\therefore$ El volumen del **conoide recto** es de 96π cm^3.

Nota: se debe comprobar que el volumen del conoide debe ser la mitad del volumen del cilindro de la misma base y altura.

3 •• La base de un sólido tiene la forma de una elipse con el eje mayor de 20 cm y eje menor de 10 cm calcula el volumen del sólido si cada sección perpendicular al eje mayor es un triángulo equilátero.

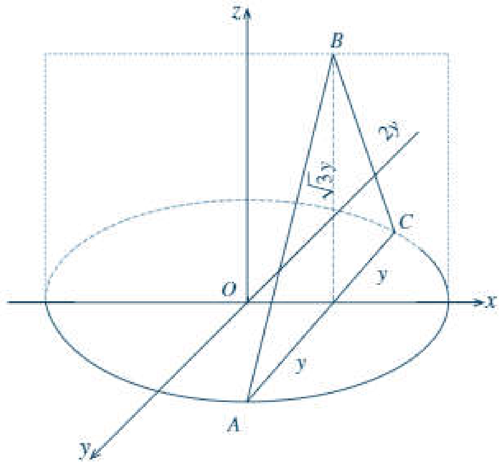
Solución

Situemos la elipse como indica la figura de la página 287; sea $2a$ la longitud del eje mayor, cuyo valor es de 20 cm, donde se deduce que $a = 10$; de igual manera, sea $2b$ la longitud del eje menor, cuyo valor es de 10 cm, donde se deduce que $b = 5$.

Entonces la ecuación de la elipse es $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, es decir: $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{25} = 1$.

La sección ABC del sólido es un triángulo equilátero de lado $2y$ y altura $\sqrt{3}$ (la altura se obtiene mediante el **teorema de Pitágoras**).

El área del triángulo es:



$$A(x)=\frac{(\text{base})(\text{altura})}{2}$$

$$A(x)=\frac{(2y)\left(\sqrt{3}y\right)}{2}=\sqrt{3}y^2$$

De la ecuación de la elipse se tiene:

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1,\text{ así:}$$

$$y=\frac{\sqrt{100-x^2}}{2}$$

Por lo tanto, el área de la sección ABC es:

$$A(x)=\sqrt{3}\left(\frac{100-x^2}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(100-x^2)$$

Aplicando la fórmula del volumen se tiene:

$$V=\int_{\alpha}^{\beta}A(x)dx=\int_{-10}^{10}\frac{\sqrt{3}}{4}(100-x^2)dx=\left[\frac{\sqrt{3}}{4}(100)x-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x^3}{3}\right)\right]_{-10}^{10}$$

$$V=\left[25\sqrt{3}(10)-\frac{\sqrt{3}(10)^3}{12}\right]-\left[25\sqrt{3}(-10)-\frac{\sqrt{3}(-10)^3}{12}\right]=577.35\text{cm}^3$$

$\therefore$ El volumen del sólido en forma de elipse es de 577.35 cm^3.

EJERCICIO 27

I. Resuelve los siguientes problemas y en plenaria discute tus resultados.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. Calcula el volumen del cono cuya base está limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ y cuyas secciones perpendiculares al eje x son:

   a) Triángulo equilátero.

   b) Semicírculo.

   c) Cuadrado.

   d) Triángulo isósceles con hipotenusa en la base del sólido.

2. La base de un sólido está acotada por $y = x^3$, $y = 0$ y $x = 1$. Calcula su volumen si sus secciones perpendiculares al eje y son:

   a) Cuadrado.

   b) Triángulo equilátero.

   c) Semicírculo.

   d) Trapecio $h=b_1=\frac{1}{2}b_2$, donde b_1 y b_2 son las longitudes de las bases superior e inferior, respectivamente.

3. De un cilindro de 5 cm de radio se corta una cuña mediante dos planos; uno es perpendicular al eje del cilindro y el otro pasa por un diámetro de la sección hecha por el primer plano y forma con éste un ángulo de 45°. Calcula el volumen de la cuña.

4. Un pajar tiene 100 m de largo y 40 m de ancho en su base. Sus secciones forman parábolas $y = 40 - \frac{x^2}{10}$. Calcula su capacidad de almacenamiento.

5. Calcula el volumen del sólido cuya base es la semicircunferencia $y + x = 1$ y cuyas secciones perpendiculares al eje x son cuadrados.

6. Calcula el volumen del sólido cuya base está acotada por $f(x) = 1 - \frac{x}{2}$, $g(x) = \frac{x}{2} - 1$ y $x = 0$, y cuyas secciones perpendiculares al eje x son triángulos equiláteros.

7. Un sólido tiene una base en forma de elipse cuyos ejes mayor y menor miden 10 y 8 cm, respectivamente. Calcula su volumen si se sabe que toda sección del mismo perpendicular al eje mayor es un triángulo isósceles de altura igual a 6 cm.

8. Calcula el volumen de la intersección de dos cilindros circulares de igual radio (r) que se cortan ortogonalmente.

9. Calcula el volumen de un sólido sabiendo que la sección determinada en él por un plano perpendicular al eje x es un círculo cuyos extremos de un diámetro se apoyan en las parábolas $y^2 = 9x$ y $x^2 = 9y$.

10. Calcula el volumen de un sólido de base elíptica de ejes mayor y menor iguales a 12 y 10 cm, respectivamente, sabiendo que la sección determinada en él por un plano perpendicular al eje mayor es un triángulo rectángulo con un cateto en el plano de la base.

11. Un sólido tiene base circular de radio r. El segmento PQ es un diámetro de la base. Calcula el volumen del sólido si cada sección plana perpendicular a PQ es:

    a) Un triángulo equilátero.

    b) Un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa está en el plano de la base.

    c) Un triángulo isósceles con cateto en el plano de la base.

    d) Un triángulo isósceles con altura igual a su base.

    e) Un triángulo isósceles de 20 cm de altura.

12. La base de un sólido es el segmento parabólico que se obtiene al cortar la curva por una cuerda perpendicular a su eje. La cuerda tiene 16 cm de largo y dista 8 cm del vértice de la parábola. Calcula el volumen del sólido si cada sección perpendicular al eje de la base es:

    a) Un triángulo equilátero.

    b) Un cuadrado.

    c) Un triángulo isósceles de 10 cm de altura.

13. Un círculo de radio a se mueve de manera que su centro describe una circunferencia de igual radio, mientras su plano se mantiene paralelo a un plano dado que es perpendicular al plano del círculo dado. Calcula el volumen del sólido que se genera.

14. Un rectángulo se mueve desde un punto fijo. Un lado del rectángulo es siempre igual a la distancia de este punto, y el otro es igual al cuadrado de esta distancia. ¿Qué volumen se engendra cuando el rectángulo se mueve 2 metros?

15. Un balón de fútbol americano tiene 16 pulgadas de largo y una sección plana que contiene una costura es una elipse cuyo diámetro menor es de 8 pulgadas. Calcula el volumen:

    a) Si el cuero está tan estirado que cada sección transversal es un cuadrado.

    b) Si la sección transversal es un círculo.

16. La base de un sólido tiene la forma de una elipse con eje mayor de 18 cm y eje menor de 9 cm. Calcula el volumen del sólido si cada sección perpendicular al eje mayor es:

    a) Un cuadrado.

    b) Un triángulo equilátero.

    c) Un triángulo isósceles de 9 cm de altura.

17. Un triángulo equilátero variable se mueve de manera que su plano se mantiene perpendicular al eje x, mientras que los vértices de su base se apoyan sobre las curvas $y^2 = 16ax$ y $y^2 = 4ax$, situadas por encima del eje x. Calcula el volumen que el triángulo engendra cuando se mueve del origen a los puntos cuya abscisa es a.

18. Calcula el volumen de un sólido cuya base es el área limitada por la parábola $y^2 = 12x$ y su ordenada correspondiente al punto $x = 3$, sabiendo que la sección determinada en él, por un plano perpendicular al eje x de la parábola es un cuadrado.

19. Calcula el volumen de un sólido cuya base es el área del primer cuadrante limitada por la recta $4x + 5y = 20$ y los ejes coordenados, sabiendo que la sección determinada en él por un plano perpendicular al eje x es un semicírculo.

20. En una esfera de 3 cm de radio se realiza un taladro de 1 cm de radio, siendo el eje de éste uno de los diámetros de aquella. Calcula el volumen de la esfera que resulta.

II. Determina los volúmenes limitados por las siguientes superficies de segundo grado y los planos dados.

1. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$
2. $x^2 + 4y^2 = 1 + z^2; z + 1 = 0; z - 1 = 0$
3. $z = x^2 + 4y^2; z = 1$
4. $z^2 = x^2 + 9y^2; z + 1 = 0$
5. $25y^2 + 9z^2 = 1 + x^2; x = 0; x = 2$
6. $4x^2 + 9z^2 + y = 0; y + 1 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Obtención de centros de gravedad de superficies planas

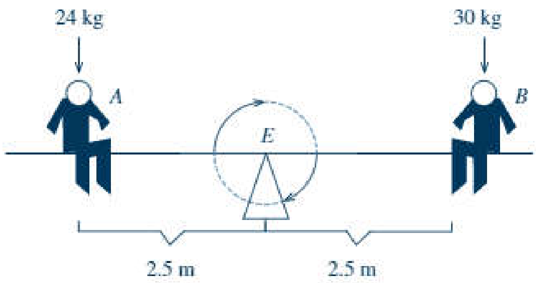
Momento para un sistema lineal

El **momento** que produce una cierta masa respecto al punto E, se define por:

$$\text{Momento} = (\text{masa})(\text{brazo del momento})$$

Siendo **brazo del momento** la distancia de la masa al punto E.

Para comprender la definición anterior, supongamos que en un columpio un niño A de 24 kilos de peso se sienta 2.5 m a la izquierda del centro de apoyo E y otro niño B de 30 kilos se sienta 2.5 m a la derecha de E (como se muestra en la figura de la derecha).



Por observación, se deduce que el columpio comenzará a girar en un plano vertical, es decir, de acuerdo con el giro de las manecillas del reloj en torno al punto E. Lo anterior, se debe a que el niño A de la izquierda tiene menor peso que el niño B de la derecha.

$$\text{Momento en } A = (24 \text{ kg})(2.5 \text{ m}) = 60 \text{ kgm}$$

$$\text{Momento en } B = (30 \text{ kg})(2.5 \text{ m}) = 75 \text{ kgm}$$

Para que el columpio quede en equilibrio, es necesario que ambos momentos sean iguales. Entonces, si el niño B de 30 kg se sienta a 2 m de distancia de E, en ese instante se nivelará el columpio, ya que:

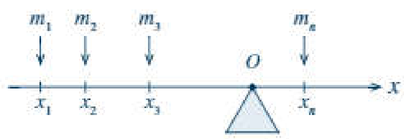
$$\text{Momento en } A = (24 \text{ kg})(2.5 \text{ m}) = 60 \text{ kgm}$$

$$\text{Momento en } B = (30 \text{ kg})(2 \text{ m}) = 60 \text{ kgm}$$

Si ubicamos el origen O en E y definimos coordenadas $x_1 = -2.5$, $x_2 = 2$, por tanto, el columpio queda en equilibrio, debido a que el momento total resultante de ambas masas es **nulo** respecto del origen. Es decir:

$$\text{Momento en } O = m_1x_1 + m_2x_2 = (24)(-2.5) + (30)(2) = -60 + 60 = 0$$

De manera general, supongamos varias masas $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$, colocadas a lo largo del eje x en los puntos respectivos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ (como se muestra en la figura de la derecha).



En tal situación la medida de la tendencia del sistema a girar alrededor del origen O se denomina **momento del sistema respecto del origen** y se representa por:

$$M_o = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \ldots + m_nx_n = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i$$

Si el momento es igual a cero, se dice que el sistema está en **equilibrio**.

Ahora, consideremos un sistema que no está en equilibrio y moviendo el punto de apoyo a un cierto $x = \bar{x}$ de modo que el sistema quede ya en equilibrio. Lo anterior, da lugar a:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - \bar{x}) = m_1(x_1 - \bar{x}) + m_2(x_2 - \bar{x}) + m_3(x_3 - \bar{x}) + \ldots + m_n(x_n - \bar{x}) = 0$$

Es decir: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_ix_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\bar{x} = 0$

Despejando a $\bar{x}$ obtenemos: $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{M_o}{m} = \frac{\left(\begin{array}{c}\text{momento del sistema}\\ \text{respecto del origen}\end{array}\right)}{(\text{masa total del sistema})}$$

Al punto $\bar{x}$ de equilibrio, se denomina **centro de masa** o **centro de gravedad** del sistema.

EJEMPLO

Ejemplo 1 Encuentra el centro de gravedad para el siguiente sistema lineal: $m_1 = 16$, $x_1 = -7$; $m_2 = 19$, $x_2 = 3$; $m_3 = 11$, $x_3 = 8$; $m_4 = 14$, $x_4 = 10.5$

Solución

Se determina primero el momento del sistema respecto del origen, lo que resulta:

$$M_O = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4$$
$$M_O = (16)(-7) + (19)(3) + (11)(8) + (14)(10.5) = -112 + 57 + 88 + 147 = 180$$

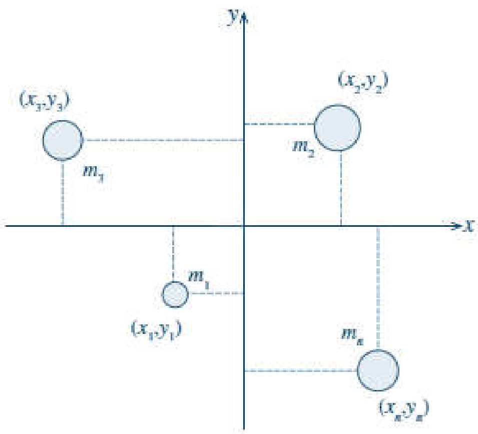
La masa total del sistema es: $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 16 + 19 + 11 + 14 = 60$

Sustituyendo en la fórmula del centro de masa, resulta: $\bar{x} = \dfrac{M_O}{m} = \dfrac{180}{60} = 3$

$\therefore$ El centro de masa del sistema dado es $\bar{x} = 3$.

Momento para un sistema bidimensional

Considerando las masas $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$, colocadas en un plano cartesiano sobre los puntos (x_1,y_1), (x_2,y_2), $(x_3,y_3), \ldots, (x_n,y_n)$, respectivamente (como se muestra en la figura de la derecha).



Para tal sistema, tenemos que sus momentos son:

Momento M_x respecto al eje x

$$M_x = m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \ldots + m_ny_n$$

Momento M_y respecto al eje y

$$M_y = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \ldots + m_nx_n$$

La masa total del sistema es:

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n$$

El centro de masas $(\bar{x}, \bar{y})$ se obtiene por las fórmulas:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

Lo anterior, se interpreta como la masa total m colocada en el centro de masas $(\bar{x}, \bar{y})$ producirá los mismos momentos totales M_x y M_y que el sistema en cuestión.

EJEMPLO

Ejemplo 1 Encuentra el centro de masas de un sistema constituido por las masas $m_1 = 13$, $m_2 = 8$, $m_3 = 6$ y $m_4 = 11$, colocadas en los puntos $(5,-3)$, $(1,2)$, $(-8,4)$ y $(-4,-7)$, respectivamente.

Solución

El momento M_x respecto al eje x es:

$$M_x = m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + m_4y_4 = (13)(-3) + (8)(2) + (6)(4) + (11)(-7) = -76$$

El momento M_y respecto al eje y es:

$$M_y = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 = (13)(5) + (8)(1) + (6)(-8) + (11)(-4) = -19$$

La masa total del sistema es $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 13 + 8 + 6 + 11 = 38$

Por lo tanto: $\bar{x} = \dfrac{M_y}{\text{m}} = \dfrac{-19}{38} = -0.5 \qquad \bar{y} = \dfrac{M_x}{\text{m}} = \dfrac{-76}{38} = -2$

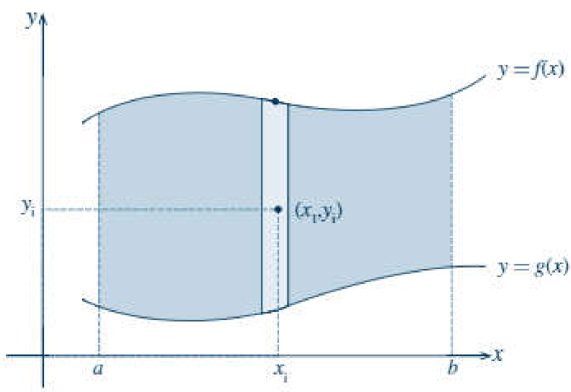
$\therefore$ El centro de masas del sistema dado es $(-0.5,-2)$.

Momentos de una superficie

Consideremos ahora una placa plana de material (lámina o cartón) cuya masa total está distribuida uniformemente por la placa, es decir, su **densidad** es la misma en todos sus puntos (realmente la placa sería tridimensional, pero la consideraremos como una superficie). Si sabemos que el punto de equilibrio de una lámina circular es su centro y que el de una superficie rectangular es su centro geométrico; definiremos al centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ de una lámina, como el punto de balanceo a un sistema finito de partículas.

Considerando la siguiente figura, donde se tiene una lámina de **densidad** constante ρ. El rectángulo representativo se ha obtenido subdividiendo el intervalo cerrado $[a,b]$ en n subintervalos de acuerdo Δx; representemos al centro de masa del i-ésimo rectángulo por el punto (x_i,y_i) y aplicando la fórmula del punto medio, tenemos:

$$y_i = \frac{f(x_i) + g(x_i)}{2}$$



La masa del i-ésimo rectángulo es:

masa = (densidad)(área) = $\rho\,(\Delta A_i)$

masa = $\rho\,[f(x_i) - g(x_i)]\,\Delta x$

La masa total de la superficie se puede estimar por:

$$m = \sum_{i=1}^{n} \rho\left[f(x_i) - g(x_i)\right]\Delta x$$

Tomando el límite para $\|\Delta x\| \to 0 (n \to \infty)$ obtenemos la definición de masa por:

$$m = \rho \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \rho A \qquad \text{Siendo } A \text{ el área de la lámina.}$$

El momento respecto del eje x del i-ésimo rectángulo es:

$$\text{momento} = (\text{mas})(\text{brazo del momento}) = (\rho \Delta A_i) y_i = \rho(y_i)(\Delta A_i)$$

$$\text{momento} = \rho\left[\frac{f(x_i) + g(x_i)}{2}\right][f(x_i) - g(x_i)]\Delta x = \frac{\rho}{2}\left[f(x_i)^2 - g(x_i)^2\right]\Delta x$$

Sumando todos los momentos y haciendo $n \to \infty$, se obtiene el momento respecto del eje x definido por:

$$M_x = \frac{\rho}{2}\int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2]dx$$

Asimismo, el momento respecto del eje y es: $M_y = \frac{\rho}{2}\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx$

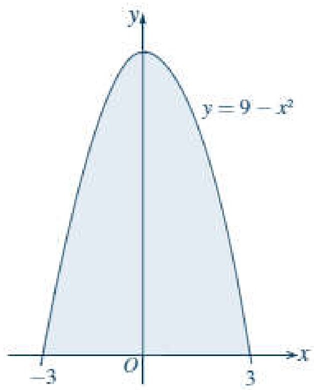
Por lo tanto, el centro de masa es $\bar{x} = \dfrac{M_y}{\text{m}}$ y $\bar{y} = \dfrac{M_x}{\text{m}}$.

EJEMPLO

Ejemplo 1 Encuentra el centro de masa de la lámina de densidad uniforme ρ limitada por $y = 9 - x^2$ y el eje x.

Solución

Al graficar $y = 9 - x^2$ se tiene:



Calculando la masa total, tenemos:

$$m = \rho \int_{-3}^{3} [f(x) - g(x)]dx = \rho \int_{-3}^{3} [(9 - x^2) - (0)]dx$$

$$m = \rho \int_{-3}^{3} (9 - x^2)dx = \rho\left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3} = 36\rho$$

El momento respecto al eje x es:

$$M_x = \frac{\rho}{2}\int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2]dx = \frac{\rho}{2}\int_{-3}^{3} [(9 - x^2)^2 - (0)^2]dx$$

$$M_x = \frac{\rho}{2}\int_{-3}^{3} [81 - 18x^2 + x^4]dx = \rho\left[81x - 6x^3 + \frac{x^5}{5}\right]_{-3}^{3} = \frac{648\rho}{5}$$

El momento respecto al eje y es:

$$M_x = \frac{\rho}{2}\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx = \frac{\rho}{2}\int_{-3}^{3} x[(9 - x^2) - (0)]dx$$

$$M_x = \frac{\rho}{2}\int_{-3}^{3} (9x - x^3)dx = \frac{\rho}{2}\left[\frac{9x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{-3}^{3} = 0$$

El centro de masa es: $\bar{x} = \dfrac{M_y}{\mathrm{m}} = \dfrac{0}{36\rho} = 0$ y $\bar{y} = \dfrac{M_x}{\mathrm{m}} = \dfrac{\frac{648\rho}{5}}{36\rho} = \dfrac{18}{5}.$

$\therefore$ El centro de la masa de la lámina dada es $\left(0, \dfrac{18}{5}\right)$.

Nota: se debe tener presente que el centro de masa de una lámina uniforme sólo depende de la forma de ésta, no de su densidad.

En general, si una figura plana tiene un centro de simetría, ese punto es el centro de gravedad. Además, si una figura plana tiene un eje de simetría el centro de gravedad estará en ese eje.

Generalizando, la fórmula del centro de masas de una lámina para calcular el centro de una región **sin masa** del plano, se denomina **centroide** o **centro de gravedad** de esa región. Dada la figura inferior, se observa que la superficie *AMPNB* se divide en n rectángulos, cada uno con base Δx. Sea dA su área y $C(h,k)$ las coordenadas de su centro de gravedad.

Entonces, $dA = y\,dx$, $h = x$ y $k = \dfrac{1}{2}y$.

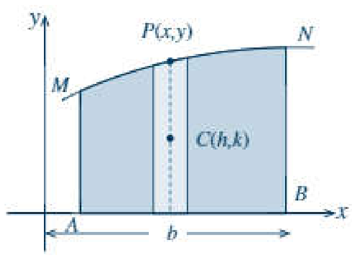
El momento de la superficie de este rectángulo básico con respecto a Ox (también Oy) es el producto de su área por la distancia de su centro de gravedad a Ox (también Oy). Si dichos momentos son respectivamente dM_x y dM_y, entonces:

$$dM_x = k\,dA \qquad dM_y = h\,dA$$

El momento de la superficie de la figura *AMPNB* se obtiene aplicando el teorema fundamental del cálculo integral a la suma de los momentos de la superficies de los rectángulos fundamentales. De esta manera se tiene que: $M_x = \int k\,dA$ y $M_y = \int h\,dA$.

Si $(\bar{x}, \bar{y})$ son las coordenadas del centro de gravedad de la superficie *AMPNB* y A es su área, las relaciones entre los momentos de superficie $\bar{x}$ y $\bar{y}$ se dan por:

$$A\bar{x} = M_y \qquad A\bar{y} = M_x$$



Con el fin de calcular $(\bar{x}, \bar{y})$, encontremos los momentos M_x y M_y.

Según $dA = y\,dx$; $h = x, k = \dfrac{1}{2}y$ y $M_x = \int k\,dA, M_y = \int h\,dA$,

para la superficie *AMPNB*:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2]dx \qquad M_y = \int_a^b x\,y\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

En donde debe sustituirse el valor de y en función de x deducido de la ecuación de la curva *MPN* de la figura anterior.

Si el área A se conoce, entonces de $A\bar{x} = M_y$, $A\bar{y} = M_x$ tenemos:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx}{A} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{1}{2}\frac{\int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2]dx}{A}$$

Si los rectángulos fundamentales de la curva son respecto al eje y tenemos que:

$$C(h,k),\ h=\frac{1}{2}x,\ k=y;\ dM_x=kdA,\ dM_y=h\,dA;\ M_x=\int k\,dA,\ M_y=\int h\,dA;\ A\bar{x}=M_y,\ A\bar{y}=M_x;$$

$$M_x=\int_a^b xy\,dy,\ M_y=\frac{1}{2}\int_a^b x^2\,dy;\ \bar{x}=\frac{M_y}{A},\ \bar{y}=\frac{M_x}{A}.$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el centro de gravedad de cada una de las superficies limitadas por las siguientes curvas $y=x^2-2x-3$, $y=6x-x^2-3$.

Solución

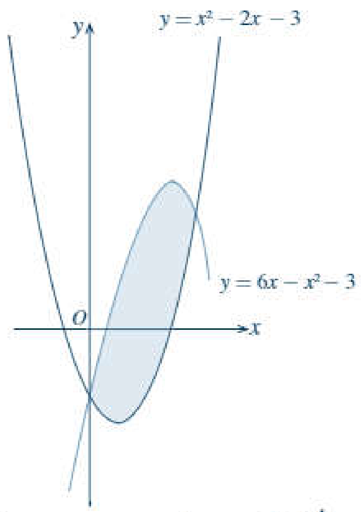
Al construir las gráficas de las curvas dadas se tiene:

Para $y=x^2-2x-3$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y	12	5	0	−3	−4	−3	0	5	12

Para $y=6x-x^2-3$

x	−1	0	1	2	3	4	5
y	−10	−3	2	5	6	5	2



Los límites a y b se determinan por los puntos de intersección de las dos curvas dadas, es decir: $a=0$ y $b=4$.

Sean $f(x)=6x-x^2-3$ y $g(x)=x^2-2x-3$, entonces el área de la región sombreada en la gráfica es:

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx=\int_0^4[(6x-x^2-3)-(x^2-2x-3)]dx=\int_0^4(8x-2x^2)dx=\left[4x^2-\frac{2x^2}{3}\right]_0^4$$

$$A=\frac{64}{3}$$

Al calcula el momento M_x se tiene:

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)^2-g(x)^2]dx=\frac{1}{2}\int_0^4[(6x-x^2-3)^2-(x^2-2x-3)^2]dx$$

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^4[(36x^2+x^4+9-12x^3-36x+6x^2)-(x^4+4x^2+9-4x^3-6x^2+12x)]dx$$

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^4(-8x^3+44x^2-48x)dx=\left[-x^4+\frac{22x^3}{3}-12x^2\right]_0^4=\frac{64}{3}$$

Al calcular el momento M_y se tiene:

$$M_y = \int_a^b x[f(x)-g(x)]dx = \int_0^4 x[(6x-x^2-3)-(x^2-2x-3)]dx = \int_0^4 x(8x-2x^2)\,dx$$

$$M_y = \int_0^4 (8x^2-2x^3)dx = \left[\frac{8x^3}{3}-\frac{x^4}{2}\right]_0^4 = \frac{128}{3}$$

Entonces, las coordenadas del centro de gravedad son:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{128}{3}}{\frac{64}{3}} = 2 \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{64}{3}}{\frac{64}{3}} = 1$$

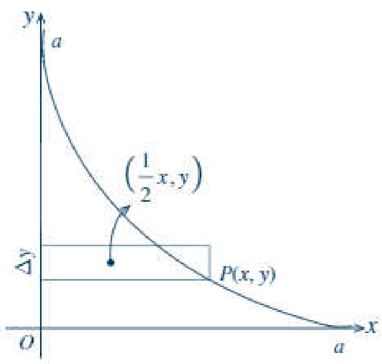
∴ Las coordenadas del centro de gravedad para la región limitada por las curvas $y = x^2 - 2x - 3$ y $y = 6x - x^2 - 3$ es (2,1).

2 ••Encuentra el centro de gravedad del área en el primer cuadrante de la **hipocicloide** $x = a\cos^3\theta$, $y = a\,\text{sen}^3\theta$.

Solución

Tabulando para la **hipocicloide** se tiene:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
x	1	0.65	0.35	0.125	0
y	0	0.125	0.35	0.65	1



Nota: para tabular y graficar, consideramos el valor de $a = 1$.

Al hacer la gráfica de la **hipocicloide** en el primer cuadrante se tiene la figura de la derecha.

De la ecuación $y = a\,\text{sen}^3\theta$, tenemos que su derivada es:

$$dy = 3a\,\text{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta$$

Al calcular el área de la **hipocicloide** en el primer cuadrante se tiene:

$$\text{Área} = \int_c^d x\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos^3\theta)(3a\,\text{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta)$$

$$\text{Área} = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,\text{sen}^2\theta\,d\theta$$

$$\text{Área} = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos2\theta\right)^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos2\theta\right)d\theta$$

$$\text{Área} = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{4}\cos^2 2\theta\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$\text{Área} = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos 2\theta+\frac{1}{4}\cos 2\theta-\frac{1}{4}\cos^2 2\theta+\frac{1}{8}\cos^2 2\theta-\frac{1}{8}\cos^3 2\theta\right)d\theta$$

$$\text{Área} = \frac{3a^2}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta+\frac{3a^2}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta\, d\theta-\frac{3a^2}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2\theta\, d\theta-\frac{3a^2}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 2\theta\, d\theta$$

$$\text{Área} = \left[\frac{3a^2}{8}\theta+\frac{3a^2}{16}\operatorname{sen}2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{3a^2}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4\theta\right)d\theta-\frac{3a^2}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2\theta\cos 2\theta\, d\theta$$

$$\text{Área} = \left[\frac{3a^2\theta}{8}+\frac{3a^2\operatorname{sen}2\theta}{16}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{3a^2}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta-\frac{3a^2}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4\theta\, d\theta-\frac{3a^2}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\operatorname{sen}^2 2\theta)\cos 2\theta\, d\theta$$

$$\text{Área} = \left[\frac{3a^2\theta}{8}+\frac{3a^2\operatorname{sen}2\theta}{16}-\frac{3a^2\theta}{16}-\frac{3a^2\operatorname{sen}4\theta}{64}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{3a^2}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta\, d\theta+\frac{3a^2}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2 2\theta\cos 2\theta\, d\theta$$

$$\text{Área} = \left[\frac{3a^2\theta}{16}+\frac{3a^2\operatorname{sen}2\theta}{16}-\frac{3a^2\operatorname{sen}4\theta}{64}-\frac{3a^2\operatorname{sen}2\theta}{16}-\frac{3a^2\operatorname{sen}^3 2\theta}{48}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{Área} = \left[\frac{3a^2\theta}{16}-\frac{3a^2\operatorname{sen}4\theta}{64}-\frac{3a^2\operatorname{sen}2\theta}{48}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{Área} = \frac{3a^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{16}-\frac{3a^2\operatorname{sen}4\left(\frac{\pi}{2}\right)}{64}-\frac{3a^2\operatorname{sen}^3 2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{48}=\frac{3a^2\pi}{32}$$

Al calcular el momento M_x se tiene:

$$M_x = \int_a^b x\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos^3\theta)(a\operatorname{sen}^3\theta)(3a\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\, d\theta) = 3a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^5\theta\cos^4\theta\, d\theta$$

$$M_x = 3a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}^2\theta)^2\operatorname{sen}\theta\cos^4\theta\, d\theta = 3a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)^2\operatorname{sen}\theta\cos^4\theta\, d\theta$$

$$M_x = 3a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta)\operatorname{sen}\theta\cos^4\theta\, d\theta$$

$$M_x = 3a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta-6a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta+3a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8\theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$M_x = \left[-\frac{3a^3\cos^5\theta}{5}+\frac{6a^3\cos^7\theta}{7}-\frac{3a^3\cos^9\theta}{9}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$M_x = \left[\frac{3a^3\cos^5\left(\frac{\pi}{2}\right)}{5}+\frac{6a^3\cos^7\left(\frac{\pi}{2}\right)}{7}-\frac{3a^3\cos^9\left(\frac{\pi}{2}\right)}{9}\right]-\left[\frac{3a^3\cos^5(0)}{5}+\frac{6a^3\cos^7(0)}{7}-\frac{3a^3\cos^9(0)}{9}\right]$$

$$M_x = [0] + \frac{3a^3}{5} - \frac{6a^3}{7} + \frac{3a^3}{9} = \frac{189a^3 - 270a^3 + 105a^3}{315} = \frac{24a^3}{315}$$

Al calcular el momento M_y se tiene:

$$M_y = \frac{1}{2}\int_a^b x^2\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos^3\theta)^2(3a\,\text{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta)$$

$$M_y = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2\cos^6\theta)(3a\,\text{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta)$$

$$M_y = \frac{3a^3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\theta\,\text{sen}^2\theta\,d\theta = \frac{3a^3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta)^3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta\,d\theta$$

$$M_y = \frac{3a^3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\text{sen}^2\theta)^3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta\,d\theta$$

$$M_y = \frac{3a^3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-3\,\text{sen}^2\theta+3\,\text{sen}^4\theta-\text{sen}^6\theta)\cos\theta\,\text{sen}^2\theta\,d\theta$$

$$M_y = \frac{3a^3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta - \frac{9a^3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^4\theta\cos\theta\,d\theta + \frac{9a^3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^6\theta\cos\theta\,d\theta - \frac{3a^3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^8\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$M_y = \left[\frac{3a^3\text{sen}^3\theta}{6} - \frac{9a^3\text{sen}^5\theta}{10} + \frac{9a^3\text{sen}^7\theta}{14} - \frac{3a^3\text{sen}^9\theta}{18}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$M_y = \frac{3a^3\text{sen}^3\left(\frac{\pi}{2}\right)}{6} - \frac{9a^3\text{sen}^5\left(\frac{\pi}{2}\right)}{10} + \frac{9a^3\text{sen}^7\left(\frac{\pi}{2}\right)}{14} - \frac{3a^3\text{sen}^9\left(\frac{\pi}{2}\right)}{18}$$

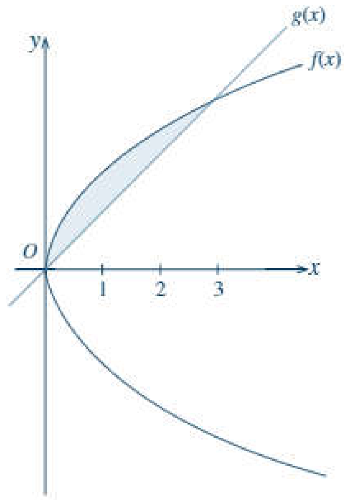
$$M_y = \frac{3a^3}{6} - \frac{9a^3}{10} + \frac{9a^3}{14} - \frac{3a^3}{18} = \frac{24a^3}{315}$$

Por lo anterior y dada la gráfica de la página 296, se denota por simetría que $\bar{x} = \bar{y}$.
Entonces, las coordenadas del centro de gravedad son:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{24a^3}{315}}{\frac{3a^2\pi}{32}} = \frac{256a}{315\pi} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{24a^3}{315}}{\frac{3a^2\pi}{32}} = \frac{256a}{315\pi}$$

$\therefore$ Las coordenadas del centro de gravedad del área en el primer cuadrante de la **hipocicloide** son $\left(\frac{256a}{315\pi}, \frac{256a}{315\pi}\right)$.

3 Calcula el centro de gravedad de la superficie limitada por la parábola $y^2 = 12x$ y la recta $y = 2x$.



Solución

Para elaborar la gráfica correspondiente se tiene:

$y^2 = 12x$

x	y
0	0
1	±3.46
2	±4.89
3	±6

$y = 2x$

x	y
0	0
1	2
2	4
3	6

Al calcular el área de la región resulta:

$$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_0^3 (\sqrt{12x} - 2x)dx = \sqrt{12}\int_0^3 x^{\frac{1}{2}}\,dx - 2\int_0^3 x\,dx$$

$$\text{Área} = \left[\frac{2\sqrt{12}x^{\frac{3}{2}}}{3} - x^2\right]_0^3 = \frac{2\sqrt{12}(3)^{\frac{3}{2}}}{3} - (3)^2 = 12 - 9 = 3$$

Al calcular el momento M_x se tiene:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2]dx = \frac{1}{2}\int_0^3 [12x - (2x)^2]dx$$

$$M_x = 6\int_0^3 x\,dx - 2\int_0^3 \left[x^2 dx = 3x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^3 = 9$$

Al calcular el momento M_y se tiene:

$$M_y = \int_a^b xy\,dx = \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx = \int_0^3 x(\sqrt{12x} - 2x)dx = \sqrt{12}\int_0^3 x^{\frac{3}{2}}\,dx - 2\int_0^3 x^2\,dx$$

$$M_y = \left[\frac{2\sqrt{12}x^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{18}{5}$$

Entonces, las coordenadas del centro de gravedad, son:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{18}{5}}{3} = \frac{18}{15} = \frac{6}{5} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{9}{3} = 3$$

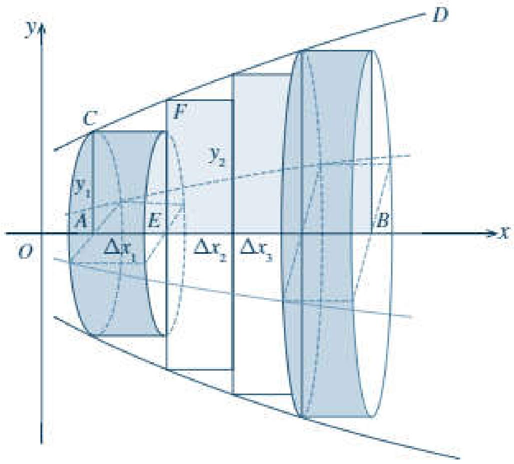
$\therefore$ Las coordenadas del centro de gravedad de la superficie limitada por la parábola $y^2 = 12x$ y la recta $y = 2x$ es $\left(\frac{6}{5}, 3\right)$.

Centro de gravedad de un sólido de revolución

El centro de gravedad mecánico de un sólido homogéneo coincide con el centro de gravedad geométrico de dicho cuerpo. Si el sólido tiene un plano de simetría, el centro de gravedad se localizará en dicho plano.

Para obtener una definición analítica del centro de gravedad de un sólido de revolución, se considera la figura siguiente, donde Ox es el eje geométrico del sólido. El centro de gravedad estará en este eje. Sea dv un elemento de volumen, es decir, un cilindro de revolución de altura Δx y radio y. Entonces $dV = \pi y^2 \Delta x$.

El momento de este cilindro con respecto al plano que pasa por Oy perpendicular a Ox es: $dM_y = x\,dV = \pi xy^2 \Delta x$.



El momento del sólido se determina por el teorema fundamental del cálculo y $\bar{x}$ está dada por:

$$V\bar{x} = M_y = \int_a^b \pi xy^2\,dx \quad \text{o} \quad V\bar{x} = M_y = \pi \int_a^b xy^2\,dx$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{M_y}{V}$$

El momento del cilindro con respecto al plano que pasa por Ox perpendicular a Oy es: $dM_x = ydv = \pi yx^2\,dy$, ya que $dV = \pi x^2 \Delta y$.

El momento del sólido se determina por el teorema fundamental del cálculo y $\bar{y}$ está dada por:

$$V\bar{y} = M_x = \int_a^b \pi yx^2\,dy \quad \text{o} \quad V\bar{y} = M_x = \int_a^b \pi yx^2\,dy$$

$$\therefore \quad \bar{y} = \frac{M_x}{V}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula el centro de gravedad del sólido de revolución generado al girar el área limitada por Ox y las curvas $ay = x^2$, $x = a$.

Solución

De la ecuación $ay = x^2$, se despeja a y, lo que resulta: $\quad y = \dfrac{x^2}{a}$

Calculando el volumen del sólido de revolución, tenemos:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_0^a \left(\frac{x^2}{a}\right)^2 dx = \frac{\pi}{a^2}\int_0^a x^4\,dx = \left[\frac{\pi x^5}{5a^2}\right]_0^a = \frac{\pi a^3}{5}$$

Calculando el momento del sólido, tenemos:

$$M_y = \pi \int_a^b xy^2\,dx = \pi \int_0^a x\left(\frac{x^2}{a}\right)^2 dx = \frac{\pi}{a^2}\int_0^a x^5\,dx = \left[\frac{\pi x^6}{6a^2}\right]_0^a = \frac{\pi a^3}{6}$$

Calculando el centro de gravedad del sólido:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{V} = \frac{\frac{\pi a^4}{6}}{\frac{\pi a^3}{5}} = \frac{5a}{6}$$

$\therefore$ Las coordenadas del centro de gravedad del sólido dado son $\left(\frac{5a}{6}, 0\right)$.

2 Calcula el centro de gravedad del sólido de revolución generado al girar el área limitada por Oy y las curvas $x^2 - y^2 = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

Solución

De la ecuación $x^2 - y^2 = 1$, se despeja a x^2 lo que resulta $x^2 = 1 + y^2$.

Calculando el volumen del sólido de revolución se tiene:

$$V_y = \pi \int_a^b x^2\,dy = \pi \int_0^1 (1+y^2)\,dy = \left[\pi\left(y + \frac{y^3}{3}\right)\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}$$

Calculando el momento del sólido, tenemos:

$$M_x = \pi \int_a^b yx^2\,dy = \pi \int_0^1 y(1+y^2)\,dy = \left[\pi\left(\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4}\right)\right]_0^1 = \frac{3\pi}{4}$$

Calculando el centro de gravedad del sólido, resulta:

$$\bar{y} = \frac{M_x}{V} = \frac{\frac{3\pi}{4}}{\frac{4\pi}{3}} = \frac{9}{16}$$

$\therefore$ Las coordenadas del centro de gravedad del sólido dado son $\left(0, \frac{9}{16}\right)$.

EJERCICIO 28

I. Calcula el centro de gravedad de cada una de las superficies limitadas por las siguientes curvas.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. $y^2 = 9x, x = 5$
2. $y = x^2, y = 2x + 3$
3. $x = 4y - y^2, y = x$
4. $y = x^3, x = 2, y = 0$
5. $y = x^3, y = 4x$ (Primer cuadrante)
6. $y^2 = 4x, 2x - y - 4 = 0$
7. $y = x^3 - 3x, y = x$ (Primer cuadrante)
8. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1, y = 0, x = 6$ (Primer cuadrante)
9. $y = 4x - x^2, 2x - y - 3 = 0$
10. $y = x^3, y = 8, x = 0$
11. $y^2 = a^2 - ax, x = 0, y = 0$ (Primer cuadrante)
12. $y = 6x - x^2, y = x$

II. Resuelve los siguientes problemas y en plenaria discute tus resultados.

1. Calcula el centro de gravedad de la superficie limitada por los ejes de coordenadas y la parábola $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{5}$.
2. Calcula el centro de gravedad de la parte de la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ que está en el primer cuadrante.
3. Calcula el centro de gravedad de la superficie limitada por la cisoide $y^2(2a-x) = x^3$ y su asíntota $x = 2a$.
4. Calcula el centro de gravedad de la superficie limitada por la cardioide $r = a\,(1 + \cos\theta)$.
5. Calcula el centro de gravedad de la superficie limitada por la bruja $xy = 4a(2a - y)$ y el eje de las x.
6. Calcula el centro de gravedad del área limitada por las parábolas $y^2 = x$ y $x^2 = -8y$.
7. Calcula el centro de gravedad del área bajo la curva $y = 2 \operatorname{sen} 3x$ entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{3}$.
8. Calcula el centro de gravedad de la región limitada por el semicírculo $y = \sqrt{4 - x^2}$ y el eje x.
9. Calcula el centro de gravedad de la superficie comprendida bajo una arcada de la sinusoide.
10. Calcula el centro de gravedad de la superficie limitada por el lazo de la curva $y^2 = 4x^2 - x^3$.
11. Calcula el centro de gravedad de la superficie acotada por la parábola $y^2 = 2px$ y la recta $y = mx$.
12. Calcula el centro de gravedad de la superficie incluida entre las parábolas $x^2 = by$ y $y^2 = ax$.
13. Calcula el centro de gravedad del área del lazo derecho de $y^2 = x^4(1 - x^2)$.
14. Calcula el centro de gravedad del área entre $x^2 = 8y - 4$ y $x^2 = 4y$, en el primer cuadrante.
15. Para el área limitada por $y = -x^2 - 3x + 6$ y $x + y - 3 = 0$, calcula el centro de gravedad.

16. Calcula el centro de gravedad del área del primer cuadrante limitada por $y^2 = 12x$ y su lado recto, en torno al eje x.

17. Calcula el centro de gravedad de la región acotada por las curvas $y = 4 - x^2$ y $y = x + 2$.

18. Calcula el centro de masas de:

a) $m_1 = 8, x_1 = -7; m_2 = 5, x_2 = 3; m_3 = 7, x_3 = 5.$

b) $m_1 = 6, x_1 = 4; m_2 = 2, x_2 = -4; m_3 = 5, x_3 = -5; m_4 = 1, x_4 = 3; m_5 = 7, x_5 = 2.$

c) $m_1 = 7, x_1 = 0; m_2 = 14, x_2 = -3; m_3 = 15, x_3 = 4; m_4 = 10, x_4 = -1; m_5 = 3, x_5 = -2.$

19. Calcula el centro de masas de:

a) $m_1 = 8, P_1\,(2{,}2); m_2 = 3, P_2\,(-3{,}1); m_3 = 13, P_3\,(1{,}-4).$

b) $m_1 = 9, P_1\,(1{,}-1); m_2 = 3, P_2\,(5{,}4); m_3 = 6, P_3\,(-4{,}0); m_4 = 11, P_4\,(2{,}3).$

c) $m_1 = 6, P_1\,(-2{,}-3); m_2 = 8, P_2\,(-1{,}0); m_3 = 4, P_3\,(7{,}1); m_4 = 2, P_4\,(0{,}0); m_5 = 12, P_5\,(-3{,}0).$

20. Calcula M_x, M_y y $(\bar{x}, \bar{y})$ para las láminas de densidad uniforme ρ limitadas por las curvas:

a) $y^2 = x, y = 0, x = 4.$

b) $x = 4 - y^2, x = 0.$

c) $x = 2y - y^2, x = 0.$

21. Calcula el centro de gravedad del sólido que se forma cuando la superficie acotada por las rectas $x = 0, x = a, y = 0$ y la curva $y = e^x$ gira alrededor del eje x.

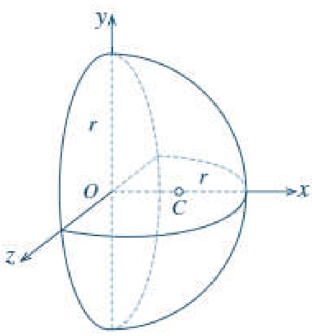
22. Calcula el centro de gravedad del sólido que se forma al hacer girar la superficie limitada por las rectas $y = 0, x = \dfrac{\pi}{4}$ la curva $y = \operatorname{sen} 2x$ alrededor del eje x.

23. El radio de la base superior de un tronco de cono de revolución es de 5 cm; el de la base inferior es de 10 cm, y la altura mide 16 cm. Encuentra el centro de gravedad.

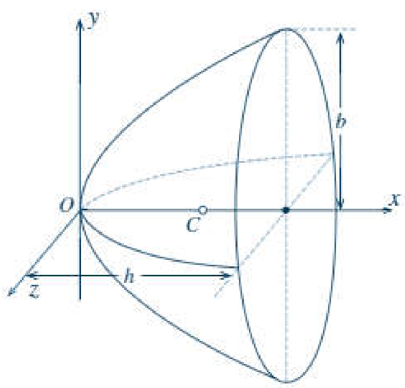
24. Calcula el centro de gravedad del sólido que se forma cuando la superficie del primer cuadrante acotada por las rectas $y = 0, x = 2a$ y la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ gira alrededor del eje x.

25. Calcula el centro de gravedad de cada uno de los siguientes sólidos:

a) Hemisferio



b) Paraboloide de revolución



III. El área acotada por el eje x y cada una de las curvas siguientes gira alrededor de Ox. Calcula el centro de gravedad del sólido de revolución que se engendra:

a) $x^2 + y^2 = 4, x = 0, x = 1$

b) $y^2 = 4x, x = 1, x = 4$

c) $y = a \operatorname{sen} x, x = \dfrac{\pi}{2}$

d) $x^2 - y^2 = a^2, x = 2a$

e) $2xy = a^2; x = \dfrac{a}{2}, x = 2a$

f) $y = x^2, y = x$

g) $y = 4 - x^2$ (Primer cuadrante)

h) $y = 4x - x^2, y = x$

i) $x^2 - y^2 = 16, y = 0, x = 8$

j) $(x-2)\, y^2 = 4, y = 0, x = 3, x = 5$

IV. El área acotada por el eje y y cada una de las curvas siguientes gira alrededor de Oy. Calcula el centro de gravedad del sólido de revolución que se engendra:

a) $ay^2 = x^3, y = a$

b) $y = x^2, y = 9, x = 0$

c) $y = 4x - x^2, y = x$

d) $y^2 = 4ax, y = b$

e) $x^2 y = 16\,(4 - y), x = 0, y = 0, x = 4$

f) $y = 4 - x^2$ (Primer cuadrante)

g) $y = x^2, y = x$

h) $y^2 = 12x, y = 0, x = 3$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Cálculo de la presión ejercida por un fluido sobre superficies verticales

Introducción

Físicamente se sabe que cuanto más profundo se sumerge un objeto, mayor es la presión que sufre (entendiendo como **presión** la fuerza ejercida sobre cada unidad de área). Lo anterior se describe, por la fórmula: $P = \sigma h$; donde: $P =$ presión del fluido, $\sigma =$ densidad del fluido (masa entre unidad de volumen) y $h =$ altura bajo la superficie (profundidad).

Como 1 cm^3 de agua pesa 1 g, entonces 1 m^3 es 1000 kg. Por ejemplo, la densidad del agua es de 62.4 libras/pie^3 y por tanto, a una profundidad de 9 pies, la presión sobre un objeto sumergido es:

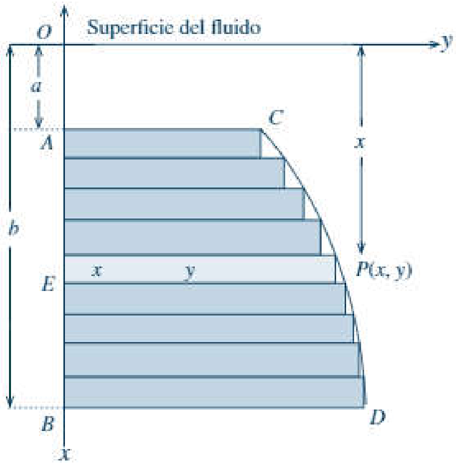
$$P = \sigma h = (62.4 \text{ libras/pie}^3)(9 \text{ pies}) = 561.6 \text{ libras/pie}^2$$

Esta presión corresponde al peso de la **columna de agua** de 9 pies de altura que soporta sobre sí cada pie cuadrado de área del objeto. Además, de acuerdo con el principio de **Pascal**, la presión ejercida por un fluido a una determinada profundidad es **igual en todas direcciones**. Entonces, la presión contra la pared del contenedor, a cierta profundidad, es igual que la ejercida sobre un objeto sumergido a la misma profundidad. De lo anterior, se deduce que la presión ejercida por un fluido es independiente de la forma del recipiente. Esto quiere decir que a 4 metros por debajo de la superficie, la presión sobre la pared de una piscina es igual que sobre al frente de una presa, suponiendo que la densidad del agua es idéntica. La presión queda determinada únicamente por la profundidad, cualquier otra dimensión del contenedor es irrelevante. El pricipal enfoque del conocimiento de la presión de fluidos está en el cálculo de la presión total ejercida por un fluido sobre las paredes de un contenedor.

Si el contenedor es de paredes verticales, resulta fácil calcular la fuerza total sobre el **fondo**. La presión en el fondo es constante y la fuerza total es el producto de dicha presión por el área del fondo. En general, para una región plana sumergida horizontalmente se tiene que:

$$P = \sigma h A$$

donde, F = fuerza total sobre una región plana, σ = densicad del fluido, h = altura bajo la superficie (profundidad) y A = área de la región plana. Si se desea calcular la fuerza total sobre las paredes verticales de un contenedor, se encuentra que la presión no es constante en cada punto, y que crece con la profundidad.



Supongamos que $ABCD$ (figura de la derecha) representa una parte de la superficie vertical de una pared de un **aljibe**. Y que deseamos conocer la presión total que del fluido ejerce sobre dicha superficie. Se trazan los ejes coordenados tal y como está indicado en la figura de la derecha, ubicando el eje y sobre la superficie del fluido. AB se divide en n subintervalos y se construyen rectángulos horizontales dentro de la superficie $ABCD$.

El área de cualquiera de los rectángulos (como EP) es $y\ \Delta x$. Si este rectángulo fuese horizontal a la profundidad x, la diferencial de fuerza del fluido sobre él sería: $\Delta F = \sigma xy\ \Delta x$

Por el principio de **Pascal**, $\Delta F = \sigma xy\ \Delta x$ es, aproximadamente, la fuerza sobre el rectángulo EP en su posición vertical. Por lo tanto, la suma $\sum_{i=1}^{n} \sigma x_i y_i \Delta x_i$ representa, aproximadamente, la fuerza sobre todos los rectángulos.

La presión sobre la superficie $ABCD$ es el límite de la suma, cuando n tiende a infinito, y por el teorema fundamental del cálculo integral, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sigma x_i y_i \Delta x_i = \int \sigma x\, y\, dx$$

Por tanto, la fuerza total de un fluido de densidad constante σ, sobre una superficie vertical sumergida limitada por una curva, el eje x y las dos rectas horizontales $x = a$ y $x = b$, se obtiene por la fórmula:

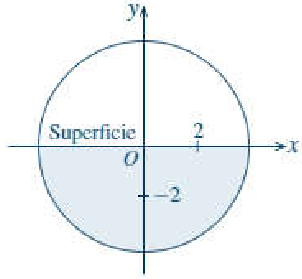
$$F = \sigma \int_a^b xy\, dx$$

El valor de y se sustituye en términos de x, deducido de la ecuación de la curva dada.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Una cañería circular de 4 m de diámetro (figura de la derecha) tiene agua hasta la mitad de su capacidad. Calcula la fuerza total que ejerce el agua sobre la compuerta que cierra a dicha cañería.



Solución

La ecuación del círculo es $x^2 + y^2 = 4$, de la cual tenemos que $y = \sqrt{4 - x^2}$.

Dado que 1 cm^3 de agua pesa 1 g, el peso de 1 m^3 son 1000 kg, entonces $\sigma = 1000$ kg/m^3. Los límites son $x = 0$ y $x = 2$; por lo que la fuerza a la derecha del eje x es:

$$F = \sigma \int_a^b xy\,dx = 1000 \int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$F = \left[-\frac{1000(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^2 = \left[-\frac{1000[4-(2)^2]^{\frac{3}{2}}}{3}\right] - \left[-\frac{1000[4-(0)^2]^{\frac{3}{2}}}{3}\right] = 2666.66 \text{ kg}$$

Para obtener la fuerza total del fluido, se tiene:

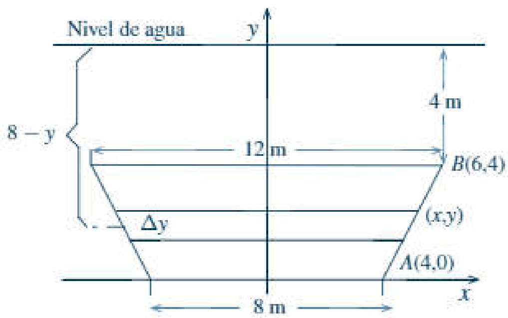
$$F_{\text{TOTAL}} = 2F = 2\,(2666.66 \text{ kg}) = 5333.33 \text{ kg}$$

$\therefore$ La fuerza total sobre la compuerta que cierra la cañería es 5333.33 kg.

2 Una presa tiene una compuerta vertical en forma de trapecio (siguiente figura) que mide 12 m en su lado superior, 8 m en su base y 4 m de altura. ¿Cuál es la fuerza total ejercida sobre la compuerta si su lado superior está 4 m bajo la superficie del agua?

Solución

Con base en la siguiente figura tenemos $dA = 2x\,dy$, $h = 8 - y$ y $dF = \sigma\,(8 - y)\,2x\,dy$.



Determina la ecuación de la recta AB:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{4-0}{6-4}(x-4)$$

$$\therefore \quad y = 2x - 8$$

Al despejar a x de la ecuación de la recta $AB\left(x = \dfrac{y+8}{2}\right)$ y sustituyendo en $dF = \sigma\,(8 - y)\,2x\,dy$, resulta:

$$dF = \sigma(8-y)2\left(\frac{y+8}{2}\right)dy = \sigma(64-y^2)dy$$

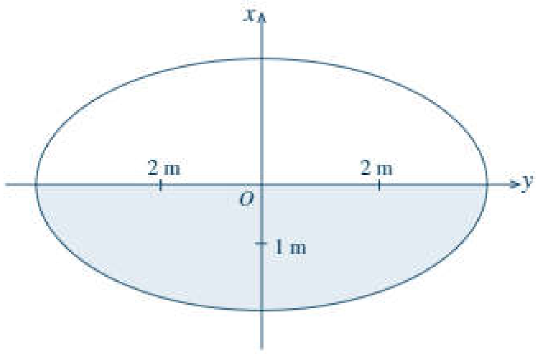
Integrando $dF = \sigma\,(64 - y^2)\,dy$ dentro de los límites $y = 0$ y $y = 4$ se obtiene:

$$F = \sigma\int_0^4 (64-y^2)dy = \sigma\left[64y - \frac{y^3}{3}\right]_0^4 = \frac{704}{3}\sigma$$

Sea $\sigma = 1000$ kg/m^3, por tanto, $F = \dfrac{704}{3}(1000) = 234\,667$ kg

$\therefore$ La fuerza total ejercida sobre la compuerta es de 234 667 kg.

3 Cada uno de los extremos de un tanque horizontal es una elipse cuyo eje horizontal es de 4 m y el eje vertical de 2 m. Calcula la fuerza total sobre un extremo cuando el tanque que está medio lleno de petróleo pesa 800 kg/m³.



Solución

Dada la figura de la derecha, se tiene que la ecuación de la elipse es: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, siendo $a=1$ y $b=2$, entonces, $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$.

Despejando y de la ecuación resulta: $y=\sqrt{4-4x}$.

Al tomar los límites $x=0$ y $x=1$, la fuerza total ejercida a la derecha del eje x es:

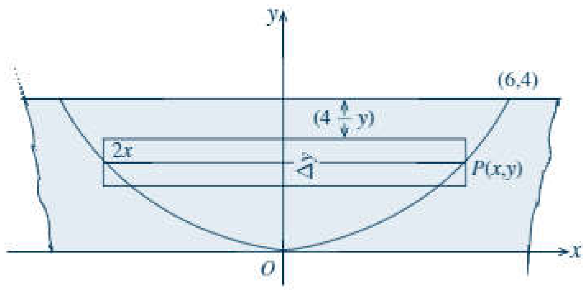
$$F=\sigma\int_a^b xy\,dx=800\int_0^1 x\sqrt{4-4x^2}\,dx=\left[800\left(-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{2(4-4x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\right]_0^1$$

$$F=\left(-\frac{200[4-4(1)^2]^{\frac{3}{2}}}{3}\right)-\left(-\frac{200[4-4(0)^2]^{\frac{3}{2}}}{3}\right)=533.33\,\text{kg}$$

Luego, la fuerza total del fluido es: $F_{\text{TOTAL}}=2F=2(533.33)=1\,066.66$ kg

∴ La fuerza total que el fluido ejerce sobre un extremo del tanque es de 1066.66 kg.

4 Una superficie plana, cuya forma es la de un segmento parabólico de 12 m de base y 4 m de altura, está sumergida en el agua de manera que su base se encuentra en la superficie libre del líquido. Calcula la fuerza total que el agua ejerce sobre una de las caras de la superficie.



Solución

Dada la figura de la derecha se observa que la ecuación canónica de la parábola es $x^2=4py$. Sustituyendo el punto (6,4), resulta que $p=\frac{9}{4}$; entonces la ecuación del segmento parabólico es $x^2=9y$, es decir, $x=3\sqrt{y}$.

El área del elemento rectangular diferencial es $dA=2x\,dy$, la profundidad de su centro geométrico es $(4-y)$. Sean los límites $y=0$ y $y=4$. Aplicando la fórmula $dF=\sigma\,h\,dA$, tenemos:

$$dF=\sigma(4-y)2x\,dy=\sigma(4-y)2\left(3\sqrt{y}\right)dy=6\sigma\left(4\sqrt{y}-y^{\frac{3}{2}}\right)dy$$

Por integración resulta:

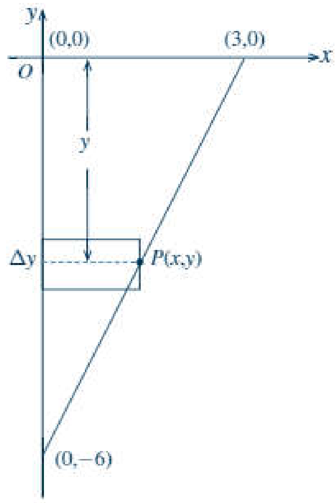
$$F=6\sigma\int_0^4\left(4\sqrt{y}-y^{\frac{3}{2}}\right)dy=\left[6\sigma\left(\frac{8y^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5}\right)\right]_0^4=\frac{256\sigma}{5}$$

Usando $\sigma=1000\,\text{kg/m}^3$, por lo tanto, $F=\frac{256(1000)}{5}=51\,200\,\text{kg}$

∴ La fuerza total que el agua ejerce sobre una de las caras de la superficie es de 51 200 kg.

5 En el siguiente problema el eje y se dirige verticalmente hacia arriba y el eje x está al nivel de la superficie de un fluido y se representa por σ el peso de la unidad cúbica del fluido. Calcula la fuerza ejercida sobre la superficie que se forma uniendo con líneas rectas la serie de puntos, en el orden dado: (0,0), (3,0), (0,–6) y (0,0).

Solución



Dada la figura de la derecha, se observa que la superficie sumergida está acotada por las rectas $x = 0$, $y = 0$ y $2x - y - 6 = 0$.

El área del elemento rectangular diferencial es $\Delta A = x\Delta y$, la profundidad es y.

Aplicando la fórmula $\Delta F = \sigma\, h\Delta A$ se tiene:

$$\Delta F = \sigma\, y(x\Delta y) = \sigma y\frac{(y+6)}{2}\Delta y = \frac{\sigma}{2}(y^2+6y)\Delta y$$

Integrando entre los límites $y = -6$ y $y = 0$, resulta:

$$F = \frac{\sigma}{2}\int_{-6}^{0}(y^2+6)dy$$

$$P = \left[\frac{\sigma}{2}\left(\frac{y^3}{3}+3y^2\right)\right]_{-6}^{0} = 18\sigma$$

$\therefore$ La fuerza total que el fluido ejerce sobre la superficie es de 18σ.

EJERCICIO 29

I. En los siguientes problemas el eje y se dirige verticalmente hacia arriba, el eje x está al nivel de la superficie de un fluido. Sea σ la masa de una unidad cúbica del fluido, encuentra la fuerza total que el fluido ejerce sobre las superficies que se forman uniendo con líneas rectas cada serie de puntos en el orden dado.

Escribe los números correspondientes
Competencias genéricas
Competencias disciplinares

1. (0,0), (3,–3), (0,–6), (–3,–3) y (0,0)
2. (1,0), (1,–2), (–1,–2), (–1,0) y (1,0)
3. (3,0), (2,–5), (–2,–5), (–3,0) y (3,0)
4. (2,0), (0,–3), (–2,0) y (2,0)
5. (0,0), (3,–6), (0,–6) y (0,0)

II. Resuelve los siguientes problemas y en plenaria discute tus resultados.

1. Un depósito cilíndrico de gasolina está colocado de modo que el eje de su cilindro esté horizontal. Si el depósito está medio lleno, calcula la fuerza ejercida sobre uno de sus laterales circulares, de diámetro igual a 3 pies, si la densidad de la gasolina es de 50 libras/pies^3.
2. Un extremo vertical de un tanque es un segmento de parábola con el vértice hacia abajo; la distancia en la parte superior es de 3 m, la profundidad de 6 m. Determina la fuerza total que su contenido ejerce sobre este extremo cuando el tanque está lleno de un fluido que pesa 1100 kg/m^3.

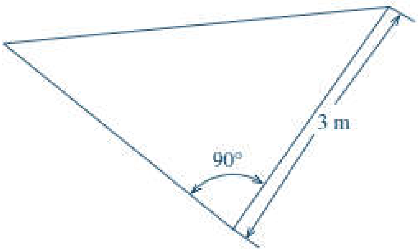
3. Una **claraboya** cuadrada en el extremo vertical de un barco mide 1 pie de lado. Calcula la fuerza total que soporta, suponiendo que el lado superior del cuadrado está 15 pies bajo la superficie del agua, cuya densidad es de 62.4 libras/pies^3.

4. Un tanque cilíndrico vertical de 10 m de diámetro y 16 m de altura está lleno de agua. Calcula la fuerza total que ejerce el fluido sobre la pared del tanque.

5. Un tanque cilíndrico horizontal, de 3 m de diámetro, está medio lleno de petróleo cuya densidad es 800 kg/m^3. Encuentra la fuerza total que ejerce el fluido sobre un extremo del tanque.

6. Una alberca tiene 8 m de ancho, 14 m de longitud, 1.5 m de profundidad en un extremo y 4 m en el otro, su fondo es un plano inclinado. Encuentra la fuerza total sobre cada pared vertical de la alberca.

7. El extremo vertical de un **artesa** es un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden 3 m cada uno. Encuentra la fuerza del fluido sobre una de las paredes laterales cuando la artesa está llena de agua.

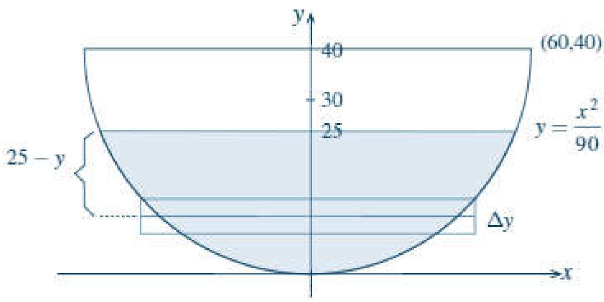


8. Calcula la fuerza ejercida sobre el fondo de un recipiente de forma semicircular de 2 m de radio cuando está lleno de un fluido de peso específico 900 kg/m^3.

9. Una superficie plana, cuya forma es la de un segmento parabólico de 12 m de base y 4 m de altura, se encuentra parcialmente sumergida en petróleo que pesa 800 kg/m^3, de manera que su eje es paralelo a la superficie libre y situada 3 m por debajo de su punto más alto. Calcula la fuerza total que ejerce el fluido sobre una de las caras de la superficie.

10. El fondo de una piscina es un plano inclinado. La piscina tiene 2 pies de profundidad en un extremo y 10 pies en el otro. Si dicha piscina mide 40 pies de largo y 30 de ancho y sus paredes son verticales, ¿cuál es la fuerza total que actúa sobre uno de los laterales de 40 pies?

11. Una presa vertical mide 120 pies de ancho en su parte superior y 40 pies de altura. Encuentra la fuerza total con la que contiene al agua, si esta alcanza una altura de 25 pies.



12. Un tanque cilíndrico está lleno hasta la mitad con gasolina, cuyo peso es de 42 libras/pies^3. Si el eje es horizontal y el diámetro es de 6 pies, encuentra la fuerza en un extremo debido a la presión del fluido.

13. Los extremos de una pila son regiones semicirculares, cada una con un radio de 2 m. Calcula la fuerza ejercida por la presión del fluido sobre un extremo de la pila si está llena de agua.
14. Una hoja de lámina en forma rectangular se sumerge verticalmente en un tanque con agua con el borde superior en la superficie del líquido. Si el ancho de la lámina es de 2 m y el largo es de 6 m. encuentra la fuerza debida a la presión del líquido sobre un lado de la lámina.
15. Una compuerta rectangular en una presa vertical tiene 3 m de ancho y 2 m de alto. Calcula:
    a) La fuerza total ejercida sobre la compuerta cuando el nivel del agua está 3 m arriba del borde superior.
    b) Cuánto más debe subir el nivel del agua para que esa fuerza se duplique.
16. Encuentra la fuerza total que un fluido ejerce sobre la mitad inferior de una pared elíptica cuyos semiejes son 2 m y 3 m:
    a) Cuando el eje mayor está en la superficie del fluido.
    b) Cuando el eje menor está en la superficie del fluido.

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Cálculo del trabajo realizado por una fuerza variable

Trabajo realizado por una fuerza constante

Para los científicos e ingenieros, el concepto de **trabajo** resulta ser importante al momento de calcular la energía requerida para realizar algunas tareas de tipo físico. Por ejemplo, es útil saber la cantidad de trabajo desarrollado al elevar una viga con una grúa, al comprimir un muelle, cuando un camión transporta una carga o al disparar un rifle.

En general, se establece que un trabajo se ha realizado cada vez que una fuerza (f) aplicada mueve un objeto cierta distancia (d). El trabajo (T) realizado por esa fuerza se define como: $T = f\,d$.

El trabajo puede expresarse en distintas unidades, por ejemplo: libras/pies, libras/pulgadas, kilogramo/metro, kilogramo/centímetro, etcétera. En el sistema métrico las unidades fundamentales de trabajo son la dina/cm (ergio) y newton/m (joule), donde 1 joule $= 10^7$ ergios.

EJEMPLO

Ejemplo 1 Calcula el trabajo realizado al levantar un objeto de 150 kg a una altura de 4 m.

Solución

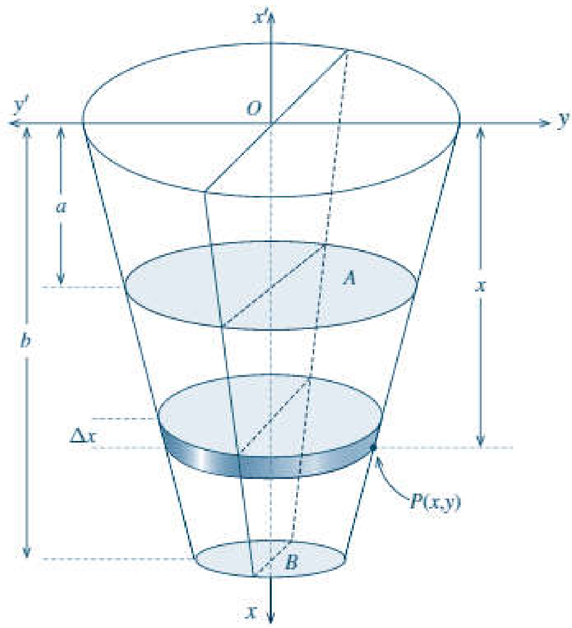
Al considerar la fuerza requerida como el peso del objeto, el trabajo realizado es:

$$T = f\,d = (150 \text{ kg})(4 \text{ m}) = 600 \text{ kg/m}$$

$\therefore$ El trabajo realizado al levantar un objeto de 150 kg a una altura de 4 m, es de 600 kg/m.

Trabajo realizado por una fuerza variable

Al aplicar una fuerza variable a un objeto, la determinación del trabajo realizado se obtiene por los métodos del cálculo integral, debido a que la fuerza necesaria para mover el objeto cambia al variar su posición. Por ejemplo, la fuerza requerida para comprimir un resorte crece conforme se comprime dicho resorte. Ahora, al analizar el trabajo que se realiza al vaciar un **aljibe** (trabajo de bombeo) cuya forma es la de un sólido de revolución con eje vertical. Suponiendo que el eje x de la curva que gira es vertical y que el eje y se encuentra en el plano superior del aljibe; tal como se muestra en la siguiente figura. Se tiene que calcular el trabajo que se realiza al vaciarlo, cuando el nivel del líquido baja desde la profundidad $x = a$ hasta $x = b$.



Al dividir AB en n subintervalos, se hace pasar por estos puntos de división planos perpendiculares al eje de revolución y se forman cilindros de revolución.

El volumen de cualquiera de dichos cilindros es $\pi y^2 \Delta x$ y σ es la masa de la unidad cúbica del líquido (densidad) resultando $\sigma\pi y^2 \Delta x$.

El trabajo que se efectúa al subir un peso es igual al producto de la densidad por la altura vertical, por tanto, el trabajo de subir dicho cilindro de líquido a la altura x es $\sigma\pi y^2 x\, dx$. La suma del trabajo realizado al subir hasta arriba todos estos cilindros es:

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma\pi y_i^2 x_i \Delta x_i$$

El trabajo efectuado al vaciar la parte AB del aljibe es lógicamente, el límite de dicha suma y por el teorema fundamental del cálculo integral, resulta:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sigma\pi y_i^2 x_i \Delta x_i = \int_a^b \sigma\pi x y^2 x\, dx$$

Por lo tanto, el trabajo requerido para vaciar el agua que se encuentra entre los niveles a y b del aljibe es:

$$T = \sigma\pi \int_a^b x y^2\, dx$$

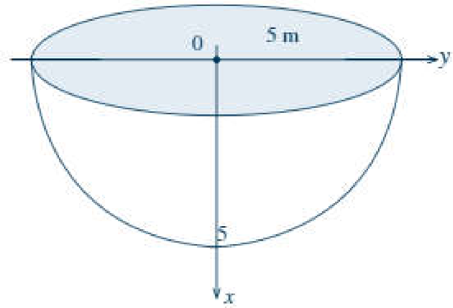
En donde el valor de y deberá expresarse en términos de x, según corresponda a la forma del sólido de revolución que tenga el contenedor.

El principio fundamental que sustenta este razonamiento es que el elemento de trabajo dT requerido para elevar un elemento dV a una altura h es $dT = \sigma\, h\, dV$.

Los ejes de coordenadas deben orientarse del modo que resulte más conveniente.

EJEMPLOS

1 Calcula el trabajo que se realiza bombeando el agua que llena su **aljibe hemisférico** de 5 m de profundidad.



Solución

Dada la figura de la derecha, el hemisferio es generado por el círculo $x^2 + y^2 = 25$, de donde $y^2 = 25 - x^2$. Si $\sigma = 1000$ y los límites son $x = 0$ y $x = 10$, al sustituir en la fórmula resulta:

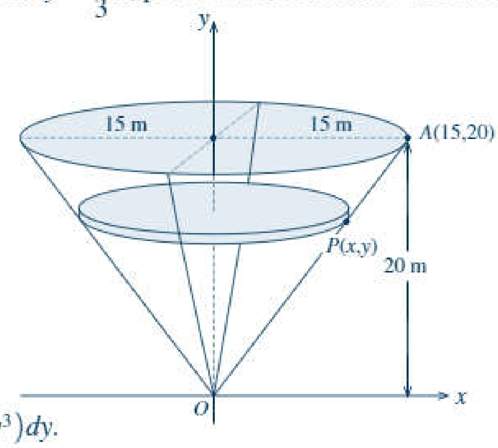
$$T = \sigma\pi \int_a^b xy^2\,dx = 1000\pi \int_0^5 x(25 - x^2)\,dx = -\left[\frac{1000\pi(25 - x^2)^2}{4}\right]_0^5 = 156\,250\pi\,\text{kg m}$$

$\therefore$ El trabajo que se realiza es aproximadamente 490 874 kgm.

2 Una **cisterna** cónica tiene 30 m de diámetro superior y 20 m de profundidad, como se muestra en la figura de abajo. Si la superficie del agua está 10 m por debajo del borde superior, calcula el trabajo que se hace para bombear el agua hasta el tope de la cisterna.

Solución

Consideremos un disco de grosor diferencial Δy, situado dentro del cono a la altura del punto $P = (x,y)$. La recta que pasa por el origen con pendiente $\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$ tiene por ecuación $y = \frac{4}{3}x$, por lo tanto, el diámetro del disco es $x = \frac{3}{4}y$ y de este modo, el volumen del elemento es $dV = \pi x^2 dy = \frac{9xy^2 dy}{1s}$. Aplicando el coeficiente de densidad del agua $\sigma = 1000\,\text{kg/m}^3$, obtenemos el diferencial de la fuerza $df = \sigma dV = \frac{9000\pi y^2 dy}{16}$.



Como el nivel del agua que se bombea tiene su superficie a la altura $20 - y$, el diferencial del trabajo

$$dT = (20 - y)df = \frac{9000\pi y^2(20 - y)dy}{16} = \frac{900\pi}{16}(20y^2 - y^3)dy.$$

Tomando los límites $y = 0$ y $y = 10$, se obtiene:

$$T = \int_0^{-10} \frac{9000\pi}{16}\left(\frac{20y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)_0^{10} = \frac{9000\pi}{16}\left(\frac{20\,000}{3} - \frac{10\,000}{4}\right) = 2\,343\,750\pi$$

$\therefore$ El trabajo que se realiza para bombear el agua es $T = 2\,343\,750\,\pi = 7\,363\,100$ kgm.

3 Para comprimir un resorte desde una longitud natural de 15 cm hasta 12 cm, se requiere una fuerza de 75 kg. Calcula el trabajo realizado al comprimirlo 3 cm más. (Aplicar la ley de Hooke).

Solución

Con base en la **ley de Hooke** establece que la fuerza $f(x)$ necesaria para comprimir o extender un resorte x unidades desde su longitud natural es $f(x) = kx$, siendo k una constante que depende del resorte en cuestión.

Entonces: $f(x) = kx$
$f(3) = 75 = k(3)$, resultando $k = 25$, es decir: $f(x) = 25x$

Para calcular el incremento de trabajo, se supone que la fuerza requerida para comprimir el resorte en Δx es constante.

Entonces, el incremento de trabajo es: $\Delta T =$ (fueza)(incremento de d)
$\Delta T = 25x\Delta x$

dado que el resorte se comprime entre $x = 3$ y $x = 6$ cm menos que su longitud natural, el trabajo realizado es:

$$T = \int_3^6 25x\,dx = \left[\frac{25x^2}{2}\right]_3^6 = 450 - 112.5 = 337.5\,\text{kgcm}$$

$\therefore$ El trabajo realizado es de 337.5 kgcm.

4 Si un módulo espacial pesa 30 toneladas en la superficie terrestre, entonces despreciando la resistencia del aire, ¿cuánto trabajo se requiere para elevarlo hasta una altura de 2500 km?

Solución

Dado que el peso de un cuerpo varía inversamente proporcional con el cuadrado de su distancia al centro de la Tierra, la fuerza $f(x)$ ejercida por la gravedad se puede expresar mediante: $f(x) = \dfrac{k}{x^2}$.

Como el módulo pesa 30 toneladas en la superficie terrestre, la cual, tiene un radio de aproximadamente 6 436 km.

Al sustituir se tiene: $f(x) = \dfrac{k}{x^2}$

$$30 = \frac{k}{(6436)^2} = \frac{k}{41\,422\,096} \quad \text{siendo } k = 1\,242\,662\,880.$$

Entonces, el incremento de trabajo es: $\Delta T = \dfrac{1\,242\,662\,880}{x^2}\Delta x.$

Al propulsar el módulo desde 6436 a 8936 km, el trabajo desarrollado es:

$$T = \int_{6436}^{8936} \frac{1\,242\,662\,880}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1\,242\,662\,880}{x^2}\right]_{6436}^{8936}$$
$$T = -139\,062.5425 - (-193\,080) = 50\,017.4575 \text{ toneladas km}$$

$\therefore$ El trabajo necesario para elevarlo es de 54 017.4575 toneladas km.

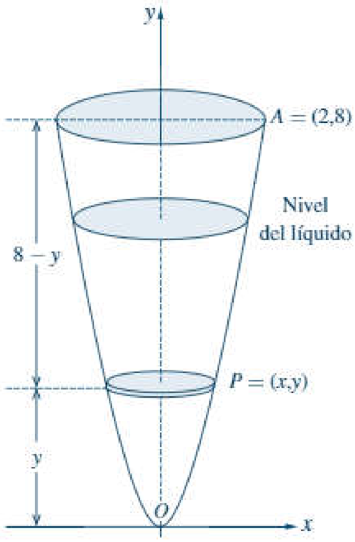
5 El depósito de la siguiente figura tiene 8 m de altura y 2 m de radio en su parte superior. Si se llena hasta una altura de 6 m con un líquido que pesa 50 kg/m^3, calcula el trabajo necesario para bombear todo ese líquido sobre el borde superior del depósito.

Solución

Al considerar el líquido subdividido en **capas** de ancho Δy, se puede determinar el trabajo requerido para bombear cada capa, describiendo primero el peso de dicha capa como el incremento de fuerza.

$\Delta f =$ Peso
$\Delta f =$ (densidad)(volumen de la capa)
$\Delta f = 50\,(\pi r^2\, h)$

Siendo $r = x$ el radio y $h = \Delta y$ la altura.



Entonces como $y=2x^2$, es decir, $x^2 = \dfrac{y}{2}$, se tiene:

$$\Delta f = 50\pi\left(\frac{y}{2}\right)\Delta y = 25\pi y \Delta y$$

Como cada capa se desplaza $8 - y$ metros, el incremento de trabajo es:

$\Delta T =$ (incremento de fuerza)(distancia) $= (25\pi\ y\ \Delta y)(8 - y)$
$= \pi(200y - 25y^2)\ \Delta y$

Puesto que las alturas de las diversas capas van desde $y = 0$ hasta $y = 6$, el trabajo requerido para vaciar el depósito es:

$$T = \pi\int_0^6 (200y - 25y^2)\,dy = \left[100\pi y^2 - \frac{25\pi y^3}{3}\right]_0^6 = 3600\pi - 1800\pi = 5654.867 \text{ kgm}$$

$\therefore$ El trabajo necesario para el bombeo es de 5 654.867 kgm.

Trabajo de un gas al dilatarse

Si un gas al dilatarse en un cilindro empuja la cabeza de un émbolo de manera que el volumen del gas pase de un volumen inicial V_i a un volumen final V_f, ambos dados en metros cúbicos, el trabajo exterior que se realiza es, en kilogramo-metro.

$$(T) = \int_{V_i}^{V_f} P\,dV$$

donde P es la presión en kg/m^2.

Lo anterior se demuestra si supone que el volumen **aumenta** de V a $Vt\ dV$. Si A es el área de la sección transversal del cilindro, entonces $\dfrac{dV}{A}$ es la distancia en la que el émbolo es desplazado por el gas. Dado que PA es la fuerza que causa la dilatación dV, se tiene que el elemento de trabajo realizado es:

$$dT = PA\left(\frac{dV}{A}\right) = PdV$$

Cuando el volumen **disminuye**, el incremento de volumen dV es negativo, por lo tanto, para obtener un valor positivo para el trabajo, la expresión correspondiente es $dT = -PdV$.

Al aplicar el teorema fundamental del cálculo integral, se obtiene la fórmula establecida $T = \int_{V_i}^{V_f} PdV$.

Para poder evaluar la integral $\int_{V_i}^{V_f} PdV$, debe conocerse la relación entre la presión y el volumen del gas durante la dilatación. Dicha relación es $PV^n = C$, en donde C y n son constantes.

Al establecer en forma gráfica esta relación, se coloca como abscisa el volumen y como ordenada la presión, el área bajo la curva entre los volúmenes antes y después de la dilatación corresponde al trabajo que el gas ejerce sobre el émbolo y se obtiene mediante la expresión $T = \int_{V_i}^{V_f} PdV$.

Dilatación isotérmica

Si durante la dilatación de un gas la temperatura permanece constante, se tiene una **dilatación isotérmica**. Para este caso, $n = 1$ y así el producto PV permanece constante, es decir $PV = PV_i = PV_f$. La gráfica de este fenómeno es una hipérbola equilátera.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 La dilatación del gas contenido en un depósito cilíndrico desplaza un émbolo de forma que el volumen del gas aumenta de 15 a 25 cm^3. Suponiendo que la relación entre la presión (kp/cm^2) y el volumen (cm^3), está dada por $PV^{1.4} = 60$, calcula el trabajo realizado durante la expansión del gas.

Solución

Sea A el área de la sección del cilindro, en dichas condiciones la fuerza ejercida por el gas es PA. Un aumento de volumen ΔV hace suponer la elevación del pistón de $\Delta V/A$, donde el trabajo correspondiente a dicho desplazamiento es:

$$PA\left(\frac{\Delta V}{A}\right) = P\Delta V$$

De $PV^{1.4} = 60$, se tiene que $P = \dfrac{60}{V^{1.4}}$ entonces, $P\Delta V = \left(\dfrac{60}{V^{1.4}}\right)\Delta V$.

Por lo tanto, $T = 60\int_{15}^{25} \dfrac{60}{V^{1.4}} = \left[-\dfrac{60}{0.4}V^{-0.4}\right]_{15}^{25} T = -150(25)^{-0.4} - \left[-150(15)^{-0.4}\right]$

$$= -41.392 + 50.776 = 9.384 \text{ kpcm}$$

$\therefore$ El trabajo realizado durante la expansión es de 9.384 kpcm.

2 ●●•Un cilindro contiene 100^3 de aire que ejerce sobre un émbolo una presión de 20 kp/m^2. ¿Qué trabajo debe realizarse para comprimir el aire hasta reducirlo a 2 m^3?

a) Suponiendo que $PV = C$.
b) Suponiendo que $PV^{1.4} = C$.

Solución

a) Considerando que la relación entre la presión y el volumen está dada por $PV = C$, es decir, $(20 \text{ kp/m}^2)(100 \text{ m}^3) = 2000$ kpm.

Si A es el área de la sección del cilindro, bajo tales condiciones la fuerza ejercida por el gas es PA. Una disminución de volumen dV hace suponer la compresión del pistón de $\frac{dV}{A}$ donde el trabajo realizado es: $PA\left(\frac{dV}{A}\right) = PdV$.

De $PV = 2000$, se tiene que $P = \frac{2000}{V}$, entonces $PdV = \left(\frac{2000}{V}\right)dV$

Por lo tanto: $T = 2000\int_2^{100} \frac{dV}{V} = [2000 \ln V]_2^{100} = 9210.34 - 1386.30 = 7824.04$ kpm

$\therefore$ El trabajo realizado cuando $PV = C$ es de 7 824.04 kpm.

b) Considerando que la relación entre la presión y el volumen está dada por $PV^{1.4} = C$, es decir $(20 \text{ kp/m}^2)(100 \text{ m}^3)^{1.4} = 12\,619.147$ kg.

Si A es el área de la sección del cilindro; bajo tales condiciones la fuerza ejercida por el gas es PA. Una disminución de volumen dV hace suponer la compresión del pistón de $\frac{dV}{A}$, donde el trabajo realizado es: $PA\left(\frac{dV}{A}\right) = PdV$.

De $PV^{1.4} = 12\,619.147$, se tiene que $P = \frac{12\,619.147}{V^{1.4}}$, entonces $PdV = \left(\frac{12\,619.147}{V^{1.4}}\right)dV$

Por lo tanto, $T = 12\,619.147\int_2^{100} \frac{dV}{V^{1.4}} = -\left[\frac{12\,619.147}{0.4}V^{-0.4}\right]_2^{100}$

$T = -31\,547.868(100)^{-0.4} - \left[-31\,547.868(2)^{-0.4}\right] = -5000 + 23\,908.813 = 18\,908.813$kg.

$\therefore$ El trabajo realizado cuando $PV^{1.4} = C$ es de 18908.813 kg

3 ••Nueve metros cúbicos de aire a una presión de 2 kg/cm² se comprimen a la presión de 8 kg/cm².

a) Calcula el volumen y el trabajo realizado si se aplica la **ley isotérmica**, es decir, $PV = C$.
b) Calcula el volumen final y el trabajo realizado si se aplica la **ley adiabática**, es decir, $PV^{1.4} = C$.

Solución

a) Puesto que $P_i = 2$ kg/cm², $V_i = 9$ m³ $= 9\,000\,000$ cm³, $P_f = 8$ kg/cm², entonces por

$$P_iV_i = P_fV_f, \text{ se tiene que, } V_f = \frac{P_iV_i}{Pf} = \frac{(2\,\text{kg/cm}^2)(9000000\ \text{cm}^3)}{8\,\text{kg/cm}^2}.$$

$$\therefore \quad V_f = 2\,250\,000\ \text{cm}^3 = 2.25\ \text{m}^3$$

Considerando que la relación entre la presión y el volumen está dada por $PV = C$, es decir, (2 kg/cm²)(9 000 000 cm³) = 18 000 000 kg cm = 180 000 kg.

De $PV = 180\,000$, tenemos que: $P = \dfrac{180000}{V}$.

$$\text{Entonces, } T = 180000\int_{2.25}^{9}\frac{dV}{V} = [180000\ln V]_{2.25}^{9} = 249\,532.985\ \text{kg}$$

∴ El volumen final y el trabajo realizado aplicando la **ley isotérmica** es 2.25 m³ y 249 532.985 kg, respectivamente.

b) Puesto que $P_i = 2$ kg/cm², $V_i = 9$ m³ $= 9\,000\,000$ cm³, $P_f = 8$ kg/cm², entonces por $P_i(V_i)^{1.4} = P_f(V_f)^{1.4}$,

$$\text{se tiene que, } V_f = \sqrt[1.4]{\frac{P_i(V_i)^{1.4}}{P_f}} = \sqrt[1.4]{\frac{(2)(9000000)^{1.4}}{8}}.$$

$$\therefore \quad V_f = 3\,343\,487.13\ \text{cm}^3 = 3.343\ \text{m}^3$$

Considerando que la relación entre la presión y el volumen está dada por $PV^{1.4} = C$, es decir, (2 kg/cm²)(9 m³)$^{1.4}$ = (20 000 kg/m²)(9 m³)$^{1.4}$ = 433 480.4 kg.

De $PV^{1.4} = 433\,480.4$, se tiene que $P = \dfrac{433\,480.4}{V^{1.4}}$.

$$\text{Entonces, } T = 433\,580.4\int_{3.343}^{9}\frac{dV}{V^{1.4}} = -\left[\frac{433480.4}{0.4}V^{-0.4}\right]_{3.343}^{9} = 218\,736.384\ \text{kg}$$

∴ El volumen final y el trabajo realizado aplicando la ley adiabática es 3.343 m³ y 218 736.384 kg, respectivamente.

EJERCICIO **30**

I. Resuelve los siguientes problemas y en plenaria discute tus resultados.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. Una fuerza de 5 kg comprime un muelle de 30 cm un total de 8 cm. ¿Qué trabajo hace falta para comprimirlo 14 cm?

2. Una fuerza de 60 kg extiende 3 cm a cierto muelle. Calcula el trabajo realizado al extenderlo desde 27 hasta 45 cm.

3. Un tanque semiesférico de 6 m de radio está colocado de forma que su base es el círculo. A la altura de su base tiene un manantial de agua.

   a) ¿Cuánto trabajo se requiere para llenarlo por un orificio en su punto más alto?

   b) ¿Y por un orificio hecho en su base?

   c) Si se invierte el tanque, calcula el trabajo requerido para bombear los 2 m de agua más altos por un orificio hecho en su parte superior.

4. Un depósito abierto tiene forma de cono circular de 6 m de altura y 8 m de ancho en su parte superior. Determina el trabajo necesario para vaciarlo bombeando desde la parte superior.

5. Si se bombea el agua por el fondo al interior del depósito del problema anterior, ¿cuánto trabajo se necesita para llenarlo,

   a) hasta una altura de 2 m?

   b) desde 4 m hasta 6 m de altura?

6. Un tanque circular lleno de agua, de 12 m de alto y 8 m de radio se entierra hasta que su borde superior quede 3 m bajo el nivel del piso. ¿Cuánto trabajo se requiere para bombear toda el agua hasta el nivel del piso?

7. Una cisterna cilíndrica vertical de 5 m de diámetro y 8 m de profundidad está llena de agua.

   a) Calcula el trabajo al bombear el agua hasta el borde de la cisterna.

   b) Si la cisterna está medio llena, calcula el trabajo de bombear el agua hasta el borde.

8. Una cisterna cónica que tiene 8 m de diámetro superior y 8 m de profundidad está llena de agua. Calcula el trabajo de subir el agua 7 m más arriba que el borde.

9. Un tanque hemisférico de 4 m de diámetro está lleno de petróleo que pesa 800 kg/m^3. Calcula el trabajo requerido para bombear el petróleo al borde del tanque.

10. Un tanque para agua tiene la forma de un hemisferio de 10 m de diámetro coronado de un cilindro del mismo diámetro y de 5 m de altura. Calcula el trabajo que se hace al vaciarlo con una bomba cuando está lleno hasta 3.5 m por debajo del borde.

11. Un aljibe cónico que tiene 3 m de diámetro superior y 4 m de profundidad está lleno de un líquido que pesa 1280 kg/ m^3. Calcula el trabajo de bombear el líquido hasta el borde del aljibe.

12. Una grúa de demolición tiene una bola de 500 kg suspendida de un cable de 40 m, cuya densidad es 0.7 kg/m. Calcula el trabajo necesario para enrollar 15 m de cable.

13. Una cadena de 15 pies de largo y que pesa 3 libras/pie está suspendida verticalmente desde 15 pies de altura. ¿Cuánto trabajo hace falta para elevar toda la cadena hasta 15 pies de altura?

14. Un resorte tiene una longitud natural de 12 cm. La ley de Hooke establece que cuando un resorte se extiende x centímetros, éste ejerce una fuerza igual a kx, donde k es una constante. Si se necesitan 10 dinas de fuerza para mantenerlo extendido $\frac{1}{2}$ cm, ¿qué cantidad de trabajo será necesaria para extenderlo desde su longitud natural hasta una longitud de 16 cm^3?

15. Un módulo lunar pesa 12 toneladas en la superficie terrestre. Calcula el trabajo consumido en propulsarlo hasta una altura de 50 millas desde el suelo lunar. Toma el radio de la Luna como 1100 millas aproximadamente y su fuerza de gravedad igual a $\frac{1}{6}$ de la terrestre.

16. Un acuario tiene una base rectangular de 0.6 m de ancho y 1.2 m de largo y lados rectangulares de 0.9 m de altura. Si el acuario está lleno de agua, ¿cuánto trabajo se requiere para vaciarlo bombeando el agua por la parte de arriba?

17. Una cisterna en forma de hemisferio de 2 m de radio con la parte circular hacia arriba está llena de agua. Calcula el trabajo necesario para bombear el agua a un punto que se encuentra a 1.5 m por encima de la parte superior de la cisterna.

18. Un cilindro de 20 cm de diámetro y 80 cm de longitud está lleno de vapor bajo una presión de 10 kg/cm^2. ¿Qué trabajo es necesario realizar para disminuir dos veces el volumen del vapor, suponiendo que la temperatura del mismo permanece constante?

19. Seis metros cúbicos de aire a una presión de 1 kg/cm^3 se comprimen a de 5 kg/cm^3.

   a) Determina el volumen final y el trabajo realizado si se aplica la ley isotérmica, es decir, $PV = C$.

   b) Determina el volumen final y el trabajo realizado si se aplica la ley adiabática, es decir, $PV^n = C$, suponiendo que $n = 1.4$.

20. Una masa de aire a la presión de 1 kg/cm^2 se comprime de 8 m^3 a 2 m^3.

   a) Determina la presión final y el trabajo realizado si la ley es $PV = C$.

   b) Determina la presión final y el trabajo realizado si la ley es $PV^n = C$, suponiendo $n = 1.4$.

21. Una masa de gas con volumen inicial de $\frac{1}{2}$ m^3 y presión de 4 kg/cm^2 se dilata hasta que la presión es 2 kg/cm^2.

   a) Determina el volumen final y el trabajo hecho por el gas si la ley es $PV = C$.

   b) Determina la presión final y el trabajo realizado si la ley es $PV^n = C$, suponiendo que $n = 1.2$.

22. Una masa de aire con volumen inicial de 5.5 m^3 y presión de 1 kg/cm^2 se comprime a 1.2 m^3.

  a) Determina la presión final y el trabajo que se ha hecho si la ley es $PV = C$.

  b) Determina la presión final y el trabajo realizado si la ley es $PV^n = C$, suponiendo que $n = 1.4$.

23. Un gas se dilata de una presión inicial de 5 kg/cm^2 y un volumen de 70 litros a 250 litros.

  a) Calcula el trabajo que se ha hecho si la ley es $PV^n = C$, suponiendo que $n = 1.0646$.

  b) Si $n = 1.131$.

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Autoevaluación

1. Si se deja caer una pelota de béisbol desde un edificio de 25 m de altura, ¿cuál será la velocidad con la que la pelota chocará contra el suelo?

2. Determina el volumen generado en la rotación del área del primer cuadrante limitada por la parábola $y^2 = 3x + 6$ y la ordenada correspondiente a $x = 5$ con respecto al eje x.

3. La base de un sólido es un círculo de 15 cm de radio. Todas las secciones perpendiculares a un diámetro fijo de la base son cuadradas. Calcula el volumen del sólido.

4. Encuentra el centro de masa de la lámina de densidad uniforme ρ limitada por $y = 16 - x^2$ y la ordenada correspondiente a $x = -30$.

5. Un tanque de agua tiene un fondo plano inclinado. El tanque tiene 1 m de profundidad en un extremo y 4 m en el otro. Si dicho tanque mide 38 m de largo y 29 m de ancho y sus paredes son verticales, ¿cuál es la fuerza total que actúa sobre la pared que mide 38 m?

6. Una piscina circular vertical de 17 m de diámetro y 3 m de profundidad está llena de agua.

   a) Calcula el trabajo al bombear el agua hasta el borde de la piscina.

   b) Si la piscina está medio llena, calcula el trabajo de bombear el agua hasta el borde.

Respuestas de algunos reactivos de los distintos ejercicios propuestos

UNIDAD 1

EJERCICIO 1

(I).

1. $dy = -0.2$
3. $dy = -0.5$
5. $dy = -0.063$
7. $dy = 0.07056$

(II).

1. $dA = 2.26\ \text{cm}^2$
3. $dA = 16\,dx$
5. $dv = 424115\ \text{mm}^3$

(III).

1. $\sqrt[3]{65} = 4.020833$
3. $\sqrt[4]{83} = 3.0185185$
5. $\dfrac{1}{\sqrt{50}} = 0.115859$
7. $\ln 5.83 = 1.775437$
9. $\cos 44° = 0.7194479$
11. $\cot 29° = 1.8018628$
13. $\ln 36.4 = 3.594630$
15. $e^{5.1} = 163.254475$

(IV).

1. $dy = 2\,(2x^3 - 3x^2 + 5x - 1)\,dx$
3. $dy = -\dfrac{3x\,dx}{\sqrt{1-3x^2}}$
5. $dy = -\dfrac{4x\,dx}{3(4-2x^2)^{\frac{2}{3}}}$
7. $dy = \dfrac{x(1-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx$
9. $dy = 5^{mx}\ln 5\,dx$
11. $dy = \dfrac{e^{\sqrt{x}}dx}{2\sqrt{x}}$
13. $dy = \dfrac{x\,dx}{1+x^2}$
15. $dy = \left(\dfrac{a\log e}{ax+b}\right)dx$
17. $dy = -4\,\text{sen}\,2x\,dx$
19. $dy = -\csc x\,(x\cot x - 1)\,dx$
21. $dy = \dfrac{2x\,dx}{x^2-2x+2}$
23. $dy = -\dfrac{5\,\text{sen}\,5x\,dx}{2\sqrt{\cos 5x}}$
25. $dy = -\dfrac{2a^2x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{a^2-x^2}}$
27. $dy = \left(\dfrac{-3x-y}{x+5y}\right)dx$

29. $dy=\left(\dfrac{-x-\sqrt{\dfrac{y}{x}}}{\sqrt{\dfrac{x}{y}}+1}\right)dx$

31. $dy=-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}\,dx$

33. $dy=\left(\dfrac{y^2-6x^2}{6-2xy}\right)dx$

35. $dy=-\dfrac{3(1-4x^2)dx}{\sqrt{1-9x^2+24x^4-16x^6}}$

EJERCICIO 2

(II). 1. *a*) $\sum_{K=1}^{5}(z_K-1)^3=(z_1-1)^3+(z_2-1)^3+(z_3-1)^3+(z_4-1)^3+(z_5-1)^3$

c) $\sum_{K=1}^{7}(z_K-y_K)=(x_1-y_1)+(x_2-y_2)+(x_3-y_3)+(x_4-y_4)+(x_5-y_5)+(x_6-y_6)+(x_7-y_7)$

3. *a*) $\sum_{K=1}^{8}(5_K-3)^3=156$

c) $\sum_{K=1}^{4}\left(\dfrac{K}{K-1}\right)=4\dfrac{5}{6}$

e) $\sum_{J=-1}^{3}\left(\dfrac{1}{J^2+1}\right)=2\dfrac{3}{10}$

5. *a*) Área = 22.992 unidades cuadradas

c) Área = 22.5 unidades cuadradas

e) Área = 3.75 unidades cuadradas

g) Área = $\dfrac{2}{3}$ unidades cuadradas

7. *a*) 63.75

c) 1.0986

e) 18

g) 39

i) −7.5

EJERCICIO 3

(II). 1. *a*) 5; 45 *c*) 0; 125 *f*) 2.565; 3.688

3. *a*) $\int_0^2 x^3\,dx=f\left(\sqrt[3]{2}\right)(2)$

c) $\int_{-2}^{2} x^4\,dx=f(1.396)(4)$

EJERCICIO 4

(II). 1. *a*) Área = 9 *b*) Área $=23\dfrac{1}{3}$ *e*) Área $=25\dfrac{1}{3}$

Ejercicio 5

(II). 1. $\frac{3x^{\frac{8}{3}}}{8}-\frac{6x^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{14x^{\frac{3}{2}}}{3}-5x+C$

2. $2\sqrt{e^x+\operatorname{sen} ax}+C$

3. $\frac{6x^{\frac{5}{2}}}{5}-\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3}+C$

4. $\frac{2(\operatorname{arc\,sen} x)^{\frac{3}{2}}}{3}+C$

5. $\frac{8\sqrt{x^3+8}}{3}+C$

6. $\frac{x^3}{3a}+\frac{a}{x}+C$

7. $\frac{\ln(x^2+6x)}{2}+C$

8. $\frac{\operatorname{sen}^5 3x}{15}+C$

9. $\frac{\ln(a-b\cot ax)}{ab}+C$

10. $\frac{2\ln(1+3x)}{3}+C$

11. $2\sqrt{x}+C$

12. $\ln(1+\operatorname{sen}^2 x)+C$

13. x^2+C

14. $\frac{2(\operatorname{arc\,tan} x)^{\frac{3}{2}}}{3}+C$

15. $\frac{2a^2x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{4x^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7}+C$

16. $\frac{\ln(9+x^2)}{2}+C$

17. $\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}-\frac{6x^{\frac{5}{3}}}{5}+\frac{10x^{\frac{3}{2}}}{d}-3x+C$

18. $-\frac{\left(4-x^{\frac{3}{2}}\right)^4}{6}+C$

19. $\frac{\ln^2 mx}{2}+C$

20. $-\frac{(1+2\cos ax)^{\frac{3}{2}}}{3a}+C$

21. $\ln(\ln ax)+C$

22. $\frac{\ln^2 \operatorname{sen} x}{2}+C$

23. $\frac{\ln^3 x}{3}+C$

24. $-\frac{2(\operatorname{arc\,cos} x)^{\frac{3}{2}}}{3}+C$

25. $-\frac{1}{\ln x}+C$

26. $\ln(a+\sec x)+C$

27. $\frac{\ln(5-e^{-2x})}{2}+C$

28. $\frac{x^2}{2a}+C$

29. $\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}-x^2+\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}+C$

30. $2\ln x+C$

31. $\ln(e^x-\operatorname{sen} x)+C$

32. $-[x+3\ln(3-x)]+C$

33. $-\frac{\ln^2 \cos x}{2}+C$

34. $\sqrt{e^{ax}-9}+C$

35. $\frac{(\operatorname{arc\,tan} 2x)^2}{4}+C$

36. $-\frac{(\operatorname{arc\,cot} 3x)^2}{6}+C$

EJERCICIO 6

(II).

1. $-\frac{1}{2e^{2x}}+C$
2. $\frac{e^{x^2}}{2}+x^2+C$
3. $-\frac{1}{a10^{ax}\ln 10}+C$
4. $-\frac{8}{\sqrt{a^x}\ln a}+C$
5. $-\frac{2}{\sqrt{2e^x}}+C$
6. $\frac{e^{2x^3}}{6}+C$
7. $\frac{e^{2\ln x}}{2}+C$
8. $\frac{3e^{\frac{5x}{3}}}{5}+C$
9. $2\sqrt{2e^x}+C$
10. $-\frac{1}{3(8x^3\ln 8)}+C$
11. $2\sqrt{e^x-3}+C$
12. $\frac{b^{(4x^2-2x)}}{4\ln b}+C$
13. $-\frac{1}{e^{\tan x}}+C$
14. $\frac{e^{\operatorname{sen}3x^2}}{6\ln a}+C$
15. $\frac{e^{\cot ax}}{a}+C$
16. $\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{ax}}{a\ln\frac{3}{5}}+C$
17. $\frac{a^{mx}e^{mx}}{m(\ln a+1)}+C$
18. $e^{(ax^2+bx+c)}+C$
19. $\frac{1}{2a}\left(e^{2ax}-\frac{1}{e^{2ax}}\right)-2x+C$
20. $\frac{e^{2x}}{2}-2e^x+x+C$

EJERCICIO 7

(II).

1. $\frac{\ln^2 \operatorname{sen} z}{2}+C$
2. $-\ln(1+\cos^2 x)+C$
3. $\ln(1+\operatorname{sen}^2 x)+C$
4. $x+\operatorname{sen} x+C$
5. $\frac{\operatorname{sen}^4 e^x}{4}+C$
6. $2\left(\tan\sqrt{t}-\sqrt{t}\right)+C$
7. $\frac{1}{2}\ln(\sec x^2+\tan x^2)+C$
8. $-\ln(\cot y+1)+C$
9. $-\frac{1}{e^{\tan\theta}}+C$
10. $x+\ln\sec x+C$
11. $x-\cos x+C$
12. $-\frac{(1+2\cos 2z)^{\frac{3}{2}}}{6}+C$
13. $\frac{\tan^2 mx}{2m}+C$
14. $\frac{\tan 3x}{3}+C$

15. $\frac{\sec 2x}{2}+C$

16. $\frac{1}{a}\ln\tan ax+C$

17. $\frac{\cot a\theta}{a}-\frac{\csc a\theta}{a}+\theta+C$

18. $\frac{e^{\tan mx}}{m}+C$

19. $\frac{e^{2\operatorname{sen} ax}}{2a}+C$

20. $\frac{\operatorname{sen}^4 2ax}{8a}+C$

21. $2\left(\tan\frac{x}{2}+\sec\frac{x}{2}\right)+C$

22. $\frac{2(1+a\operatorname{sen} ax)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}+C$

23. $2x-\tan x+C$

24. $2\ln\sec x+C$

EJERCICIO 8

(II). 1. $\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x}{2}\right)+C$

2. $\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\ln x}{3}\right)+C$

3. $-\frac{2}{3}\ln\left(\cos^{\frac{3}{2}}x+\sqrt{\cos^3 x+9}\right)+C$

4. $\frac{1}{9}\ln\left(\frac{2+3x^3}{2-3x^3}\right)+C$

5. $\frac{2}{3}\ln\left(\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}x+\sqrt{\operatorname{sen}^3 x+16}\right)+C$

6. $-\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{\cot x}{3}\right)+C$

7. $\frac{1}{6}\ln\left(\frac{3x-5}{3x+5}\right)+C$

8. $\frac{1}{a}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\tan ax}{4}\right)+C$

9. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+2x^2}{1-2x^2}\right)+C$

10. $\arctan\left(\frac{x-2}{2}\right)+C$

11. $\frac{3}{8}\arctan\frac{x}{2}+C$

12. $\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{3}\right)+C$

13. $\frac{3}{10}\ln\left(\frac{x-5}{x+5}\right)+C$

14. $-\ln\left(\cos x+\sqrt{\cos^2 x-4}\right)+C$

15. $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{2+\tan x}{2-\tan x}\right)+C$

16. $\ln\left(\ln x+\sqrt{(\ln x)^2+9}\right)+C$

17. $\frac{2}{3}\ln\left(\ln^{\frac{3}{2}}x+\sqrt{\ln^3 x+8}\right)+C$

18. $-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\cot x}{2}\right)+C$

19. $\ln\left[(x-6)+\sqrt{16+(x-6)^2}\right]+C$

20. $\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-4}\right)+C$

21. $\frac{y}{2}\sqrt{3y^2-1}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left(\sqrt{3}y+\sqrt{3y^2-1}\right)+C$

22. $\frac{(3z+1)}{6}\sqrt{(3z+1)^2-2}-\frac{1}{3}\ln\left[(3z+1)+\sqrt{(3z-1)^2-2}\right]+C$

23. $\frac{\theta}{2}\sqrt{3\theta^2-10}-\frac{5}{\sqrt{3}}\ln\left(\sqrt{3}\,\theta+\sqrt{3\theta^2-10}\right)+C$

24. $\frac{u}{2}\sqrt{7-5u^2}+\frac{7}{2\sqrt{5}}\operatorname{arc\,sen}\sqrt{\frac{5}{7}}u+C$

25. $-\frac{\cos 3x}{6}\sqrt{\cos^2 3x+4}-\frac{2}{3}\ln\left(\cos 3x+\sqrt{\cos^2 3x+4}\right)+C$

26. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2x^2-c^2}-\frac{c^2}{2a}\ln\left(ax+\sqrt{a^2x^2-c^2}\right)+C$

27. $\frac{y}{2}\sqrt{1+a^2y^2}+\frac{1}{2a}\ln\left(ay+\sqrt{1+a^2y^2}\right)+C$

28. $\frac{a}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+b^4}\right)+C$

29. $\frac{x^2}{4}\sqrt{11+7x^4}+\frac{11}{4\sqrt{7}}\ln\left(\sqrt{7}x^2+\sqrt{11+7x^4}\right)+C$

30. $\frac{(x-1)}{2}\sqrt{(x-1)^2-7}-\frac{7}{2}\ln\left[(x-1)+\sqrt{(x-1)^2-7}\right)+C$

31. $\frac{x}{2}\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}+4\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{4}+C$

32. $\frac{x}{2}\sqrt{5+3x^2}+\frac{5}{2\sqrt{3}}\ln\left(\sqrt{3}x+\sqrt{5+3x^2}\right)+C$

33. $\frac{x}{2}\sqrt{8-3x^2}+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,sen}\sqrt{\frac{3}{8}}x+C$

34. $\frac{\operatorname{sen} 2x}{4}\sqrt{\operatorname{sen}^2 2x+9}+\frac{9}{4}\ln\left(\operatorname{sen} 2x+\sqrt{\operatorname{sen}^2 2x+9}\right)+C$

35. $-\frac{\cos 2x}{4}\sqrt{\cos^2 2x+16}-4\ln\left(\cos 2x+\sqrt{\cos^2 2x+16}\right)+C$

36. $\frac{(2x-1)}{4}\sqrt{8-(2x-1)^2}+2\operatorname{arc\,sen}\frac{(2x-1)}{2\sqrt{2}}+C$

37. $\frac{t}{2}\sqrt{4-9t^2}+\frac{2}{3}\operatorname{arc\,sen}\frac{3t}{2}+C$

38. $\frac{t^2}{4}\sqrt{5t^4+3}+\frac{3}{4\sqrt{5}}\ln\left(\sqrt{5}t^2+\sqrt{5t^4+3}\right)+C$

39. $\frac{x^3}{6}\sqrt{25-x^6}+\frac{25}{6}\operatorname{arc\,sen}\frac{x^3}{5}+C$

40. $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,sec}\frac{2t}{3}+C$

41. $\frac{1}{4}\operatorname{arc\,sec}\frac{x}{4}+C$

42. $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,sec}\frac{0}{\sqrt{5}}+C$

43. $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sec}\frac{2x}{\sqrt{2}}+C$

44. $\frac{x^2}{4}\sqrt{1-x^4}+\frac{1}{4}\operatorname{arc\,sen}x^2+C$

UNIDAD 2

EJERCICIO 9

(II). 1. $\arctan(2x+1)+C$

3. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{2x-3-\sqrt{2}}{2x-3+\sqrt{2}}\right)+C$

5. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)+C$

7. $\frac{1}{8}\ln\left(\frac{x-8}{x}\right)+C$

9. $\operatorname{arc\,sen}\frac{(x-2)}{4}+C$

11. $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-1}{2-x}\right)+C$

13. $\frac{1}{12}\ln\left(\frac{3+x}{9-x}\right)+C$

15. $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right)+C$

17. $\dfrac{(x+6)}{2}\sqrt{28-12x-x^2}+32\operatorname{arc\,sen}\dfrac{(x+6)}{8}+C$

19. $\dfrac{(2x+1)}{4\sqrt{2}}\sqrt{2x^2+2x+5}+\dfrac{9}{2\sqrt{2}}\ln\left[(2x+1)+\sqrt{(2x^2+2x+5}\right]+C$

21. $\dfrac{(y-4)}{2}\sqrt{20+8y-y^2}+18\operatorname{arc\,sen}\dfrac{(y-4)}{6}+C$

23. $\dfrac{(x^2+3)}{4}\sqrt{x^4+6x^2+9}-\ln\left[(x^2+3)+\sqrt{(x^4+6x^2+9}\right]+C$

25. $\dfrac{1}{5}\ln(4+25x^2)-\dfrac{3}{10}\arctan\dfrac{5x}{2}+C$

27. $5\operatorname{arc\,sen}\dfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}+C$

29. $\dfrac{1}{2}\ln(9x^2+12x+3)\dfrac{7}{2}\ln\left(\dfrac{3x+1}{3x+3}\right)+C$

31. $\sqrt{x^2-5x+3}-\dfrac{3}{2}\ln\left[\left(x-\dfrac{5}{2}\right)+\sqrt{x^2-5x+3}\right]+C$

33. $-\dfrac{1}{2}\ln(1-x-x^2)+\dfrac{5}{2\sqrt{5}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{5}+2x+1}{\sqrt{5}-2x-1}\right)+C$

35. $\dfrac{1}{6}\ln(9x^2+6x+3)+\dfrac{7}{3\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{3x+1}{\sqrt{2}}\right)+C$

EJERCICIO 10

(II). 1. $\dfrac{1}{5}\ln\left(\dfrac{5-\sqrt{25-x^2}}{x}\right)+C=\dfrac{1}{5}\ln\left(\dfrac{x}{2\sqrt{25-x^2}}\right)+C$

3. $-\left(\dfrac{\sqrt{9-y^2}}{y}+\operatorname{arc\,sen}\dfrac{y}{3}\right)+C$

5. $\dfrac{\sqrt{x^2-5}}{5x}+C$

7. $\dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,sec}\dfrac{z}{2}+C$

9. $\dfrac{x}{2}\sqrt{6+x^2}-3\ln\left(\dfrac{\sqrt{6+x^2}+x}{\sqrt{6}}\right)+C$

11. $\dfrac{3\sqrt{u^2+25}-(u^2+25)^{\frac{3}{2}}}{1875u}+C$

13. $\dfrac{1}{4e^x\sqrt{16e^{-2x}+4}}+C$

15. $\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{9x}+C$

Ejercicio 11

(II). 1. $-\dfrac{\csc x\cot x}{2}+\dfrac{\ln(\csc x-\cot x)}{2}+C$

3. $2z\tan\dfrac{z}{2}+4\ln\cos\dfrac{z}{2}+C$

5. $x\operatorname{arc}\cos mx-\dfrac{\sqrt{1-m^2x^2}}{m}+C$

7. $\dfrac{e^{2\theta}}{2}+4\theta e^{\theta}-4e^{\theta}+\dfrac{4\theta^3}{3}+C$

9. $\dfrac{x^4\log x}{4}-\dfrac{x^4\log e}{16}+C$

11. $x\operatorname{arc}\tan\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$

13. $x\operatorname{arc}\sec\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}+C$

15. $\dfrac{x^4}{4}\operatorname{arc}\cot x+\dfrac{x^3}{12}-\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{4}\operatorname{arc}\tan x+C$

17. $\dfrac{2e^{-x}\left(\cos\dfrac{x}{2}+2\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\right)}{3}+C$

19. $\dfrac{-3e^{\frac{y}{3}}(3\pi\cos\pi y-\operatorname{sen}\pi y)}{9\pi^2+1}+C$

21. $\dfrac{4e^{\frac{x}{3}}(4\pi\operatorname{sen}\pi x+\cos\pi x)}{16\pi^2+1}+C$

23. $t\operatorname{arc}\cos\sqrt{\dfrac{t}{2}}-\dfrac{\sqrt{2t-t^2}}{2}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arc}\operatorname{sen}(t-1)+C$

25. $x\operatorname{arc}\cot\dfrac{x}{4}+2\ln(16+x^2)+C$

27. $x\log^2 x-2x\log x+2x\log^2 e+C$

29. $\dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\left(\ln x-\dfrac{2}{3}\right)+C$

31. $x(\operatorname{arc}\operatorname{sen}x)^2-2\sqrt{x^2-1}\operatorname{arc}\sec x+2\ln x+C$

33. $-\dfrac{ae^{bx}\cos ax+be^{bx}\operatorname{sen}ax}{a^2+b^2}+C$

35. $x\operatorname{arc}\operatorname{verso}x+\sqrt{2x-x^2}-\operatorname{arc}\sec(x-1)+C$

EJERCICIO 12

(V). 1. $\frac{3}{t}+4\ln\left(\frac{1}{t+1}\right)+C$

3. $\ln\left[\frac{z}{(z+2(z+1)}\right]+C$

5. $2\ln\left(\frac{t+2}{t+1}\right)+3\ln(t+3)+C$

7. $\frac{1}{2}\ln(2y+1)+\frac{12}{(y+2)}+4\ln(y+2)+C$

9. $2\ln(x+1)-\ln(x+2)(x+3)+C$

11. $\frac{1}{2}\ln(x+1)(x-1)-\ln x+C$

13. $\frac{9}{64}\ln(2z+3)+\frac{1}{64}\ln(2z-1)-\frac{1}{32}\ln(2z+1)+C$

15. $\ln y+2\ln(y+3)(y-3)+C$

17. $2\ln(2x-1)+\frac{3}{2(2x+1)}+\ln(2x+1)+C$

19. $3\ln\left(\frac{z+1}{z}\right)-\frac{1}{(z+1)}-\frac{2}{z}+C$

21. $-2\ln(y+2)+\ln(y^2+1)+\arctan y+C$

23. $\ln(x^2-4)+\frac{3}{2}\ln(x^2+4)+C$

25. $\ln(x+3)+\arctan\left(\frac{x}{3}\right)-\frac{1}{2}\ln(x^2+9)+C$

27. $\frac{3}{2}\ln(x+1)-\frac{3}{4}\ln(x^2+1)+\frac{3}{2}\arctan x+C$

29. $-\frac{1}{(x^2+4)}+2\ln(x^2+4)+\frac{3}{2}\arctan\frac{x}{2}+C$

31. $2\ln(y+2)-\arctan(y+1)+C$

33. $-\frac{1}{2(e^{2y}+1)}+\arctan e^y+C$

35. $\frac{1}{20}\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)+\frac{1}{30}\ln\left(\frac{x-3}{x+3}\right)+C$

37. $\ln t + \dfrac{(2-t)}{2(t^2+1)} - \dfrac{1}{2}\ln(t^2+1) + \dfrac{1}{2}\arctan t + C$

39. $-\dfrac{5}{\sqrt{5}}\arctan\left(\dfrac{y}{\sqrt{5}}\right) + \dfrac{1}{2}\ln(y^2+2y+3) + \dfrac{5}{\sqrt{2}}\arctan\dfrac{(y+1)}{\sqrt{2}} + C$

41. $-\dfrac{1}{(x^2+2)^2} + \dfrac{1}{2}\ln(x^2+2) + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$

43. $-\dfrac{1}{3x} - \dfrac{1}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$

45. $-\dfrac{1}{2}\ln(x+1) + \dfrac{3}{2}\ln(x-1) + C$

47. $\dfrac{1-3t-6t^2}{6t^3} + 2\ln t - \ln(2t-1) + C$

Ejercicio 13

(II). 1. $3\ln\left(\dfrac{t^{\frac{1}{3}}}{1-t^{\frac{1}{3}}}\right) + C$

3. $\dfrac{\sqrt{4x+1}}{2} + \dfrac{1}{2(4x+1)} - \dfrac{1}{6(4x+1)^{\frac{3}{2}}} + C$

5. $\dfrac{2t^{\frac{9}{4}}}{27} - \dfrac{2t^{\frac{11}{12}}}{11} + C$

7. $\dfrac{(x-1)\sqrt{2+4x}}{6} + C$

9. $2\arctan\sqrt{x+1} + C$

11. $3\sqrt[4]{2x} - 9\arctan\dfrac{\sqrt[4]{2x}}{3} + C$

13. $-4\sqrt[4]{t-2} + 4\ln\left(1-\sqrt[4]{t-2}\right) + C$

15. $2\sqrt{t-3} + \dfrac{4}{3}\arctan\sqrt{\dfrac{t-3}{3}} + C$

UNIDAD 3

EJERCICIO 14

(II). 1. $\frac{2}{\sqrt{\cos x}}+C$

3. $-\frac{3(\cos x)^{\frac{2}{3}}}{2}+\frac{3(\cos x)^{\frac{8}{3}}}{4}-\frac{3(\cos x)^{\frac{14}{3}}}{14}+C$

5. $-\frac{\cos 3x}{3}+\frac{\cos^3 3x}{3}-\frac{\cos^5 3x}{5}+\frac{\cos^7 3x}{21}+C$

7. $\frac{\operatorname{sen} mx}{m}-\frac{2\operatorname{sen}^3 mx}{3m}+\frac{\operatorname{sen}^5 mx}{5m}+C$

9. $-\frac{2(\cos x)^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{2(\cos x)^{\frac{7}{2}}}{7}+C$

11. $\frac{\operatorname{sen}^3 t}{3}-\frac{2\operatorname{sen}^3 t}{5}+\frac{\operatorname{sen}^7 t}{7}+C$

13. $-\frac{\cos^4 2\theta}{8}+\frac{\cos^6 2\theta}{6}-\frac{\cos^8 2\theta}{16}+C$

15. $\frac{\sec^3 x}{3}-\sec x+C$

17. $-\frac{3(\cos 2y)^{\frac{4}{3}}}{8}+\frac{3(\cos 2y)^{\frac{10}{3}}}{20}+C$

19. $\frac{\operatorname{sen}^6 x}{6}-\frac{\operatorname{sen}^8 x}{4}+\frac{\operatorname{sen}^{10} x}{10}+C$

21. $\frac{\operatorname{sen}^8 x}{8}-\frac{\operatorname{sen}^{10} x}{10}+C$

EJERCICIO 15

(II). 1. $\frac{5x}{16}-\frac{\operatorname{sen} 2mx}{4m}+\frac{3\operatorname{sen} 4mx}{64m}+\frac{\operatorname{sen}^3 2mx}{48m}+C$

3. $\frac{3x}{8}+\frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}+\frac{\operatorname{sen} 4ax}{32a}+C$

5. $\frac{x}{16}-\frac{a\operatorname{sen}\frac{4x}{a}}{64}-\frac{a\operatorname{sen}\frac{2x}{a}}{48}+C$

7. $\frac{5x}{2}-4\cos x-\frac{3\operatorname{sen} 2x}{4}+\frac{\cos^3 x}{3}+C$

9. $2y+\frac{\operatorname{sen}2y}{2}-\frac{\operatorname{sen}4y}{2}+\frac{4(\cos 2y)^{\frac{3}{2}}}{3}+C$

11. $\frac{7x}{8}-\frac{2\cos^3 x}{3}+\frac{\operatorname{sen}4x}{32}+C$

Ejercicio 16

(II). 1. $-\frac{\operatorname{sen}10x}{20}+\frac{\operatorname{sen}2x}{4}+C$

3. $-\frac{\cos 10t}{20}+\frac{\cos 2t}{4}+C$

5. $-\frac{\cos 8x}{16}+\frac{\cos 2x}{4}+C$

7. $z-\frac{\operatorname{sen}6z}{12}+\frac{\operatorname{sen}5z}{5}-\operatorname{sen}z-\frac{\operatorname{sen}4z}{8}+C$

9. $y-\frac{\operatorname{sen}2by}{4b}+\frac{\cos(a+b)y}{(a+b)}-\frac{\cos(a-b)y}{(a-b)}+\frac{\operatorname{sen}2ay}{4a}+C$

11. $5\theta-\frac{\operatorname{sen}8\theta}{16}+\frac{3\operatorname{sen}5\theta}{5}+\operatorname{sen}3\theta-\frac{9\operatorname{sen}2\theta}{4}+C$

Ejercicio 17

(II). 1. $\frac{2\tan\frac{3x}{2}}{3}-2\tan\frac{x}{2}+x+C$

3. $\frac{\cot^2(a-bx)}{2b}+\frac{\ln\operatorname{sen}(a-b)}{b}+x+C$

5. $\frac{\cot^2 z}{2}-\frac{\csc^4 z}{4}+C$

7. $2\ln\sec\theta+3\tan\theta+\frac{\tan^2\theta}{2}+C$

9. $-\frac{\cot^3\theta}{3}+\cot\theta+\theta+C$

11. $\frac{\tan^2 bt}{2b}+\frac{2\ln\sec bt}{b}-\frac{4\ln\operatorname{sen}bt}{b}-\frac{\cot^2 bt}{2b}+C$

13. $\frac{\sec^4(m+mx)}{4n}-\frac{\tan^2(m+nx)}{n}+\frac{\ln\sec(m+nx)}{n}+C$

15. $-\frac{\cot^3 2x}{6}+C$

17. $\tan x-\cot x+C$

EJERCICIO 18

(II). 1. $\tan x+2\ln\tan x-\cot x+C$

3. $4\tan\theta+\frac{2\tan^3\theta}{3}+\frac{\tan^5\theta}{5}-10\cot\theta-\cot^3\theta-\frac{2\cot^3\theta}{3}-\frac{\cot^5\theta}{5}-6\theta+C$

5. $\frac{19x}{8}+\frac{\operatorname{sen}2x}{4}+\frac{\operatorname{sen}4x}{32}+\tan x+\frac{\tan^3 x}{3}+C$

7. $\frac{\tan my}{m}+\frac{\tan^3 my}{3m}+C$

9. $\tan x+\tan^3 x+\frac{3\tan^5 x}{5}+\frac{\tan^7 x}{7}+C$

11. $\frac{\cot 6x}{6}-\frac{\cot^3 6x}{18}+C$

EJERCICIO 19

(II). 1. $\frac{\tan^2 x}{2}-\ln\cot x+C$

3. $\frac{\cot^3 t}{3}+C$

5. $\frac{2\csc^{\frac{5}{2}}\theta}{5}-\frac{2\csc^{\frac{9}{2}}\theta}{9}+C$

7. $-\frac{\cot^5 3y}{15}-\frac{\cot^7 3y}{21}+C$

9. $\csc^3\frac{x}{3}-\frac{3\csc^5\frac{x}{3}}{5}+C$

11. $\frac{\tan^5 x}{5}+C$

13. $-\frac{2\csc^{\frac{3}{2}}x}{3}-2\sqrt{\operatorname{sen}x}+C$

15. $\frac{\sec^7\theta}{7}-\frac{\sec^5\theta}{5}+C$

17. $-\frac{2\cot^{\frac{5}{2}}az}{5a}-\frac{2\cot^{\frac{7}{2}}az}{7a}+C$

19. $-2\sqrt{\csc x}+C$

21. $-\frac{\cot^6 2x}{12}+C$

Unidad 4

Ejercicio 20

(IV). 1. $y=\frac{11}{2}$

3. $y=\frac{784}{3}$

5. $A=\frac{8p^2}{3}$

7. $y=x\ln x-2x+2$

9. $x^2+y^2=25$

11. $\ln y=\ln\sqrt{x^2+4}+\ln 2-\ln\sqrt{5}$

13. $(3+y)^{\frac{3}{2}}=(2+x)^{\frac{3}{2}}+19$

15. $\frac{1}{y}+\ln x-\frac{1}{4}=0$

(V). 1. $s=\frac{t^3}{3}-\frac{1}{t}-\frac{157}{12}$

3. $v=-\frac{1}{t}-\frac{t^2}{2}+\frac{133}{6}$

5. $s=4\cos 2t+29.72t-32.72$

7. 28 m/s

11. 33.1°

13. *a*) $x=\frac{t^3}{3}-4t,\ y=2t^2$

b) $s=\frac{t^3}{3}+4t$

c) $72x^2-y^3+48y^2-576y=0$

Ejercicio 21

(III). 1. 26

3. 2

5. $\frac{a^2\pi}{4}$

7. 6

9. 0.468

11. $\frac{\sqrt{2}\pi}{8}$

13. 0.326

15. 0.468

17. 0.316

19. $\frac{116}{15}$

21. $\frac{814}{105}$

23. $-\frac{34}{9}$

25. $\frac{\pi}{4}$

27. $1-\frac{\pi}{4}$

29. 0

31. $-\frac{40}{7}$

33. $\frac{104}{5}$

35. -8

Ejercicio 22

(I). 1. 18

3. 64

5. 15.75

7. 4

9. $\frac{116}{15}$

11. 5.2732

13. $\frac{71}{3}$

15. $\frac{33}{5}$

17. 551.25

19. $\frac{1}{\sqrt{3}}(79°6'23'')$

(I). 1. $\frac{14}{3}$ 7. 20 13. $\frac{1}{6}$

3. $\frac{52}{3}$ 9. $\frac{81}{4}$ 15. 20

17. 8.1023

5. $\frac{4}{3}$ 11. $\frac{a^2}{4}$ 19. 0.1386

(III). 1. $\frac{75}{2}$ 5. $\frac{54}{4}+9\pi$ 9. $\frac{22}{3}$

3. $\frac{64}{3}$ 7. 1.0986 11. $a^2(e-e^{-1})$

(IV). 1. 4 5. 0 9. -1.8856

3. $-\frac{8}{\pi}$ 7. $\frac{\pi^2-4}{27}$

(V). 1. $\frac{3\pi a^2}{8}$ 3. 3π 5. 0.024

EJERCICIO 23

(I). 1. 23.7 5. 3.6824 9. 0.6091π

3. 172.1131 7. 0.8887π

(II). 1. 2.736 5. 35.68 9. 0.682

3. 19.85 7. 0.562

EJERCICIO 24

(I). 1. $\frac{16}{3}$ 7. 6π 13. $\frac{64}{15}$

3. 2π 9. 2.7 15. 64.8

5. 6.2383 11. 25.61

(II). 1. $\frac{4}{3}(\text{si } p=1)$ 5. 1.0735 (si $a=1$) 11. $37\frac{1}{3}$

3. $\sqrt{3}$ 7. 4 13. 9

9. $10\frac{2}{3}$

(III). 1. 4 2. $\frac{2}{\pi-2}$ 6. $\frac{32-3\pi}{3\pi}$

(IV). 1. 12.07 5. $15\frac{3}{4}$

EJERCICIO 25

(I). 1. *c*) $\frac{3}{8}\pi$

d) $\frac{9}{2}\pi$

e) 4

f) $\frac{\pi a^2}{4}$

g) $\frac{3}{4}\pi$

h) $\frac{9}{2}\pi$

2. $0.866a^2$

c) $\frac{\pi}{2}-1$

d) $\frac{5}{4}\pi$

3. $\frac{8}{3}a^2$

6. $\frac{a^2(2\pi-3\sqrt{3})}{2}$

f) $\frac{\pi+9-3\sqrt{3}}{2}$

g) $\frac{\pi}{3}+2-\sqrt{3}$

h) $\frac{5\pi}{4}-2$

9. *a*) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{\pi+3-3\sqrt{3}}{6}$

EJERCICIO 26

(I). 1. $\frac{128}{7}\pi$ 5. $\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e^{10}}\right)$

3. $\frac{\pi^2}{4}$ 7. $4\pi^2 a^3$

(II). 1. 2π 3. $\frac{64}{5}\pi$ 7. $\frac{4\pi a^2 b}{5}$

(III). 1. $\frac{16}{15}\pi$ 5. $\frac{\pi\sqrt{2}}{15}$

3. $\frac{8}{15}\pi\sqrt{2}$ 7. $\frac{\pi\sqrt{2}}{60}$

(IV). 1. 4 3. $6\pi^3 a^2$ 9. $\frac{4\pi a^2 b}{3}$

EJERCICIO 27

(I). 1. *a*) $\frac{32\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{16\pi}{3}$

c) $\frac{128}{3}$

d) $\frac{32}{3}$

3. $\frac{250}{3}$

5. $\frac{4}{3}$

11. *a*) $\frac{4t^2\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{4}{3}r^3$

c) $\frac{8}{3}r^3$

d) $\frac{8}{3}r^3$

e) $10\pi\, r^2$

13. $\frac{2a^3(3\pi+8)}{3}$

15. *a*) $\frac{1024}{3}$

b) 535.9

17. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$

(II). 1. $\frac{2}{9}\pi$

3. $\frac{\pi}{4}$

5. $\frac{14\pi}{45}$

EJERCICIO 28

(I). 3. $\left(\frac{12}{5},\frac{3}{2}\right)$

5. $\left(\frac{16}{15},\frac{64}{21}\right)$

(II). 1. $(1,1)$

3. $\left(\frac{5}{3}a,0\right)$

5. $\left(0,\frac{5}{3}\right)$

7. $(30°,45°)$

11. $\left(\frac{4\rho}{5m^2},\frac{\rho}{m}\right)$

25. *a*) $\bar{x}=\frac{3}{8}r$

b) $\bar{x}=\frac{2}{3}h$

(III). 1. *a*) $\frac{21}{44}$

EJERCICIO 29

(I). 1. $36\,\sigma$

3. $\frac{250}{3}\sigma$

5. $36\,\sigma$

(II). 1. 112.5 libras

3. 967.2 libras

5. 1800 kg

7. 3182 kg

9. 101 000 kg

11. 986 630.6 libras

13. $\frac{16}{3}\sigma$kg

15. a) 24 000 kg

b) 4 m

EJERCICIO 30

(I). 4. 2995.2π kgm

7. *a*) $5\,000\,000\,\pi$ kgm

ISBN 978-607-32-3063-6